数学辞海

MATHEMATICS DICTIONARY

第六卷

山西教育出版社
东南大学出版社
中国科学技术出版社

山西省人民政府资助出版

如果你有数学問題，
而不好意思发問，
你可从本書获得解答。

一九八八年八月書祝
数学辞海成功

陳省身



学习、研究、运用、发展数学，让中国数学赶上国际先进水平，促进社会主义现代化建设

吴大任

教学的进步和完美与国家的繁荣和富强是紧密相连的

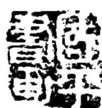
杨 一九八六、七、

長江納众水百折不回頭碧海能容物滔滔向海流

數學辭海出版紀念

李國平並書





《数学辞海》总编辑委员会

《数学辞海》第六卷编辑委员会

《数学辞海》第六卷各分支学科编辑委员会

序

当我们向着日益临近的21世纪走去的时候，一部巨著——《数学辞海》将要面世了。这是我国200余所高等院校、科研机构，数以千计的数学家、数学工作者共同劳动的结晶，是一件影响深远的大事。

还是在本世纪同上一世纪交接的1900年，希尔伯特就以23个数学问题作为送旧迎新的礼物，高瞻远瞩地指引着20世纪数学发展的若干重要进程。如今，20世纪的帷幕行将落下，我们惊喜地看到，在这百年间，数学已经发生了多么巨大的变化！人们对数学的认识更深刻了，数学的分支更多了，数学的广度和深度，都远远超出了本世纪初的预料。异军突起的新科学和新技术，诸如计算机科学、航天技术、生命工程、数字通信以及新能源的开发、新材料的应用等，无不需要数学，社会科学和人文科学的经济、教育、语言、考古等领域，也开始与数学结下不解之缘。所有这些学科在向数学索取的同时，也都在某一方面推动和改变着数学。数学已经发展成为内涵广泛的数学科学。数学是大自然的语言，又是人类社会生活中各种关系的高度概括。数学在现实世界中获取模型，扩大了自己的外延，同时展现了新的内涵、新的抽象。如果说古希腊和古代中国的数学只是涓涓细流，那么，今天之数学已经汇成了波流浸灌的长江大河。

一个人可以学贯中西，但无法懂得现代数学的方方面面，而社会变革的进程和新技术的浪潮却迫使人们学习和应用更多的数学。解决这个矛盾的办法之一，自然是编纂一部大型的数学工具书。《数学辞海》正是在这样的时代需求背景之下应运而生的。有了这种巨大的推动力量，它才能克服种种艰难曲折，从第一页稿纸，发展成为我们所见到的这部别具一格的鸿篇巨制。

为什么这本书能使作者们激动，愿意竭诚为之构筑，又能吸引读者，使之企足而待呢？这是由于数学自身的地位和价值，它在实践中的巨大作用和自身的美。

数学首先是人们生活和生产的工具。马克思非常赞同康德的这样一句话："一门科学，只有当它成功地应用数学时，才算达到了完善的地步。"事实上，数学被使用的程度，往往反映了一个国家、一个民族的科学进步和经济发展水平。很难设想，在一个低技术的国家，会产生高深的数学，而高技术的社会形态，必有与之相适应的数学水平。毫无疑问，在科学技术飞速发展的当今世界，对数学的需求将与日俱增。

其次，数学又是一种文化形态。古往今来，人们在数学这块沃土上耕耘，收获了许多硕果。这些美好的硕果，本身就是一首首动人的诗篇，闪耀着智慧的光芒。一般人都会欣赏艺术，然而，当一个人只要具有基础的数学知识，同样可以对一道经典的数学名题和某个优美的解法叹为观止。人们还概括了大量实际模型的抽象数学，通过形式推演，以得出

系统的理论，再应用到更广泛的总体上去。数学的这种以简驭繁的本领决定于它的高度概括性。正是由于概括，数学形成了包含各个学科的优美结构。数学的发展推动了自然结构观的发展，它有力地带动了其他学科，大大加速了人类文明史的进程。

数学的作用，还在于它有着独特的培育人的功能。数学是每个人必须学习的基础学科。从小学到中学，数学的学时最多，除了因为数学是一切科学的基础和工具之外，更因为数学有着独特的思维教育和智力开发的作用。数学的高度抽象、遵从逻辑规则和不断创新的特征，集中而突出地表现了人类思维的概括性、逻辑性和探索性。所以，学习数学对人才的培养是一种基本的思维训练，被称为“思想的体操”。

为了全面地反映古今中外的数学成果、体现数学的多种功能，本书既兼顾传统数学和现代数学，又兼顾抽象的基础数学和具体的应用数学。考虑到广大数学教育工作者的需求，本书还将初等数学和高等数学相对地进行了划分，并按习惯将某些分支学科集中列卷，此外还编纂了包含数学史与数学教育等分支学科的专卷，也系统地介绍了中国的古算。这样编纂的《数学辞海》将会充分地显示数学的工具意义、文化意义和教育意义。愿这部国人自编的《数学辞海》既能为国家经济建设服务，又能在民族文化建设中起到应有的作用。

《数学辞海》是改革开放的产物，又将为改革开放服务。人们或许没有想到，这部巨著竟出自民办的编写组织。编纂者来自大江南北、长城内外、海峡两岸，在历时 10 余年间，数百所大专院校、科研机构的千余名专家学者日夜辛劳、自愿奉献，在《数学辞海》中编织着自己的理想和愿望。社会各界积极赞助，有识之士慷慨捐赠，海外同胞亦纷纷来电来函表示支持，用他们的心意渲染着文化建设的宏图。在这个民办写作团体中，人们互相信任、互相支持、互相勉励，充满了成就事业的认同感、紧迫感。这一写作经验也清楚地说明：在共同的愿望下，民办科研也是一条坦途。这是《数学辞海》编写过程中给我们的一个十分有益的启示。

像一切事物一样，《数学辞海》还不会达到绝对完善的境界。相反，这部反映浩如烟海的数学知识，动员了如此巨大力量而编纂的大型著作，首次面世时，一定会有许多不足之处，例如整体结构、条目收集、词义诠释、词类归属等，都还会有需要进一步推敲、商榷的地方。数学是极为严谨的科学，《数学辞海》必将在众多专家的严谨尺度之下，逐版改进。我们今天为之高兴的是，将来可能成为传世之作的《数学辞海》已有了良好的雏形，我们准备将它作为迎接新世纪的礼物，奉献给关心它、需要它的广大读者。

程民德

1998 年 6 月

凡　例

一、编　排

1. 全书包括数学科学的100余个分支学科或专题项目，按照从初等数学到高等数学，从古典数学到现代数学，从理论数学到应用数学的原则，将整个数学科学划分为6卷编辑出版(参见《数学辞海》六卷本内容划分方案)。

2. 各卷正文均按数学知识的结构体系编排，同一分支学科(或同一专题项目)的条目相对集中，一般按知识本身的结构、层次、逻辑等关系确定其先后顺序，而数学史部分，如数学家、数学名著、数学期刊、数学团体等，则分别按其出生、出版、创刊、成立的年代先后顺序编排。

3. 各卷目录标题分为三级：一级标题为一个分支学科或一个知识门类。一级标题之下，则按知识构成设若干个二级标题。例如，第一卷中的“数学分析”为一级标题，下设六个二级标题——“实数理论”、“变量与函数”、“极限理论”、“微分学”、“积分学”和“无穷级数”；又如，第六卷中的“中国数学史”为一级标题，下设四个二级标题——“中国古代数学史”、“中国古代数学著作”、“中国古算名词术语”和“中国数学家”。三级标题为具体条目名称。

4. 同一卷中不同分支学科之间的内容有重复时，其知识主题一般地只在一处设条目；不同卷中的学科内容有重复时，其知识主题在各相关部分均设条目，但在释文内容上各有侧重。

二、条　目

1. 条目的标题一般为一个词，如“圆”、“群”、“环”、“函数”、“矩阵”、“向量”、“方程”等，也有的是一个词组，如“勾股定理”、“常微分方程的通解”、“哥德巴赫猜想”、“希尔伯特第6问题”等。

2. 条目设立的条件：1) 独立的知识主题或已形成的固定概念；2) 能够应用准确的、人们习惯和易于理解的词标引；3) 便于读者快速查阅。

3. 条目的分类：条目按其释文的长短分为五类：特长条目(3000字左右)、长条目(1000—3000字)、中条目(300—1000字)、短条目(300字以内)和参见条目。

4. 本书所收的数学名词术语，力求与“全国自然科学名词审定委员会”公布的《数学名词》(科学出版社，1993)保持一致。外国人名的中文译名，力求与《中国大百科全书·数学卷》和梁宗巨主编的《数学家传略词典》(山东教育出版社，1989)中的译名保持一致。未出现在上述著作中的外国人名的中文译名，则采用数学界的约定译名或用习惯译法译出的译名。

三、释　文

1. 本书条目的释文，以文字叙述为主，并采用规范化的现代汉语，力求科学、准确、简明、通俗，杜绝教材式语言和口语，释文开头不再重复条目的标题。

2. 释文开头一般要求破题，然后给出严格的数学定义，并尽量阐明该条目内容的历史沿革及其在本分支学科或知识门类中的地位、作用、发展趋势等，以增强释文的科学性和可读性。

3. 一词多义的释文，用①…②…③…分项叙述，某个条目的释文需由其他条目释文补充说明的，采

用“参见”的方式，被参见的条目标题需加引号，条目标题前加“参见”字样，并置于圆括号之内。

4. 对常见的异名同义词，只给出一种条目标题的释文，其余异名条目亦列入正文，但不再写释文，给出释文的条目标题加引号，条目标题前加“即”字样。例如：矢量(vector)即“向量”；全纯函数(holomorphic function)即“解析函数”；正则函数(regular function)即“解析函数”。

5. 每一个条目标题后，一般在圆括号内标注有对应的英文。凡外国人名(日本人除外)在条目的释文中第一次出现时，在其中文译名后的圆括号内标注有相应的外文原名的姓和名的首字母，并用逗号隔开。例如，欧几里得(Euclid)、牛顿(Newton,I.)、高斯(Gauss,C.F.)。同一外国人名在条目的释文中第二次出现时，不再标注外文。在日本人名、中国人名、中国古代数学史、中国古代数学著作、中国古算名词术语等条目标题后，一般在圆括号内标注汉语拼音。

6. 如果条目乙的基本定义已经完全包括在条目甲的释文之中，那么条目乙只作为“参见条目”保留，所参见的条目标题需加引号，并在条目标题前加“见”字样，而释文不再重复。例如，在条目“线性变换”的释文中，已给出“单位变换”、“恒等变换”和“零变换”的定义，则上述三个条目就作为“参见条目”予以保留，并分别表示为：单位变换(unit transformation)见“线性变换”；恒等变换(identity transformation)见“线性变换”；零变换(null transformation)见“线性变换”。

四、索　引

1. 本书每一卷正文之后，均附有三种索引，即条目笔画索引、条目音序索引和条目西文索引。索引中条目标题后面的数字，表示该条目在正文中的页码。

2. 在条目笔画索引中，以汉字起首的条目标题按第一字的笔画由少到多的顺序排列，若笔画数相同，则按 一(横)、丨(竖)、丿(撇)、丶(点)、乛(折)五种笔形顺序排列，其中，㇀(提)归为一(横)，亅(竖钩)归为丨(竖)，㇏(捺)归为丶(点)，各种笔形带钩或曲折的笔画(除竖钩“亅”外)归为 乛(折)。第一字相同的，则按第二个字的笔画数和起笔笔形的顺序排列，依次类推。

3. 在条目音序索引中，以汉字起首的条目标题按第一字的汉语拼音字母顺序排列，若第一字的声母、韵母相同，则按声调的阴平、阳平、上声、去声顺序排列。第一字相同的，则按第二个字的汉语拼音字母顺序排列，多音字按不同的拼音字母顺序排列，依此类推。

4. 在条目笔画索引和条目音序索引中，凡第一字为西文字母、数学符号、罗马数字和阿拉伯数字起首的条目标题，一律排在两种索引的最后。西文字母起首的条目标题分别按其字母的花体、大写、小写及字母本身的先后顺序排列；数学符号起首的条目标题按知识结构顺序排列；数字起首的条目标题按由小到大的顺序排列。若起首的字母、符号及数字相同时，仍按其后汉字的笔画或音序排列。

5. 在条目西文索引中，按条目标题的起首西文字母顺序排列；条目标题的西文缩写，按一个词排列。凡以数学符号、罗马数字和阿拉伯数字起首的条目标题，一律排在条目西文索引的最后。数学符号起首的条目标题按知识结构顺序排列；数字起首的条目标题按由小到大的顺序排列。若条目标题起首的字母、符号、数字相同时，则按第二个字母等的顺序排列，余此类推。没有西文译名的条目，未收进条目西文索引。

6. 在各卷索引之后，还附有本卷涉及到的中外人名译名对照表，以供读者查阅。

目 录

《数学辞海》六卷本内容划分方案

第一卷

数学
算术
初等代数
平面几何
平面三角
立体几何
球面几何
平面解析几何
空间解析几何
初等数论
高等代数
高等几何
数学分析
集合论
形式逻辑
布尔代数
概率论与统计学初步
数学符号表

第二卷

数学
组合学
线性与多重线性代数
群及其推广
李群与李代数
环与代数
模与同调代数
序与格
范畴论与代数 K 理论
域论与伽罗瓦理论
数论
代数几何
微分几何学
凸集几何与距离几何
一般拓扑学
代数拓扑学与流形拓扑学
奇点理论与突变理论
数学符号表

第三卷

数学
实变函数论
复变函数论
多复变函数论
测度论
泛函分析
变分法
函数逼近论
调和分析
流形上的分析
位势论
凸分析
非标准分析
小波分析
分形几何
常微分方程
偏微分方程
积分方程
动力系统
特殊函数
数学符号表

第四卷

数学
数学基础
数理逻辑
计算数学
概率论
随机过程
统计学
经济数学
生物数学
数学物理与理论物理
模糊数学
数学符号表

第五卷

数学
运筹学
系统理论
控制理论
通信与信息理论
画法几何与工程图学
计算机科学
数理语言学
力学
天文学
测绘学
数学符号表

第六卷

数学
中国数学史
外国数学史
数学符号史
数学团体与研究机构
数学竞赛与数学奖
数学期刊
数学教育
数学哲学
数学名题与猜想
珠算
数学发展史年表

第六卷条目目录

说明：该目录由本卷所属各分支学科或专题项目的全部条目（包括给出释文的条目及其参见条目）组成，按知识结构顺序编排，即按条目在正文中出现的先后顺序排列.

中国数学史

中国古代数学史

中国古代数学著作

中国古算名词术语

中国数学家

外 国 数 学 史

外国古代数学史

外国近现代数学史

外国数学名著

外国数学学派

外国数学家

数 学 符 号 史

数学团体与研究机构

国际性数学学术团体

中国数学学术团体

外国数学学术团体

中国数学研究机构

外国数学研究机构

数学竞赛与数学奖

数学竞赛

数学奖

数学期刊

中国数学期刊

外国数学期刊

数学教育

数学课程论

数学教学论

数学学习论

数学教育的研究方法

数学教育史

数 学 哲 学

数学名题与猜想

珠　算

算　盘

珠算基本概念

珠算加减法

珠算乘法

珠算除法

珠算定位法

珠算开方

珠算教育与三算教学

数学

数学(mathematics)　数学一词来自希腊文μαθηματιχη'，其字根μα'θημα意义为知识、科学，它非常恰当地反映这个领域的广泛性与普遍性.从历史上看，数学常常用其某个侧面来表示：中国古代用算学来强调其计算技术方面，而西方多用几何学一词代表数学，以显示欧几里得(Euclid)的《几何原本》传统，而实际上，其中也包括数论和量论的内容.随着时间的流逝，数学的内容不断地扩大，在17—18世纪直至19世纪，被包括在数学领域内的许多学科和分支已经独立出去，而在各学科的边界又不断创造和衍生出一系列新的学科，这些新学科现在已融合而成面向21世纪的庞大的数学科学领域，它是一个具有内在统一性的科学技术群.以下从四个方面进行论述：

1.数学的对象和特点.数学中最原始的对象是数与形.自然数已经是相当抽象的概念，它不仅要从一个苹果、一间房子、一堆沙土中抽象出数1来，而且还要由数1得出更一般数的概念.有了自然数的概念还会遇到基数和序数的矛盾.至于记数法和位值制都是中国对人类文明的伟大创造，这种伟大创造绝不仅仅是对自然界的认识和对哲学思辨的产物，它真正体现数学的成就.数学另一个原始对象是形，它更为直观，甚至长期以来人们也把它当成自然科学的对象，尽管柏拉图(Plato)早就说过，三角形属于理念的世界.当然现在数学的空间远远超出现实的空间，数学中的"形"也不限于人们感官能摸得着、看得见的东西，它是更抽象的概念，如高维空间、无穷集合、群、拓扑等是任何其他学科都不研究的对象.数学作为一门模式科学，应该归入更广泛的符号和形式科学类.这一类似乎应该介于哲学类与具体科学，即自然科学与社会科学之间.它的姊妹学科包括一般符号学、语言学、逻辑学、方法学以及还未成型的一般系统学.有意思的是，有些数学家也认为"数学是一种语言"、"数学可还原为逻辑"、"数学是一种普遍方法"等，这些说法尽管有些偏颇，但毕竟触到数学与自然科学的本质差别以及数学与符号科学的亲缘关系.数学的本质特征是：

1）数学是一种普遍语言.这种观点可以追溯到莱布尼茨(Leibniz，G.W.)，他首先提出科学与哲学的两大目标，其中第一个就是找出一种普遍文字，首先是一种符号及变元表示的符号语言.正如吉布斯(Gibbs，J.W.)所说的"数学是一种语言".吉布斯不仅是19世纪最伟大的统计热力学大师之一，而且也是向量分析的开创者及传播者.在19世纪90年代，英国著名的杂志《自然》上掀起的一场大辩论中，向量最终取代四元数而成为物理学普遍使用的概念.19世纪和20世纪之交，向量分析成为数学、物理学的有效工具，更确切地说，成为描述各种现象的语言.数学概念的产生及其符号化反映了数学的进步，算术运算的符号化及向符号代数过渡，几何学的代数化，微分、积分运算的符号化，函数的符号及行列式、矩阵、向量、张量等概念的符号化，复数的表示，算子演算以及符号逻辑等都是数学的重要进展.在这个意义下数学对象是一个符号集合.单纯的符号集合，正如裸的集合一样，没有结构，没有什么可说的，没有什么意思，而只有它具有形式结构(语法学)，有一定的解释(模型——语义学)，有一定变换、生成、操作、运用方式(语用学)，它才能变得丰富多彩起来.数学作为一种普遍语言有自己的特点，比起纯逻辑语言来有内涵的丰富性，而比起通常语言来有外延的确定性.数学不仅是一种语言，它还是一种精密语言.正因为如此，它常被称为精密科学.数学之所以精密，不单是因为其数量表示，还在于它越来越深入那些以前所无法表示的或非实在的概念，如瞬时速度、加速度、位势、熵、谱等.对于许多直观概念，也只有在数学上才能得到很好处理，如连续性、对称性、随机性乃至信息控制、策略、对策、决策等.数学还明确了一些对立的范畴，如有穷与无穷、连续与离散、局部与整体、确定与偶然等.还有重要的元概念：如结构、构造、存在、模型、等价等.这些语言越来越深入到科学乃至日常生活之中，使论述确切及精密.许多常用概念也只有在数学上得到澄清才算有深刻的认识.

2）数学是一种普遍方法.从古到今，对许多问题求出解答的过程中，人们或多或少产生一种方法的意识.而这种方法概念，又以数学中的算法概念为摹本.在这个意义下，数学充分显示其作为操作技术的特性.虽然精确的算法概念一直到20世纪30年代才有确切定义，但模糊的概念很早就有，而且也是数学追寻的主要目标之一.中国的数值运算及方程求解、欧几里得辗转相除法以及印度、阿拉伯的一些算法，都使人认识到算法是一种有限的指令，可以机械地运行，从而对一类问题得出确定的解答.许多几何作图问题以及求积问题也要求发现广义的"算法"来求解问题.笛卡儿(Descartes，R.)把算法推向普遍方法论的高度，他十分明确地考虑造出普遍方法

来解决科学问题，特别是数学问题，对此他称为普遍数学. 正是这种对方法的普遍考虑使他发明代数方法研究几何问题，从而创立解析几何学. 波利亚(Polya，G.)把笛卡儿的方案总结如下：

任意问题

$\xrightarrow{①}$ 数学问题

$\xrightarrow{②}$ 代数问题

$\xrightarrow{③}$ 解方程组 $\begin{cases} P_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) = 0, \\ P_n(X_1, X_2, \cdots, X_n) = 0 \end{cases}$

$\xrightarrow{④}$ 解方程 $P(x) = 0$，

其中第③，④步无非是数学，第②步并没有一般方法，第①步则困难更大. 莱布尼茨也把找出能求解任何数学问题的普遍算法列为他第二大目标. 笛卡儿在几何方面实现这个目标，而莱布尼茨则在逻辑上制定一个方案. 数学作为一种普遍方法，总是不断跨越已有的领域，深入到未知的世界中去，并且不断创造新的数学对象. 17—18 世纪，无穷及无穷小进入数学，把代数运算规则向无穷领域推广，这就导致数学分析的形式，并且构成方法上的大飞跃. 19 世纪由实分析向复分析过渡，再次加大分析方法的威力.

3）数学是一种普遍思想原则. 数学发展过程中由于不断一般化、不断抽象化造成自己的普遍思想原则. 对称性原则、不变性原则、守恒律三者统一是 1918 年诺特(Noether，(A.)E.)首先提出的，而群论方法在量子力学、原子-分子结构、核结构、基本粒子理论中的适用性也是外尔(Weyl，C. H. H.)首先得出的. 群论方法至今仍广泛应用在科学的各方面，而不仅仅是上述领域及固体物理. 数学中另一个重要原则是极值原则或变分原理，最早除了哲学的思辨之外，首先提出的是费马(Fermat，P. de)，这些原则也是其后许多物理理论的基础，如哈密顿原理.

4）数学是一种理性思维框架. 20 世纪之前，科学的支柱主要是理论和实验(包括观察和测量)，数学和计算包括在理论当中. 实际上，17 世纪的科学革命推动近代科学的产生，完全依赖于理性与经验的结合. 它们的哲学根源是笛卡儿的唯理主义与培根(Bacon，R.)的经验主义，他们也是近代哲学之父. 确切地讲，笛卡儿把认识论置于本体论之上，把哲学从神学的奴仆地位解放出来，成功地实行思想的解放，直接推动近代科学的产生，其中，理论概念、数学工具与观察实验结合在一起是牛顿(Newton，I.)科学革命的催生婆. 牛顿成就其伟业不仅在于他提出正确的理论概念(特别是力)，而且在于他提供了数学工具(微积分)及分析框架，尽管当时还是用欧几里得的几何系统. 其后科学的重大进步，理论概念及数学表述和计算的结合仍是不可缺少的一环. 第二次世界大战以后，计算机的发展与计算技术的进步使得科学计算与理论和实验鼎足而三，并列为科学的三大支柱. 近年来，由于数学的发展，从数学出发的理论越来越多地成为科学理论形成的始作俑者. 这特别表现在 1974 年，纤维丛理论成为规范场理论的标准表述. 其后越来越多的前沿数学领域进入物理学及其他科学领域，形成新兴理论框架，实际上数学已成为科学发展第四根支柱. 对于生命科学、心理科学、社会科学，这种现象早已不是新事物. 数理经济学以及对策论是这方面的最典型的例子.

2. 数学的分科及其主要问题. 数学不是一般意义上的自然科学或社会科学，它的对象及研究目标不像这些学科那样明确和集中. 从古到今，数学中所包含的对象、学科及分支变化多端. 中世纪除了算术及几何学之外，天文学及乐理也是数学的分支. 到 17 世纪，木工、石工、建筑、火器、占星术等都是数学的内容. 从那时起，静力学、动力学、光学、地图绘制法等仍然被看成大数学的一部分，尽管它们早已成为独立学科. 数学内容的庞杂也可以说是数学的一大特征了. 除此之外，许多基础的数学学科，它们的内容也有很大的改变，甚至于面目全非了. 经典代数学主要研究代数方程的求解，而经过几次变化，现代代数学主要研究代数结构. 这样一来，数学的统一尽管多次被提起，但是总难以概括全部数学. 因此，时至今日，数学仍然是具有多样性对象也具有多种目标的学科，尽管它们之间有着千丝万缕的联系. 人们把数学归结为相互关联的六大范畴，其中前三个可以说是数学的技术方面，后三个可以说是数学的理论方面.

1）操作技术. 大部分最早的数学问题属于解决“如何”的技术问题. 最初的问题包括计数、计算、测量、作图等方面，后来逐步形成特殊的及一般的数学问题. 在解决这些问题的过程中，形成了算法以及操作步骤的概念. 在计算过程中，形成了算术，特别是解数值代数方程的算法. 到近代，这推动符号代数学、求解代数方程的技术以及把这些技术推广到无穷算法以及代数综合方法的代数方法，从而形成无穷小演算及解析几何学. 其后各个数学分支也提出相应的算法问题，例如拓扑学中计算同调群、同伦群等. 从这个意义上讲，数学在本来意义上是一种计算技术，或更广一点讲是操作技术. 而研究这种技术的目标就是发明算法或解题的步骤，以求得问题的解决. 应该说，这是一种富有创造性的研究工作. 以计算为例，就是由精确计算到近似解析计算到数值计算到计算机软件，它一直是数学研究的重要内容. 除计算之外，还有测量、绘图、统计、运筹等操作，以及相应的和衍生的各种问题. 例如古典几何有许多几何作图问题，特别是用圆规、直尺的几何三大问题，

以及更一般的作图方法.为了解决这些问题,还要发明许多技术,如各种投影技术,它们至少在过去都属于大数学范围之内.在数学分析的范围内,级数求和、渐近展开、积分变换等都是高级的计算技术.

2)技术理论.对数学操作的对象,应该有些认识,其中包括表示问题、操作规则与规律问题、可计算性问题、无穷级数收敛与发散问题、收敛速度问题、方程可解性问题、逼近的程度及可能性问题、作图的可能性问题,特别是方法的评价问题等.这样就形成与操作技术有关但又高一层次的学科,如数值分析、误差理论、函数逼近论、丢番图逼近理论、可解性及稳定性理论等.

3)操作对象理论.它的目标不是指向对象本身,而是指向技术,指向求解的方法.例如丢番图方程论、代数方程论、代数方程组理论、常微分方程论、偏微分方程论、积分方程论等.它们涉及的不是单个方程,而是一类的对象,因此首要问题是分类问题.然后再对每一类研究解的数目、解的性质、根与系数的关系、某类解的存在性问题等,微分方程的定性理论也属于这一范畴.

以上三大范畴是解决"如何"的技术问题,而以下三大范畴才是解决"什么"的理论问题.

4)对象理论.理论是对确切定义的对象的性质、关系、刻画、分类等的研究.典型的数学理论有数论、函数论、算子论以及各种几何对象理论、过程理论等.以数论为例,重要的分支按对象分有整数论、代数数论、超越数论等.按方法分有初等数论、解析数论、概率数论等.按问题的性质分有型的算术理论、几何数论等,也包括数论中的丢番图方程理论.函数论与算子论一开始也是表示问题,特别是无穷级数及无穷乘积表示,然后是积分表示等,其次涉及值分布等可以说是计数问题,另外还有刻画及分类问题.几何图形有许多性质与关系方面的问题,如度量性质以及相交、属于等关系,也有刻画及分类问题.

5)结构理论.结构理论与对象理论之间并没有一条不可逾越的鸿沟,这样划分是因为结构理论必须建立在集合的基础之上.按照布尔巴基学派的观点,原始的结构可以划为三大类,研究它们各自的结构就形成结构数学的主要分支:① 代数结构:主要是群、环、域、模,它们分别构成群论、环论、域论、模论;② 序结构:主要是格,它们构成格论;③ 拓扑结构:主要是拓扑空间,它们构成一般拓扑学的研究对象.这些抽象的研究对象有两个来源:一是从过去研究的具体对象抽象化,特别是公理化而成,如群、域以及拓扑空间这些抽象结构衍生出来.新结构的产生有如下的几种途径:① 增减公理;② 复合结构;③ 多重结构;④ 混合结构.研究这些抽象对象的目标是搞清楚它们的结构并加以分类.所谓结构,就是元素(或它们的集合)和元素之间的关系.结构数学的主要问题大致可分为互相关联的四类问题:① 刻画问题;② 分类问题;③ 结构问题;④ 实现问题.

6)元理论.元数学理论是对数学本身进行反思的产物,长期属于哲学的范畴.它讨论数学概念、数学理论的合理性以及数学方法的合法性问题.19世纪末之前,对于数是什么以及非欧几何问题,特别是数学分析的严格性的争论均属于这个范畴.19世纪末,集合论的建立,现代公理方法的提出,符号逻辑的形成,以及关于数学基础问题的论战,最终导致作为一门数学分支的数理逻辑的形成.由于哥德尔(Gödel,K.)的工作,数理逻辑成为包括模型论、公理集合论、递归论和证明论(原始的和狭义的元数学)四大分支的数学领域,其后分别形成构造性数学和计算复杂性理论等新兴学科.除了以集合论为基础的现代数学之外,范畴论也成为一门元理论,在数学中有着有效的应用.

3.数学的发展和演化.数学的内容及范围随时间不同而不同,因此有言:"数学无非就是它的历史."数学史大致可如下分期:前史时期;古代及中世纪时期(从公元前4世纪到16世纪末);近代前期(17—18世纪);近代后期(19世纪);现代时期(20世纪).每一个时期的特点简要分析如下:

1)前史时期.前史时期的数学主要是民族数学或文化数学,在各种文化的发展过程中,各民族都或多或少掌握一些简单的数学技术,包括计数、计算、测量、土木建筑、绘图等,基本上属于实用技术.这些知识是零散的,而且反映出较大的文化差异.另外,也出现了神秘的占星术、数秘术、占卜术等,其中有个别涉及数学的内容,如二进制等.各种建筑上的对称图案以及正多面体的列举包含群的观念的萌芽.

2)古代及中世纪时期.数学经过长时期的发展之后,正式成为一门学科,其主要标志是:① 建立数的表示及计算方法;② 对于一些问题有较系统的方法.这使数学技术部分初步形成.而欧几里得《几何原本》的问世,则使理论数学有了一个原型.各国数学发展状况有所不同,古代数学的主要领域是算术与几何,希腊具有初等的数论及量论以及一些基本的几何问题及数论问题.这些问题对以后的数学发展有很大的影响,但不一定很重要,比较重要的数学是计算,特别是解方程.中国、印度、阿拉伯的数学,偏重于计算及实际问题的解决.

3)近代前期.近代数学诞生的标志是符号化的普遍算法的建立以及无穷进入数学.它一下子使建立在几何及算术上的算法登上了一个新台阶,不仅使它的应用范围大大扩大,成为发展科学技术的有力工具,而且也向理论提出一系列问题.这就导致

19世纪操作理论、操作对象理论、对象理论的产生，出现数学多样化和理论化的时代.17世纪符号代数、解析几何学及微积分的建立，虽然大大扩大了数学技术库，但是并没有改变数学主要是一门实用的计算及操作技术的状态.数学作为一门计算技术进步惊人，特别是微积分的完成，解决了许多天文、力学及物理学的问题.微积分本身只不过是一种更有效的演算方法，即所谓无穷小演算.接着是常微分方程及数学物理方程的出现，以及变分法的诞生，使数学工具更为有效.

4）近代后期.19世纪数学是近代数学的成熟时期，也是数学真正作为自为的理论科学产生的时期，但是伴随操作理论（如最小二乘法及误差理论、级数求和理论、函数逼近理论及丢番图逼近理论）、操作对象理论（如代数方程理论、常微分方程理论），数学技术本身也大有提高，特别是傅里叶展开、积分变换，尤其是复分析的建立.19世纪的数学可以说是数学对象化与多样化时期，一方面把数学由主要是操作技术转变为理论的时期，另一方面也为20世纪现代数学奠定了基础.这样，数学对象理论真正形成，数学成为一种自为的科学而不再仅是自然科学或技术的语言和工具了.

5）现代时期.20世纪的数学是从19世纪数学多样性时期趋于统一的时期，其统一的基础是集合论.一方面集合论之上产生了结构数学的庞大领域，另一方面集合论的基础问题产生了元数学.数学新对象的形成，产生结构的多样性，导致理论的多样性，并且19世纪末以前的四大范畴的数学仍有新的发展，加上新的应用数学、计算数学等领域，数学日趋专门化、多样化.但意想不到的是，从20世纪70年代起，各个领域之间新关系不断发现，新一轮的统一性正在形成之中.当代数学前沿的大多数学科是20世纪上半叶形成的，其中主要是抽象代数学（包括群论、环及代数理论、域论、格论、整体李群理论、代数群论、同调代数以及各种衍生结构）、一般拓扑学、测度和积分理论、泛函分析（包括线性拓扑空间理论、算子代数理论等）、组合及代数拓扑学、整体微分几何、多复变函数论、动力系统理论、随机过程理论等.对于19世纪开创的新领域——代数数论、代数几何学、黎曼几何学和局部李群理论，也在结构数学的框架中获得重大突破，成为当代数学的前沿.

20世纪后期形成的一些领域，如微分拓扑学、大范围分析、K理论、非交换几何等，也可在其中看到其萌芽.除了纯粹数学领域的扩大与深化之外，20世纪的应用数学和计算数学的面貌也发生了根本的改变.一方面数学应用的范围已从20世纪之前的经典力学、天文学与测地学以及数学物理等领域扩展到几乎所有自然科学、工程技术、社会科学、人文科学的分支，并越来越起着举足轻重的作用；另一方面，一批新的应用数学领域产生出来，成为具有相对独立的分支，构成大数学科学的组成部分.它们一方面与实际问题有密切的关系，另一方面它们也形成独立的数学研究方向，其中最典型的是19世纪末20世纪初形成的数理统计，它们同应用概率一起在近半个世纪已经成为与经典数学平起平坐的学科领域.另外一个数学领域——组合数学几乎与数学的历史一样悠久，但只是近半个多世纪才逐步成熟及独立.第二次世界大战之后，一些新的应用数学领域独立出来，特别是运筹学诸分支，后来纳入管理科学的学科群中.与工程技术密切相关的系统科学、控制理论与自动化科学、信息科学也得到空前的发展.

20世纪科学技术史中头等重要的事件是电子计算机的诞生.它对整个社会的冲击是怎么估计也不过分的.从计算机的设计制造到大规模应用，处处离不开数学，同时也开辟了新的数学领域.它们可以归纳成两大部分：一是计算机科学，它指未来计算机的发展；一是计算数学，它指计算机在科学计算和工程技术中的大规模计算.计算机的不断普及和改进对数学也造成不可忽视的影响.它给数学家提出一系列算法问题，并形成一套行之有效的算法，如单纯形方法及其种种改进，有限元方法及其衍生算法等，对算法的分析，如收敛速度、误差传播及稳定性等问题形成数值分析分支.近年来，计算机由数值运算过渡到符号运算，形成计算机代数重要分支，特别是吴文俊的机械化数学纲领在机器证明方面是一大突破.

4.数学的社会功能.数学是最古老的科学部门，它的诞生和发展反映人类文明的进步.数学从一开始就与社会实践活动密切相关，从计数、土地丈量、器物制造、产品分配，一直到商业贸易、宗教活动等都向数学提出问题，并要求逐步解决和方法逐渐进步，最后形成相对定型的数学方法和学科.从此，各种社会活动与数学的应用密不可分.随着社会的进步，特别是近代科学技术的进步和新兴产业日新月异，数学也越来越成为科学技术发展的基础.从17世纪到19世纪，数学与力学、天文学、物理学、大地测量学、航海术就密不可分，互相促进地平行发展着.对于机械工程、建筑工程设计、电机工程等技术领域的发展，数学也起着决定性的作用.20世纪数学科学的巨大发展，比以往任何时代都更加令人信服地确立了数学作为整个科学技术的基础地位.数学物理、数学化学、生物数学、数理经济学、数理地质学、数理语言学、数值天气预报、数学考古等一系列边缘学科的出现，表明数学的应用已突破传统的范围而向人类一切知识领域渗透.随着科学数值化趋势的增长，数学在提高全民素质，培养适应现代化需

要的各级人才方面还具有特殊的教育功能.数学科学,已成为推进人类文明的不可缺少的重要因素,数学正越来越直接地为人类生活与物质生产做出更大的贡献.数学应用具有以下特点:

1)纯粹数学几乎所有的分支都获得应用.在20世纪60年代,像拓扑学这样的抽象数学分支离实际应用似乎还很遥远,而今拓扑学(特别是扭结理论)已成为生物学中了解 *DNA* 结构的有效工具.在物理学中,拓扑不变量正在成为物理的量,正如一些群的不变量是物理的量一样.数论也曾被认为是最纯粹、最缺乏应用的数学分支,但如今数论方法在计算机科学、密码技术、卫星信号传输、p 进量子场论等许多方面发挥着重要的有时甚至是关键的作用,并通过与数值分析相结合开辟着更广的应用途径.事实上,仅就在理论物理中的应用而言,涉及的数学除了经典的分支与方法(如数学物理方程、傅氏分析、无穷维空间论、群论、概率统计等),还包括了微分拓扑、微分几何、大范围分析、代数几何、李群与李代数、算子代数、代数数论、非交换数学、非线性数学、计算数学等,几乎覆盖了核心数学的整个领域.

2)几乎所有的科技领域都在应用数学,并越来越多地应用更高深的数学.数学在力学、物理学中的应用是经受了历史考验的,而当今数学的应用则早已突破这一传统的范围,正在向包括从粒子物理到生命科学,从航空技术到地质勘探在内的一切科技领域进军.除了自然科学,经济学及过去认为不适用数学的社会学、历史学等社会科学领域,数学方法也都在崭露头角.随机分析应用于金融决策而引起的经济学理论的进展,提供了特别令人鼓舞的例证.与以往时代不同的是,数学在向外渗透过程中越来越多地与其他领域相结合而形成交叉学科.与数学有关的词大量出现在各门学科之前后,如"数学的"、"数理的"、"计量的"、"统计的"、"计算的"以及"……数学"、"……统计学"等.学科成熟的社会标志是学会、协会的建立,期刊与连续出版物的问世,以及课程的设置,专业会议的召开等.例如,《数学化学杂志》于20世纪80年代创刊,《数理经济学杂志》于20世纪70年代创刊,生物数学的期刊出现更早.次一级的学科如"数学分类学"的著作早在20世纪80年代就问世了.值得注意的是纯粹数学中的一些前沿与其他科学的许多前沿领域的快速结合,这反映了科技领域中数学渗透的空前深度.可以这样说,没有这些前沿数学就没有当代理论物理学的一些前沿领域,如超弦理论、超引力理论等.事实上,仅仅像弦理论这样的物理学热门分支所用到的数学,就涉及微分拓扑学、代数几何学、微分几何、群论与无穷维代数、复分析与黎曼曲面的模理论等.凝聚态物理中分类晶体结构中的"缺陷"以及液晶理论,都用到某些齐性空间中同伦群的计算,而这即使对代数拓扑学家来说也是极难的问题.数理经济学中一般均衡理论的建立、发展,也用到了微分拓扑学的基本定理与彻底的公理化方法.经济学家德布鲁因(de,Bruijn,N.G.)这方面的工作获得了诺贝尔奖.

3)数学在生产技术中的应用变得日趋直接.以往数学工具直接用于生产技术的例子虽有发生,但数学与生产技术的关系基本上是间接的.常常是先应用于其他科学,再由这些科学提供技术进步的基础.近半个世纪来,数学科学与生产技术的相互作用方式正在悄悄地改变,数学提供的工具直接影响和推动技术进步的频率正在加大,并在许多情况下产生巨大的经济效益.例如,以计算流体力学为基础的数值模拟已成为飞行器设计的有效工具,类似的数值模拟方法正被应用于许多技术部门以替代耗资巨大的试验;以调和分析为基础发展起来的小波分析直接应用于通信与石油勘探等广泛的技术领域,这在20年前是不能想象的;现代医学扫描技术(*CT* 扫描、核磁共振成像等)主要也是建立在拉东积分理论的基础之上,这方面的例子举不胜举.此外,现代大规模生产的管理决策、产品质量控制也密切依赖于数学中的线性规划算法(单纯形法与新兴的内点法)及统计方法.近年来,以数学建模为核心的工业数学成为一个蓬勃发展的应用数学领域也绝不是偶然的,产业部门的工程技术人员与数学工作者携手合作,解决影响甚至决定生产过程的形形色色的数学问题,反之,许多挑战性问题也刺激纯数学的发展.

4)数学在学科发展中的份额及力度越来越大.一些著名的数学家认为,数学是一种关键的、普遍适用的、赋予人以能力的技术.从某种意义上来讲,"高技术本质上是一种数学技术".对此,一般人还只在科学计算的层面来理解.而实际上,数学方法是不同于理论方法及计算方法的第四个普遍适用的方法和技术.这种情况从20世纪70年代以来已初露端倪,在21世纪将成为科学研究的重要组成部分,而且也许是最富创造性的部分,这特别表现在形成概念及理论框架方面.实际上,当前的动力系统的研究(分叉、吸引子)、孤立子、混沌等已成为许多领域的通用语言及工具,而更艰深的数学将在未来更为普及.

执　笔　胡作玄
审　阅　吴文俊　程民德　徐利治

数学史(history of mathematics)　数学的一个分支,是研究数学的产生、发展及其规律的学科.数学史既不同于数学、自然科学,也不同于一般的历史科学,而是数学、自然科学和历史科学之间的一个交叉学科.因此,数学史也是自然科学史的一个重要

分支.

数学史研究所使用的方法和所有的自然科学史一样,主要是历史科学的方法,在这一点上,它与通常的数学研究方法不同.它研究的对象是数学发展的历史,因此它与通常历史科学研究的对象又不相同.其研究的基本内容主要有以下三个方面:

1.研究数学发生和发展本身的特点,揭示数学发展的内在规律.

2.研究自然科学和社会因素(包括政治、经济和哲学思潮等)对数学发展的制约性,即促使数学发展的外在原因.

3.研究数学对自然科学和社会的反作用,预示数学未来的发展.

具体地说,它所研究的内容包括:总的学科发展史——数学史通史;数学各分支的分科史(包括细小分支的历史);不同国家、民族、地域的数学史及其比较;不同时期的断代数学史;数学家传记;数学概念、数学思想、数学方法产生和发展的历史;数学发展与其他科学、社会现象之间的关系;数学教育史;数学史文献学以及数学史研究的方法论问题等.数学史和数学研究的各个分支,和社会史与文化史的各个方面都有着密切的联系,这表明数学史具有多学科交叉与综合性强的性质.

人们研究数学的历史,由来甚早.古希腊的欧德莫斯(Eudemus,(R))写过一部几何学史和一部算术史,几何学史叙述了欧几里得(Euclid)之前的几何学状况,可惜均未能流传下来,只是在5世纪普罗克洛斯(Proclus)对欧几里得《几何原本》第一卷的注文中保留有《几何学史》一部分资料.7,8世纪以来,大量的希腊和印度数学著作在伊斯兰世界广泛流传和研究,12世纪时,这些著作的阿拉伯文译本和阿拉伯人自己写的数学书籍传入西欧.对这些著作的翻译既是当时的数学研究,也是对古典数学著作的整理和保存.此外,历代的一些传记作品和数学著作中,也都曾讲述到一些数学家的生平以及有关数学史的其他材料.

近代西欧各国的数学史研究,是从18世纪,由法国的蒙蒂克拉(Montucla,J.É.)、德国的克斯特纳(Kaestner,A.G.)等人同时开始,而以蒙蒂克拉1758年出版的《数学史》(1799—1802年又经拉朗德(Lalande,J.J.Le.F.de)增补)为代表.从19世纪末叶起,研究数学史的人开始增多,断代史和分科史的研究也逐步展开.到20世纪20—30年代,数学史才逐渐形成一门独立的学科.其主要标志是从大量的史料汇集,单纯的记述逐步走向理论化,建立起比较完整的体系.19世纪末叶以后的数学史研究可以分为下述几个方面:

1.通史研究.代表作可以举出德国的康托尔(Cantor,M.B.)的《数学史讲义》(4卷,1880—1908)以及英国的博尔(Ball,W.W.R.)《数学史概述》(1888、第4版1908)、美国的史密斯(Smith,D.E.)的《数学史》(2卷,1923—1925)、意大利的洛里亚(Loria,G.)的《数学史导论》(3卷,1929～1933)等人的著作.法国的布尔巴基学派也写了一部数学史收入《数学原理》丛书之中.以尤什克维奇(Юшкевич,А.П.)为代表的前苏联学者和以弥永昌吉、伊东俊太郎为代表的日本学者也都有多卷本数学通史出版.1972年,美国的克莱因(Kline,M.)所著《古今数学思想》一书,被认为是20世纪70年代以来的一部佳作.

2.古埃及和巴比伦数学史.把巴比伦楔形文字泥板算书和古埃及纸草书译成现代文字是很艰难的工作.查斯(Chace,A.B.)和阿奇博尔德(Archibald,R.C.)等人都译过纸草书,而诺伊格鲍尔(Neugebauer,O.)锲而不舍数十年对楔形文字泥板算书的研究则更为有名.他所著的《楔形文字数学史料诠释》(1935、1937)、《楔形文字数学书》(与萨克斯(Saks,S.)合著,1945)都是这方面的权威性著作,他的专著《古代的精密科学》(1951)一书,汇集了半个世纪以来关于古埃及和巴比伦数学史研究成果.范·德·瓦尔登(Van der Waerden,B.L.)的《科学的觉醒》(1950,1954)一书,则又加进古希腊数学史,成为古代世界数学史的权威性著作之一.

3.古希腊数学史.人们对古希腊数学史的研究远比近代数学史更为透彻.许多古希腊数学家的著作被译成现代文字,在这方面作出重要贡献的有海伯格(Heiberg,I.L.)、胡尔奇(Hultsch)、洛里亚、希思(Heath,T.L.)等人.海伯格整理出版了希腊文本的《阿基米德全集》(3卷)和《欧几里得全集》(8卷,前5卷就是《几何原本》,被认为是近代最标准的范本).希腊数学史的代表作还有洛里亚的《古希腊的精密科学》(1914)和希思的《希腊数学史》(1921),后者还将海伯格的希腊文《几何原本》译成英文,名为《欧几里得几何原本13卷》(1908年初版,1915年再版,1956年新版),这是现代《几何原本》标准的英译评注本,书中的注文可以看作是两千多年来研究《原本》的历史总结.从20世纪30年代起,著名的代数学家范·德·瓦尔登在古希腊数学史方面也作出突出成绩.20世纪60年代以来,匈牙利的萨博(Szabo,A.)的工作则更为突出,他从哲学史出发论述了欧几里得公理体系的起源.

4.中世纪数学史.由于语言学家和历史学家对中世纪数学不感兴趣,所以长期以来几乎没有人研究过它们.直到19世纪下半叶才有人开始对中世纪数学史进行系统研究.最初的研究者由于资料的缺乏,认为中世纪数学带有纯实用性质,中世纪的科学

家们的惟一贡献只是在保存和向欧洲传播希腊和部分印度的数学遗产.到了20世纪初,学者们则发现了大量资料,证明中世纪科学家数学著作的独创性,它们在许多方面为欧洲的数学科学奠定了基础.前苏联数学史家尤什克维奇对中世纪数学史的研究作出了重要的贡献,他的专著《中世纪数学史》(1961)概括了当时所能得到的关于中世纪数学史的完部资料.

5.近代史和分科史研究.德国数学家克莱因(Klein,(C.)F.)著的《19世纪数学发展史讲义》(1926—1927)一书,是断代体近现代数学史研究的开始,它成书于20世纪,但其中所反映的对数学的看法却大都是19世纪的.前苏联数学家柯尔莫哥罗夫(Колмогоров, А. Н.)和数学史家尤什克维奇主编的《19世纪的数学》(3卷,1978－1987),1978年,法国数学家迪厄多内(Dieudonné,J.)所写的《1700—1900数学史概论》是比较好的断代史著作.不过总的看来,断代体数学史专著并不多,但却有一些著名的论文,如德国数学家外尔(Weyl,(C.H.)H.)的《半个世纪的数学》等.对数学各分支的历史,从微积分学、代数学、几何学、数论、概率论,直到极限概念、积分概念、流形概念、希尔伯特23个数学问题的历史等,有多种专著出现,而且不乏名家手笔.许多著名数学家参与数学史,特别是近现代数学史和数学思想史的研究,使数学本身的创造与数学史创造有效地融合为一个有机整体,可能是基于庞加莱(Poineаré,(J.-)H.)的如下信念,即:“如果我们想要预见数学的将来,适当的途径是研究这门科学的历史和现状”.

6.历代数学家的传记以及他们的《全集》、《选集》的整理和出版.这是数学史研究的大量工作之一.由吉利斯皮(Gillispie,Ch.C.)主编的于1980年完成的16卷本《科学家传记辞典》中,拥有从古到今的950多位世界数学家的极其宝贵的传记史料.此外,还有多种《数学经典论著选读》出现,辑录了历代数学家成名之作的珍贵片断.以出版数学黄皮书及高质量数学专著而闻名的德国施普林格出版社,自1964年以来陆续出版了几十位著名数学家的著作集(全集或选集),是极有价值的工作.

7.专业性学术杂志.世界上最著名的科学史杂志是美国科学史学会主办的《爱雪斯》(季刊)和《奥赛力斯》(刊登长篇论文的不定期刊物),这两种期刊都刊登数学史的论文.早期出版的专门的数学史期刊,有德国数学史家康托尔(Cantor,M.B.)主编的《数学史杂志》(1877—1913,30卷)和意大利数学史家洛里亚主编的《数学史杂志》(1898—1922,21卷)等,而最著名的是德国恩内斯特勒姆(Eneström,G.)主编的《数学宝藏》(1884～1915,30卷);这些杂志均早已停刊.现代出版的有:《国际数学史杂志》(1974年创刊),是国际科学史协会数学史委员会的机关刊物;苏联数学史家雷布金(Рыбкин,Г. Ф.)和尤什克维奇主编的《数学史研究》(1948年创刊)以及日本数学会主编的《数学史研究》杂志等,都是国际数学史界最好的出版物.

中国虽是一个史学极其发达的国家,但数学史(包括科技史)长期以来却是一个很少涉及的领域.在漫长的封建社会里,只有一些包含在对古代科技史料记述中的数学史片段分散在各种史书中,并没有形成理论体系.比如在《汉书·律历志》和《隋书·律历志》中的“备数”条内就有对数学的作用和数学的历史的论述等.历代正史《列传》中,有时也给出了数学家的传记.正史的《经籍志》则记载有数学书目.在中国古算书的序、跋中,也常能发现数学史的内容,但都是一些零散的片断资料.对中国古代数学史进行较为系统的整理和研究,是在清代中晚期才开始进行的.主要是对古算书的整理和研究,以及编辑出版《畴人传》等.

利用现代数学概念,对中国数学史进行研究和整理,从而使中国数学史研究建立在现代科学方法之上的学科奠基人是李俨和钱宝琮.他们都是从五四运动前后起,开始搜集古算书,进行考订、整理和开展研究工作的.经过半个多世纪,李俨著有《中国算学史》(1937)、《中算史论丛》(1—5集,1954—1955)、《中国数学大纲》(1958)等;钱宝琮著有《中国算学史》(上,1932)、《中国数学史》(主编,1964)和由他校点的《算经十书》(1963)行世.在李、钱之后有严敦杰,他从1936年开始发表数学史论文,在对中国古代数学开展研究的当代学者中,他是成就卓著的一位.著名数学家吴文俊从20世纪70年代初即开始研究中国古代数学史,他的工作受到国际数学界的瞩目.

从19世纪中叶起,即有人(伟烈亚力(Wylie,A.)、赫思慎(Van He)等)用外文发表中国数学史方面的文章.20世纪初,日本人三上义夫的《中日数学之发展》,以及20世纪50年代李约瑟(Joseph,N.)在其巨著《中国科学技术史》(第三卷)中对中国数学史进行了全面的介绍.有一些中国的古典算书已经有日、英、法、俄、德等文字的译本.在英、美、日、新加坡、俄、法、比利时等国都有人直接利用中国古典文献进行中国数学史的研究,以及和其他国家及地区数学史的比较研究.目前,中国数学史在国际上引起越来越多的关注.

数学史的学术团体为建立数学史研究者之间的联系,组织数学史国际会议等均作出应有的贡献.

撰　稿　杜瑞芝　王　辉
审　阅　李　迪

中 国 数 学 史

中国古代数学史

中国数学史(history of mathematics in China) 数学史的重要分支之一.主要研究对象为数学成果、计算工具、数学家、数学思想以及它们产生的背景与发生的影响,以此为中心构成了本学科丰富的内容.研究目的在于探讨数学在中国的发展规律,提供借鉴,推动后来.中国数学史的断代与分期,目前尚无统一标准.一般说来,起自上古而止于1911年,其间以17世纪为界分为前后两大阶段.17世纪之前,主要表现为以筹算为中心的中国传统数学体系与算法的确立;17世纪之后,主要表现为以笔算为中心的西方数学的传入.进一步地,又可依其自身特征分为五个发展时期:

1.中国传统数学的萌芽时期(上古—东汉初,约公元前4000—公元25年);

2.中国传统数学体系的形成与发展时期(东汉初—五代,公元25—960年);

3.中国传统数学的繁荣时期(北宋—元初,公元960—1303年);

4.中国传统数学的低落时期(元初—明末,公元1303—1607年);

5.中西数学的合流时期(明末—清末,公元1607—1911年).

近年来,国内外对于本学科的研究取得了较大的进展,但仍有不少理论的和具体的问题需要进一步地探讨.

中国传统数学的萌芽(the rudiments of the traditional mathematics in China) 从上古至东汉初(约公元前4000—公元25年)为中国传统数学的萌芽时期.自新石器时代至夏、商、周,祖先对形和数已经有了较多的认识.春秋至西汉,古籍记载的数学知识逐渐增多.近年出土的西汉中期的《算数书》说明中国传统数学已经积累了丰富的知识.十进位值制的记数法和算筹的出现为此期数学的特征.

对形与数的早期认识.西安半坡遗址出土的约公元前4000年左右的各种陶器,反映出先民对立体形状已有一定的认识.陶器上的图案,诸如矩形、三角形等,则反映出对于平面图形的若干认识.陶器上刻有按三角形排列的圆点,第一层一,第二层二,直到末层八,其中的意义今已难以确知,但可反映出对于整数的认识已多于五,陶器上出现的刻画符号有|、‖等.与半坡约同时的姜寨出土的陶片中还出现了|||、—等.这些符号均与后世的筹码相类似.中国是世界上最早采用十进位值制的地区.甲骨文的数字已经构成了完整的十进制.商代甲骨文已有一至九这九个数目字,以及十、百、千、万等.表示多位数时,常用合文连同位值一同表出,如"八月辛亥允戋伐人 [illegible]",其中数字为2656.[illegible]表示二个千,[illegible]表示六个百,[illegible]表示五个十,[illegible]表示个位六.这与十进位值制的原则完全相符.古埃及亦曾采用十进制,但符号多于十个,不是位值制.算筹,又称策、算、筹、筹算、筹策、算子、枝、筳,是中国传统数学的主要计算工具.它的出现约在西周(公元前11世纪—公元前771年)、春秋战国(公元前770年—公元前221年)时期,应用已属普遍.20世纪50年代,长沙战国晚期墓有竹制算筹出土.据《逸周书》、《楚辞》、《方言》等书记载推测,早期的算筹尚无定制,树枝、竹枝、茅草之属皆可为筹.西汉(公元前204年—公元24年)时期,算筹已有定制.《汉书》律历志载:"其算法用竹,径一分,长六寸,二百七十一枚而成六觚,为一握."由《汉书》律历志、《数术记遗》、《隋书》律历志等记载来看,算筹的长度逐渐变短.从出土的战国、西汉、东汉算筹实物来看,均较时代与之相近的文献记载长度稍短.用算筹表示数字有纵横两式.

横式	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
纵式	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

据《孙子算经》、传本《夏侯阳算经》的记载,用算筹表示多位数时,从末位到首位须遵守纵横相间的原则,用空位表示零.例如,1860867记为

𝍠𝍰𝍥　𝍧𝍮𝍦

数学知识的积累.大约西周末期成书的《周易》记载的阳爻(—)、阴爻(— —)以及由此所得到的四象、八卦、六十四卦,与今之有重复排列的计算结果相同.从 m 个不同元素中每次取 n 个的有重复排列为 $P_m^n=m^n$.《周易》的结果是 $m=2,n=2,3,6$ 时的特例.春秋时期,简单的算术知识已属士人的常识.《韩诗外传》卷三载,齐桓公招贤,期年而士不至,因有人以"九九薄能"受到礼遇,遂使四方之士相导而至."九九"是古代的算术代称.由此可见春秋时期算术知识普及之一斑.战国时期,墨家学派提出的一些定义和命题在中国数学史上有重要意义.《墨子》经

上、经说上、经下、经说下等四篇与数学有关. 如,“平,同高也”(高度相等),“直,参也”(三点共线),“圆,一中同长也”(中心到圆周各点等距),“方,柱隅四讙也”(四个角皆为直角)等,均与今之几何学定义一致. 墨家的这些定义与命题对中国传统数学有一定影响. 1984 年,湖北江陵张家山西汉墓出土的简册本《算数书》是中国数学史上的重大发现. 据考证,该墓下葬时间在公元前 187 年至 157 年间. 简文共分六十余个小标题,其中包括“增减分”、“相乘”、“合分”、“经分”、“少广”、“方田”、“程禾”等. 从这些标题来看,其内容涉及到整数、分数四则运算、比例计算、面积计算等,其中的一些标题和题目还出现在稍后的《九章算术》中. 例如,少广条下:“广一步半步. 以一为二,半为一,同之三以为法. 即直二百卌步,亦以一为二,除如法得从步,为从百六十步. ”此与《九章算术》少广章第一题内容、数据相同,惟文字叙述不同.《算数书》与《九章算术》的关系究竟如何,尚待探讨.《周髀算经》是一部论述盖天说的著作,据考证约成书于公元前 100 年左右. 该书记载了勾股定理、比较复杂的分数计算、开平方计算及“日高术”. 后者对重差术的发展有重要影响. 从该书可以看到数学已经成为天文学的不可缺少的工具.

中国传统数学体系的形成与发展(the shape and development of the system of traditional mathematics in China) 从东汉初至五代(公元 25—960 年),中国传统数学体系逐步形成并得到发展. 经过长期的积累,至公元 1 世纪下半叶确立了中国传统数学的经典——《九章算术》. 该书的确立标志着以筹算为中心的中国传统数学体系业已形成. 其后的六七百年间,从赵爽、刘徽到李淳风,在算法、理论及应用诸方面均有不断的发展. 唐初李淳风奉敕注释十部算经,对此期的数学文献做了一次比较系统的整理. 各种筹算算法的确立为此期数学的特征.

中国传统数学体系的形成.《九章算术》九卷,共 246 题、202 术. 内容涉及算术、平面几何、立体几何、初等代数等分支. 该书突出成就在于代数方面,特别是开平方法、开立方法、多元一次方程组解法及正负数加减法则等,均属世界数学史上遥遥领先的成果. 开平方法与开立方法的原理相同. 首先估得初商,而后每求得方根的一位数之后便作减根变换,在减根变换后的方程中略去高次项,而仅以一次项系数除常数项得方根的下一位数. 由于《九章算术》开方法以方根的每位数而不以其位值一同入算,所以在方根的每位数求得之前一步要作倍根变换. 以开立方为例,其原理可用现代符号表示如下:若

$$f(x)=x^3-N=0\ (N>0),$$

a 为方根的第一次近似值,则方根的第二次近似值为

$$x=a-\frac{f(a)}{f'(a)}.$$

1600 年的韦达法,1690 年的 Newton - Raphson 法,其原理皆与《九章算术》法相同. 多元一次方程组解法,数学史上称之为直除法,与今之加减消元法原理相同. 相消过程中出现的正数与负数的加减运算依“正负术”进行. 此外,方程组的解法中还涉及正数与负数的相乘运算. 在欧洲数学史上,多元一次方程组解法于 1559 年由法国彪特(Buteo,J.)给出. 其时欧洲对负数尚缺乏认识,故其方法难称完善.《九章算术》以实用为标准将题目分为九类,每类之中算法相同的题目集中排列而后给出术文. 这种体例构成了中国传统数学体系的基本模式. 术文亦即算法,构成了该体系的主要部分,而作为算法基础的数学理论,则寓于算法之中. 新课题、新算法的不断出现使得该体系得到了不断的发展.

中国传统数学体系的发展. 三国时代吴国人赵爽《周髀算经》注中的“勾股圆方图注”与“日高图注”是勾股算法的重要发展.“勾股圆方图注”用出入相补原理给出勾股定理及六组勾股恒等式的严谨证明,其中包括二次方程正根的几何解法.“日高图注”

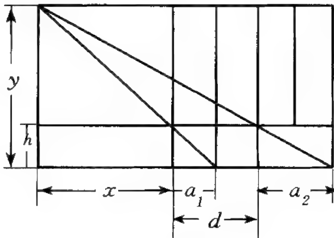


图 1

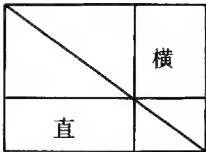


图 2

证明了“盖天说”的日高公式,如图 1. 设大地为平面,相距 d 立南、北两表各高 h,日中南影长 a_1,北影长 a_2,则日高

$$y=\frac{hd}{a_2-a_1}+h.$$

赵爽的证明依据如下的事实:勾中容横与股中容直二积相等,即图 2 中横积与直积相等. 13 世纪的杨辉称之为勾股旁要法.《九章算术》勾股章后八题属于旁要内容. 赵氏的证明奠定了由旁要术向重差术发展的基础. 刘徽《九章算术》注(263 年)与《海岛算经》对中国传统数学体系、算法做出卓越贡献. 刘徽《九章算术》注序称:“故枝条虽分而同本干者知发其一端而已. ”这种探本求源的治学态度与其注文中所体现的深刻数学观点一脉相承. 注文的贡献约分两点:

1. 对该书若干重要算法的正确性及其内在联系予以论证,使之建立在严谨的理论基础之上.

2. 给出若干富有创造性的算法,使该书内容得以丰富.

《九章算术》的方田、粟米、衰分、均输、盈不足、

方程诸章绝大多数问题是一次的，算法中涉及到一组成比例的量．例如，分数的分子与分母，衰分章的列衰，盈不足章的人数、出钱数与盈不足数，方程每行的数值等．对此，刘徽定义了“率”以概括这一类量．从而，上述各类问题的算法概括为率的变换与运算．方田章经分术刘注：“凡数相与者谓之率．率者，自相与通．有分则可散，分重叠则约也．等除法实，相与率也．”根据率的“自相与通”（或称“不失本数”、“不失本率”）性质，刘徽给出“齐同”的概念．所谓齐同是指将率作恒等变换使两个率基于同一比较标准．例如，方田章合分术刘注：“凡母互乘子谓之齐，群母相乘谓之同．同者，相与通同共一母也．齐者，子与母齐．势，不可失本数也．”盈不足章第四题刘注：“盈朒维乘两设者，欲为齐同之意．”方程术刘注：“先令右行上禾乘中行，为齐同之意．为齐同者，谓中行上禾亦乘右行也．从简易虽不言齐同，以齐同之意观之，其义然矣．”均输章第十题刘注：“凡率错互不通者皆积齐同用之．放此，虽四五转不异也．”相通的率便可进行“相并”、“今有”、“通计”、“直减”等各种运算．于是，散见于该书各章的分数运算、比例算法、盈不足以及方程诸算法皆统之于“率”．该书商功章给出的各种简单几何体的体积公式未予证明．刘徽注文给出刘徽原理、刘徽-祖暅原理，并对一些主要公式予以证明，从而使得该书中的体积算法系统化、严

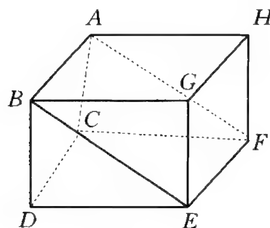


图 3

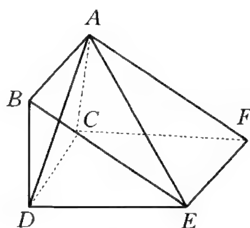


图 4

格化．对于多面体，刘徽以长方体（$V=abc$，图 3）、堑堵（$V=abc/2$，图 4，$ABCDEF$）、阳马（$V=abc/3$，图 4，$ACDEF$）、鳖臑（$V=abc/6$，图 4，$ABDE$）为基本几何体，其他各种或分割为或等积变形为这四种求积．对于圆柱、圆锥、圆台则作其外切正四棱柱、正四棱锥、正四棱台，由体积之比等于同一高度截面积之比——刘徽-祖暅原理得所求体积．至此，除球体积公式，简单几何体体积公式都得到证明．刘徽创造性算法的代表是割圆术与阳马术，建立了圆周率古典算法与体积算法的基础．割圆术由

$$S_{2n} < S_{圆} < S_n + (S_{2n} - S_n)$$

双边逼近圆面积，从而求得 π 的近似值，其中 S_n、S_{2n} 分别是圆内接正 n 边形面积、正 $2n$ 边形面积．刘徽设圆半径为 10（寸），反复应用勾股定理及正多边形面积公式求得

$$S_{96} = 313\,\frac{584}{625},\ S_{192} = 314\,\frac{64}{625}.$$

由此 $$314\,\frac{64}{625} < S_{圆} < 314\,\frac{169}{625}.$$

取 $S_{圆}=314$，得 $100\pi=314$，$\pi=175/50$．刘徽认为：“割之弥细，所失弥少．割之又割以至于不可割，则与圆合体而无所失矣．”阳马术给出刘徽原理：“阳马居二，鳖臑居一，不易之率也．”即图 4 中

$$V_{ACDEF} : V_{ABDE} = 2 : 1.$$

刘徽以正方体分割得到的阳马与鳖臑为例，证明这一结论成立，而后推广到一般．如图 5，$AC=CD=CF=2$（尺），过各棱中点 O、H、R 分别作平面垂直于该棱．于是阳马 $ACDEF$ 分割为一个正方体 $OJKNCHQR$，二个堑堵 $JKHQDP$、$NKRQFI$，二个阳马 $AOJKN$、$KQPEI$，鳖臑 $ABDE$ 分割为二个堑堵 $GBJLMK$、$JKLMDP$，二个鳖臑 $AGJK$、$KMPE$．从阳马 $ACDEF$ 中取出一个正方体，二个堑堵，即两个棱长为 1（尺）的正方体，从鳖臑 $ABDE$ 中取出二个堑堵，即一个棱长为 1（尺）的正方体．取出的体积之比为 2 : 1．剩余的体积仍依上述方法分割，取出的体积仍为 2 : 1．将这一过程继续进行下去，刘徽认为：“半之弥少，其余弥细．至细曰微，微则无形．由是言之，安取余哉．”在这一过程中，每次取出的体积属于阳马的与属于鳖臑的比始终是 2 : 1．由此，刘徽原理成立．

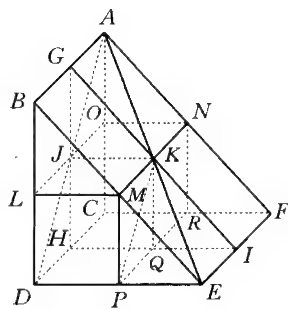


图 5

《海岛算经》根据勾股不失本率原理（相似勾股形对应边成比例）证明了重差公式（参见图 1）

$$x = \frac{a_1 d}{a_2 - a_1},\quad y = \frac{hd}{a_2 - a_1} + h,$$

并推广到“三望”、“四望”的情形，建立了系统的重差术．重差指表物距差 d，影长差 a_2-a_1．《孙子算经》三卷（约 400 年左右）、《张丘建算经》三卷（约 466—485 年）是《九章算术》之后较早出现的两部算经，其中某些算法有共同之处．《孙子算经》以其“物不知数”算法影响后世独深．该题相当于求解同余式组

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{3}, \\ x \equiv 3 \pmod{5}, \\ x \equiv 2 \pmod{7}. \end{cases}$$

算法给出 $x=70\times2+21\times3+15\times2-2\times105=23$．此题虽较简单，但算法具有明确的构造性，给出孙子定理的最初形式．后经秦九韶等人的发展成为一般算法．《张丘建算经》记载了丰富的等差数列算法，如

$$a_n=a_1+(n-1)d \quad （卷上第十八题），$$

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}\quad（卷上第二十三题），$$

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d\quad（卷下第二十四题）$$

等. 其中个别公式已见于《九章算术》刘注，而大部分属于新增. 该两书均涉及到最小公倍数的概念，并给出算法.《孙子算经》卷下第三十五题给出 $[3,4,5]=60$.《张丘建算经》还讨论了分数的"最小公倍数". 其卷上第十题给出

$$\left[\frac{325}{150},\frac{325}{120},\frac{325}{90}\right]=\frac{325}{(150,120,90)}=10\frac{5}{6}.$$

值得注意的是，两书关于最小公倍数的算法皆根据齐同的概念."二色差分"及其推广——"三色差分"是该两书，特别是《张丘建算经》独到之处. 已知甲物单价 α，乙物单价 $\beta(\alpha>\beta)$，又知共钱 M 买得共物 N，求甲、乙二物各若干. 这类问题通常称为二色差分.《孙子算经》卷下第三十一题给出这类问题的算法，《张丘建算经》卷中第十八题更明确表述为

$$甲物=\frac{M-N\beta}{\alpha-\beta},\quad 乙物=\frac{N\alpha-M}{\alpha-\beta}.$$

这一算法为后世常用. 百鸡问题是三色差分的最早记载. 该题相当于求解三元一次不定方程组

$$\begin{cases}x+y+z=100,\\ 5x+3y+\frac{1}{3}z=100.\end{cases}$$

《张丘建算经》所给答案正确，但所载术文不完全. 这促使后世学者不断探讨，遂形成内容丰富的各色差分及其算法. 由三色差分发展过程推测，《张丘建算经》本法可能是先设一物为若干，并算出对应的值钱数，将原题转化为二色差分求解. 继刘徽之后，祖冲之将 π 的精确度提高到一个新水平. 据《隋书》卷十六载，祖冲之给出

$$3.1415926<\pi<3.1415927,$$

并化为便于算筹表示的分数

$$\pi\approx\frac{355}{113}(密率),\quad \pi\approx\frac{22}{7}(约率).$$

这是当时世界上最精确的 π 的值. 直到 16 世纪，德国人奥托(Otto, V.)才求得密率. 在刘徽的基础上，祖暅根据"幂势既同则积不容异"这一原理成功地给出球体积算法. 刘徽在《九章算术》注文中指出球体积旧有算法误差过大. 他作正方体的两个内切圆柱使其轴线互相垂直，并称其相交部分为牟合方盖，进而指出正方体内切球体积与牟合方盖体积之比为 π 比 4，即 $V_球:V_盖=\pi:4$. 刘徽未能求出牟合方盖的体积，球体积只得付之阙疑. 祖暅取该立方体的一隅进行研究. 如图 6，立方体棱长为内切球半径 r. 祖暅指出，立方体减去它所包含的八分之一的牟合方盖，所余体积与一正方形底面边长为 r、高为 r 的倒立的阳马等积(积不容异)，即 $r^3/3$. 理由是两者在等高处

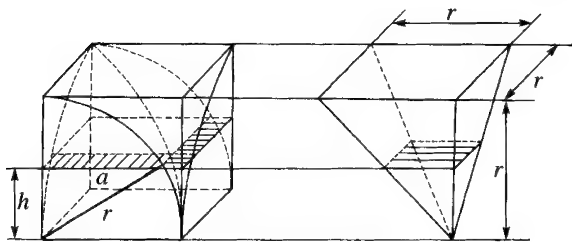


图 6

截面的比相等(幂势既同). 由此，八分之一牟合方盖的体积为 $2r^3/3$，即牟合方盖体积是 $16r^3/3$，进而由刘徽的比例式求得球体积为 $4\pi r^3/3$. 在中国数学史上，刘徽首先运用两等高几何体体积之比等于截面积之比这一原理，祖暅成功地运用这一原理给出球体积的算法. 在西方数学史上，这一原理的最初思想可以上溯到古希腊的德谟克利特(Democritus)，1635 年，由意大利卡瓦列里(Cavalieri, F. B.)明确提出. 王孝通《缉古算经》(7 世纪初)共 20 题. 主要讨论形如

$$x^3+px^2+qx=r\ (p>0,q\geqslant 0,r>0)$$

的三次方程的建立与解法. 该书以下列句型简要地指示这类方程的解法：以 r 为实，以 q 为方法，以 p 为廉法，从，开立方除之. 据此可以推测其解法的大致步骤.《九章算术》开立方术给出以 r 为实，开立方除之的步骤. 在此基础上，只需在"实"下依次布列"方法"和"廉法"两层，并在计算中注意到与开立方计算结果相"从"，即按位相加即可. 由于当时天元术尚未出现，而主要依赖几何方法建立方程，因此该书涉及到较多的体积算法与勾股恒等式，且颇有新意. 例如第 15 题，已知勾股乘积、勾弦差，求勾股形三边. 该书给出

$$a^3+\frac{c-a}{2}a^2=\frac{(ab)^2}{2(c-a)}.$$

这一算法至清初梅瑴成再次给出. 该书是中国古代第一本方程专著，它的出现标志着中国传统数学在方程建立与解法方面开始系统化. 中国传统数学经汉、唐数百年间的发展，积累了以十部算经为代表的丰富内容. 这十部算经是：《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《张丘建算经》、《五曹算经》、《五经算术》、《缉古算经》、《夏侯阳算经》以及《缀术》. 唐代国子监算学馆以李淳风注释的十部算经为主要教材. 今传本《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《张丘建算经》、《五经算术》皆有李注. 其中，《周髀算经》注释质量最好，其余四种似以帮助学生理解课文为主旨而于算理精义发挥不多. 十部算经由李淳风注释之后成为定本. 这是对前一段数学著作的一次系统整理，对后世数学的发展产生了深远的影响. 北宋元丰七年(1084 年)秘书省刊刻十部

算经时，《夏侯阳算经》、《缀术》已经失传，而以 8 世纪末唐代的一本算术书代前一种，实刻九部. 南宋鲍澣之翻刻时，又以《数术记遗》刻入，复得十部. 传本《夏侯阳算经》三卷实为唐代的一本算术书，与唐初李淳风注释本不同已如上述. 据该书内容及序言可知，作者可能是一位长期从事财会事务的人，根据多年积累的算题删繁就省括诸古法编纂而成. 书中涉及唐代中期经济史料较多且与正史记载相符. 例如，“杂令”系开元九年(721 年)制度，“赋役令”、“田令”系开元二十五年(737 年)制度，“依租变米”诸题系开元二十五年之“变造法”的反映，“公廨本钱”一题系开元十八年(730 年)至天宝八年(749 年)间制度，“两岁钱”系建中元年(780 年)制度，“垫陌五十”题与建中四年六月(783 年)至兴元二年正月(785 年)间施行的除陌法相符，故其成书不会早于 783 年. 该书记载了筹算乘除法的某些简化算法，反映出筹算乘除法三行布算向一行布算演变的趋势. 例如，乘数是 144 用“身外添四四”，除数是 12 用“身外减二”. 简化算法在宋代有进一步的发展，并对后来的珠算算法有重要影响.

中国传统数学的繁荣(the prosperity of the traditional mathematics in China)　从北宋初至元初(公元 960—1303 年)，中国传统数学呈现繁荣发展的局面. 诸多新的算法、新的课题在不很长的一个时期内相继出现，其中不少成果在世界数学史上遥遥领先，从而使得中国传统数学成为当时世界数学的高峰. 明确的计算程序性与较高的理论抽象性为此期数学的特征.

新算法的涌现. 11 世纪中期出现的贾宪三角形是新的开方法——增乘开方法的精练概括. 原图列至五乘方(相当于二项式六次幂展开式系数)，并附有如下的五句口诀：“左袤乃积数，右袤乃隅算，中藏者皆廉，以廉乘商方，命实而除之”. 前三句说明横行各数的名称：左边的 1 是被开方数系数 1，右边的 1 是隅算，中间诸数是各廉. 后两句则是增乘开方法步骤的概括. 和贾宪三角形一起，还有“增乘(开)方求廉法草”说明该三角形的构成法则. 其主要内容为：“列所开方数”，“以隅算一自下增入前位，至首位而止”. “复以隅算如前升增，递低一位求之”. 以开五乘方为例，列五位，另列隅算：

1　1　1　1　1　　　　1(隅算)

自隅算始依次向前递加至首位止：

6　5　4　3　2　　　　1

如此进行，每次低一位：

6　15　10　6　3　　　　1

6　15　20　10　4　　　　1

6　15　20　15　5　　　　1

6　15　20　15　6

此即开五乘方各廉. 这一算法容易推广为求任意给定的正整数次开方的廉. 这一算法也是对增乘开方法基本步骤的说明. 若每次先以上商乘以加数而后与前位相加，并在最后一次与实相减即为增乘开方法. 贾宪的增乘开平方法、增乘开立方法就是这种算法. 它们与《九章算术》开方法的原理相同，仅将分项计算的程序改进为随乘随加的连续计算的程序，使得开方运算成为一种简单算法的机械重复，即反复运用“倍根——估根——减根”的算法，求出方根的每位数. 正是由于这一特点，增乘开方法出现之后不久便推广为求解一般高次方程正根的方法.

约 11 世纪末出现的刘益《议古根源》在求解高次方程方面有重要贡献. 刘益之前，中国传统数学讨论的高次方程对系数均有所限制. 例如，三次方程

$$ax^3 + bx^2 + cx = d,$$

其中 $|a|=1, b, c, d>0$. 刘益所讨论的方程仅限制 $d>0$，其余各项可正可负. 刘益的正负开方术与求解一般高次方程正根的增乘开方法基本相同. 例如，刘益用益隅法与减从法求解

$$-x^2 + 60x = 864,$$

其中的减从法演算步骤基本上是“随乘随加”. 又如，求解

$$-5x^4 + 52x^3 + 12x^2 = 4096$$

的演算步骤完全是“随乘随加”.

秦九韶《数书九章》(1247 年)记载的正负开方术是在增乘开方法基础上产生的求解一般高次方程正根的方法. 秦九韶对方程系数的限制与刘益的论述基本相同，但所讨论的方程数量较多，难度较大，解法更加规范. 全书共有二十多个方程，其中包括一个十次方程. 秦九韶正负开方术只要自上而下依升幂排列方程各项系数并注意到初商的运算须与方程各系数相加，其余步骤均与贾宪增乘开方法相同.

1819 年的霍纳法与秦九韶法基本相同. 霍纳法没有倍根变换，又可由一次减根变换得到根的不止一位数，这与计算工具不同有关. 建立方程的一般方法——天元术出现于 13 世纪. 现有资料以李冶《测圆海镜》(1248 年)记载最早. 天元即未知数，用筹码“|”，并旁注“元”字表示：|元. 建立方程的步骤，先设所求数为“天元一”，根据已知条件建立两个等值的多项式，而后“相消”得到天元式亦即方程. 例如，图 1 所示筹式表示方程

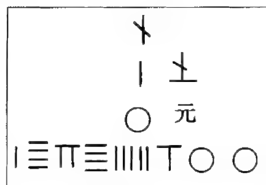


图 1

$$-x^3 - 16x^2 + 14745600 = 0.$$

天元术出现之前，建立方程主要依据几何方法，具有很大的局限性. 随着一般高次方程解法的出现，

建立方程的一般方法成为必需. 天元术的出现可能受到设未知数为1这一方法的启发.《九章算术》方程章"五家共井"题刘徽注，设井深为1而后求解，《张丘建算经》可能使用过设"最小公倍数"为1的方法. 这种方法的一般化可能是"立天元一"的一个来源.《数书九章》中的大衍总数术，亦即通常所说的孙子定理，是此期数学突出成就之一. 这一算法通常表述为下列定理：设 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 是 k 个两两互素的正整数，$M=m_1m_2\cdots m_k=m_iM_i$，则同余式组

$$\begin{cases} x \equiv R_1 (\mathrm{mod}\ m_1), \\ x \equiv R_2 (\mathrm{mod}\ m_2), \\ \quad \cdots\cdots \\ x \equiv R_k (\mathrm{mod}\ m_k) \end{cases}$$

的解是

$$x \equiv \sum^{k} M_i M'_i R_i (\mathrm{mod}\, M),$$

其中

$$M_i M'_i \equiv 1 (\mathrm{mod}\, m_i) \quad (i = 1, 2, \cdots, k).$$

这一算法由其最初形式发展为一般形式，秦九韶的贡献有如下两点：

1. 求定数法. 给出的 k 个模（问数）非两两互素时，秦氏设法将其化为两两互素（定数）.

2. 求一术. 正确地给出求 M'_i（乘率）的算法.

求一术第二点是秦氏的杰作. 高斯（Gauss. C. F.）在《算术探究》(1801)中给出这一定理. 朱熹、蔡元定分别在《周礼》郑玄注、司马迁《史记》律书基础上给出由三分损益法所得十二律长的十进分数值换算为九进小数值的算法. 他们的算法与现代的十进小数换算为九进小数的方法原理相同. 这一工作为明代朱载堉的工作奠定了基础. 此期的筹算简化算法有新的发展. 杨辉《算法通变本末》三卷(1274年)比较详细地介绍了这些方法，其中有加法代乘五法、减法代除四法、求一乘、求一除及归除口诀等. 朱世杰《算学启蒙》三卷(1299年)记载的归除口诀三十六句与今常用者已大体相同. 简化算法对珠算的产生与发展有重要影响.

新课题的涌现. 纵横图（今称幻方）及其构造规律是此期数学研究的新课题之一. 纵横图的出现可上溯至《周易》系辞传"天地之数"与《易纬乾凿度》"太乙九宫"这两段文字的郑玄注，宋代道家河图、洛书之说即本于此. 作为数学问题提出并研究其构造规律始自杨辉《续古摘奇算法》(1275年). 除河图、洛书之外，该书卷上又给出十三种纵横图：四四图、五五图、六六图、七七图、六十四图、九九图、百子图、聚五图、聚六图、聚八图、攒九图、八阵图、连环图，其中有些图给出易换术与求积术. 此后，王文素《算学宝鉴》(1524年)、程大位《算法统宗》(1592年)均载此项内容，至清保其寿《增补算法浑圆图》(1880年?)又发展为在正四面体、正方体及球面上布数. 这些内容现已成为组合数学研究课题. 阿拉伯和西方大约从14世纪开始此项研究. 会圆术及其应用是又一个新课题. 所谓会圆术是指圆径、弦、矢及所对弧长的近似算法，始见于沈括《梦溪笔谈》卷十八. 如图2，若

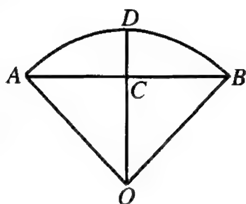


图 2

$$OA=OB=\frac{d}{2}=r,$$
$$AB=l, CD=v,$$
$$\overset{\frown}{ADB}=a,$$

则

$$l=2\sqrt{r^2-(r-v)^2},$$
$$a=l+\frac{2v^2}{d}.$$

元代王恂、郭守敬编制《授时历》(1280年)，运用会圆术求得球大圆的弧长. 如图3，点 O 为天球中心，A 为春分点，D 为夏至点，$\overset{\frown}{ABC}$ 为赤道象限弧，$\overset{\frown}{AED}$ 为黄道象限弧，$\overset{\frown}{NEB}$ 为赤经弧，点 E 为太阳所在位置. 已知 $\overset{\frown}{DC}$（黄赤大距即黄赤交角）、$\overset{\frown}{ED}$（黄道度即黄经余弧），求 $\overset{\frown}{EB}$（赤道内外度即赤纬）、$\overset{\frown}{BC}$（赤道积度即赤经余弧）.《授时历》在勾股形 OGD、OKE、OFE、OMB 所在圆内运用会圆术并结合四次方程解法、相似勾股形对应边的比例式得到 $\overset{\frown}{EB}$ 与 $\overset{\frown}{BC}$. 这一算法与球面直角三角形的解法殊途同归. 计算中用到 $EF=KL$、$EK=FL$ 符合正投影原理. 梅文鼎据《授时历草》所撰《明史》历志、《堑堵测量》所载"郭太史本法"均有天球的"侧视之图"、"平视之图"，将上述球面问题转化为平面问题计算. 今传各图未能尽合"长对正、宽相等、高平齐"的正投影法则当系图形摹刻失真所致. 质言之，王恂等人已经掌握天球二视图的画法.

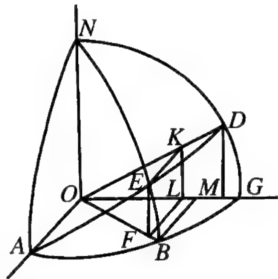


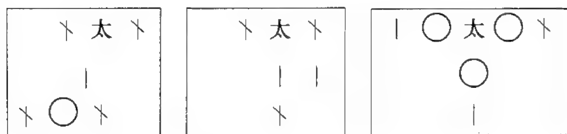
图 3

朱世杰《四元玉鉴》(1303年)记载的四元术是在天元术基础上产生的一个新课题. 四元术相当于四元高次方程组的表示、建立及解法. 四元的名称是天、地、人、物，常数项仍称为太. 若以 x、y、z、w，代

之，则四元式各项位置略如下图所示：

	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
…	w^2y^2	w^2y	w^2	w^2z	w^2z^2	…
…	wy^2	wy	w	wz	wz^2	…
			□			
…	y^2	y	太	z	z^2	…
		□	□			
…	xy^2	xy	x	xz	xz^2	…
		□				
…	x^2y^2	x^2y	x^2	x^2z	x^2z^2	…
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

其中，四个空格的位置用以放置某些交叉项. 例如



表示方程组

$$\begin{cases} -xy^2-y+xyz-x-z=0, \\ -y+x-x^2-z+xz=0, \\ y^2+x^2-z^2=0. \end{cases}$$

其解法的关键是四元相消. 朱世杰将其分为“剔而消之”、“互隐通分相消”、“内外相乘相消”三步. 尽管这三步的名称各异、演算步骤不尽相同，然而其原理与现在的代入法并无不同. 西方数学关于消元法的一般论述始见于法国贝祖(Bézout,É.)《代数方程的一般理论》(1779 年).《四元玉鉴》中的垛积术与招差术是另一新的课题. 中国传统数学将级数依其几何意义称为垛积. 垛积术包括两方面的内容：对给定的垛，由项数求和；对给定的垛，由和求项数. 垛积术的萌芽可上溯至《九章算术》商功章刍童术，刍童是长方台形的草垛，刍童术用以计算该草垛的体积，是时尚未计及草垛的草束总数. 沈括《梦溪笔谈》卷十八记载隙积术指出，以刍童体积值代替垛积总数失之于少，另行给出垛积求和公式，是为垛积术之创始. 朱世杰的贡献在于将垛积术建立在贾宪三角形基础之上，利用该三角形的规律计算垛积的和数，从而开创了以贾宪三角形为基础构造各类垛积的一般方法及其求和法. 朱世杰主要讨论两类垛积. 三角垛

$$\sum_{1}^{n}\frac{1}{p!}r(r+1)\cdots(r+p-1)$$

$$=\frac{1}{(p+1)!}n(n+1)\cdots(n+p),$$

其中 $p=1,2,3,\cdots$，分别对应贾宪三角形从左至右第 2,3,4,…斜行. 四角垛

$$\sum_{1}^{n}\frac{1}{p!}r(r+1)\cdots(r+p-2)(2r+p-2)$$

$$=\frac{1}{(p+1)!}n(n+1)\cdots(n+p-1)(2n+p-1).$$

朱世杰的招差术是垛积求和的通法. 朱氏给出三阶等差级数的和

$$f(r)=r\Delta^1+\frac{1}{2!}(r-1)r\Delta^2$$

$$+\frac{1}{3!}(r-2)(r-1)r\Delta^3$$

$$+\frac{1}{4!}(r-3)(r-2)(r-1)r\Delta^4,$$

此即四次插值公式. 朱氏指出该公式的构造是“各差乘各积，四位并之.”依此不难写出一般的插值公式. 插值法在西方数学史上由布里格斯(Briggs,H.)《对数算术》(1624 年)引入；格雷里果(Gregory,J.)于 1670 年给出公式；牛顿(Newton,I.)在《原理》卷三(1687 年)、《微分法》(1711 年)中给出粗略的证明.

中国传统数学的低落(the lowtide of the traditional mathematics in China)　从元初至明末(公元 1303—1607 年)，中国传统数学呈现低落状态. 所谓低落状态是指以筹算为中心的算法未能达到前一时期的水平而数学发展的重点转向日用算法的普及. 这一趋势导致珠算的产生与发展. 珠算(包括算盘与算法)的产生与发展，就其本身而言，是中国传统数学向前发展的一种表现. 然而，此期数学的整体水平明显低于前一时期，则是一个显然的事实. 至于低落的原因乃是数学史界讨论中的一个问题. 诸如道学的影响、八股取士对数学发展的阻碍等都是已经指出的因素.“筹珠交替”为此期数学的特征.

传统数学的研究. 从《透帘细草》、《算法全能集》、《详明算法》、《丁巨算法》(1355 年)及《通原算法》(1372 年)等书可以看到元初至明初数学发展的一些情况.《透帘细草》作者及年代无考，今存 71 题(知不足斋丛书本 54 题，《永乐大典》17 题). 该书中开立方题后载：“旧草冗繁，今以透帘开之.”据此，“透帘”二字当有简明之意. 玄览堂本《算法全能集》二卷，题“长沙贾亨季通类编”，与传本《详明算法》相比较，该书少“田亩纽粮”一节，多“开平方”一节，多“田亩丈量”节开平方一题，其余内容基本相同. 该书文字比较精审，板刻有元初风格.《详明算法》二卷，今传洪武癸丑(1373 年)庐陵李氏明经堂刊本及据以排印的朝鲜铜活字本，卷首有安止斋序. 据此序称：“旧本极为详明，访求之久，不复可得”，“以所闻如旧法分上下二卷尽其说”. 卷下末称：“凡不切于初学者不及□载.”由此可知，今传本当系旧本的改编本. 又据程大位“算经源流”，《详明算法》为“元儒安止斋何平子作”，今传本无“何平子”三字. 据此，程大位所见本与今传本不同. 这两种《详明算法》的祖本可能是上述的《算法全能集》.《丁巨算法》原本八卷，今存 89 题(知不足斋丛书本 62 题、《永乐大典》27

题).严恭《通原算法》今存64题(参见于《永乐大典》).上述各书主要是日常应用的计算问题,浅显易明.其中的简化算法、开平方法与开立方法的记载对研究筹算向珠算的转变有参考价值.除此之外,还有一些数学内容散见它书.如赵友钦《革象新书》卷下“勾股测天”节、“乾象周髀”节、舒天民《六艺纲目》卷下“数集纲目”节分别介绍勾股测量、割圆、《九章算术》大意,并无创新.明代中叶数学发展的情形有所好转.吴敬《九章详注比类算法大全》十卷首一卷(1450年),王文素《新集通证古今算学宝鉴》四十一卷首一卷(1524年)、周述学《神道大编历宗算会》十五卷(1558年)可为此期传统数学的代表.与元初至明初算书相比较,这些著作的卷帙较大,内容广泛.不足之处是,缺乏新意,甚至对宋元时期一些难度较大的算法存在误解.例如,吴敬的著作,卷首介绍算学预备知识及各种常用算法,卷一至卷九诸卷各分为“古问”、“比类”、“诗词”三部分.其中“古问”多摘自杨辉《详解九章算法》相应各卷内容,“比类”为新收的同类题目,“诗词”为歌括体的算题及解法.卷十专列各色开方问题.该书对天元术有误解,不用增乘开方法.顾应祥《勾股算术》二卷(1533年)、《弧矢算术》不分卷(1552年)及《测圆算术》四卷(1553年)是明代中叶比较重要的算书.其中,第一种论勾股定理与勾股恒等式,第二种论沈括以来的弧矢算法,第三种论李冶勾股容圆问题.顾氏虽未能正确理解天元术,而上列三书却体例分明间有心得.

珠算的产生与发展.此处所说的珠算是指与今之面貌大体相同的算盘与算法,即具备下列两个条件的珠算:比较成熟的算盘结构,可用于这种算盘的算法.珠算是数学普及、筹算简化的产物.关于珠算产生的年代,目前尚无一致的意见.依上述珠算的意义,它的产生当在宋—元初.近年发现,元至大三年(1310年)王振鹏“乾坤一担图”绘有一个有档、有梁、有珠的算盘.这是一个确凿的算盘图.另一方面,《算学启蒙》(1299年)中对于可用于算盘的筹算留头乘口诀、归除口诀已有详细记载,对于撞归、起一算法也有所反映.《算法全能集》、《详明算法》明载撞归、起一名词及撞归口诀(一归除外).然而,珠算取代筹算成为主要的计算工具至明代中叶方才完成.现传最早的珠算书是徐心鲁《盘珠算法》二卷(1573年).该书介绍的珠算知识包括“隶首上诀”、“退法要诀”、“归除总诀”,算例中用到撞归诀、起一诀.柯尚迁《数学通轨》(1578年)分为“学算须知”、“归除诠要”、“九章释例”、“九章总义”四节.第一节的“九九上法语”、“九九退法语”、“习九九总念歌”、“九归总歌法语”、“撞归法语”、“还原法语”与今之珠算加减乘除及撞归、起一口诀基本相同,这是珠算口诀最早的全面记载.朱载堉在发明十二平均律的过程中用珠算进行了大量的计算并给出了一些新的算法.《算学新说》(1584年)首载珠算归除开平方法与经过简化的珠算商除开立方法.朱氏说“平方不用商除、立方不显廉法之类,旧则繁而新则简.”这说明上述两法是他的创新.《律学新说》(1584年)、《律吕精义》(1596年)记载了十进小数与九进小数的换算法.这一算法的基本思想如下.设有十进小数 $0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$,九进小数 $(0.\beta_1\beta_2\cdots\beta_k)_9$.如已知十进小数求九进小数,由

$$0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=\beta_1 9^{-1}+\beta_2 9^{-2}+\cdots+\beta_k 9^{-k}$$

两边累次乘9;如已知九进小数求十进小数,由

$$0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=(\beta_1+(\beta_2+\cdots(\beta_{k-1}+\beta_k\div 9)\div 9\cdots)\div 9)\div 9$$

逐项计算 $\beta_k\div 9$,$(\beta_{k-1}+\beta_k\div 9)\div 9$,…直至除到 β_1.如此便可由已知小数求得未知小数.这一算法在算盘上进行非常简便,而其原理则与现代算法相同.这一算法是珠算史上也是中国数学史上的重要成果.程大位《算法统宗》十七卷及首一卷(1592年)是珠算的代表作,也是中国数学史上的重要著作.该书以《九章算术》为算学正宗,以广泛的收罗统之于《九章算术》的体例,又冠以珠算知识附以难题杂法,内容详备,流传广泛.仅就珠算而言,详载加法、减法、留头乘、归除、撞归、起一等算法口诀,又载归除开平方、新增归除开立方、开三乘方、带从平方、带从立方、带从三乘方等各项算法.至此,珠算的各种口诀与算法已大体完善.该书有不少内容取自《杨辉算法》以及顾应祥《勾股算术》、《弧矢算术》等书,一些内容又为后来的《同文算指》、《数理精蕴》等书所引用.该书版本很多,至今尚无确切的统计.该书对明清数学,以及日本的和算都有较大的影响.入清以后,在改善珠算的计算速度及训练方法方面有较好的研究.直至今日,珠算在实际应用及思维训练方面仍有重要作用.

中西数学的合流(the confluence of Chinese and Western mathematics) 从明末至民国元年(公元1607—1912年),西方数学的传入与研究为此期中国数学的主流,传统数学的整理与研究也是此期不可忽视的一个方面.西方数学译著、编著的大量出现,在许多方面补充了中国传统数学的不足.在此基础上,中国数学家独立获得的若干重要成果则充实发展了传入的知识.乾嘉以降,中国传统数学的整理与研究成就显著.在整理的基础上作出的若干新成果已属变量数学的范围.这一事实说明,中国传统数学按其自身规律可以进入变量数学的阶段.总之,上述两方面的工作成为现代数学发展的预备.此期数学史的一个基本问题是,正确理解西方数学的传入与外国入侵的关系.这一问题涉及面很广,认识也有不断深化的必要,此处不可能给出深入的讨论.应当指出的是,传教

士的东来归根到底为资本主义的原始积累所推动，而文化侵略、教育侵略是帝国主义侵略的组成部分. 笔算数学的确立为此期数学的特征.

西方数学的第一次传入及其研究. 此次传人的数学知识主要有几何、笔算、三角与对数表. 除后者之外，大体相当于欧洲15世纪至16世纪的数学知识.

1607年，《几何原本》前六卷译成汉文为西方数学传入中国之始. 该书译者是徐光启、利玛窦(Ricci, M.)，所据底本为德国克拉维乌斯(Clavius, C.)注释本(1574年). 前六卷主要内容为平面几何. 各卷所论述的内容依次为：三角形、线、圆、圆内外形、比例、线面之比例.《圜容较义》(1608年)，李之藻、利玛窦译，介绍周长或面积一定时围成的面积或体积的最大值. 该书所据底本不详，但其渊源出自古希腊帕普斯(Pappus)《数学大集》(卷五)则无疑问.《同文算指》前编二卷，通编八卷(1613年)，李之藻、利玛窦编译，所据底本为克拉维乌斯编写的教科书《实用算术概论》(1583年)，同时吸收杨辉《田亩比类乘除捷法》(1275年)、程大位《算法统宗》及顾应祥《勾股算术》等书若干内容. 通编目录中凡注明补若干或俱补字样者皆为克氏原本所无. 该书是第一部介绍西方笔算的著作. 前编主要包括四则运算. 通编主要包括比例、盈不足术、一次方程组、开平方、开带从平方、开立方、开多乘方等. 该书算式用汉文数目字表示. 分数记法是分母在上分子在下.《崇祯历书》一百三十七卷(1629—1634年)，其中数学著作主要有邓玉函(Terrenz, J.)编译《大测》二卷(1631年)、罗雅谷(Rho, J.)编译《测量全义》十卷(1631年).《大测》所据底本不详，主要介绍三角函数表造法、三角函数性质及用表法.《测量全义》系据玛金尼(Magini, G. A.)《平面三角》(1604年)、《球面三角》(1609年)、克拉维乌斯《实用几何》(1611年)、第谷(Tycho Brahe,)《天文学》(1602年)等书编译，其中介绍了平面三角、球面三角的部分公式、圆锥曲线以及五种正多面体的有关知识. 薛凤祚的《历学会通》包括数学著作《比例对数表》(1653年)、《比例四线新表》及《三角算法》(1653年). 各书系据穆尼阁(Smogolenski, J.-N.)所授撰成，其中前两种分别为对数表与三角函数对数表，是为对数传入中国之始. 后一种主要介绍球面三角知识，可补《测量全义》之不足. 尽管传人的知识并不系统，然而经过中国数学家的整理、发展却产生了较大的影响. 当时研究西方数学者不乏其人，而学兼中西成就显著者当首推梅文鼎. 按《梅氏丛书辑要》统计，梅文鼎所著算书共十三种四十卷. 其中包括笔算、筹算(中国式纳皮尔筹)、度算(比例规)、几何、平面三角、球面三角，以及少广、方程、勾股等. 梅氏著作以《几何补编》四卷(1692年)、《环中黍尺》五卷(1700年)、《堑堵测量》二卷(约1703年)堪称富有创见.《几何补编》对五种正多面体的体积、互容作了全面的研究，并给出两种半正多面体的作图法和性质. 其中以理分中末线(黄金分割)给出正十二面体、正二十面体的作图法，具有简明实用的特点. 以正二十面体为例，设正方体棱长为 l，则其正二十面体棱长为

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}l,$$

且三组相对的棱分别位于正方体三组相对侧面的中心线上.《环中黍尺》在《测量全义》卷七斜投影法之外，另创球面的正投影法，并用以证明球面三角形的余弦定理、积化和差公式以及图解球面斜三角形等，解球面斜三角形分六种情况讨论. 在精确度要求不高的情形下，其作图法具有实用价值.

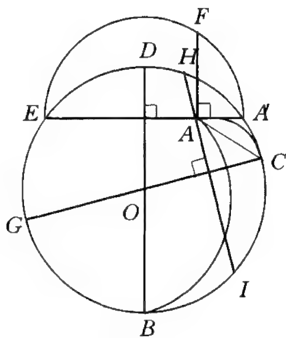


图 1

例如，已知 a、c、B，求 b. 如图1，求解球面三角形 ABC 的 AC 边. 在圆周上任取点 B，作直径 BD. 取

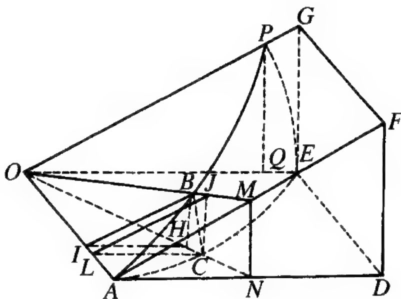


图 2

$\overset{\frown}{BC}=a$，作直径 CG. 取 $\overset{\frown}{BA'}=c$，作 $A'E\perp BD$. 以 $A'E$ 为直径作半圆，取 $\overset{\frown}{A'F}$ 等于角 B 为圆心角所对弧长. 作 $FA\perp A'E$，垂足为 A. 过 A 作 $HI\perp CG$. $\overset{\frown}{CH}=b$ 为所求.《堑堵测量》灵活运用中国传统数学的堑堵、鳖臑的性质及西方数学的平面三角知识给出赤经、黄经及赤纬间的关系，改进了《授时历》球面大圆弧长算法. 梅氏作天球的外切方正方体并用黄道所在平面斜截，又以赤道所在平面截之，取春分点、夏至点所在的部分，得如图2堑堵 GA. 图中，ACB 是球面直角三角形，$Rt.\triangle ADF \backsim Rt.\triangle ANM$，$Rt.\triangle LCJ \backsim Rt.\triangle ADF$，$Rt.\triangle IHB \backsim Rt.\triangle OQP$，$Rt.\triangle OAM \backsim Rt.\triangle OLJ$. 由这些相似直角三角形可得赤经、黄经、赤纬、黄赤大距间的四个关系式. 例

如，设天球半径为1，由上述第一个相似关系有

$$\frac{AD}{AF}=\frac{AN}{AM},$$

即

$$\frac{1}{\sec A}=\frac{\tan b}{\tan c},$$

或即

$$\cos A=\tan b\cot c.$$

西方数学的第二次传入及其研究. 此次传入的内容主要有代数、对数、幂级数展开式及视图画法，属于西方17世纪数学的范围. 在康熙皇帝支持下由梅瑴成等编纂的《数理精蕴》五十三卷（1722年），总结了自1690年之后传入中国的以代数和对数为主的西方数学知识，同时还包括中国传统数学的一些研究成果. 全书分为上编五卷、下编四十卷，附数学用表四种八卷. 该书有关的底本大体如下：上编卷二至卷四为“几何原本”三卷，卷五为“算法原本”一卷，系张诚（Gerbillon，J. F.）、白晋（Bouvet，J.）根据《几何原本》、阿基米德（Archimedes）《圆柱圆球书》等编写. 其最初形式为满文《几何原本》七卷，后译为汉文《几何原本》七卷附《算法原本》一卷，又整理为《几何原本》十二卷附《算法原本》二卷，是为《数理精蕴》相应部分的底本. 下编卷三十一至卷三十六介绍韦达（Viéte，F.）代数学知识，其中卷三十三高次方程正根求法出自韦达《有效的数值解法》（1600年）. 附表“对数阐微”系据佩尔（Pell，J.）1—100000素因数表（1668年）翻印. “对数表”据布里格斯开创、弗拉克（Vlacq，A.）完成的1—100000的十位对数表（1628年）翻印. 该书下编卷十六“由本弧通弦求其三分之一弧通弦”的方法与下编卷三十八求对数的方法，对清代幂级数展开式研究有重要影响. 如图3，BC为本弧通弦l，$AB=AD=CD$为三分之一弧通弦$l_{1/3}$，圆半径为r. 作$AF/\!/OD$，容易证明

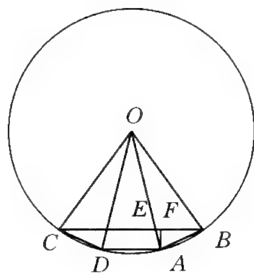


图 3

$$\triangle OAB\backsim\triangle BAE\backsim\triangle AEF,$$

$$\frac{OA}{AB}=\frac{AB}{AE}=\frac{AE}{EF},$$

$$AE=\frac{l_{1/3}^2}{r},\quad EF=\frac{l_{1/3}^3}{r^2}.$$

又

$$BC=3AB-EF,$$

故

$$l=3l_{1/3}-\frac{l_{1/3}^3}{r^2}.$$

由此可得$l_{1/3}$，其中OA、AB、AE、EF称为连比例四率，故此法又称为连比例四率法. 该书介绍三种对数求法，其中主要的一种称为递次开方法. 该法给出

$$\lg a=2^nM(\sqrt[2^n]{a}-1),$$

$M=\lg e$称为对数根. 依此，将$a>0$开平方若干次可得$\lg a$. 此外，杜德美（Jartoux，P.）传入格雷果里的$\sin x$、$\operatorname{vers} x$展开式（1667年）及牛顿（Newton，I.）的π展开式（1676年），郎世宁（Castiglione，J.）传入的画法几何知识均为此期传入的重要内容. 在此基础上，中国数学家进行了深入的研究，推广其方法，做出许多重要的成果. 年希尧《视学》（1729年）是在传入的画法之上完成的一部画法几何著作. 该书介绍中心投影与正投影法，引入画法几何术语，所给各图亦皆精审. 其成书年代较蒙日（Monge，G.）《画法几何》（1799年）早70年. 三角函数、对数函数的幂级数展开式是18至19世纪中国数学家主要研究方向之一. 明安图《割圆密率捷法》四卷（1774年）在杜氏传入的三式之外又创六式，并以连比例四率法为基本工具一一予以推导. 上述九式可分为由弧求弦矢及由弦矢求弧两组. 记l为弦，$2a$为所对弧，明氏给出弧弦互求的两式为：

$$l=(2a)-\frac{(2a)^3}{4\cdot 3!r^2}+\frac{(2a)^5}{4^2\cdot 5!r^4}-\cdots;$$

$$2a=l+\frac{1^2\cdot l^3}{4\cdot 3!r^2}+\frac{1^2\cdot 3^2\cdot l^5}{4^2\cdot 5!r^4}+\cdots.$$

该书是中国第一部系统论述弦矢与弧互求的著作，对后来三角函数展开式的研究有重要影响. 董祐诚《割圆连比例术图解》三卷（1819年）论明氏九式的“立法之原”. 该书以连比例四率法与垛积术为基本工具给出弦与倍分弦互求二式，矢与倍分矢互求二式，将九式归结为四式，从而深刻地揭示了九式的由来及其相互关系. 特别是垛积术的运用使展开式各系数的推导呈现明确的规律性，这是该书精华所在. 项名达《象数一原》六卷（1843年）将董氏四式进一步精确化得下列二式：

$$l_n=\frac{n}{m}l_m+\frac{n(m^2-n^2)}{3!4m^3}\cdot\frac{l_m^3}{r^2}+\frac{n(m^2-n^2)(9m^2-n^2)}{5!4^2m^5}\cdot\frac{l_m^5}{r^4}+\cdots;$$

$$b_n=\frac{n^2}{2!m^2}(2b_m)+\frac{n^2(m^2-n^2)}{4!m^4}\cdot\frac{(2b_m)^2}{r}+\frac{n^2(m^2-n^2)(4m^2-n^2)}{6!m^6}\cdot\frac{(2b_m)^3}{r^2}+\cdots,$$

其中，$m=1$时为董氏弦矢求倍弦矢二式，$n=1$时为董氏弦矢求分弦矢二式. 该书对明氏九式的立法之原予以严谨的阐述，从而将三角函数的幂级数展开式建立在明确的极限思想之上. 此外，《象数一原》还给出椭圆求周公式

$$p=2\pi a\left(1-\frac{1^2}{2^2}e^2-\frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}e^4-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}e^6-\cdots\right),$$

其中$e^2=(a^2-b^2)/a^2$. 戴煦《求表捷术》四种九卷

（1845—1852 年），鉴于《数理精蕴》递次开方求对数法及造表法之计算量浩大，创立指数为任意实数的二项式展开式、对数展开式、三角函数的对数展开式以及自然对数与常用对数的换算关系，从而把清初以来传入的对数知识提高到新的水平．戴氏的主要结果如下：

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}+\cdots,$$

其中，$|x|<1$，α 为任意实数；

$$\lg(1+x)=M\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots\right),$$

$$\lg\sec\alpha=M\left(\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{2\alpha^4}{4!}+\frac{16\alpha^6}{6!}+\frac{272\alpha^8}{8!}+\cdots\right),$$

其中，$|x|<1$，$0<\alpha<\pi/4$，$M=\lg e$．

戴煦引入假设对数即今之自然对数的概念及其与常用对数的关系

$$\lg(1+x)=\frac{\ln(1+x)}{\ln 10}.$$

依此，戴氏给出具有 65 个数的自然对数表框架，这是当时世界数学史上的先进成果．徐有壬《割圆八线缀术》四卷（吴嘉善述草，1862 年；左潜补草，1873 年）是明安图以来三角函数幂级数展开式研究的比较系统的总结．该书新增八线互求十二术，大小八线互求十八术．例如，切求弦式

$$r\sin\alpha=r\tan\alpha-\frac{1\cdot(r\tan\alpha)^3}{2r^2}+\frac{1\cdot 3(r\tan\alpha)^5}{2\cdot 4r^4}-\cdots.$$

又如，小切求大弦式

$$r\sin n\alpha=n(r\tan\alpha)-\frac{(n^2+2)n(r\tan\alpha)^3}{3!\ r^2}+\frac{(n^4+20n^2+24)n(r\tan\alpha)^5}{5!\ r^4}-\cdots.$$

徐有壬创立的“缀术”——一种半符号性质的幂级数表示法——使得幂级数的推导得以简化．在此期间研究幂级数比较重要的著作还有邹伯奇《乘方捷法》三卷、夏鸾翔《洞方术图解》二卷（1857 年），以及左潜《缀术释戴》（1873 年）、《缀术释明》（1873 年）．

中国传统数学的整理与研究．18 至 19 世纪，在研究西方数学的同时，中国传统数学的整理与研究也获得了显著的成就．整理工作始于 1774 年．是年，戴震作为《四库全书》纂修官由《永乐大典》辑得《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《五曹算经》及《夏侯阳算经》等五种算书，稍后又辑得《周髀算经》、《五经算术》，另以汲古阁影宋本《张丘建算经》、《缉古算经》、明刊本《数术记遗》为底本列入《四库全书》，使汉唐间的十部算经恢复到南宋翻刻本的规模．与此同时，孔继涵得汲古阁影宋本算书七种，不足部分借用戴校本合为十书，并以戴震校订的文字为据刻为微波榭本《算经十书》．《数书九章》、《测圆海镜》与《益古演段》亦列入《四库全书》．嘉庆初年，阮元获《四元玉鉴》抄本．鲍廷博《知不足斋丛书》（1814 年）刻入由《永乐大典》辑得《透帘细草》残卷、《丁巨算法》残卷．1839 年，罗士琳获朝鲜重刊本《算学启蒙》三卷．郁松年《宜稼堂丛书》（1842 年）刻入《详解九章算法》残卷附《纂类》、《杨辉算法》．至此，宋元间重要算书大体复显于世，其中有些尚不止一种版本．随着古算书的重现，校释工作也取得显著的进展．戴震校勘由《永乐大典》辑出的《九章算术》等七种算书、李潢《九章算术细草图说》九卷及《海岛经细草图说》不分卷（1820 年）、《缉古算经考注》二卷（1832）、沈钦裴《四元玉鉴细草》三卷（抄本，1829 年）、罗士琳《四元玉鉴细草》三卷（1834 年）（抄本，1844）、戴煦《四元玉鉴细草》三卷首一卷、宋景昌《数书九章札记》四卷（1842 年）等均为此期古算书校释的杰作．整理工作推动了研究工作，其主要表现为传统算法的推陈出新．焦循《加减乘除释》八卷（1798 年）阐述中国传统数学的算法满足加法的交换律、结合律、乘法的交换律、结合律以及乘法对加法的分配律，试图从基础上说明中国传统数学算法的合理性．汪莱《衡斋算学》第二册（1798 年）、第五册（1801 年）、第七册（1805 年）论方程正根的存在性．第二册指出，已知勾股积、勾弦和，求勾股弦各若干，常有两解．例如，勾股积 210，勾弦和 49，有勾股弦 20，21，29 和 12，35，37 两解．继而第五册、第七册指出，二次、三次、四次方程分别可有二、三、四个正根，又以算例说明方程

$$x^n-px^m+q=0\ (p,q>0),$$

有正根的充分必要条件是

$$q\leqslant\left(\frac{mp}{n}\right)^{\frac{m}{n-m}}\frac{(n-m)p}{n}.$$

汪氏的上述工作结束了中国传统数学解方程只求一个正根的习惯作法．此外，汪氏在组合算法、p 进制（$2\leqslant p\leqslant 10$）算法等方面也获得重要成果．

李锐《开方说》三卷（黎应南补卷下，1819 年）在汪莱的基础上对方程论做了进一步的研究，其中讨论了正根个数与系数序列变号次数的关系，所得结论与笛卡儿符号律一致；又讨论了实根个数与方程次数的关系，所得结论相当于实根个数等于方程的次数或次数减去一个偶数．此外还讨论了倍根变换、负根、重根等内容．李氏的工作对中国传统数学的方程论做了理论上的充实，使之形成了比较系统的领域．《方圆阐幽》不分卷（1845 年）、《垛积比类》四卷（1859 年？）是李善兰的代表作．《方圆阐幽》在垛积术和中国传统的极限思想的基础上创立了尖锥术．李氏的尖锥有空间的和平面的两种，并且空间的可以变为平面的．平面尖锥可依给定的算法求其面积．

平面尖锥又可组成合积，依合积的面积与性质可解决与曲边形有关的问题. 用现代符号表示，李氏的平面尖锥相当于如图 4 的曲边三角形，亦即相当于幂函数

$$f(x)=\left(\frac{a}{h}\right)^{p}x^{p}.$$

李氏给出尖锥求积公式为

$$S=\frac{a^{p}h}{p+1},$$

相当于

$$\int_{0}^{h}\left(\frac{a}{h}\right)^{p}x^{p}\mathrm{d}x=\frac{a^{p}h}{p+1}.$$

利用尖锥概念及其求积公式，李氏给出

$$\pi=4-4\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\cdot\frac{1}{9}+\cdots\right).$$

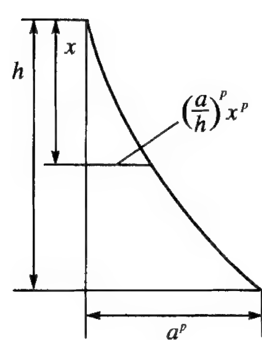


图 4

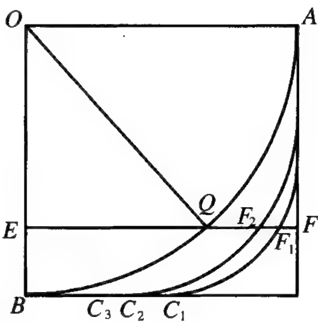


图 5

图 5是单位圆及其外切正方形的四分之一. 李氏指出，曲边三角形 ABC 为尖锥合积. 它由无穷个 $2n$ 乘 ($n=1,2,3,\cdots$) 尖锥组成. 诸尖锥有公共高等于 1，底分别为

$$\frac{1}{2},\frac{1}{2\cdot4},\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6},\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8},\cdots,$$

依尖锥面积公式可得诸尖锥合积. 由此可得四分之一单位圆面积. 此外，李氏还用尖锥术导出三角函数、反三角函数及对数函数展开式. 李氏的尖锥术与西方数学的积分法思想不同，但殊途同归.

《垛积比类》推广贾宪三角形的构成法则分别构造出乘方垛、三角自乘垛、三角变垛以及该三垛的各支垛，并给出各自的由项求和及反求公式. 例如，三角 s 变垛的求和公式为

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{(p-1)!}r(r+1)\cdots(r+p-2)\cdot r^{s}$$
$$=\sum_{i=1}^{s+1}\left[B_i^s\sum_{r=1}^{n-i+1}\frac{1}{(p+s-1)!}r(r+1)\cdots(r+p+s-2)\right],$$

其中，B_i^s 是三角 s 变垛各廉表(表 1)第 s 行第 i 个值. 该表的构成法则为

$$B_i^s=(s-i+p)B_{i-1}^{s-1}+iB_i^{s-1}$$

1				
1	$(p-1)$			$s=1$
1	$1+3(p-1)$	$(p-1)^2$		$s=2$
1	$4+7(p-1)$	$1+4(p-1)+6(p-1)^2$	$(p-1)^3$	$s=3$
…………				
…………				

表 1

上述求和公式，当 $s=0$ 时，为三角垛求和公式. 又当 $p=2$ 时为乘方垛求和公式，表 1 变为乘方垛各廉表. 贾宪三角形作为一个特例是该书卷四的三角一变垛第一垛的支垛.《垛积比类》是垛积术总结性的著作. 该书蕴含着组合数学的一些重要成果. 时曰醇《百鸡术衍》二卷(1861 年)将百鸡问题推广为所给物数非两两互素的情形. 其解法先设一物为零，使不定问题化为确定问题，再由方程术求解. 又创减较法、加较法使得各物及其对应的值钱数皆为正整数，复由通率加减得通解. 时氏的工作第一次给出三色差分的系统算法. 黄宗宪《求一术通解》二卷(1874 年)借助素数概念给出求定数法，又在求乘率法的基础上给出求反乘率法. 在改进时曰醇减较法、加较法的过程中，黄氏给出二元一次不定方程的一般解法. 这两项工作使大衍总数术及其应用得以推广. 此期传统数学研究成果比较丰富的著作还有华蘅芳《开方别术》不分卷(1872 年)、《开方古义》二卷(1880 年)及《积较术》三卷(约 1872—1880 年间). 后者论招差术的应用，为华氏的代表作.

西方数学的第三次传入及其研究. 19 世纪下半叶，西方近代数学著作及教科书的翻译与编译之数量较前剧增. 据统计，自 1853 年至 1911 年共译自然科学著作 468 部，其中，数学 164 部，占三分之一强. 此期传入的数学知识有解析几何、微积分等，大体属于 18 世纪西方数学的范围. 数学著作的翻译，以李善兰、华蘅芳的工作为代表. 李善兰与伟烈亚力(Wylie, A.)合译的数学著作有:《几何原本》后九卷(1856 年)，所据底本似是巴罗(Barrow, I.)的英译十五卷本(1660 年);《代微积拾级》十八卷(1859 年)，所据底本为卢米斯(Loomis, E.), Elements of Analytical Geometry and of Differential and Integral Calculus (1850 年);《代数学》十三卷(1859 年)，所据底本为德·摩根(De Morgan, A.), Elements of Algebra (1835 年). 李氏又与艾约瑟(Edkins, J.)合译《圆锥曲线说》三卷(1856 年)，所据底本不详. 华蘅芳与傅兰雅(Fryer, J.)合译的主要数学著作有:《代数术》二十五卷(1873 年)、《微积溯源》八卷(1874 年)，以上两种所据底本均为华莱士(Wallace, F.)的著作，见《大英百科全书》第 8 版，还有《三角数理》十二卷(1877 年)，所据底本为海默斯

(Hymers,J.)(1803—1887 年)A Treatise on Plane and Spherical Trigonometry (1863 年);《代数难题》十六卷(1879 年),所据底本为伦德(Lund,T.) A Compan to Wood's Algebra (1878 年);《决疑数学》十卷(1880 年),所据底本为德·摩根(De Morgan,A.)An Essay on Probabilities,and on Their Application to Life Contingencies and Insurance Offices (1838 年).教会学校编译的教科书印数较多的有:狄考文(Mateer,R. C. W.)与邹立文《形学备旨》十卷(1885 年)、《代数备旨》十三卷(1891 年)、《笔算数学》三卷(1892 年),潘慎文(Parker,A. P.)与谢洪赉《代形合参》三卷(1893 年)、《八线备旨》四卷(1894 年).西方数学第三次传入之后,研究成果突出者当推夏鸾翔.夏氏代表作为《致曲术》、《致曲图解》(约 1860—1861 年间,两书原为同一种之上下卷)、《万象一原》九卷(1862 年).夏氏于 1859 年至 1861 年间"暇则细寻微积分奥窍",对二次曲线等平面曲线的弧长、围成的面积、旋转体的表面积、体积的计算有深入的研究,其中有些成果是当时尚未传入的.例如,《致曲术》给出椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

从点$(0,b)$到点(x,y)的弧长分别绕长轴、短轴旋转的表面积为

$$2\pi b\int_0^x\sqrt{1-\frac{c^2}{a^4}x^2}\ \mathrm{d}x,$$

$$2\pi a\int_0^y\sqrt{1+\frac{c^2}{b^4}y^2}\ \mathrm{d}y$$

的展开式.这些内容可补《代微积拾级》所缺.

19 世纪下半叶至 20 世纪初期,中国传统的封建教育制度逐步瓦解,而半封建半殖民地的教育制度逐渐形成.教育发生了一系列的变化:旧式书院的改革,洋务学堂的兴办,1901 年上谕各省书院改为学堂,1903 年颁布癸卯学制,1905 年废除科举、成立学部,1906 年学部颁布"教科书审定办法",厘订留学章程等.由于这样的变化,学习西方数学的人不断增加.为了教学的需要,这一时期出现了不少算学课艺、详草、题解及教科书.算学课艺是算学试题与解答汇编,如《同文馆算学课艺》四卷(1880 年)、《简易庵算稿》四卷(1899 年)等.详草、题解之类,如《形学备旨习题解证》(1902 年)、《代数备旨全草》(1903 年)、《代微积拾级详草》(1905 年)、《笔算数学详草》(1906 年)、《八线备旨习题详草》(1906 年)等.国人自编的微积分教材当推陈志坚的《最新详阐微积教科书》五卷(1905 年)为最早.数学杂志亦于此时出现,最早的一种是黄庆澄的《算学报》,创于光绪二十三年(1897 年)六月,月刊,共出十二册.

1912 年 1 月.南京临时政府颁布《普通教育暂行办法》,规定"清学部颁行之教科书一律禁用",另行编审.20 世纪第二个十年间,中国数学家开始进入世界数学界.

1949 年之后,中国数学进入了全面发展的新阶段.

中国古代数学著作

算数书(Suànshùshū) 中国现已发现的流传至今的最古的数学著作.这是 1984 年出土于湖北省江陵县荆州城西门外张家山 M247 号西汉早期古墓的一部竹简书,无卷数,不知撰人.全书竹简约 200 枚,其中整简 180 余枚,其余已残断.全部文字约 7000 字,字体为隶书,一般用墨笔写在竹黄一面,每枚竹简的字数多少不定.《算数书》不分章节,全书由 60 多个小标题和 80 多个问题组成,其小标题可分为两类:一类是算法,一类是算题.算法的小标题如"相乘"、"合分"、"增(增)减分"、"分乘"、"径(经)分"、"约分"等;算题的小标题有"石衡"、"少广"、"出金"、"铜耗"、"方田"、"贾盐"、"税田"、"息钱"、"负炭"、"程禾"、"金贾(价)"等.在算题这类小标题之下,列有结合当时生产实践的应用问题,每一应用问题都是由"问"、"答"、"术"三部分组成.经过专家考证,认为《算数书》的成书年代不晚于公元前 186 年.

算经十书(Suànjīng shíshū) 唐代立于官学的数学教科书.初唐国子监的明算科以 12 部算经为教科书,它们是《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《张丘建算经》、《五曹算经》、《五经算术》、《夏侯阳算经》、《缀术》、《缉古算经》、《三等数》、《数术记遗》.贞观年间,李淳风奉召选择、注释并校订 10 部算经作为明算科的教科书(上列 12 部中除去《三等数》与《数术记遗》).北宋元丰七年(1084)秘书省刊刻算经时,《缀术》已失传,原李淳风选定的十部算经实际只刊了九部.南宋嘉定元年(1213)鲍澣之翻刻北宋时刻的九部算经时,又将在杭州发现的《数术记遗》刻入,共成十部算经.现在传本《算经十书》即为南宋鲍刻本的十部算经,它们成为中算普及和研究的母本.清乾隆年间,戴震作为《四库全书》的纂修官,辑录、校勘了《算经十书》,作为底本收入《四库全书》中;他的儿女亲家曲阜孔继涵又刻有微波榭本《算经十书》.民国年间,商务印书馆出版了《万有文库》本《算经十书》,1963 中华书局出版了当代中算史家钱宝琮校点的《算经十书》.

周髀算经(Zhōubì suànjīng) 中国最早的天文学、算学著作.二卷,不知撰人,约成书于公元前 100 年.原称《周髀》,唐代将其立于学官时始用今名.全书 7000 余字,其有关天文学方面的内容,主要是阐

述盖天说和四分历法.璇玑四游的文字证实当时已观察到北极的位移,即看到了岁差现象.其数学方面的内容涉及到分数乘除法、等差数列和圆周长求法、一次内插法的应用、对任意正数的开平方法、用分数表示奇零小数、最早引用勾股定理等.三国赵爽、北周甄鸾和唐李淳风都曾为该书作注.李淳风注始正原文求日高算法之粗疏,纠赵爽注日景新术之未当,改甄鸾释文之谬误.清代邹伯奇《周髀算经考证》、顾观光《周髀算经校勘记》为前人研究该书的精审之作.《周髀算经》最古刻本为北宋元丰七年刊本,现存最早的是南宋本及明万历赵琦美校刻本.此外还有《学津讨源》本、《秘册汇函》本、《津逮秘书》本、微波榭本及《四部丛刊》本、《四部备要》本等.

九章算术(Jiǔzhāng suànshù) 《算经十书》之一,共九卷,作者不详,约成书于西汉中期.全书共有246个应用问题,分别隶属于九章.各章的名称和主要内容如下:

1.方田.与田亩丈量有关的面积、分数问题.

2.粟米.以谷物交换为例的各类比例问题.

3.衰分.按比例分配和等差数列问题.

4.少广.由田亩计算引出的分数、开方问题.

5.商功.与土木工程有关的体积问题.

6.均输.与摊派劳役和税收有关的加权比例问题.

7.盈不足.由二次假设求解二元问题的一类特殊问题.

8.方程.线性方程组问题.

9.勾股.勾股定理及其应用.

《九章算术》在整数论、分数论、比例算法、开平方和开立方、面积和体积、盈不足算法、线性方程组解法、正负数概念及加减运算法则、勾股定理的应用等方面都取得了当时世界领先的成就,对中国古代数学的发展产生了决定性的影响.《九章算术》成书后,中国的数学家们大都以该书为学习、研究数学的重要著作,见诸史籍者就有东汉的马续、郑玄、刘洪、徐岳;三国的阚泽、陈帜、刘徽;南北朝的祖冲之父子;唐代的李淳风、李籍;北宋的贾宪,南宋的杨辉;清代的戴震、李潢等人.其中许多人为之作注,以刘徽的注释质量最高,影响最大,他以注释的形式完善了中国古代数学的理论体系.后来李淳风整理《算经十书》时,就是以刘徽的《九章算术》注释本为底本的.现在传世的《九章算术》由本文、刘徽注和李淳风注三部分组成.贾宪、杨辉、秦九韶、吴敬、程大位等人则按《九章算术》的模式从事著述.《九章算术》的体例、方法以及术语,成为近两千年中中国古代数学家所尊奉的规范,中国古代数学中的绝大多数成果都可以在《九章算术》中找到源头.该著作有十几个不同的版本传世,其中最有价值的是南宋鲍澣之刻本,现仅存前五章,藏上海图书馆,为海内外孤本.1774年,戴震从明代《永乐大典》中辑录出完整的《九章算术》,从此有了更多的版本,影响比较大的有《四库全书》本、武英殿聚珍版本、微波榭本以及李潢的《九章算术细草图说》.

海岛算经(Hǎidǎo suànjīng) 中国古代测量术的代表作.一卷,魏刘徽撰.原名《重差》,附于《九章算术》之后.唐李淳风在编辑《算经十书》时将其独立出来作为《算经十书》之一,因其首题是关于测量海岛高远的问题,故有此名.传本《海岛算经》共有9题,体例与《九章算术》相同,每题均由"问"、"答"、"术"三部分组成.第1题测海岛用重表法,第3题量方邑用连索法,第4题测深谷用累矩法,这是刘徽重差术的三个基本方法.重差即用矩尺在不同点测望物体,利用表间差距和所测景长之差推算所测物体高深远近的一种测量方法.9题中"两望"3题(第1、3、4题)、"三望"4题(第2、5、6、8题)、"四望"2题(第7、9题).该书被收入《永乐大典》和《四库全书》.唐李淳风奉敕为之作注,清李潢撰《海岛算经细草图说》一卷,清沈钦裴撰《重差图说》一卷.《海岛算经》有北宋秘书省刻本和南宋鲍澣之刻本、武英殿聚珍版本、微波榭本等.

孙子算经(Sūnzǐ-suànjīng) 约编纂于公元4、5世纪的一部普及性数学著作.三卷,作者不详.卷上叙述度量衡制度,筹算记数的纵横相间制与筹算乘除法则;卷中为筹算的分数算法与开方法,并有一些简单的面积、体积计算及衰分、盈劳等28个问题;卷下为切于民生日用的实际应用题,涉及到测望、田域、营建、贸易、仓窖、赋役、军旅等方面共计30题.卷下"妇人荡杯"、"雉兔同笼"以其独特的解法广为人知,最为著名的是卷下第26题"物不知数"(又称"孙子问题"),其解法为宋时秦九韶推广为"大衍求一术"(一次同余式组的系统解法)而著称于世.该书版本有南宋鲍澣之刻本、《四库全书》本、武英殿聚珍版本、微波榭本、《知不足斋丛书》本等.

张丘建算经(Zhāng Qiūjiàn-suànjīng) 《九章算术》之后的一部有突出成就的数学著作.三卷,张丘建撰.成书年代在公元466—485年之间(另有说法,认为更早).该书现在传本缺卷中最后若干页、卷下前二页,现存完整算题90问,涉及测量、纺织、交换、纳税、土木工程等方面.该书卷上第10、11题讲最大公约数与最小公倍数的计算;卷上第18、22、23、32题,卷中第1题,卷下第24题研究等差数列,给出了几个通项公式、求和公式;卷中还有数问类似于《九章算术》盈不足章的问题.卷下最后一题是闻名于世的"百鸡问题",属不定方程,书中给出三组正整数解.全书体例与《九章算术》相似.该书版本有南宋鲍澣之刻本、《四库全书》本、微波榭本、《知不足斋

丛书》本、《古今算学丛书》本、《万有文库》本等.

缀术(Zhuìshù) 中国唐初立于官学的《算经十书》之一.作者是祖冲之、祖暅父子.因为该书在宋代以后失传,它的内容和成书过程已不可知.只能通过史书及有关文献加以推测.《南齐书》祖冲之传和《南史》文学传都说:祖冲之"注九章,造缀述数十篇".唐初王孝通《缉古算术·表》说:"祖暅之《缀术》,时人称之精妙……"《隋书·律历志》则说:祖冲之"所著之书名为缀术,学官莫能究其深奥".依此推之,可能的情况是:祖冲之在注《九章算术》时,将研究心得写成数十篇数学短论,附缀于刘徽注文之后,称为"缀述",其中包括他对圆周率的研究成果——盈朒二数和密率等.祖冲之死后,其子祖暅对父亲数学遗稿加以整理和补订,并加进自己的研究成果,如球体积公式推导等,写成一部完整的数学著作——《缀术》.该书包括祖冲之、祖暅父子二人的数学创造,思想精深,内容深奥,以致唐朝国子监明算科规定学生要学习 4 年;连学官都"莫能究其深奥",因此逐渐被"废而不理".到北宋元丰七年(1084)重刻《算经十书》时,就没有见到《缀术》.

五曹算经(Wǔcáo suànjīng) 一部为地方行政官员编写的实用算术书.五卷,北周甄鸾撰.全书共有 67 个算术问题.第一卷田曹 19 问,讲田亩面积的计算;第二卷兵曹 12 问,讲配置军队及军需给养问题;第三卷集曹 14 问,主要讲各种粮食的交换;第四卷仓曹 12 问,解决粮食的征收和储藏问题;第五卷金曹 10 问,讲丝、绢、钱币等的交易互换.该书版本有南宋鲍澣之刻本、《四库全书》本、武英殿聚珍版本、《知不足斋丛书》本等.

五经算术(Wǔjīng suànshù) 《算经十书》之一.二卷,北周甄鸾撰.该书对《尚书》、《诗经》、《周易》、《左传》、《论语》、《周礼》等典籍中有关历算、音律的文字予以注释,涉及的数学内容包括大数进位制、分数的运算、开方和体积计算及等比数列问题.其版本有《四库全书》本、武英殿聚珍版本、微波榭本等.

数术记遗(Shùshù jìyí) 初唐国子监中明算科的 12 部教科书中的一种.一卷,题署汉徐岳撰,北周甄鸾注.关于该书作者目前尚无一致意见.该书系徐岳追记其师刘洪与天目先生的问答,并非系统的数学著作.该书正文主要内容是记载大数进位法和十四种算法名称.其十四种算法是:积算、太一算、两仪算、三才算、五行算、八卦算、九宫算、运筹算、了知算、成数算、把头算、龟算、珠算、计数.这些算法的意义目前还不清楚.因其为唐代明算科考试的"帖读"之本,故得以流传后世.该书版本有南宋鲍澣之刻本、《秘册汇函》本、《津逮秘书》本、《四库全书》本、微波榭本、《古今算学丛书》本、《万有文库》本等.

缉古算经(Jīgǔ suànjīng) 中国最早的一部论述开带从立方的数学著作.一卷,唐王孝通撰并自注.原名《缉古算术》,唐代将其立于官学时改称《缉古算经》.全书共 20 题,第 1 题为天文问题,第 2 至 6 题和第 8 题是土方体积问题,第 7 题和第 9 至 14 题为地窖和仓库容积问题,第 15 至 20 题是勾股问题.第 1 题以算术方法求解,其次 17 题归结为一元三次方程,末 2 题归结为"双二次"方程.一元三次方程的建立和解法(开带从立方)为讨论的重点.全书共列出三次方程 28 个,在每一条有关的术文之下,王孝通都加以自注,说明方程系数的来历.据此,人们可知王氏列方程的程序.该书依靠几何方法建立方程,对方程的解法则言之不详,方程的系数亦有所限制,根则限于正数且只求一解.传本《缉古算经》已残缺,前 16 问较为完整,后 4 问多有文字烂脱,清人为之述草、补图者较多.清张敦仁于嘉庆八年(1803)撰《缉古算经细草》一卷,据最后三题残文,详加计算后补足了题目、答案和术文.嘉庆十七年(1812),李潢遗稿《缉古算经考注》二卷对全书文字详加校订,勘误补缺凡七百余字.揭廷锵有《缉古算经图草》二卷,陈杰有《缉古算经细草》一卷、《图解》三卷、《音义》一卷.《缉古算经》传本有《四库全书》本、微波榭本及《知不足斋丛书》本等.

夏侯阳算经(Xià Hóuyáng - suànjīng) 原本《夏侯阳算经》是唐代立于官学的《算经十书》之一,到宋代已失传.今传本《夏侯阳算经》为北宋重刻《算经十书》时将《韩延算术》冠以《夏侯阳算经》之名编入其中,因而得以流传.《韩延算术》是唐代的一部实用算术书,分上、中、下三卷共 83 个问题,征引前朝各家算术和当时法令颇多.卷上六章:"明乘除法"、"辩度量衡"、"言斛法不同"、"课租庸调"、"论步数不等"、"变米数",重点叙述租庸调的计算法;卷中五章:"求地税"、"分禄料"、"计给粮"、"定脚价"、"称轻重",叙述官本利息的分配和赋税征派问题;卷下为"说诸分"章,专论奇零分法.全书给出很多乘除简捷算法.传本《夏侯阳算经》的版本主要有南宋鲍澣之刻本、《四库全书》本、微波榭本、《古今算学丛书》本等.

谢察微算经(Xiè Cháwēi - suànjīng) 原名《发蒙算经》,宋代算书.是一部内容浅显的启蒙算书.三卷,宋谢察微撰.原书已失传,但其第一卷的开头部分被收录在明初陶宗仪编纂的《说郛》中.内容共计八条:"大数"、"小数"、"度"、"量"、"衡"、"亩"、"九章名义"、"用字例义".在每条之下有若干款,每款之后有小字作注,如"小数":"分",注曰"十厘为分";"厘",注曰"十毫"等.在"用字例义"中,作者对 73 个数学中的术语或常用字、词给出简短的解释,有些类似定义.对一词多义者分别阐述,如"乘,法之多位

者”，又“乘，法实合变数也”；对一些容易混淆的词也作了区别，如“差，多少不同数也”，“较，相除余也”等. 明代程大位《算法统宗》中几乎一字不漏地照录了《说郛》中记载的《谢察微算经》残文，清初编辑的大型丛书《古今图书集成》第一百一十二卷算法部汇考引用了《谢察微算经》，当代中算史家李迪在所著《中国数学通史 · 上古到五代卷》中也将《谢察微算经》残文全部录出.

敦煌算书(Dūnhuáng suànshū)　20 世纪初发现于中国甘肃敦煌莫高窟(又称千佛洞)的手写数学文献原件. 这些数学文献总计近 20 件，包括算书、算表、算经若干，但没有一件首尾完整，有的仅是残页，有的抄在佛经或其他文献的背面. 其内容主要是九九表和一些算题，其年代约在公元 5 世纪至 10 世纪之间. 它们是除《算数书》外的最早的数学文献原件，是了解千余年前数学的内容、形式等的一组珍贵的资料.

黄帝九章算法细草(Huángdì jiǔzhāng suànfǎ xìcǎo)　宋代算书. 九卷，宋贾宪撰，今已失传. 该书有些内容被杨辉《详解九章算法》摘录. 在《详解九章算法》的最末一卷“纂类”中录有“贾宪立成释锁平方法”、“增乘开平方法”、“贾宪立成释锁立方法”及“增乘(开立)方法”术文四则. 其中，“释锁开方”二法分别和《九章算术》开平方、开立方法接近，而所述“增乘开方法”为新法. “增乘(开立)方法”术文后有 6 个开立方的题目，第 1 题即为《九章算术》少广章第 19 题. 杨辉还引录了贾宪的“开方作法本源图”和“增乘方求廉法草”，此二者是“增乘开方法”原理的概括. “开方作法本源图”今通称为“贾宪三角形”或“贾宪三角”.

算学源流(Suànxué yuánliú)　中国最早的一部简明数学史纲. 不分卷，作者不详. 该书引《晋书》关于隶首作数、《汉书》备数、《周礼》保氏九数、《汉书》关于张苍定章程的记载，以及《唐书》选举志、百官志，宋崇宁(1102—1106 年)国子监算学令等有关唐宋算学馆的课程设置、教员配制、教学制度、考试制度以及科举制度的规定等. 宋鲍澣之刻《数术记遗》时，将其附刻于后. 1980 年，又被收入文物出版社出版的《宋刻算经六种》之中.

数书九章(Shùshū jiǔzhāng)　中国宋元时代一部有代表性意义的数学著作. 原名《数术大略》，宋秦九韶撰. 成书于 1247 年. 全书共十八卷 81 题，分为九章. 其主要内容有：

1. 大衍类. 阐述一次同余式组的一般解法，其中包括大衍总数术、大衍求一术和一次同余式组求解公式三部分. 大衍总数术处理模数非两两互素的问题，分别对模数为整数、小数、分数和十的倍数四种情形说明将其化为两两互素的方法. 大衍求一术是用辗转相除求乘率的方法，这是求解同余式组的关键. 秦九韶用文字表达的一次同余式组求解公式，现称为“中国剩余定理”或“孙子定理”.

2. 天时类. 讨论天文历法和雨雪量计算问题.

3. 田域类. 讨论田地面积问题，其中包括介绍高次方程数值解法的正负开方术.

4. 测望类. 讨论勾股、重差和其他测量问题.

5. 赋役类. 讨论田赋和户税等问题.

6. 钱谷类. 讨论征购粮食和仓储容积等，包括体积计算和复杂的比例问题.

7. 营建类. 讨论土木工程问题，有相当详细的工程计算.

8. 军旅类. 兵营布置和军需供应问题.

9. 市易类. 讨论商品交易和利息计算问题，主要是线性方程组的解法.

《数书九章》在写作体例和选用题材方面都继承了《九章算术》的传统，但在中国古算构造性和机械化的特色方面得到了更为突出的体现. 其代表成果是关于一次同余式组解法的大衍求一术和关于高次方程数值解法的正负开方术，这两项工作都走在世界前列. 此外，在线性方程组、统计数学、几何与测量等方面都有创新. 宋元时期，该书并未刊刻，仅有抄本流传. 明《永乐大典》抄录此书，题称《数学九章》，清《四库全书》中的《数书九章》即由此辑出.

测圆海镜(Cèyuán hǎijìng)　原名《测圆海镜细草》. 是中国现存最早的一部以天元术为主要内容的著作. 十二卷，元李冶撰. 该书卷首为“圆城图式”，该图以一个直角三角形及其内切圆为基础，通过若干互相平行或垂直的线段，构成 16 个直角三角形. 全书 170 个问题都与这幅图形有关. 图式之后是“总率名号”和“今问正数”，前者给出图中各勾股形名称，后者以通弦六百八十，通勾三百二十，通股六百为基数，给出各种勾股形边长之间的关系，以便验证. 卷首最后列“识别杂记”692 条，逐一列举了勾股形各边及其和、较、积与圆的关系，每一条都相当于一个几何定理. 这部分内容是对中国古代勾股容圆问题的总结，这在中国古代数学著作中是绝无仅有的. 卷二至十二为 170 个问题，每题含“法”、“草”两部分. “法”是该类问题的一般解法，“草”是演题的具体过程. 全书构成一个演绎体系，卷一包含了解题所需要的基本理论，后面各卷问题的解法均可在此基础上以天元术为工具推导出来. 该书的主要价值还在于其借助于各种几何关系来建立高次方程，从而全面系统地介绍天元术的理论和算法. 书中的天元术分为三步：

1. “立天元一”，这相当于设立未知数.

2. 寻找两个相等的而且至少有一个含天元一的多项式或分式.

3. 建立等式，并通过相消，化成由高次幂到低次幂上下排列的标准形式.

此外，在《测圆海镜》中，常数项可正可负，而不再限制于其几何意义. 该书自成书以来，多次再版. 较为著名的版本有：1287 年的李克修再版本、明顾应祥《测圆海镜分类释术》、清《四库全书》本、《知不足斋丛书》本、同文馆集珍本和《古今算学丛书》本.

益古演段(Yìgǔ yǎnduàn)　普及天元术的著作. 元李冶撰. 三卷，作于 1259 年. 该书是在蒋周所撰《益古集》的基础上，“再为移补条段，细翻图式，使粗知十百者，便得入室啖其文”. 全书 64 题，除 4 题为一次方程外，其余皆为二次方程. 每题包括“法”、“依条段求之”、“条段图”、“义”四部分. 法，即天元术；条段，是用来表示方程各项的一段段的条形面积；依条段求之，即用人们易懂的几何方法对天元术进行解释；图，为方程各项几何关系的图解；义，即图的文字说明. 其将蒋周的演段法(旧术)与天元术(新术)并列，旨在普及新术. 此外，在化多元问题为一元问题，以及设辅助未知数等方面亦有创新. 该书自成书以来，有多种版本流传于世. 较为著名的有：1282 年初版本、明《永乐大典》本、清《四库全书》本、《知不足斋丛书》本、《白芙堂算学丛书》本和《古今算学丛书》本等.

详解九章算法(Xiángjiě jiǔzhāng suànfǎ)　宋代算书. 宋杨辉撰. 十二卷，成书于 1261 年. 包括《九章算术》本文、魏刘徽注、唐李淳风等注、北宋贾宪细草及杨辉详解共五部分. 根据杨辉自序知，该书以贾宪《黄帝九章算法细草》为底本，在对《九章算术》中的问题加以详尽解释的基础上，又另增“图”、“乘除”、“纂类”三卷. 其“图”包括互乘五段、维乘、列衰、方程并列图及开方图等，作为首卷；“乘除”、“立问一十三题，专说乘除”，包括九归等歌诀，作为次卷. 此二卷已佚. “纂类”将《九章算术》中的方法和问题分为乘除、互换、合率、分率、衰分、迭积、盈不足、方程、勾股九类，作为末卷. 书中保存了许多珍贵的数学史料，例如贾宪的“开方作法本源图”就被少广章所引用，其现在被称为“贾宪三角”. 在著作体例上，引入了“图”、“草”和“比类”等内容. “比类”系相对于“古问”而言，其中不乏作者的创造，如商功章中以方亭、方锥、堑堵、鳖臑、刍甍、刍童等立体“比类”于各种堆垛，在高阶等差数列的研究史上留下了光辉的一页. 该书成书后即刊行，明修《永乐大典》时将其分类抄入“算”字条，而“算”字条今仅存三卷，故此书现为残本.

日用算法(Rìyòng suànfǎ)　宋代实用算书. 二卷及首一卷，宋杨辉撰，原书已失传，有残文存于《永乐大典》及《诸家算法》中. 《永乐大典》卷一六三四三有“二率分身”一题；《诸家算法》有“释斤秤数”一则并九题，还有杨辉的自序：“今首以乘除加减为法，称斗尺田为问，编诗括十三首，立图草六十六问，用法必载源流，命题须负有实. 分上下卷首，少补日用之万一，亦助启蒙之观览云耳. ”相比可见，原文残存无几. 《日用算法》版本不详.

杨辉算法(Yánghuī - suànfǎ)　杨辉后期三部数学著作的合称. 包括：《乘除通变本末》三卷；《田亩比类乘除捷法》二卷；《续古摘奇算法》二卷. 杨辉算法的版本有明洪武古杭勤德书堂刊本，现存中国国家图书馆的是朝鲜李朝世宗十五年复刻的洪武刊本. 其宋刻本已失传，明末毛氏汲古阁藏其影写本，清《宜稼堂丛书》本系由其转抄本校勘而成，但缺少《续古摘奇算法》卷上. 此外还有《丛书集成初编》本.

乘除通变本末(Chéngchú tōngbiàn běnmò)　原名《乘除通变算宝》，《杨辉算法》中的一种. 三卷，宋杨辉撰，成书于 1274 年. “卷上”又名《算法通变本末》，首先提出“习算纲目”，即为从九九表、乘除法开始到《九章算术》各种方法的教学计划，包括学习要点、方法、时间安排等，由浅入深，循序渐进. 接着给出有关垛积例题，并着重介绍重因、损乘等乘除捷法. “卷中”又名《乘法通变算宝》，为全书的核心，主要介绍“身外加减”、“求一”、“九归”诸术. “卷下”又名《法算取用本末》，为阐发“卷中”而作，列出一至三百的加因代乘和归减代除方法，并保存了《算法指南》、《应用算法》的宝贵资料.

田亩比类乘除捷法(Tiánmǔ bǐlèi chéngchú jiéfǎ)　《杨辉算法》中的一种. 二卷，宋杨辉撰，成书于 1275 年. 卷上列出了各种形状的田地求积公式及例题，并结合当时实际需要的问题进行比类. 卷下首先对《五曹算经》中的三个问题进行了批评，接着择取了刘益《议古根源》中的二十二个典型问题. “详注图草”，介绍刘益求二次方程正根的“益积术”和“减从术”，还引用了《议古根源》中的一个益隅四次方程用增乘开方法求其正根.

续古摘奇算法(Xùgǔ zhāiqí suànfǎ)　《杨辉算法》中的一种. 二卷，宋杨辉撰，成书于 1275 年. 卷上讨论“纵横图”，即现在所谓的幻方. 其中共列出幻方二十个. 前两个为河图、洛书，其次为四至八行幻方各两个，九至十行各一个，最后有聚五、聚六、聚八、攒九、八阵、连环等图，并给出某些幻方的构造方法. 卷下是各种算术杂题及口诀.

革象新书(Géxiàng xīnshū)　元代的一部关于天文学、数学的著作. 原本五卷三十二篇，元赵友钦撰，主要讨论天文学问题，也涉及数学和光学，有元刊本. 明代王祎将其删改，编为二卷，名为《重修革象新书》. 清代乾隆年间四库馆臣从《永乐大典》中录出原本《革象新书》，与王祎的删改本两相比照，认为二者“各有所长，不容偏废”，故将二者一道收入《四库

全书》.原本《革象新书》的第五卷最末一篇“乾象周髀”中记载了赵友钦关于圆周率的研究.赵友钦绘出了“方圆相切”图,论述了其“以方求圆”的算法原理,建立了一个迭代求弦的算法公式,以此求得圆周率的近似值 3.141592,并以此验证祖冲之的密率 355/113.

算学启蒙(Suànxué qǐméng) 元代的一部算学入门书.元朱世杰撰.三卷,成书于 1299 年.全书共 259 问,分为 20 门.内容涉及四则运算、开方、天元术以及垛积等多方面的数学内容.该书由浅入深,循序渐进,是一部很好的数学启蒙读本.卷首“算学启蒙总括”罗列全书所需要的各种乘除、开方及正负数运算的法则,度量衡制度,大小数的进位制,常数以及名词术语的定义.卷上八门 113 问,前五门概括了当时的乘除捷法,第六门和第八门都是比例问题,第七门讨论利率和税收.卷中七门 71 问,主要讨论面积与体积的计算、复比例与连比例、等差级数、比例分配和其率术与反其率术的应用等问题.卷下五门 75 问,介绍分数的四则运算,等差级数和二阶等差级数的项数和末项间的关系,盈不足问题,线性方程组的解法,天元术与开方法的应用等.该书成书后,《永乐大典》并未收入,但流传到朝鲜、日本后,多次刊刻,产生了巨大的影响.后又传回中国,并于 1839 年在扬州刊行,被多次翻刻.

四元玉鉴(Sìyián yùjiàn) 元代论述四元术和垛积术的杰作.三卷,元朱世杰撰,成书于 1303 年.全书共 288 问,分为 25 门,所有问题都与方程或方程组有关.

假令四草:简要介绍天元术、二元术、三元术、四元术的解题模式.

上卷 6 门:

1.直段求源:关于勾、股、弦的计算问题.

2.混积问元:田亩面积问题.

3.端匹互隐:有关绫、罗等纺织品的计算.

4.廪粟回求:粮食容积问题.

5.商功修筑:工程建筑问题.

6.和分索隐:已知条件为分数的问题.

中卷 10 门:

1.如意混合:把性质不同的问题混在一起以增加问题的难度.

2.方圆交错:有关方、圆的混合问题.

3.三率究圆:按圆周率 157/50 或 22/7 来进行与圆或球有关的计算.

4.明积演段:与勾股形有关的各种计算.

5.勾股测望:用勾股定理及相似勾股形求距离.

6.或问歌彖:由诗歌形式给出的问题.

7.茭草形段:高阶等差数列问题.

8.箭积交参:关于方箭、圆箭的垛积问题.

9.拨换截田:截割田亩的面积问题.

10.如象招数:招差术.

下卷 8 门:

1.果垛迭藏:垛积问题.

2.锁套吞容:各种相切、相容图形面积的计算.

3.方程正负:线性方程组的问题.

4.杂范类会:各种杂题.

5.两仪合辙:二元二次方程组.

6.左右逢源:二元高次方程组.

7.三才变通:三元高次方程组.

8.四象朝元:四元高次方程组.

《四元玉鉴》的主要成就是四元术,即四元高次方程组的建立和求解方法.其用“天”、“地”、“人”、“物”四字代表四个未知数,系统地介绍了二元、三元、四元高次方程组的布列和解法.解法的关键是消元,将多元高次方程组化成一元高次方程,然后应用增成开方法来解.《四元玉鉴》中的另一杰出成就是垛积招差术.垛积即高阶等差数列求和,招差即高次内插法,在这两个方面取得了相当重要的结果,比西方同类工作要早 400 年以上.另外,该书在几何方面亦有不可忽视的贡献.《四元玉鉴》成书之时,受到社会的重视.但在明代因数学衰微而成绝学.清代中国传统数学复兴后,该书多次刊刻,流传甚广.主要有《宛委别藏》本、《白芙堂算学丛书》本等.

丁巨算法(Dīngjù - suànfǎ) 元代以四则运算为主(包括开方运算)的应用数学著作.八卷,元丁巨撰.《丁巨算法》今有残本传世,在《知不足斋丛书》中收录有 62 题,在《永乐大典》卷一六三四三到卷一六三四四中收有提纲一条和 27 题,其中提纲是列于问题前面的关于正方形与其内切圆、立方体与其内切球的有关周长、面积和体积等计算公式 8 条.现存的 89 题大量的是度量衡换算的商业问题,只有一题为三元一次方程组应用题.《丁巨算法》成书于 1355 年,全帙版本不详.《永乐大典》中收录的内容被当代中算史家李俨收入其所著的《十三、十四世纪中国民间数学》中,《知不足斋丛书》中收录的内容又被排印在《丛书集成初编》本的《丁巨算法》中.

算法全能集(Suànfǎ quánnéngjí) 元明之际流传的口诀化数学的代表作.二卷,元贾亨撰.全书共有 20 个子目 126 问,卷上开始给出“总说五项”,即钱、粮、端匹、斤秤、田亩的单位制和进位制.20 个子目系“常用法二十项”,包括卷上的因法、加法、乘法、减法、归法、归除、求一、商除、异乘同除、就物抽分和卷下的差分、和合差分、端疋、斤秤、堆垛、盘量仓窖、丈量田亩、修筑、约分、开平方.这 20 种算法中的每一种都有歌诀表述,每一种歌诀后都有相应的算题供读者练习算法.该书有元刊本、明初刊蝶装本及《玄览堂丛书》影印本.

详明算法(Xiángmíng suànfǎ)　元末明初流传的民间数学著作,内容、体例与贾亨《算法全能集》极为相似.二卷,元安止斋、何平子撰.全书共 114 问,总目 27 项,其中总说 7 项:九章各数、大小各数、九九合数、斗斛丈尺、斤秤田亩、口诀、乘除见总;卷上 9 项 31 问:因法、加法、乘法、归法、减法、归除、求一、商除、约分;卷下 11 项 83 问:异乘同除、就物抽分、差分、和合差分、端匹、斤秤、堆垛、盘量仓窖、丈量田亩、田亩纽粮、修筑.卷上、卷下的 20 种算法也都给出了歌诀表述.该书有明洪武癸丑明经堂刊本及李俨所藏抄本《诸家算法及序记》本.

通原算法(Tōngyuán suànfǎ)　明初的一部理论水平较高的数学著作.二卷,明严恭撰.现已无刻本流传.抄本《诸家算法》中收有 1 条提纲和 29 题,《永乐大典》收有另外 35 个问题,共计 64 题.这些问题可分为四类:一般商业换算问题、等差数列问题、古算题(包括一道一次同余式组问题)和开方问题.当代中算史家李俨所著的《十三、十四世纪中国民间数学》一书中收录了《通原算法》的残本,包括上述 1 条提纲和 64 个问题.

透帘细草(Tòulián xìcǎo)　元末明初的商业算书.不知卷数,作者不详,原本已佚.现有残本传世,在《知不足斋丛书》中收有 54 题,在《永乐大典》卷一六三四三至卷一六三四四中收有 17 题,共计 71 题.其算法包括四则运算和开方运算.其内容有盈不足、衰分、均输、少广、商功等一般应用问题和堆垛问题,还有一些游戏题,主要的是钱物换算的商业问题.多数问题为一问一答一法一草的形式.《永乐大典》中收入的题目被李俨收入其所著的《十三、十四世纪中国民间数学》中,《知不足斋丛书》中收录的内容又被排印在《丛书集成初编》本的《透帘细草》中.

锦囊启源(Jǐnnáng qǐyuán)　元末明初的应用算书.不知卷数,作者不详,现无刻本传世.抄本《诸家算法》中收有提纲 2 条和 21 个问题.2 条提纲一是重量单位介绍,一是"斤见两歌",即斤两换算歌诀;21 个问题都是浅显的商贸计算应用题,仅用乘法即可算得结果.《永乐大典》中还收有与此不同的 9 个问题,算法与《九章算术》中"今有术"之比率法相似.《锦囊启源》现存的 2 条提纲和 30 个问题被李俨收入其所著的《十三、十四世纪中国民间数学》中.

永乐大典算书(Yǒnglè dàdiǎn suànshū)　明《永乐大典》中,"算"字条所分类辑录的自汉迄明初的算书中的算法.《永乐大典》的编纂始于永乐元年(1403),成于永乐六年.共二二八七七卷,凡例并目录六十卷,其中"算"字条自卷一六三二九至卷一六三六四,共三十六卷.《永乐大典》在隆庆、万历后便有残缺,但算法类至清乾隆时尚无缺失,戴震在修《四库全书》时曾陆续由此辑录出许多古代数学著作.此后《永乐大典》继续散失,现在"算"字条仅存两卷,见中华书局 1960 年版.

诸家算法及序记(Zhūjiā suànfǎ jíxù jì)　原名《算法杂录》.全书分算题与序记两部分.算题部分都是关于斤秤的问题.首先列出诸书所载斤秤制度及化两为斤歌诀,接着按著作抄录了诸书算题 107 问.序记部分抄录了自刘徽《九章算术序》到严恭《通原算法序》共 15 部著作的序 20 篇,其中鲍澣之《海岛算经序》、《日用算法序》、严恭《通原算法序》为海内孤本.中国科学院自然科学史研究所图书馆藏有该书的抄本.

九章算法比类大全(Jiǔzhāng suànfǎ bǐlèi dàquán)　亦名《九章详注比类算法大全》.明代前期的算书.十卷首一卷,明吴敬撰,成书于 1450 年.该书卷首为"乘除开方起例",旨在讲解算法的基本理论,列举了大数记法、小数记法、度量衡制单位、整数分数四则运算、定位、开方、差分等项,并用诗歌形式一一作了解释.卷首还提出一种以前中国数学著作中未曾出现过的"写算法":根据相乘两数的数字位数,相应地画好方格,置两乘数于方格上方和右方,选择一个方向画上每格的对角线,每两个数字相乘的积写在相应的方格里,按十位在上、个位在下的规则写,再将斜行逐次相加就得出所求乘积的各位数.卷一至卷九是 1400 多个应用问题的解法汇编,遵循《九章算术》体例,分属方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程、勾股九类.每卷包括古问、诗词、比类三个部分:古问多系《九章算术》内容,兼采杨辉《详解九章算法》等书内容;诗词系以歌诀表述算题;比类系算法相近的,结合当时实际应用的问题,包括商品交换、合伙经营、利息计算、就物抽分(以货物作价抵偿费用)等.卷十"各色开方",包括开平方、开立方、开高次方及开带从平方和带从立方,所用方法是"立成释锁法",而不是"增乘开方法".该书主要介绍筹算法,但也提到算盘.此书现传有明弘治元年(1488)刻本.

算学宝鉴(Suànxué bǎojiàn)　全称《新集通证古今算学宝鉴》.明代算书.四十一卷首一卷,明王文素撰.该书正文四十一卷,每卷分若干项,每项有问有诀,共 203 项,包括 317 诀,1267 问.内容大致如下:卷一至卷六为算学基础知识和算法,卷七至卷十为方田,卷十一至卷十二为粟米,卷十三至卷十四为衰分,卷十五至卷十八为少广,卷十九至卷二十一为商功,卷二十二至卷二十四为均输,卷二十五为盈不足,卷二十六至卷二十七为方程,卷二十八至卷三十为勾股,卷三十一至卷四十一为开方.其内容可分为三类:

1. 对前人著作的摘录.
2. 比类,即仿照常见题目重造新题.

3. 王文素的见解和评述.

《算学宝鉴》主要介绍筹算算法，亦明确提到算盘. 其乘法、除法、开平方、开立方算式都单行横书，这一现象说明筹算和珠算的交替已趋成熟. 此书现有抄本传世，此本有明正德八年(1513)宝朝珍序和嘉靖三年(1524)王文素自序，收藏在中国国家图书馆.

勾股算术(Gōugǔ suànshù)　关于勾股形解法及应用勾股形进行测量的数学著作. 二卷，明顾应祥撰，成书于 1533 年. 书中正卷之前有"勾股论说"一篇，系统介绍了勾、股、弦三边及三边和、差间的各种关系及相互求法，给出 40 个公式，利用这些公式可以较方便地计算各种勾股问题，此篇为该书总纲. 全书共分 38 类，每类包括若干问题，共计 77 问，其中包括"方五斜七"的"方斜术"5 问. 该书有明嘉靖癸丑(1553)刊本.

测圆海镜分类释术(Cèyuán hǎijìng fēnlèi shìshù)　明代研究和注释《测圆海镜》的数学著作. 十卷，明顾应祥撰，成书于 1550 年. 李冶著《测圆海镜》的主要目的是利用天元术列出方程，而对方程解法则未详演，初学者不易理解. 顾应祥将《测圆海镜》的全部问题重加分类，厘为十卷，仍得 170 问，每问之后有释，释后有术，对问题解答的演算过程详加推导，并对其中的开方、带从开方过程一一写明，成书为《测圆海镜分类释术》. 顾氏此书便于入门时自学，但他对李冶原书中细草部分的"天元术"无法理解，因而将这一部分全部删去，可谓循枝叶而失根本. 该书有明嘉靖庚戌(1550)刊本和《四库全书》本.

弧矢算术(Húshǐ suànshù)　关于弧矢计算的第一部数学专著. 一卷，明顾应祥撰，成书于 1552 年. 正卷前有"弧矢论说"和"方圆论说"两篇短文，前者给出有关弧矢的各项定义及相互求法，还说明了弧矢和圆径的相互关系，并由此给出计算弧矢的理论依据；后者是对"方五斜七"和圆周率的讨论. 全书给出十四术，主要讨论弧、矢、弦、截弦和截积间的关系和互求问题，都要借助勾股定理，有些要归结为解方程求出结果，其中有 10 个四次方程的解法是增乘开方法. 该书有明嘉靖癸丑(1553)刊本和《四库全书》本.

测圆算术(Cèyuán suànshù)　在《测圆海镜》基础上重新编录的勾股容圆专著. 四卷，明顾应祥撰，成书于 1553 年. 主要讨论勾、股、弦之间及各勾、股、各弦之间求容圆直径的各种问题及算法. 其对天元术一无记载，用传统的高次方程解法和算术方法求解. 该书内容在《测圆海镜分类释术》中都可找到. 有明嘉靖年刻本传世.

神道大编历宗算会(Shéndào dàbián lìzōng suànhuì)　明周述学所撰的一部数学著作. 十五卷. 大致内容如下：卷一入算，卷二子母分法，卷三勾股，卷四开方，卷五立方，卷六平圆，卷七弧矢经补上，卷八弧矢经补下，卷九分法互分，卷十总分，卷十一各分，卷十二积法，卷十三立积，卷十四隙积、算会圣贤姓氏，卷十五歌诀. 该书今传明抄本，藏于浙江省图书馆、南京图书馆.

盘珠算法(Pánzhū suànfǎ)　全称《新刻订正家传秘诀盘珠算法士民利用》，明代算书. 系现传最早的珠算书. 二卷，题署闽建徐氏心鲁订正、书林熊氏台南刊行，该刊本为两节版. 卷一上节图示珠算四则运算、大数进法、度量衡名称等；卷一下节包括"隶首上诀"(加法口诀)、"退法要诀"(减法口诀)、"归法总诀"(九归口诀)、"乘法"、"归除法诀"等. 卷二上节举例说明珠算乘法和除法的应用，卷二下节包括"算丈量田"和"算升斗数法"(日用算表). 书中所载算盘图皆为梁上一珠、梁下五珠，书中还给出迄今所知最早的珠算加法口诀和减法口诀，与今之口诀相同. 该书仅日本内阁文库藏有明万历元年(1573)原刊本.

数学通轨(Shùxué tōngguǐ)　明代珠算书. 不分卷，明柯尚迁撰，成书于 1578 年. 全书分四部分：

1. 算学须知. 含数原(数的生成和进位制及度量衡)、初定算盘图式、九九上法语(加法口诀)、九九进退图式、习数法语、习九九总念歌、九归总歌法语(九归口诀)、九归因乘法语(乘法口诀)、九归重演法语、撞归法语(撞归口诀)、还原法语(还原口诀)、因法、乘法、九九上进下退法语图式、九因九归总歌等.

2. 归除诠要. 含因乘归除义、加法、减法、金蝉法义、九归分数、九因法总数、定身除法、加法、归除法分数、乘法等.

3. 九章释例. 讨论《九章算术》的一些内容.

4. 九章总义. 为算学杂论，主要是顾应祥《测圆海镜分类释术》序及唐顺之有关数学的论述. 其中"初定算盘图式"为珠算盘图，上二珠，下五珠，中间用木制横条隔开，与现在使用的算盘相同.

《数学通轨》与《书学通轨》合成二集，附于《曲礼外集补学礼六艺附录数学通轨》之后. 原本现藏日本尊经阁文库，中国科学院自然科学史研究所图书馆藏有李俨抄本.

一鸿算法(Yìhóng suànfǎ)　全称《新刻一鸿简捷便览算法》，一部珠算的入门书. 四卷，明余楷撰. 全书主要由算题和歌诀构成，有 36 首歌诀和 108 题. 卷一主要讲珠算法及算例；卷二是田地面积计算，卷末还有开平方法；卷三内容较杂，包括少量的体积问题、开立方、测量、"方程"、垛积及一些杂题；卷四讲斤两换算，即钱物换算比率. 此书仅有刻于 1585 年的首刊本，现国内惟一藏本在安徽黄山市博物馆.

算学新说(Suànxué xīnshuō)　明代算书. 一

卷，明朱载堉撰，刻于1603年.该书具体阐述用算盘进行高位开方运算的程序，涉及的数据非常庞大.此外，在讨论十二平均律的计算时，还应用了换算、等比数列的知识.

算法统宗(Suànfǎ tǒngzōng)　全称《新编直指算法统宗》，明代算书.一部以珠算盘为计算工具的应用数学书，是珠算集大成之作.十七卷及首一卷，明程大位撰，成书于1592年.《算法统宗》以《九章算术》的体例为宗，“参会诸家之法，附以一得之愚，纂集成书”.全书包括290个条目和595个应用问题，大多是从传本数学书中摘录的.该书首篇介绍“数有本源”，列举河图、洛书、八卦等.卷一至卷二介绍算学常识与珠算知识，如数学名词、算盘图式、珠算定位法、九九表、九归口诀、撞归口诀、起一还原口诀等；卷三至卷十二介绍传统算法，分方田、粟布、衰分、少广、分田截积、商功、均输、盈朒、方程、勾股等十类；卷十三至卷十六为算题汇编，介绍与上述十种算法相应的题目和解法；卷十七为杂法汇编，即不能归入前面诸卷的算法，包括写算、纵横图、三分损益法等.此书最末还载有“算经源流”，系一个书目，开列北宋元丰七年(1084)至明万历十六年(1588)间的算学书名51种，包括了这500年间大部分重要的数学著作.该书卷三所载“丈量步车”为程氏所创的一种量田工具，以竹、木制成，类似今之卷尺.卷四的“截两成斤歌”给出斤以下带两诸数相加的简便方法，这实际上是同时进行两种进位制的加法(斤以上十进，斤以下十六进).卷六的珠算归除开立方法为程氏首创.《算法统宗》出版之后曾被多次翻刻改编，版本很多，主要的有明万历壬辰(1592)宾渠旅舍初刊本(包括十七卷五集本和十七卷四集本两种)、明荣观堂、三桂堂十七卷五集翻刻本、明文茂堂十二卷本、清康熙五十五年(1716)十七卷四集翻刻本及《古今图书集成》本和1934年中华书局影印本等.

算法纂要(Suànfǎ zuǎnyào)　全称《新编直指算法纂要》，明代算书，为《算法统宗》的缩写本.四卷，明程大位撰，成书于1598年.为普及中算诸法及珠算应用，程大位将《算法统宗》“删其繁芜，揭其要领”，撰成《算法纂要》四卷.全书包括64个条目和124个问题.卷一内容与《算法统宗》卷一基本相同，稍微简略；卷二算法部分的歌诀说明悉依《算法统宗》，但题设不同；卷三系由《算法统宗》卷三编成；卷四由《算法统宗》最后一卷杂法内摘出.《算法纂要》是偏重于基本算法介绍和为解决日常计算问题而编写的.该书有明万历二十六年(1598)原刻本和崇祯九年(1636)翻刻本.

算法指南(Suànfǎ zhǐnán)　全名《新镌易明捷径算法指南》，明代算书，一部珠算启蒙读物.二卷，明黄嘘云(龙吟)撰，明万历三十二年(1604)刊行.书中所刊“珠算盘图”与《盘珠算法》相同，“九归总念”、“乘法歌诀”、“归除歌”等已与现在流行的珠算口诀完全相同.李俨藏有万历刊本.

嘉量算经(Jiāliáng suànjīng)　明代算书.三卷，明朱载堉撰.该书主要内容有三项：

1.创立十二平均律理论，并构造等比数列计算十二正律之长.

2.讨论纵黍、横黍两种律尺间的数量关系，相当于九进小数与十进小数间的换算.

3.详载珠算归除开平方法和珠算商除开立方法简法.

《嘉量算经》的版本主要有明万历间刊本及《宛委别藏》本.

测量法义(Cèliáng fǎyì)　明代算书.以《几何原本》的公理体系和演绎推理阐述西方测量术.一卷，明徐光启、利玛窦(Ricci，M.)编译.该书先介绍西方测量工具——造器“矩度”的构造和以直景、倒景布算的原理，然后以15个题目由浅入深地介绍高、深、广、远的测量方法，并给出了证明，最后还附以相似勾股形对应边成比例的算法.该书有《天学初函》本、《指海》本、《海山仙馆丛书》本、《中西算学丛书》本.

测量异同(Cèliáng yìtóng)　对《测量法义》的补充和续写之作.一卷，明徐光启撰.该书将吴敬《九章算法比类大全》勾股卷中的六个测量问题与西方的测量术进行比较，通过“对题胪列，推求同异”，以达到“会通中西”的目的.该书有《指海》本、《海山仙馆丛书》本、《中西算学丛书》本.

勾股义(Gōugǔyì)　明代算书.一卷，明徐光启撰.该书用《几何原本》、《测量法义》中的基本定理来解释或证明中国传统勾股测量法，使之趋于严格.该书有《天学初函》本、《指海》本、《海山仙馆丛书》本、《中西算学丛书》本.

同文算指(Tóngwén suànzhǐ)　明代算书.中国第一部系统介绍欧洲笔算的著作.由明李之藻和意大利传教士利玛窦(Ricci，M.)根据德国数学家克拉维乌斯(Clavius，C.)的《实用算术概论》与明程大位的《算法统宗》等书编译，包括“前编”二卷，“通编”八卷和“别编”一卷，书成于1613年.但“别编”未刊，仅有“截圆弦算”一节，以抄本传世.“前编”二卷介绍笔算的定位法和整数、分数的四则运算及约分、通分，其中整数除法为15—16世纪欧洲的“帆船法”，整数的加、减法以九减法、七减法进行验算，这些方法今已不用.书中将最大公约数称为纽数，分数的记法是分数线上为分母、分数线下为分子，与欧洲笔算记法相颠倒.“通编”八卷18节，是全书的中心内容，叙述了比例(包括正比、反比和复比)、比例分配、盈朒、一次方程组、数列(包括等差数列和等比数列)、开平

方、开立方、开高次方、带从开平方等算法.该编在目录中注明"补若干条"、"俱补"者,其内容采自中国传统的数学著作.此外,该编还辑入《算法统宗》、《勾股义》和《测量法义》中的一些难题.全书所有数码用汉字数字,所论内容并未超出中国传统数学范围,而笔算则是一种新的方法,对中国后来的算术影响很大.清代数学家对其非常重视,不断克服其缺点,使其渐臻完善,得以推广普及.《同文算指》被收入《四库全书》中,该书的初刊本现存故宫博物院图书馆和浙江省图书馆,其他版本还有《天学初函》本和《中西算学丛书初编》本.

欧罗巴西镜录(Ouluóbā xījìng lù) 介绍西方笔算方法的数学著作.一卷,作者不详,撰于明末清初.首先介绍四则运算法则,然后是定位法、试法、开平方、开立方乃至开高次方,内容分别来自《同文算指》和《九章算术》等书,最后两部分名为"金法"和"双法",前者即中国古代的"今有术"及相关算法,在中世纪欧洲被称为"黄金率"或"三率法",后者即中国古代的"盈不足术",在西方被称为"双设法".该书刊否不详,北京大学图书馆藏有清焦循抄本.

圜解(Huánjiě) 清初论述平面三角的数学著作.一卷,清初王锡阐撰,撰著年代不详.该书主要讨论三角八线的性质及两角和、差的正弦和余弦公式.王锡阐对两角的多种不同情形,均按照中国古代传统数学的方法和《几何原本》的理论逐一给出证明.在证明公式之前,王锡阐对所用到的数学名词和数学概念给以定义,有些与当时天算家的定义相同,有些对传统定义有所发展,有些则是引入新的概念.书中用"折"的概念取代几何学中"角"的概念,这一新概念几乎涉及到所有《几何原本》的定理.书中特别之处是对"平行线"没有给出明确的定义,并且对"圜中平行两线,得皆不为圜经,不得皆为圜经"这一定理没有给出证明.该书未见刊本,有一抄本现藏中国科学院自然科学史研究所图书馆.

算海说详(Suànhǎi suōxiáng) 清初珠算书.李长茂撰,刻于1659年.共九卷,分订六册,现于北京故宫博物院图书馆藏一孤本.第一卷为汇法章,介绍各种珠算算法,多系《算法统宗》内容,但所论较详.其中诗词亦有不同,如撞归法歌云:"归除之法要周知,数盈进上归成十.有归若是无除数,作九下将归数施.或仍无除再起一,下加归数以除之."内介绍四种后乘法,并加以正确评论.另有"首位挨乘法",这在珠算书中是第一次出现,是乘法的捷算法,为李长茂首创.第二卷,轨区章,为田亩计算;第三卷,勾股章,为勾股形解法;第四卷,开方章,为开平方、开立方、开四次方各法;第五卷,测贮章,为体积算法与堆垛计算;第六卷,功程章,为土方人工计算;第七卷,镜泉章,为斤两换算及利息计算;第八卷,衰分章,为比例分配计算;第九卷,匿覆章,为差分计算、盈不足和工程问题.全部内容,仍不出《算法统宗》范围,而所论较详.

数度衍(Shùdùyǎn) 清代算书.清方中通撰,成稿于1661年,刻于1687年.全书二十三卷,分订八册.卷首,数原、律衍、几何约、重学解;卷一,珠算;卷二、三,笔算;卷四,筹算;卷五,尺算;卷六至卷八,勾股章;卷九至卷十四,少广章;卷十五,方田章;卷十六,商功章;卷十七至十八,差分章;卷十九,均输章;卷二十,盈芀章;卷二十一,方程章;卷二十二,粟布章;卷二十三,九章解法.书中对清初流行的"四算"介绍较详.其弟方中履在序中说:"合四法而论其长,则珠之加减,笔之除,筹之乘,尺之比例."正确地指出当时流传的"四算"之优点.其内容以西算为主,杂以中算.大抵集辑诸家之长,而增损润色,勒为此编.珠算内有"乘除新法",增加五倍折中之法,为金蝉算之发展.又附其子方正珠之"正珠乘除新法",实为今之外数乘除法.

梅勿庵历算全书(Méi WùAn Lìsuàn quánshū) 清代算书,梅文鼎著作集.在梅文鼎去世(1721)以后,魏荔彤出资、杨作枚整理、补订,于清雍正元年(1723)由兼济堂刊刻出版.全书收梅文鼎数学、天文著作30种75卷,其中包括当时已出版过单行本的《平三角举要》、《弧三角举要》、《方程论》、《少广拾遗》、《度算释例》、《笔算》、《历学疑问》等,还有此前没有成书的遗稿,经杨作枚补订、整理而成书的.全书将梅氏著作分为四类:一为"言理之书",包括几何、三角、测量;二为"言数之书",包括割圜八线、对数、比例等;三为"言历之书",包括天文、历法著作;四为"言算之书",包括中国传统的珠算、少广、方程和西方的笔算、筹算、度算、比例等.该书是收录梅文鼎科学著作最多的一部书,对于保存与传播梅文鼎数学、天文著作有重要作用.但是也存在一些不足和缺点:

1. 梅氏著作并未收全,如各种数表(三角函数表、对数表等)均未收入.

2. 杨作枚在对梅文鼎遗稿的整理和补订工作中,加进了自己的见解和论述(如勾股正义);遗稿中重复部分,也未删减.

所以后来梅瑴成才又重新编辑《梅氏丛书辑要》.

方程论(Fāngchénglùn) 清代算书.六卷,清梅文鼎撰.这是梅文鼎的第一部数学著作.首卷"正名",讨论了"方程"一词的涵义,并按系数符号的排列情况对线性方程组进行了分类.第二卷"极数",则按问题的性质和解题的方法考察了"带分"、"迭脚"和"重审"三种情况.第三卷"致用",研究实际运算中可能简化的程度.第四卷"刊误",主要纠正前人著作

中的一些错误.第五卷"测量",主要介绍应用线性方程组进行天体测量实例.第六卷"方程御杂法",用实例说明"方程"与"粟米"、"衰分"、"均输"、"盈不足"等古典题材的关系,用以说明其"方程为数学之极致"的观点.此外,他还提出了把传统的"九数"分别纳入"算术"与"量法"这两大分支的数学分类思想.该书版本有李光地上谷刊本、《梅氏历算全书》本、《梅氏丛书辑要》本及《中西算学汇通》本、李安卿泉州刊本.

勾股举隅(Gōugǔ jǔyú)　清代算书.一卷,清梅文鼎撰.讨论勾股恒等式及勾股测量.该书主要推导与弦和和 $c+(b+a)$、弦和较 $(b+a)-c$、弦较和 $c+(b-a)$、弦较较 $c-(b-a)$ 有关的几个恒等式:

$$[(b-a)+c][c-(b-a)]=2ab;$$
$$[(b+a)+c][(b-a)-c]=2ab;$$
$$\frac{1}{2}[(b+a)+c]^2=(c+a)(c+b);$$
$$\frac{1}{2}[(b+a)-c]^2=(c-a)(c-b)$$

及它们在勾股形诸事互求中的应用.该书还用勾股术分析阐述了《算法统宗》勾股章中"度影量竿"、"隔水量高"两题的立法理由.《勾股举隅》只列出 13 个例题,目的在揭示解决此类问题的途径.其版本有《梅氏历算全书》本、《梅氏丛书辑要》本、《中西算学汇通》本及 1795 年听彝堂《艺海珠尘》本.

方圆幂积(Fāngyuán mìjī)　清代算书.一卷,清梅文鼎撰,约成书于 1710 年.该书主要利用旋转体和重心间的关系推导球体积计算公式,其所有模型对后来徐有壬的工作很有启发.内容包括:方中容圆和圆中容方的相应长度及面积之比,立方容球和球容立方的相应长度及面积之比,等积方、圆的相应长度比,球体与其外切圆柱体的表面积比与体积比,球冠的面积与球扇形的体积等.其版本有《梅氏历算全书》、《梅氏丛书辑要》和《中西算学汇通》数种.

几何补编(Jǐhé bǔbiān)　清代算书.讨论正多面体和半正多面体的计算和性质的著作.四卷,清梅文鼎撰.卷一"论四等面体、八等面体",卷二"论二十等面体",卷三"论十二等面体",卷四"论诸体比例".该书主要内容有下列三点:

1. 给出正四面体、正六面体(立方体)、正八面体、正十二面体、正二十面体这五种正多面体的体积求法.

2. 提出两种半正多面体,分别称为方灯体和圆灯体.所谓灯体是这样得到的:"凡诸体(正多面体)改为灯(体),皆半其边,作斜线剖之."即是取正多面体各条棱的中点,联结相邻的中点并剖去外凸部分.由正六、八面体所得为方灯,由正十二、二十面体所得为圆灯.

3. 讨论正多面体之间及其与球体间的互容关系、多面体间的各种比例关系,书中把"理分中末线"(即黄金分割)与多面体的计算联系起来.《几何补编》的版本有:《梅氏历算全书》本、《梅氏丛书辑要》本和《中西算学汇通》本.

平三角举要(Píngsānjiǎo jǔyào)　原名《三角法举要》.清代算书,中国第一部平面三角学教科书.五卷,清梅文鼎撰.卷一"测算名义",介绍各种定义、同角三角函数间的关系、三角函数表、互为余角和补角的三角函数间的关系等.卷二"算例",利用例题阐述有关三角形的各种结论,其中包括正弦定理、正切定理和半角定理.卷三"内容外切",叙述有关三角形面积、内切圆和外接圆径、内容正方形边长等公式及相应的几何作图法.卷四"或问",利用勾股理论对各种三角形解法进行证明.卷五"测量",包括"测高"、"测远"、"测斜坡"、"测深"等不同类型的三角测量法.这是作者借助传统勾股理论推导三角学的一种尝试.该书被收入《梅氏历算全书》、《梅氏丛书辑要》、《西学大成》和《中西算学汇通》.其单刻本有光绪年间的陕西求友斋刊本和成都徐树勋刊本.

弧三角举要(Húsānjiǎo jǔyào)　清代算书.中国第一部球面三角学教科书.五卷,清梅文鼎撰,自序于 1684 年.卷一"弧三角体势",介绍有关球面几何知识并对球面三角形进行分类.卷二"正弦三角形",使用黄道、赤道等较为人们熟悉的名词阐述了球面直角三角形的解法,并介绍更具有一般性的正弦定理.卷三"垂弧法",详细讨论了将一般球面三角形化为球面直角三角形的方法.卷四"次形法",介绍利用球面三角形边或角的对称、互余、互补等关系构造新的球面三角形进而求解的方法.利用这种方法,梅文鼎给出了全部球面三角形的解法.卷五"八线相当法",排列出四类共 21 个成比例关系的三角公式,并列表说明各种公式的具体用法.该书原刊本为李光地上谷刊本,后又被收入《梅勿庵算书五种》、《梅氏历算全书》、《梅氏丛书辑要》及《中西算学汇通》等丛书.

环中黍尺(Huánzhōng shǔchǐ)　清代算书.一部用投影法讨论球面三角问题的著作.五卷,清梅文鼎撰,成书于 1700 年.梅文鼎用正投影法把球面投影到平面上,并得到三个性质:

1. 大圆上的点皆可为球极投影.

2. 纬线的实长等于以纬线投影为直径的半圆周.

3. 经线的实长等于大圆的半圆周.

这三个性质是梅氏以正投影法讨论球面三角形问题的主要依据.利用它们,梅氏证明了球面三角的余弦定理,导出了积化和差公式,以加减代乘除,简化了计算,并用以解球面斜三角形.梅氏主要讨论已

知三边、两边一夹角、两边一对角、两角夹一边求解余边余角的情形.由于正投影的方法和通过正投影法将球面三角转化到平面上来研究的思想,使《环中黍尺》成为梅文鼎最重要的数学著作.该书版本有李光地上谷刊本、《梅勿庵算书五种》本、《梅氏丛书辑要》本和《中西算学汇通》本.

堑堵测量(Qiàndǔ cèliáng)　清代算书.一部关于球面直角三角形解法的著作.二卷,清梅文鼎撰.梅氏此书旨在说明两个问题:

1. 球面三角形可通过几何模型来研究.

2. 西方的球面三角学与中国传统的勾股理论相通.

《堑堵测量》以堑堵为模型推导黄经、赤经和赤纬的关系式,并解释《授时历》的弧矢割圆术,使中西两法以堑堵为媒介得以会通.梅文鼎从球面三角形及其所在球中分离出两个立体,它们能反映该三角形的边、角关系.梅氏称这两个立体模型为立三角仪(又叫勾股锥形)和方直仪(又叫勾股方锥形),它们即《九章算术》中出现的鳖臑和阳马,二者合成堑堵,这即是此书书名的来历.《堑堵测量》版本有李光地上谷刊本、《梅勿庵算书五种》本、《梅氏丛书辑要》本和《梅氏历算全书》本.

算义探奥(Suànyì tànào)　清代算书.不分卷,清陈厚耀撰.该书分为勾股法义、积求勾股法义、勾股容方容圆法义、三角形求中长法义、测量法义、割圆法义、圆求弧背法义、圆容法义、错综法义、推古历法、推授时历法、推授时历百年消长法等部分,大多为几何学内容.其中"错综法义"最具独到见解.该章首先给出排列组合的各种不同形式,包括无重排列、组合与可重排列、组合,并分别举例予以说明.此书未刊,中国科学院自然科学史研究所所藏手稿本为海内孤本.

少广补遗(Shǎoguǎng bǔyí)　一本关于垛积问题的专著.一卷,清陈世仁撰,大约成书于1720年.其内容分两大部分:

1. 研究各种类型的垛积问题的算法.

2. 例题,主要是求级数的项数与最后一项的数值问题.

全书共7节,讨论了12类共37个垛积公式,许多为作者自己独创.该书被收入《四库全书》,另有抄本传世,现存南京图书馆、广东中山图书馆及中国科学院自然科学史研究所图书馆等处.

数理精蕴(Shùlǐ jīngyùn)　中国第一部按学科编排的数学著作.为康熙敕编百卷乐律历算书《律历渊源》中的第三种,由梅瑴成等人汇编,历时十年,于康熙六十一年(1722)六月成书,并于雍正元年(1723)十月首次刻竣.《数理精蕴》共53卷,分为三部分:上编5卷、下编40卷及数学用表四种8卷.上编题为"立纲明体",主要内容为"数理本源"、"几何原本"、"算法原本",提出了指导全书的基本理论;下编名为"分条致用",主要内容为算术、平面几何与平面三角、立体几何、代数,分为"首部"、"线部"、"面部"、"体部"、"末部"五部分.首部两卷(卷一、卷二),讲度量衡制度、定位制度、整数与分数的四则运算.线部八卷(卷三至卷十),叙述各种比例问题、盈不足术及一次方程组解法.面部十二卷(卷十一至卷二十二),为平面几何、平面三角及开平方等问题,其中卷十六给出圆内接正十四边形和正十八边形边长求法及由本弧通弦求其三分之一弧通弦法,为造三角函数表的新增方法.体部八卷(卷二十三至卷三十),专论立体几何.末部十卷(卷三十一至卷四十),主要介绍西方传入的代数学知识,其中卷三十一至卷三十六为"借根方比例",借根方比例又称借根方法,所介绍的主要内容是方程的建立和解法,给出高次方程正根的一种求法,此法与中国传统数学的开方术原理相同;卷三十八介绍对数表造法,包括对数求法和造表程序,对数求法有中比例法、真数递次自乘法及递次开方法等三种.下编最后的四种数学用表是三角函数表、素因数表、对数表及三角函数对数表.《数理精蕴》汇集了1690年以来传入的西方数学知识,并吸收了中国数学家的一些研究成果,对清代数学的发展产生了重要影响.此书后被收入《四库全书》.其版本主要有《律历渊源》本、《四库全书》本、光绪八年(1882)江宁藩署刊本、广东藩署重刊本、光绪二十二年(1896)石印小本、宣统三年(1911)上海文瑞楼石印本及《万有文库》本、《国学基本丛书》本(无表).

增删算法统宗(Zēngshān suànfǎ tǒngzōng)清代珠算书.明程大位原编撰,清梅瑴成增删.共十卷,成书于1760年.清朝初年,古算书多失传不见,只有程氏《算法统宗》流传民间.梅瑴成因《算法统宗》"岁久板多漶漫,若不加修整,将不可读,而九章几乎息矣","因取其书,重加校勘,删其繁芜,补其缺遗,正其讹谬,增其注解",以成其书.《增删算法统宗》中删去了"河图洛书"、"孕推男女"等荒诞不经的内容及原杂法内各种方法,并改正了原书的一些错误,也吸收了一些西洋算法.此书流传甚广,清末刻本甚多,至民国尚有各种石印本,其中以光绪三年(1877)江南制造局贾步纬校刻本最善.

梅氏丛书辑要(Méishì cóngshū jīyào)　清初著名天文学家、数学家梅文鼎的数学和天文著作选辑.梅文鼎一生致力于中西历算的研究和传授,著述等身.康熙六十一年(1722),魏荔彤将梅氏天、算著作编为《梅氏历算全书》,并于雍正元年(1723)于兼济堂刊行.梅文鼎之孙梅瑴成晚年时认为魏本的《梅氏历算全书》"校难编次不善,而名为全书亦非实录",故将梅文鼎著作于乾隆二十六年(1761)"另外编

次”，成为《梅氏丛书辑要》二十三种 60 卷，该书以先数学、后天文历法的次序排列，其中包括有数学著作十三种 40 卷，并附梅瑴成著作二种 2 卷（《赤水遗珍》1 卷、《操缦卮言》1 卷）. 上述十三种数学著作基本按照算术、代数、平面几何、立体几何、平面三角、球面三角的顺序排列. 它们是《笔算》5 卷（1693）、《筹算》2 卷（1678）、《度算释例》2 卷（1717）、《少广拾遗》1 卷（1692）、《方程论》6 卷（1672）、《勾股举隅》1 卷、《几何通解》1 卷、《平三角举要》5 卷、《方圆幂积》1 卷（1710）、《几何补编》4 卷（1692）、《弧三角举要》5 卷（1684）、《环中黍尺》5 卷（1700）、《堑堵测量》2 卷，其中前三种论述笔算方法，介绍纳皮尔算筹和比例规的原理和使用，涉及很多算术知识；第四种讨论古代开方术，第五种研究线性方程组的解法，均属代数方面；第六、七种研究平面几何问题，前者主要通过几何图解法结合代数方法来解决传统的勾股相求问题，后者着重用中国传统的勾股理论来研究《几何原本》中的一些内容；第八种是中国学者自己编写的第一本平面三角学著作；第九种探讨球的体积和表面积计算；第十种研究各种正多面体的体积、作图、互求及相容问题；最后三种全属于球面三角学，对西方传入的三角公式予以证明，利用模型法、透视法及图解法等方法.《梅氏丛书辑要》的版本有乾隆二十六年（1761）承学堂刊本、同治十三年（1874）颐园刊本及上海龙文书局石印本、鸿文书局石印本等.

赤水遗珍（Chìshuǐyízhēn） 清代数学著作. 梅瑴成著，附刻于《梅氏丛书辑要》(1761)之后. 内容主要有以下几项：

1. 测量北极出地高度简法.
2. 正切定理简捷的新证法.
3. 证明球面三角形半角正弦定理.
4. 发现西方代数方程（借方根）与中国传统算法“天元术”的联系，认为这两种算法“名异而实同”，并举例说明了二者的一致性. 这一发现对沟通中西数学是有贡献的.

此外，书中还记载了杜德美（Jartoux，P.）传入的三个级数公式（分别由牛顿（Newton，I.）和格雷果里（Gregory，J.）给出的）. 由此而引发明安图等后来者对幂级数展开的研究.

视学（Shìxué） 清代算书. 中国最早的一部讨论画法几何的专著. 一卷，清年希尧撰. 全书以图为主，附以说明，图文配合阐述中心投影和平行投影的原理及作图法. 书中介绍的术语有地平线（基线）、视平线、头点（主点）、乱点（灭点）、离点（距点）等. 所用作图法有量点法、灭点法、截距法等. 该书初刻于雍正七年（1729），后年希尧又“苦思力索补缕五十余图并为图说以附益之”，于雍正十三年（1735）增订再版. 国内目前仅有两部再版本，一部藏于中国国家图书馆，一部藏于中国科学院自然科学史研究所图书馆.

割圆密率捷法（Gēyuán mìlǜ jiéfǎ） 清代数学家研究无穷幂级数的开篇之作. 四卷，清明安图撰. 明安图生前该书尚未定稿，临终前嘱托门人陈际新等人算校，后者于 1774 年整理成书，并有几个抄本在数学家中流传，直到 1839 年才正式付刻. 首卷“步法”列出圆径求周（圆周率的一种级数表达式）、弧背求正弦（正弦的展开式）、弧背求正矢（正矢的展开式）、弧背求通弦、弧背求矢、通弦求弧背、正弦求弧背（反正弦展开式）、正矢求弧背（反正矢平方展开式）、矢求弧背等九个无穷级数公式. 每个公式之后还有为解释和运用该公式所加的按语. 其中前三个为法国传教士杜德美（Jartoux，P.）所介绍之西方成果，后六个则是明安图所创，清代有人笼统地称之为“杜氏九术”是不对的. 此外，明安图还提出了利用余弧、余弦、余矢借助三角变换而简化计算的四个公式，同时也解决了余弦和反余弦的计算. 卷二“用法”是各个公式在数学和天文学上的应用示例，其中有正弦、余弦等三角函数值的计算、解平面三角形和球面三角形、金星的赤经、赤纬与黄经、黄纬的计算与换算等. 卷三、卷四为“图解”上、下，详细阐述各个公式的证明方法. 卷三主要是运用割圆连比例法和级数回求法推算弧与弦之间的关系，卷四则是推算弧与矢之间的关系及简化计算的四个公式. 在推算过程中，有些问题还提出了多种解法. 该书除了 1839 年岑建功首刊本之外，还有罗士琳《观我生室汇稿》本、道光年间陈氏刊本和刘铎《古今算学丛书》本传世.

九章算术细草图说（Jiǔzhāng suànshù xìcǎo túshuō） 清代算书. 九卷，清李潢撰. 该书以孔继涵刻戴震校微波榭本《算经十书》中的《九章算术》为底本，由按、草、说、图四部分内容构成.“按”主要是校勘意见，着重校勘戴震未校的部分及孔刻本中的误刻；“草”是根据《九章算术》术文及其刘徽注列出演算程序；“说”主要是对刘徽注与李淳风注中的文字逐句阐释，亦兼及校勘；“图”即根据术文和注释补的图. 这些工作大都正确反映了刘徽等人深刻的数学思想，是刘徽注之后对《九章算术》最为详尽和准确的阐述，为后世学习研究《九章算术》和刘徽注的必读书籍. 此书经沈钦裴校算后于 1820 年由语鸿堂刊行，并被多次翻刻.

海岛算经细草图说（Hǎidǎo suànjīng xìcǎo túshuō） 清代算书. 一卷，清李潢撰. 附刻于《九章算术细草图说》之后. 该书亦由按、图、说、草四部分内容组成，其中“按”、“图”、“说”为李潢自撰，骆腾凤校订，“草”为沈钦裴所补.“按”是李潢提出的校勘，“说”与“图”相配合，以“今有术”说明刘徽造术的理

由.

缉古算经考注(Jīgǔ suànjīng kǎozhù)　清代算书. 二卷,清李潢撰. 该书以《九章算术》的传统方法考注《缉古算经》,误者正之,缺者补之. 刊误 700 余字. 但稿未成李潢即去世,其弟子刘衡为之补注校订. 道光十二年(1832)由李兆洛作序刊行.

勾股形内容三事和较(Gōugǔxíng nèiróng sānshì héjiào)　清代讨论勾股形内诸元素间的关系的专著. 不分卷,清博启撰. 勾股形内容三事指勾股形的弦上的高线、内接正方形的边长及内切圆的直径这三个元素. 勾股形内容三事或三事和较任知其二,借助和、较求解勾股形的三边,是《勾股形内容三事和较》一书的主要内容. 该书由八部分组成:总论(包括总图、方边中垂线合图说、圆径中垂线合图说、方边圆径合图说及三事和较全图说)、解略篇四则、等积形说八图、六十题总目、前法十、中法三十八、后法十二和绘图分数. 总论中的总图给出了勾、股、弦、中垂线、内容方边、内容圆径等概念,后面的四个"图说"相当于四条基本定理,是后面"等积形说"中证明的基础."解略篇"给出勾股形及其中元素的名称,并对各事和较给出约定."等积形说"以前两部分为基础,证明了八个等式,相当于八条定理,它们是以后解题的基础. 接下来的四部分则是全书六十个问题的题目和解法. 在最后一部分"绘图分数"中,给出在勾六千、股八千、弦一万时的勾股形内容三事及三事和较及和较的具体数值以供参考. 该书今传道光元年(1821)姚元之抄本,现藏中国国家图书馆.

里堂学算记(Lǐtáng xuésuànjì)　清代数学家焦循的数学著作集. 五种十六卷. 包括《释轮》二卷、《释椭》一卷、《释弧》三卷、《加减乘除释》八卷和《天元一释》二卷.《释轮》二卷讨论传入中国的第谷天文学说中的本轮、次轮的几何原理,"上篇言诸轮之异同,下篇言弧线之变化,以明立法之意".《释椭》一卷讨论传入中国的卡西尼天文学说中的几何知识.《释弧》三卷"上篇释正弧弦切之用,中篇释内外垂弧之义,下篇释次形及矢较之术".《加减乘除释》仿照刘徽注《九章算术》之意,试图对《九章算术》等书的各种传统算法予以会通和概括,它是焦循的代表作.《天元一释》是对"天元术"的阐释,辨明了《测圆海镜》中"立天元一"和《数书九章》中"立天元一"的不同,并注释了各种类型的方程及其变形的求解方法.《里堂学算记》有嘉庆四年(1799)《雕菰楼丛书》本及光绪二十二年(1896)《中西算学丛书初编》本.

加减乘除释(Jiājiǎn chéngchú shì)　《里堂学算记》之一种. 八卷,清焦循撰. 第一、五两卷主要论述数的加减运算规则;第二卷主要论述二项式的乘方运算;第三卷主要论述数的乘除运算规则;第四、六两卷主要论述分数的性质及其运算规则;第七卷主要论述各类比例问题;第八卷主要论述加减乘除四则运算规则. 全书共列出有关运算规则 93 条,每一条都相当于现代数学教科书中的定理或公式. 该书除被收入《雕菰楼丛书》外,还被收入《中西算学丛书初编》中.

天元一释(Tiānyuán yíshì)　《里堂学算记》之一种. 二卷,清焦循撰,成书于嘉庆四年(1799). 该书主要阐述宋元数学的重要成果之一"天元术". 卷上首先阐述"立天元一"的几何意义,对其所用名词一一予以解释,接着根据一元高次方程各项系数符号的变化情况将方程分类,并将《测圆海镜》中的方程予以归类. 此外还具体讨论了宋元数学中"天元在上,太极在下"和"天元在下,太极在上"两种记法的利弊. 卷下首先辨明了《数书九章》中的"立天元一"与《测圆海镜》等著作中"天元术"的"立天元一"不同,接着重点对各种类型的方程及其变形的基本解法一一疏导、注释,最后还通过考证,否定了当时流行的"李演秦说". 此书除收入《里堂学算记》外,尚有《中西算学丛书》本、《富强丛书续集》本、《测海山房中西算学丛刻初编》本及上海著易堂铅印本传世. 其稿本现藏中国国家图书馆.

开方通释(Kāifāng tōngshì)　清代阐述宋元数学中的增乘方法的著作. 一卷,清焦循撰. 前半部分论"十二式",每一式都列出一至十次方程并以题例及算草加以说明,是全书的核心,其中前八式实际上是八类不同形式的高次方程,后四式则是增乘开方法的几个关键步骤;后半部分主要以实例说明李冶、秦九韶"开方"方法的异同,并特别阐明了"投胎"、"换骨"、"开连枝同体术"等方法. 此书有光绪六年(1880)德化李氏刊本,后又被李盛铎收入《木犀轩丛书》中.

衡斋算学(Héngzhāi suànxué)　清代数学家汪莱的数学著作集. 七册.《衡斋算学》第一册(1796)和第四册(1798)前半是汪莱对球面三角形的讨论. 第一册系统讨论了球面三角形有解、无解的条件. 对任意球面三角形,已知两边及其一对角或两角及其一对边的求解,各列出 26 种情形讨论. 对球面直角三角形,讨论了 9 种有解的情形并给出具体解法. 对于已知球面三角形边角六元素中任意三个,求其余元素,共有六种情形. 第四册就六种情形给出有解的充分条件. 汪莱对方程论的研究见于《衡斋算学》第二册(1798)、第五册(1801)和第七册(1805). 在第二册中,汪莱指出形如 $x(p-x)^2=q$ 的方程可有二正根,其中 $p>0,q>0,0<x<p$. 在该问题的研究中,汪莱还给出了等勾弦和两勾股形等积的充分必要条件. 第五册系统讨论有实根的二次方程和三次方程正根的个数,无正根的情形不予讨论. 本册按照方程系数的符号列举 96 条,归纳之后,共是 16 个方程.

凡方程有一正根者称为可知，多正根者称为不可知，有一正根或多正根者称为可知或不可知. 对最后一种情形，汪莱给出判别方法. 第七册讨论有实根的高次方程正根个数的出现规律和正根的判别条件，无实根的情形不予讨论. 本册提出了方程的分类，以举例方式显示正根出现规律，说明正根的判别条件，给出方程 $x^n - px^m + q = 0$ (n,m 是正整数，$n>m$，$p>0,q>0$)有正根的充分必要条件是

$$q \leqslant \frac{n-m}{n}p\left(\frac{m}{n}p\right)^{\frac{m}{n-m}}.$$

第四册后半为《递兼数理》，在此处，汪莱将组合作为一个数学问题第一次予以严谨的论述，其中包括组合的定义、计算公式、基本性质和一个组合恒等式. 第三册(1798)和第六册(1801)讨论三角函数表造法，分别给出由本弧通弦求其五分之一弧通弦和由本弧通弦求其三分之一弧通弦的方法.《衡斋算学》的版本有二册本(六九书榭，1798 年刊于歙县)、六册续刊本(六九书榭、嘉树堂，1802 年续刊于扬州)、七册续刊本(六九书榭、嘉树堂、桂荫堂，1810 年续刊于石埭). 现在流传较多的是《衡斋算学遗书合刻》本，其有咸丰四年(1854)夏燮鄱阳县署刊本和光绪十八年(1892)汪廷栋闻梅旧塾刊本.

参两算经(Cānliǎng suàn jīng)　清代讨论 p($2\leqslant p<10$)进制乘、除法的数学著作. 一卷，清汪莱撰. 全书分为“经”、“说”两部分. “经”又包括“原始”、“立纲”、“汇奇”、“列偶”、“会归”五节，其中“立纲”的目的在于强调“逢身进位”这一计数原则，“汇奇”和“列偶”则分别给出二至九进制的乘、除法则. 书中列出了二至九进制的全部乘法口诀，其所提出的“法数合乃宜”，即要求选择除数使商为整数或有限小数. 在最后部分的“参两数说”中，汪莱用实例说明了非十进制来源于实践. 该书没有单刻本，收入《衡斋遗书》卷二，有咸丰四年(1854)夏燮刻本和光绪十八年(1892)汪廷栋重刻本.

李氏遗书(Lǐshì - yíshū)　清代数学家李锐的天文、数学著作的汇编. 11 种 18 卷. 包括《召诰日名考》一卷、《三统术注》三卷、《四分术注》三卷、《乾象术注》二卷、《奉元术注》一卷、《占天术注》一卷、《日法朔余强弱考》一卷、《方程新术草》一卷、《勾股算术细草》一卷、《弧矢算术细草》一卷和《开方说》三卷，其中后四种为李锐的数学著作.《方程新术草》(1798)校释《九章算术》刘徽“方程新术”;《弧矢算术细草》(1798)和《勾股算术细草》(1806)阐发顾应祥的著作;《开方说》是关于方程论的著作，为李锐的代表作.《李氏遗书》的版本有清道光三年(1823)阮氏刊本和清光绪十六年(1890)上海醉六堂刊本.

勾股算术细草(Gōugǔ suànxshù xìcǎo)　《李氏遗书》之一种. 一卷，清李锐撰. 该书利用天元术和演段法系统总结中国传统的勾股算术，给出由勾、股、弦及其和较为条件求解勾股形的 78 种情况，并用“图”和“解”(即利用出入相补原理)对其中 25 种基本算法或公式予以证明. 该书除有《李氏遗书》本外，还有嘉庆十二年(1807)吴下单刊本和《白芙堂算学丛书》本.

开方说(Kāifāngshuō)　《李氏遗书》之一种. 三卷，清李锐撰. 卷上主要讨论高次方程正根个数与系数符号间的关系，得出实系数方程的正根个数等于其系数序列的变号个数或相差一个偶数. 这一结论与现代方程论中判定正根个数的“笛卡儿符号法则”十分相似，这是全书最突出的成果. 此外，卷上还介绍增乘开方法. 卷中引进了负根的概念，并阐述了根据增乘开方法提出的“代开法”——先求高次方程的一根再由变形方程续求其余根的一种方法. 卷下介绍了重根的概念和根与系数之间的关系，讨论了各种方程的变形，对各种方程变换如倍根变换、减根变换、反根变换等都做了解释并予以完善. 此外，还讨论了“无数”——虚根共轭的情况. 该书李锐在世时仅完成前两卷，卷下是由其弟子黎应南遵其遗嘱补成的. 有《李氏遗书》本、《白芙堂算学丛书》本和《古今算学丛书》本传世.

少广正负术(Shàoguǎng zhèngfùshù)　清代关于方程的解法和应用的数学著作. 内篇三卷、外篇三卷，清孔广森撰. 内篇三卷讲平方、立方、三乘方诸开法，仅立方就有“带从立方”、“减从立方”、“负隅立方”、“连枝隅立方”等. 外篇三卷讨论高次方程的应用，卷上包括“割圆弧矢”、“新设三角法”、“方田杂法”、“推秦氏方斜求圆算草”及“堆垛”等条目;卷中是若干勾股“难题”，涉及到勾股和较、勾股幂、勾股边幂相求、勾股容方、勾股中长、勾股不同式等方面;卷下是“斛方补问”及订正《算法统宗》求筑堤法一则. 该书版本有《顨轩所著书》本、《指海》本、《翠琅玕馆丛书》本和《古今算学丛书》本(只收内篇三卷).

求一算术(Qiúyī suànshù)　清代阐述秦九韶“求一术”的数学著作. 三卷，清张敦仁撰，成书于 1803 年. 上卷究其原，首先阐述求一术与更相减损的关系，然后通过例题将一次同余式组解法中化非互素模为互素模的步骤“依秦氏之说，略加修饰而衍之”. 中、下卷则明其法，中卷为杂法，下卷为演纪，举唐《麟德历》、《大衍历》、《宋崇天历》、《纪元历》及元《授时历》为例，推求上元积年. 这一著作除 1831 年自刻本外，还有兰陵孙氏岱南阁刊本，而以上海博古斋影印《岱南阁丛书》本流传最广.

缉古算经细草(Jīgǔ suànjīng xìcǎo)　清代算书. 三卷，清张敦仁撰，书成于 1803 年. 张敦仁在研读《缉古算经》时，见书中羡道、筑堤等二十术均有术无草，且词理隐奥，同时十六术以下脱字甚多，于是

和李锐商榷为此书演草.张氏根据《缉古算经》最后三题残存的文字,经过细致的数字计算,补足了题目、答案和术文部分,但没有校补王孝通"自注"中脱落的文字.张敦仁用天元术注解《缉古算经》,根本没有理会王孝通的"自注".该书有1803年艺学轩原刊本、《知不足斋丛书》本、《白芙堂算学丛书》本和《丛书集成初编》本等.

艺游录(Yìyóulù) 骆腾凤对古代数学著作的研究札记.二卷,清骆腾凤撰.该书共22篇,其于衰分、方程、勾股等法及《九章算术》所未载和古今算书未解决的问题,溯其源、正其误,随所见而记之,内容涉及《九章算术》、《孙子算经》、《缉古算经》、《数书九章》和《测圆海镜》等.其中《衰分补遗》篇以方程术与秦九韶大衍求一术求解《张丘建算经》中的百鸡问题,在中国数学史上首次正确地解决了这个问题.此外,该书对《缉古算经》仰观台题的研究、校勘,关于正负数的诠释,对勾股知识的总结等都有一定成就.此书与其另一本著作《开方释例》合称《骆氏算书》,刻于1815年.该书还有道光二十三年(1843)何锦校刊本和光绪十年(1884)重刊本(附《识误》一卷).

重差图说(Chóngchā túshuō) 清代解证《海岛算经》的数学著作.一卷,清沈钦裴撰.该书试图以相似勾股形的对应边成比例来说明刘徽《海岛算经》术文的正确性.给《海岛算经》的每一个问题都补以一图一说一草.每个图下面有一段文字,说明所用的相似勾股形及有关线段;"说"是对术的说明和解释,它把问题归结为用今有术来解;"草"是具体的计算过程.该书未刊,有手抄本藏中国科学院自然科学史研究所图书馆.

四元玉鉴细草(Sìyuán yùjiàn xìcǎo) 亦名《四元细草》、《四元玉鉴演草》.清代算书.不分卷,清沈钦裴撰.该书是对元朱世杰《四元玉鉴》的研究之作,其首先在卷首列出"今古开方会要之图细草",并自拟答案都是11的带从开平方至开7乘方的7个例题的增乘开方程序,然后给原书各题补以"草"或"细草",说明朱氏造术之理.尤其是对"四元消法"和"垛积术"的解释,较为切合朱氏之原意.此书未刊,有手抄本藏中国国家图书馆.

四元玉鉴细草(Sìyuán yùjiàn xìcǎo) 清代算书.二十四卷附一卷附增一卷,清罗士琳撰,成书于1843年.元朱世杰的《四元玉鉴》只有解题方法,没有详细演算,演算过程不大清楚.针对这一问题,罗士琳经过10年努力,对此书24门每一问题均给出详算,并对原书提出校改共130余处.该书流传较广,影响很大,但对朱世杰立术本意的解释没有沈钦裴编撰的《四元玉鉴细草》准确.此书版本主要有《观我生室汇稿》本、1891年成都志古堂刊本、1896年上海鸿宝斋石印本和《古今算学丛书》本、《测海山房中西算学丛刻初编》本.

观我生室汇稿(Guānwǒshēngshì huìgǎo) 清代数学家罗士琳的数学著作集.十一种九十四卷.包括《勾股容三事拾遗》三卷附例一卷、《三角和较算例》一卷、《四元玉鉴细草》二十四卷附一卷附增一卷、《演元九式》一卷、《台锥演积》一卷、《校正算学启蒙》三卷、《续畴人传》六卷、《周无专鼎铭考》一卷、《弧矢算术补》一卷.以上皆为罗氏自撰.另附有明安图的《割圆密率捷法》四卷和阮元的《畴人传》四十六卷.该集有道光年间刊本.

勾股容三事拾遗(Gōugǔróngsānshì shíyí) 《观我生室汇稿》中的一种.三卷附例一卷,清罗士琳撰,成书于1826年.该书立基本问题60个,并设备例25个,广例25个,利用天元术研究直角三角形内容方边、圆径、垂线等问题.

演元九式(Yǎnyuán jiǔshì) 《观我生室汇稿》中的一种.一卷,清罗士琳撰,成书于1827年.该书通过例题以正负开方术解释朱世杰《四元玉鉴》中天元术的"进退升降消长诸例".这是继朱世杰之后第一部研究天元术的著作.

台锥演积(Táizhuī yǎnjī) 《观我生室汇稿》中的一种.一卷,清罗士琳撰,成书于1837年.该书受朱世杰垛积和立体体积计算的启发,给出了圆锥垛和圆台垛的各种互求公式,并以密率入算重新计算了圆台、圆锥的体积,同时还首次研究了椭圆锥和椭圆台体积的计算.

三角和较算例(Sānjiǎohéjiào suànlì) 《观我生室汇稿》中的一种.一卷,清罗士琳撰,成书于1840年.该书研究三角形边角和较相求算法.全书分三部分设为三例,每例八题,每题四术,共九十六术,不涉及具体数字,故可以看作是一般性公式.其方法是借助三角形某一边上的高将其分为两个直角三角形,以天元术入算.

弧矢算术补(Húshǐ suànshù bǔ) 《观我生室汇稿》中的一种.一卷,清罗士琳撰,成书于1843年.该书在顾应祥《弧矢算术》和李锐《弧矢算术细草》原有三条公式的基础上,又增加了三条基本公式,并将原书的十三术推广为四十术,使弧矢论的初等研究基本上达到了完备的程度.

校正算学启蒙(Jiàozhèng suànxué qǐméng) 《观我生室汇稿》中的一种.三卷,清罗士琳校注.罗士琳在细草《四元玉鉴》时得知朱世杰尚有一部著作《算学启蒙》已失传,故四处搜寻,终于由汪喜孙"于琉璃厂书肆中得朝鲜重刊本,计三卷",立即为之校注,并于1839年由阮元作序在扬州重刻出版.此后《算学启蒙》在中国又重有定本.

董方立算书(Dǒngfānglì - suànshū) 清代数学家董祐诚的天文数学著作集.五种七卷.包括《割圆

连比例术图解》三卷、《椭圆求周术》一卷、《斜弧三边求角补术》一卷、《堆垛求积术》一卷、《三统术衍补》一卷等. 其主要版本有道光七年(1827)初刻本,同治八年(1869)董贻清成都刻本,光绪五年(1879)江南制造局刻本,光绪二十二年(1896)《测海山房中西算学丛刻初编》本和光绪年间《富强斋丛书》本等.

斜弧三边求角补术(Xiéhú sānbiān qiújiǎo bǔshù) 《董方立算书》之一. 一卷,清董祐诚撰. 该书讨论球面斜三角形的半角正弦和半角余弦公式. 薛凤祚《三角算法》载有半角正弦公式,但有法无解;梅瑴成《赤水遗珍》曾有解证,但也未完善. 董祐诚则另作图解予以证明,并补充了半角余弦公式.

堆垛求积术(Duīduò qiújīshù) 《董方立算书》之一. 一卷,清董祐诚撰. 该书讨论垛积术中"方锥堆"和"纵方堆"的求和问题. 方锥堆取三角垛横行相邻两项的前项加后项二倍为之通项,纵方堆取三角垛相邻两垛对应项的前项加后项二倍为之通项. 由三角垛求和公式得到该两垛的求和公式.

割圆连比例术图解(Gēyuán liánbǐlìshù tújiě) 《董方立算书》之一. 三卷,清董祐诚撰. 该书讨论三角函数和反三角函数的幂级数展开式,主要结果是弧与弦矢互求的四术:即"有通弦,求通弧加倍几分之通弦";"有矢,求通弧加倍几分之矢";"有通弦,求几分通弧之一通弦";"有矢,求几分通弧之一矢". 其方法是以清梅瑴成等人汇编的《数理精蕴》中介绍的连比例四率法,并运用中国传统数学中的垛积术推得前两术,又用级数回求法推得后两术. 该书版本有《董方立算书》本、《测海山房中西算学丛刻初编》本、《古今算学丛书》本.

象数一原(Xiàngshù yīyuán) 清代讨论三角函数的幂级数展开式的数学著作. 七卷,清项名达撰. 前六卷陆续写于 1837 年至 1846 年之间. 其"象"指的是一系列相似等腰三角形,"数"指的是递加数,即有理指数幂的二项式定理系数表. 二者皆通于弦矢,根据这种关系可求得相应的弦矢公式. 这就是书名的来源. 该书的主要内容是解决弦矢互求问题,即将全弧 n 等分,求出全弧通弦用 m 分弧通弦和正矢表示的幂级数展开式问题,卷一"整分起度弦矢率论"以半圆析为十八分为例,推导一分弧的各整数倍弧的弦矢公式. 卷二"半分起度弦矢率论"主要阐述 $n/2$倍弧的弦矢公式. 卷三、卷四"零分起度弦矢率论"阐述 $n/3$、$n/4$、$n/5$ 倍弧的弦矢公式及零分起根递加数的算法. 卷五"诸术通诠"主要用新立弦矢四术推导董祐诚和明安图的公式. 卷六"诸术明变"为弦矢公式和递加数法的各种应用. 卷七"椭圆求周图解"阐明椭圆周长公式的详细推导过程. 这些工作是西方微积分尚未传人中国之前、中国数学家在处理有关无穷和极限问题的最好结果. 最后一卷及四、六两卷中的部分内容为戴煦所补,全书均经戴煦校核. 该书首刊于光绪十四年(1888). 现有上海赵氏《高斋丛刻》本、刘铎《古今算学丛书》本(无卷七)、元和江氏刊本和中国国家图书馆所藏抄本等.

下学庵算术三种(Xiàxuéān suànshù sānzhǒng) 清代算书. 项名达的数学著作集. 三种三卷,清项名达撰,包括《勾股六术》一卷(1825)、《三角和较术》一卷(1843)、《开诸乘方捷术》(1845)一卷. 原版毁于战火,后重刻于通州. 现有光绪十三年(1887)刊本和石印缩本等.

勾股六术(Gōugǔ liùshù) 《下学庵算术三种》中的一种. 一卷,清项名达撰,成书于 1825 年,是一本讲述勾股算术的入门书. 勾股形的勾股弦及其和差共有 13 种,已知任何其中 2 种,皆可求解勾股形,计有 78 题. 该书选取 25 题,按算法相近分为六术,分别给出公式并予以图解(即证明). 这些解法有些是旧术,有些则是项名达通过比例变换给出的新解. 该书除刊人《下学庵算术三种》之外,还有道光十六年(1836)刊本、同治十一年(1872)刊本、江南制造局《算学十书》刊本、观象庐丛书本、《古今算学丛书》本和《中西算学汇通》本等.

三角和较术(Sānjiǎo héjiàoshù) 《下学庵算术三种》中的一种. 一卷,清项名达撰,成书于 1843 年. 该书包括"平三角和较术"和"弧三角和较术"两部分. 主要内容是叙述解平面与球面直角三角形和一般三角形的各种公式. 但未及给出图解,即由其学生刊刻出版. 初刻本恐已失传. 现有道光三十二年(1852)钱塘王氏校刊本、《下学庵算术三种》本和光绪二十四年(1898)江夏程氏刊本等.

开诸乘方捷术(Kāi zhūchéngfāng jiéshù) 《下学庵算术三种》中的一种. 一卷,清项名达撰,成书于 1845 年. 该书包括项名达的四个公式和戴煦的两个公式,即根据近似根与真根的不同情况,用于开高次方的无穷级数公式. 其中部分公式与现在用于开方根近似计算的逐次逼近法相合. 现有道光十七年(1837)刊本、《下学庵算术三种》本和《古今算学丛书》本等.

务民义斋算学(Wùmín yìzhāi suànxué) 徐有壬的天文数学著作集. 九种十六卷,清徐有壬撰. 包括《割圆八线缀术》四卷、《测圆密率》三卷、《截球解义》一卷、《弧三角拾遗》一卷、《造各表简法》(又名《垛积招差》)一卷、《椭圆正术》一卷、《椭圆求周术》一卷、《朔食九服里差》三卷、《表算日食三差》一卷. 前七种为数学著作,后两种为天文著作. 这部著作除有同治年间家刻本传世外,尚有《咫进斋丛书》本、《白芙堂算学丛书》本、《古今算学丛书》本、《中西算学丛书》本和《丛书集成初编》本等.

测圆密率(Cèyuán mìlǜ) 《务民义斋算学》中

的一种.三卷,清徐有壬撰.主要讨论三角函数及其幂级数展开式等问题.卷一介绍求椭圆的周长、椭圆的面积和椭圆体体积等方法.卷二首先介绍法国传教士杜德美(Jartoux,P.)传入和明安图研究的四个级数展开式,然后给出"正弦求弧背"、"正切求弧背"、"弧背求正切"三术,解决了杜德美传入的级数展开式,"能求弦矢,而不能求切割二线"的问题.此外还讨论了一些立体的体积计算.卷三给出了大小互求十八术.

造各表简法(Zàogèbiǎo jiǎnfǎ) 亦名《垛积招差》,《务民义斋算学》中的一种.一卷,清徐有壬撰,成书于1859年之前.该书给出了计算三角函数及其对数的新方法.包括正弦、正矢、正切、八线对数和对数五种造表法,其中八线对数造表法为徐有壬独创.

截球解义(Jiéqiú jiěyí) 《务民义斋算学》中的一种.一卷,清徐有壬撰.该书主要解释体积(球体与圆柱体)、面积的关系.后附《椭圆求周术》,在项名达、戴煦研究的基础上又给出一术,并"贯三术为一术".

弧三角拾遗(Húsānjiǎo shíyí) 《务民义斋算学》中的一种.一卷,清徐有壬撰.该书主要讨论球面三角形问题.除介绍纳皮尔比例式、正弦半角公式外,又给出正弦、余弦半弧公式,从而简化了对数计算.

求表捷术(Qiúbiǎo jiéshù) 清代算书.戴煦的数学著作集.四种九卷,清戴煦撰.包括《对数简法》二卷、《续对数简法》一卷、《外切密率》四卷和《假数测圆》二卷.该书有广东伍崇曜《粤雅堂丛书》刻本传世,并有《古今算学丛书》、《丛书集成》等版本.

对数简法(Duìshù jiǎnfǎ) 《求表捷术》中的一种.二卷及续一卷,清戴煦撰,成书于1845年.该书主要内容是关于对数函数的幂级数展开及对数表的造法.其借助有理指数的二项式定理,得到了由开方表求对数、由自然对数求常用对数、由展开式求对数以及由三角函数的对数展开式造三角函数对数表等方法,从而推广了清梅瑴成等人汇编的《数理精蕴》中所介绍的常用对数的造表法.该书版本主要有《求表捷术》本、《中西算学书初编》本、《古今算学丛书》本及《丛书集成初编》本.

外切密率(Wàiqiē mìlǜ) 《求表捷术》中的一种.四卷,清戴煦撰,成书于1852年.该书论述了以前中国数学家未曾讨论过的正切、余切、正割、余割等四种三角函数的展开问题.因切割二线出于圆外,故名《外切密率》.其主要讨论正切、余切、正割、余割四线与弧度之间的关系,共得出9个幂级数展开式.在推导过程中,运用多项式的长除法进行无穷级数的除法运算,并用级数反求法得出了三角函数反函数的幂级数展开式.此外,在讨论正割函数展开式的系数时,得到与欧拉数递推式一致的结果,并实际计算出了前10个欧拉数.该书版本有《粤雅堂丛书》本、《古今算学丛书》本、《丛书集成初编》本等.

假数测圆(Jiǎshù cèyuán) 《求表捷术》中的一种.二卷,清戴煦撰,成书于1852年.该书进一步阐述三角函数的对数表的造法,并给出了对数的幂级数展开式.

四元玉鉴细草(Sìyuán yùjiàn xìcǎo) 清代算书.三卷首一卷,清戴煦撰,成书于1844年,未刊.该书是以《四元玉鉴》何元锡刻本为底本而逐题演草,虽定稿时间较沈钦裴、罗士琳二人均晚,但此细草为戴氏独立完成.现在台湾省新竹县的清华大学立青文库,收有王吉孚道光二十五年(1845)戴草的抄校本.

则古昔斋算学(Zégǔxīzhāi suànxué) 清代算书.李善兰的天文、数学著作集.清李善兰撰,共十三种二十四卷.包括《方圆阐幽》一卷、《弧矢启秘》二卷、《对数探源》二卷、《垛积比类》四卷、《四元解》二卷、《麟德术解》三卷、《椭圆正术解》二卷、《椭圆新术》一卷、《椭圆拾遗》三卷、《火器真诀》一卷、《对数尖锥变法释》一卷、《级数回求》一卷、《天算或问》一卷.1867年,在曾国藩的资助下,李善兰在南京刊刻出版了这一著作集,即金陵刊本.此外,该书还有光绪八年(1882)江宁藩署刊本、同文馆聚珍本及上海积山书局石印本等.

方圆阐幽(Fāngyuán chǎnyōu) 《则古昔斋算学》中的一种.一卷,清李善兰撰,是李善兰阐述尖锥求积术,并以单位圆面积为例说明尖锥术的应用.该书给出十条"当知"作为尖锥术的基本原理.前三条讲点、线、面、体之间的关系,是关于无限小几何元素的基本假设;第四条以诸乘方数说明线、面、体之间可以互变;后六条专讲尖锥,包括平、立尖锥的形状、积迭之理及面积、体积算法.这十条"当知"虽不十分严谨,但有些已达到了积分的结果.该书最后李氏考虑"方内函圆"的"方圆之较",以此为例说明尖锥术原理的应用.《方圆阐幽》的版本有《则古昔斋算学》本、《艺海珠尘》本及《丛书集成初编》本等.

弧矢启秘(Húshǐ qǐmì) 《则古昔斋算学》中的一种.一卷,清李善兰撰,成书于1845年.该书用尖锥术求解三角函数和反三角函数的幂级数展开式.

对数探源(Duìshù tànyuán) 《则古昔斋算学》中的一种.一卷,清李善兰撰,成书于1845年.该书用尖锥术求解对数幂级数展开式.

垛积比类(Duòjī bǐlèi) 《则古昔斋算学》中的一种.四卷,自朱世杰《四元玉鉴》之后讨论高阶等差级数求和的最优秀的著作,也是李善兰的代表作.全书每一卷,各自成章,每卷都构造了一个垛积体系.卷一是朱世杰的三角垛及其派生的各支垛;卷二为

乘方垛及各支垛，讨论级数 $1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p$（p为正整数）的求和公式；卷三为三角自乘垛和各支垛，并创立了"李善兰恒等式"；卷四讨论的三角变垛是朱世杰岚峰形垛及三角再变垛、三角三变垛的求和公式．各卷都可分为五个部分：图、表和造表法、推导和演草、有高（层）求积术（前 n 项和公式）、有积求高（层）术（前一部分的逆问题）．书中所有公式均由归纳而得，无演绎证明，但结果全部正确．《垛积比类》有《则古昔斋算学》本及《古今算学丛书》本．

四元解（Sìyuánjiě） 《则古昔斋算学》中的一种．二卷，清李善兰撰，成书于 1845 年．系作者研读朱世杰《四元玉鉴》后所作．该书首先解释列位及加减乘除相消诸法，并改定布算格式，后将《四元玉鉴》的前四个问题用其改后的格式一一补足细草，还逐节绘图，详释其术．该书首刊于《则古昔斋算学》，后又收入刘铎的《古今算学丛书》．

级数回求（Jíshù huíqiú） 《则古昔斋算学》中的一种．一卷，清李善兰撰．该书专门讨论如何由幂级数展开式求其反函数的幂级数．

对数尖锥变法释（Duìshù jiānzhuī biànfǎshì） 《则古昔斋算学》中的一种．一卷，清李善兰撰．该书通过三条引理对《对数探源》中的级数式给出了证明，从而可知尖锥术与西方的级数论是相通的．

天算或问（Tiānsuàn huòwèn） 《则古昔斋算学》中的一种．一卷，清李善兰撰．

考数根法（Kǎoshù gēnfǎ） 《则古昔斋算学》中的一种．一卷，清李善兰撰，成书于 1868 年．"数根"即素数，故这是中国最早的素数论专著．该书详尽研究了素数的判别法，给出四个定理："屡乘求一法"、"天元求一法"、"小数回还法"和"准根分级法"，还证明了著名的费马小定理，并指出其逆不真．《考数根法》首刊于艾约瑟（Edkins, J.）所编的《中西闻见录》第二、三、四期．

九容图表（Jiǔróng túbiǎo） 《则古昔斋算学》中的一种．一卷，清李善兰撰，成书于 1876 年．为了便于理解和掌握《测圆海镜》卷一"圆城图式"、"总率名号"、"今问正数"和"识别杂记"中的各种与图形相关的数量关系，李善兰将之表格化，成《九容图表》，附录《勾股边径比例表》，使读者一目了然．该书原附刻于李锐《测圆海镜细草》十二卷之后，后又被刘铎收入《古今算学丛书》．

夏氏算书遗稿（Xiàshì suànshū yígǎo） 清代数学家夏鸾翔的数学著作选集．包括《少广缒凿》一卷、《洞方术图解》二卷、《致曲术》一卷和《致曲图解》一卷．这部选集是夏鸾翔殁后，吴嘉善与邹伯奇将其遗稿编辑整理而成的．《少广缒凿》讨论高次方程的解法，就开平方、开高次方及求解一般高次方程共给出 14 术，获得了和牛顿程序等价的结果．《洞方术图解》专论造正弦、正矢表的算法问题．《致曲术》研究二次曲线，其中用无穷级数展开的方法解决椭圆积分中的问题颇有创新之处．《致曲图解》是夏氏对圆锥曲线综合研究的成果．《夏氏算书遗稿》的版本有《邹征君遗书》附刊本、《中西算学丛书初编》本和徐树勋刊《算学丛书》本等．

洞方术图解（Dòngfāngshù tújiě） 《夏氏算书遗稿》中的一种．二卷，清夏鸾翔撰．卷一为"演术"，叙述三角函数表造法；卷二为"图解"，阐述"演术"的理论依据．该书主要有两部分内容，一是对贾宪三角形性质的讨论，一是对三角函数表造法的改进．夏鸾翔对贾宪三角形中的数字分为"斜、横、直、侧"四类求法，每一类求法中又给出若干种算法，得到一系列恒等式．夏鸾翔认为用级数计算三角函数值虽简于古法，但要经过多次乘除才能得出各项数值，计算工作相当繁重．他在《洞方术图解》中创设了一种利用招差法造正弦、正矢表的方法，只须预先计算好表中所列正弦值或正矢值的逐次差数用加减法就可造成全表，大大简化了运算．《洞方术图解》有《夏氏算书遗稿》本．

致曲（Zhìqū） 中国第一部系统研究解析几何的著作．二卷，清夏鸾翔撰．上卷为《致曲术》，讨论了椭圆、抛物线、对数曲线、螺线等一些曲线的弧长及旋转体的表面积和二次曲线的性质．下卷为《致曲图解》，进一步对二次曲线进行研究并附以图解，论述了圆锥曲线与母面的关系、焦点、准线、截距、切线、法线及双曲函数，其中若干结果是《代微积拾级》等书中所没有的．该书版本有《夏氏算书遗稿》本、《古今算学丛书》本及《蛰云雷斋丛书》本，另有稿本现藏上海图书馆．

百鸡术衍（Bǎijīshù yǎn） 清代研究和推广"三色差分"的数学著作．二卷，清时曰醇撰，成书于 1861 年．"百鸡问题"是《张丘建算经》提出的一个不定方程问题，而对其解法"百鸡术"的研究，长期以来有许多成果问世．时曰醇在前人工作的基础上深入研究，集前人之大成而有所发明．该书共 28 题，每题的求法都列出"如方程"和"求一术"两种解法．求一术法与骆腾凤法相同，"如方程"则是采用丁取忠设一物为零，化三色差分为二色差分之后，借用梅文鼎《方程论》卷二"化整为零法"求得一组解，然后由"约率"加减、再由"通率"加减得其正整数解的一种方法．这一著作于 1861 年在长沙首刊，后被丁取忠收入《白芙堂算学丛书》．

求一术通解（Qiúyīshù tōngjiě） 清代深入研究不定分析的数学著作．二卷，清黄宗宪撰，成书于 1874 年前．该书上卷以"孙子问题"和杨辉各题（模数两两互素）为例，在阐释立术道理的同时，演述了他自己的求解过程；下卷介绍应该注意的问题和可

以另立的解法.其主要贡献有：

1. 对模数不两两互素情形，给出了用素因数分解求定数的方法.

2. 增补求反乘率法，并给出了其方法的理论证明的基本思路.

3. 将时曰醇的两个问题巧妙地化为二元一次不定方程，再归结为解同余式问题，揭示了不定方程与求一术的联系.

《求一术通解》有《白芙堂算学丛书》本、梅城知足堂《古琴古砚斋算学》家刻本和《古今算学丛书》本、《测海山房中西算学丛刻初编》本等传世.

算牖(Suànyǒu)　清代算书.四卷，清许桂林撰，刻于1811年.桂林因“算家以简为贵”，乃取《数理精蕴》等书中切于日用者，杂辑以成是书.第一卷为总纲，讲乘除法及比例，主张筹(纳皮尔筹)珠联用.他说：“盖乘除俱莫善于筹，而加减实莫善于珠……合此二善，省心省手，无以逾之.”第二卷介绍笔算、筹算.第三卷以九章分类，简要介绍一些应用问题.第四卷为杂法，介绍有“铺地锦”、“金蝉脱壳”、“尺算”及几种趣味算题.末有“珠盘考”一篇，引用了《盘珠算法》、《数术记遗》等史料.

行素轩算稿(Xíngsùxuān suàngǎo)　清代算书.华蘅芳数学著作的汇集.六种二十七卷.包括：《开方别术》一卷、《数根术解》一卷、《开方古义》二卷、《积较术》三卷、《学算笔谈》十二卷和《算草丛存》八卷.该书版本有：光绪八年(1882)梁谿华氏刊本、光绪十九年(1893)重刊本、光绪二十二年(1896)上海文瑞楼石印本等.

开方别术(Kāifāng biéshù)　《行素轩算稿》中的一种.一卷，清华蘅芳撰.副题为《数根开方术》，讨论整系数方程有理根的解法.华氏将整系数方程分为首项系数绝对值为1和不为1两类.对前一类分别求其正整根和负整根，后一类可能有分数根.华氏以倍根变换将其归结为前一类求解.华氏将素因数分解引入中国传统数学的增乘开方法而使有理根的求法大为简化.该书版本有：《行素轩算稿》本、《测海山房丛刻》本和《中西算学汇通》本.

学算笔谈(Xuésuàn bǐtán)　《行素轩算稿》中的一种.十二卷.《学算笔谈》是华蘅芳对数学诸方面的一部评论性著作，也是一部通俗浅近的教科书.前六卷于1882年完成，后又续写六卷.《学算笔谈》卷一至卷五论算术，卷六、卷七论天元术，卷八、卷九论代数，卷十、卷十一为微积分初步，卷十二为杂论.该书序言及卷一“总论算法之理”、卷十二杂论集中反映了华蘅芳对数学的看法及其数学教育的主张，这些内容至今仍有参考价值.《学算笔谈》的版本有《行素轩算稿》本、《中西算学汇通》本及陕西味经刊书处刊本等.

中国古算名词术语

算术(Suànshù)　古代数学的总称.中国古代对数学著作通称“算术”.如《杜忠算术》、《许商算术》、《九章算术》等.刘徽《九章算术》序曰：“观阴阳之割裂，总算术之根源.”《周髀算经》卷上：“陈子曰，然，此皆算术之所及.”此处所言指计算的方法.陈子曰：“算数之术，是用智矣.”说明算术就是“算数之术.”

九数(Jiǔshù)　中国古算名.《周礼·大司徒》篇称：“保氏掌谏王恶而养国子以道，乃教之六艺：一曰五礼，二曰六乐，三曰五射，四曰五驭，五曰六书，六曰九数.”其“九数”即算学，东汉郑玄《周礼注》认为“九数：方田、粟米、差分、少广、商功、均输、方程、赢不足、旁要；今有重差、勾股.”后人多循此说，如刘徽《九章算术注序》称：“按周公制礼而有九数，九数之流，则《九章》是矣.”

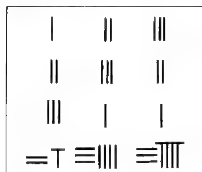
筹(Chóu)　一种古算工具.这里指中国古代的计算工具，是用竹、木、骨或象牙等制成的小棍子或小片.亦称算策，俗称算子.《汉书·律历志》：“其算法用竹，径三分，长六寸.”6寸合13.8厘米，3分合0.69厘米.《隋书·律历志》：“其算法用竹，广二分，长三寸.”隋朝的长3寸，约合8.85厘米；广2分，约合0.95厘米.从先秦典籍中的有关记载来看，算筹可能起源于春秋战国时期，是由古代卜筮用的草演化而来的.先用于占卜，继而用于记数，最后被当作计算工具使用.

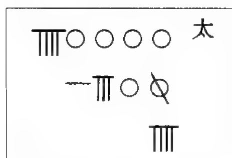
筹算(Chóusuàn)　一种古算技术.这里指中国古代利用算筹作为计算工具建立起来的计算技术.从广义上讲，筹算是指一个由一系列算法所构成的数学体系和在中国历史上延续了1500年以上的科学传统，它的核心是十进位值制和分离系数法.用算筹来表示数目有纵、横两种方式：

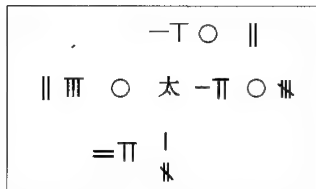
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
横　式	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱
纵　式	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨

这是九个基数，零则以空位表示.用算筹表示多位数字，高位到低位从左到右横排，但相邻两位的筹式必须纵横相间.对此规则《孙子算经》规定“凡算之法，先识其位.一纵十横，百立千僵.千、十相望，万、百相当.”筹算的四则运算是由高位向低位进行.做加、减运算先将两数上、下对齐，和或差置于第三行中.做乘法将相乘两数分别置于上、下两行，上行最高位与下行最低位对齐，然后用上行各位数依次乘下行各位数字，乘得结果随时加到中行之中，最后中行的得

数就是二数之积. 除法的运算与此类似. 筹算的最大优点是应用分离系数法使一些数学关系的表达和有关运算得以大大地简化.


表 1


表 2


表 3

例如表 1，表示三元一次方程组：

$$\begin{cases}3x+2y+z=39,\\2x+3y+z=34,\\x+2y+3z=26.\end{cases}$$

表 2，表示一元二次方程：

$$9x^2-1800x+90000=0.$$

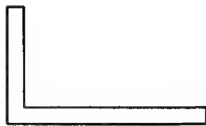
表 3，表示四元三次方程：

$$x-2x^2+27xy+8y^2+2y^3+17z-3z^3+16w+2wz^2=0.$$

中国古代数学家利用筹算解决了许多数学问题，得到了许多重要成果. 如开平方和开高次方、解高次方程、解线性方程组和高次方程组、计算圆周率、解一次同余式组、造高阶差分表等，都得益于筹算体系的采用.

九九(Jiǔjiǔ)　中国古算术语. 俗称小九九，即乘法口诀表. 现在的口诀是从“一一得一，一二得二，二二得四”起，一直到“九九八十一”止. 而在中国古代，这一口诀是倒过来记的，即从“九九八十一”到“二二得四”止，没有“一几得几”的口诀. 因为其开头的两个字为“九九”，故古人将此乘法口诀简称为“九九”.“九九”在中国的起源很早，相传早在春秋战国时代就已广为流行. 这表示在中国古代筹算的四则运算是十分普及的. 到了宋元时期，九九乘法口诀的次序已经颠倒过来，《事林广记》及朱世杰《算学启蒙》所载都是由“一一如一”至“九九八十一”，与现在四十五句的九九乘法口诀完全一致. 刘徽注《九章算术》序中所谓的“九九之术”，可能是将“九九”作为当时数学的代名词.

规(Guī)　中国古算术语. 中国古代称画圆的工具叫“规”，画方的工具叫“矩”，其源甚远. 甲骨文中“规”作手执规画圆，矩作象曲尺形. 古书中说到规矩者甚多，如《尸子》：“古者倕为规、矩、准、绳，使天下仿焉.”《墨子》：“轮匠执其规矩，以度天下之方圆.”《孟子》：“不以规矩，不能成方圆.”《荀子》：“圆者中规，方者中矩.”《周髀算经》：“数之法，出于圆方. 圆出于方，方出于矩，矩出于九九八十一.”



矩(Jǔ)　中国古算术语. 参见“规”条. 另古代将如右的曲折形亦称矩，如赵爽“勾股圆方图”注内的“勾实之矩”、“股实之矩”(如右图).

端(Duān)　中国古算术语. 它有两种含义：

1.《墨经》中云：“端，体之无厚而最前者也.”经说：“端，是无间也.”“端”即今几何学中之点，点是无厚的，也是无间的.

2. 端，长度单位名. 唐制：六丈为一端. 程大位《算法统宗》：“五丈为一端，今亦不一.”

表(Biǎo)　古代测量工具，即有刻度的标杆. 刘徽注《九章算术》序称：“度高者重表，测深者累矩.”意即用两个标杆即能测量不可直接度量的事物的高度. 古谓之重差术.《海岛算经》中用此法.

正算(Zhèngsuàn)　中国古算术语. 中国古代表示正数的算筹称“正算”，表示负数的算筹叫“负算”.《九章算术》刘徽注云：“今两算得失相反，要令正负以名之. 正算赤，负算黑，否则以邪正为异.”就是说表示正负数有两种方法，一种是用红色的筹表示正数，用黑色的筹表示负数；一种是“以邪正为异”.

负算(Fùsuàn)　中国古算术语. 中国古代表示负数的算筹. 在《九章算术》刘徽注文中说：以黑色筹为负，或斜放一筹表示负算(参见“正算”).

方田(Fāngtián)　中国古算术语. 它有两种含义：

1. 中国古代称正方形及矩形为方田. 李籍《九章算术音义》称：“方田者，田之正也. 诸田不等，以方为正，故曰方田.”

2.《九章算术》第一章章名，其中研究平面图形的面积问题. 附带介绍分数的运算方法.

粟米(Sùmǐ)　中国古算名. 这里指《九章算术》第二章章名. 李籍《音义》称：“粟者，禾之未舂，米者，谷实之无骰. 粟者，米之率也. 诸米不等，以粟为等，故曰粟米.”本章首列各种粮食的交换比率表，作为计算比例问题之用，首列“粟率五十，粝米三十……”故作章名. 本章主要研究比例问题.

衰分(Shuāifēn)　中国古算名. 这里指《九章算术》第三章章名. 刘徽注曰：“衰分，差分也.”“列衰，相与率也.”李籍《音义》称：“衰，差也. 以差为平分，故曰衰分.”衰，读为“崔(cuì)”，即依照一定的标准

递减. 衰分,即按比率分配. 本章主要研究配分比例问题.

少广(Shàoguǎng) 中国古算名. 这里指《九章算术》第四章章名. 李籍《音义》称:"广少从多,截从之多,益广之少,故曰少广."意即将一长方形或长方体改为正方形或正方体,以求其边长. 故本章为研究开平方和开立方问题.

商功(Shānggōng) 中国古算名. 这里指《九章算术》第五章章名. 李籍《音义》称:"商,度也. 以度其功庸,故曰商功."商功,即各种工程中立体体积的计算.

均输(Jūnshū) 中国古算名. 这里指《九章算术》第六章章名. 在汉代推行均输律,即按人口多少、路途远近、谷物贵贱平均交纳租税或摊派徭役的制度. 本章就是关于这方面的计算,属于配分比例计算问题.

盈不足(Yíngbùzú) 中国古算名. 这里指《九章算术》第七章章名. 李籍《音义》称:"盈者,满也. 不足者,虚也. 满虚相推,以求其适,故曰盈不足."刘徽注云:"按盈者,谓之朒;不足者,谓之朒."故"盈不足"亦称"盈朒". 西方学者称盈不足术为双设法. 本章第1题为:"今有共买物,人出八,盈三;人出七,不足四,问人数、物价各几何"?本章给出了这类问题的解法公式. 假如人出 a_1,盈(或不足)为 b_1,人出 a_2,盈(或不足)为 b_2,则物价可按下列统一公式计算:

$$x=\frac{|a_2b_1-a_1b_2|}{|a_1-a_2|}.$$

方程(Fāngchéng) 中国古算名. 这里指《九章算术》第八章章名. 刘徽注云:"程,课程也. 群物总杂,各列有数,总言其实. 令每行为率,二物者再程,三物者三程,皆如物数程之,并列为行,故谓之方程.""方"即方形,"程"与"课"同义,本意为试验、考核,这里是计量、考核之意."方程",即线性方程组系数的增广矩阵. 本章主要研究线性方程组及其解法.

勾股(Gōugǔ) 中国古算名. 这里指《九章算术》第九章章名."勾股"即直角三角形. 本章是研究直角三角形解法. 利用勾股术:"勾股各自乘,并而开方除之,即弦",以及相似直角三角形比例方法,即可解决这类问题.

率(Lǜ) 中国古代数学的一个基本概念. 刘徽在《九章算术》注中定义道:"凡数相与者谓之率. 率者,自相与通. 有分则可散;分重叠则约也. 等除法实,相与率也."这里指出凡是成比例变化的一组数就称为率."有分则可散"指此一组率,可以同乘以不为零的数,因此刘徽说:"乘以散之"."分重叠则约也",是说此一组数可以同除以不等于零的数,因此刘徽说:"约以聚之"."等除法实,相与率也",是举例说明法和实是一组率,因此可以用其约数同除之. 率的概念,可用现代数学语言叙述如下:一组相关的量 $x_1,x_2,\cdots,x_n(n\geqslant 2)$,若它的任意两组对应值

$$x'_1,x'_2,\cdots,x'_n$$
$$x''_1,x''_2,\cdots,x''_n$$

皆有 $x''_i=kx'_i(k\neq 0,i=1,2,\cdots,n)$ 成立,则称每个 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为一个率. 人们看出一组率 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一个特殊的变向量,在变化过程中始终是线性相关的. 刘徽注中说:"凡所谓率者,细则俱细,粗则俱粗,两数相推而已."实际就是线性相关的变向量. 对每组率,有一个"势"与它对应. 换句话说,成比例的两组率值 $(x'_1,x'_2,\cdots,x'_n)$ 和 $(kx'_1,kx'_2,\cdots,kx'_n)$ 有相同的"势". 对于两个率来说,其"势"可用数值刻画,(a,b) 可约为 $(1,b/a)$,b/a 可称为 (a,b) 的"势". 但对多个率来说,其"势"就不能用数值表示. 这和有限集合的"势"就是元素的个数,无限集合的"势"只有以字母表示是类似的.

幂(Mì) 数学名. 中国古代指面积.《九章算术》"方田"章刘徽注首先给出了幂的定义:"凡广从相乘谓之幂."《九章算术》"今有积五万五千二百二十五步,问为方几何?"杨辉《田亩比类乘除捷法》:"钱田积七十二步,只云面径三步,问内方几何?"此处"积"指面积.

面(Miàn) 中国古算术语. 它有两种含义:

1. 中算中称多边形的边,一般特指正方形的边.

2. 刘徽所引入的一个实数概念. 他在注《九章算术》的"开方不尽"时,他认为,对于 $x^2=N=a^2+r$,若取 $x\doteq a+r/2a$ 偏大,即 $x<a+r/2a$,若取 $x\doteq a+r/(2a+1)$ 时偏小,即 $x>a+r/(2a+1)$,而且其平方不能还原为 x^2,因而"当以面命之为不失耳"即引入一个新数"面",亦即 $\sqrt{N}$ 作为方根. 相当于引出了无理数概念.

实(Shí) 中国古算术语. 中国古书中称被乘数、被除数为"实",乘数、除数为"法"."实"指实物,"法"指度量单位."以法量实",若"实"等于"法",则得"1",若"实"中除去几个"法",所得就是"几". 因此被除数称"实",除数称"法". 至于对乘法亦称"法"、"实",则是引申而来. 开方术中对被开方数也称"实". 高次方程的常数项亦称实.

法(Fǎ) 中国古算术语. 法即法数,指除法中的除数(参见"实").

棋(Qí) 中国古算术语. 指基本几何体模型. 最早的文字记载见于刘徽注《九章算术》"商功"章. 在刘徽的注文中,常用的棋有四种:长方体(一般理解为立方体)、将长方体沿相对两面同方向的对角线平面所截得的两个几何体,即堑堵,以及将堑堵过其三个不相邻的顶点的平面所截得的两个几何体,分别称为阳马和鳖臑.

合分(Héfēn) 中国古算法. 指两个分数合并而求其和. "合分术"就是分数加法.《九章算术》的"合分术"为:"母互乘子,并以为实,母相乘为法,实如法而一. 不满法者,以法命之. 其母同者,直相从之."即

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_1b_2+a_2b_1}{b_1b_2}.$$

减分(Jiǎnfēn) 中国古算法. 指由较大的分数减去较小的分数而求其差. 李淳风注《九章算术》云:"诸分子母数各不同,以少减多,欲知余几,减余为实,故曰减分."《九章算术》减分术曰:"母互乘子,以少减多,余为实,母相乘为法,实如法而一."即

$$\frac{a_1}{b_1}-\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_1b_2-a_2b_1}{b_1b_2}.$$

乘分(Chéngfēn) 中国古算法. 指分数相乘.《九章算术》乘分术曰:"母相乘为法,子相乘为实,实如法而一."即

$$\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_1a_2}{b_1b_2}.$$

约分(Yuēfēn) 中国古算法. 指约去分数分子、分母的公约数,化为既约分数的算法. 最早的文字记载见于《九章算术》"方田"章:"约分术曰:可半者半之,不可半者,副置分母子之数,以少减多,更相减损,求其等也. 以等数约之."即先进行观察,如果分数的分子、分母有 2 的倍数,则可先在分子、分母中同约去 2;然后再用分子、分母中较大的减去较小的,所得的差与上一步骤中的减数比较大小,并再从较大的数中减去较小的数,如此重复进行下去,当差与减数相等即出现"等数"时,该等数即为所求分子与分母的最大公约数,只需将分子分母同除以这个数,即可将原来的分数化为最简分数. 例如《九章算术》"方田"章第 6 题:"今有九十一分之四十九,问约之的几何?"其"更相减损"的算法是:

$$r_1=91-49=42,$$
$$r_2=49-42=7,$$
$$r_3=42-7-7-7-7-7=7.$$

这时 $r_2=r_3$,故称之为等数. 将分数 49/91 的分子、分母同除以 7 即得最简分数 7/13. 关于这一方法,刘徽解释说:"其所以相减者,皆等数之重叠,故以等数约之."即分子、分母及运算过程中出现的各余数,都可以看作是等数的倍数.

等数(Děngshù) 中国古算名. 两个正整数的最大公约数,称为等数. 因为用"更相减损"方法求二正整数的最大公约数,当进行到最后一步所出现的两个余数相等时,这个等数就是最大公约数(参见"约分").

更相减损(Gēngxiāng jiǎnsǔn) 中国古算法. 即辗转相除法(参见"约分").

课分(Kèfēn) 中国古算法. 即比较分数的大小. 最早的文字记载见于《九章算术》"方田"章. 其方法是利用"减分术"求欲比较大小的两个分数的差来确定它们的大小.

平分(Píngfēn) 中国古算法. 即求几个已知分数的平均值. 最早的文字记载见于《九章算术》"方田"章. 其方法是将这些分数先利用"齐同术"通分,从而把问题转化为求这些分数的分子的平均数.

经分(Jīngfēn) 中国古算法. 即分数的除法. 最早的文字记载见于《九章算术》"方田"章:"经分术曰:以人数为法,钱数为实,实如法而一. 有分者通之;重有分者同而通之."即分数相除与整数相除的意义相同,同样可以将其看作是实与法之比. 但用此术在具体计算时操作较为复杂. 刘徽在注《九章算术》时由此概括出分数除法的具体法则:"又以法分母乘实,实分母乘法. 此谓法实俱有分. 故令分母各乘全内子,又令分母互乘上下."就是说,法与实皆为分数的除法,先将法、实皆化为假分数,然后以法的分母乘实的分子为实,以实的分母乘法的分子为法,相除即为所求. 这与现代分数除法运算法则完全一致.

通分内子(Tōngfēn nèizǐ) 中国古算法. 即化带分数为假分数方法. 最早的文字记载见于《九章算术》刘徽注. 这是"合分术"的特例,其方法是"分母乘全内子",即将整数部分乘以分母后加上分子. "内"通"纳".

重有分(Chóngyǒufēn) 中国古算名. 即繁分数. 最早的文字记载见于《九章算术》"方田"章. 刘徽注称:"此谓法实俱有分."化简重有分的方法是:以"法"的分母乘"实"的分子为"实","实"的分母乘"法"的分子为"法",可见,该方法实际上就是分数的除法(参见"经分").

今有术(Jīnyǒushù) 中国古算法. 已知四项比例式中的三项求第四项的方法. 最早的文字记载见于《九章算术》"粟米"章. "今有术曰:以所有数乘所求率为实,以所有率为法,实如法而一."即设所有率为 a,所求率为 b,所有数为 c,所求数为 d,则有比例式 $a:b=c:d$,从而有 $d=bc/a$.

重今有术(Chóug jīnyǒushù) 中国古算法. 即可以重复多次应用今有术解决的连比例问题的解法. 最早的文字记载见于《九章算术》"均输"章第十题刘徽注.《九章算术》"均输"章第十题是这样的:"今有络丝一斤为练丝一十二两,练丝一斤为青丝一斤一十二铢. 今有青丝一斤,问本络丝几何?"该题与"粟米"章中可以用"今有术"解决的问题的不同之处在于,其给出的不是络丝与青丝的直接换算关系,二者之间的关系是通过练丝沟通的. 因此,"术曰:以练丝一十二两乘青丝一斤一十二铢为法;以练丝一斤铢数乘络丝一斤两数,又以青丝一斤乘之为实. 实如

法得一斤”. 也就是由算式

$$\frac{(24\times16\times1)\times(16\times1)\times1}{12\times(24\times16\times1+12)}$$

得出所需络丝的重量. 显然, 这里两次应用了“今有术”, 故刘徽注称:“是谓重今有术也”, 并指出:“凡率错互不通者, 皆积齐同用之. 仿此, 虽四五转不异也”. 即今有术可以重复多次使用.

返衰(Fǎncuī) 中国古算法. 即反比例算法. 其算法与“衰分术”大致相同. 所不同的是列出“返衰”, 即按照一定的规律递增列出分配比例的权数, 这时的分配原则是“令爵高出少, 以次渐多”.

齐同术(Qítóngshù) 中国古算法. 指中国古代的一种处理比率问题的方法. 最早的文字记载见于《九章算术》“方田”章“合分术”刘徽注, 用于分数的通分. 刘徽注称:“凡母互乘子谓之齐, 群母相乘谓之同. 同者, 相与通同, 共一母也; 齐者, 子与母齐, 势不可失本数也. 方以类聚, 物以群分. 数同类者无远, 数异类者无近. 远而通体者, 虽异位而相从也; 近而殊形者, 虽同列而相违也. 然则齐同之术要矣……乘以散之, 约以聚之, 齐同以通之, 此其算之纲纪乎. ”即将求若干个分数的公分母称之为“同”; 只有“同”才能进行分数的加减运算, 借助于分数的基本性质使各个分数的分子发生相应的变化称之为“齐”; 只有“齐”才能保证与原来的分数相等. 中国古代数学家习惯于将分子、分母看作一对率, 故对于适用于分数的这种算法也可推广到若干组率的演算. 因此, 刘徽又将其发展成为适用于一切与比率有关的问题, 称其为“算之纲纪”:“凡率错互不通者, 皆积齐同而用之”. 即从广义上讲, 齐同术是将“错互不通”之率化为互通之率的一种通用方法, 它不仅适用于通分和连比例运算, 而且也是盈不足术和方程术的理论基础.

其率术(Qílǜshù) 中国古算法. 即按贵贱之分求商品整值单价的算法. 如出钱 576, 买竹 78 个, 按贵贱二率使竹之单位为整数, 其率术为:

其贱率: $\left[\frac{576}{78}\right]=7$ 钱/每个;

其贵率: $\frac{576}{78}+1=8$ 钱/每个.

此算法载于《九章算术》“粟米”章, 所谓“其率”, 乃贵、贱二率之总称.

反其率术(Fǎnqílǜshù) 中国古算法. 即其率术的相反问题. 当钱少物多, 求每钱买几物时, 欲使数值为整, 按贵贱区分, 即为反其率术. 如出钱 620, 买物 2100 个, 欲使物数为整, 求贵贱物数, 方法为:

少率(贵): $\left[\frac{2100}{620}\right]=3$ 个/1 钱;

多率(贱): $\left[\frac{2100}{620}\right]+1=4$ 个/1 钱;

$\frac{2100}{620}=3\cdots$余 240;

多率钱数 240, 少率钱数 $620-240=380$;

少物之数 $=3\times380=1140$ 个;

多物之数 $=4\times240=960$ 个.

此算法载于《九章算术》“粟米”章(参见“其率术”).

通其率术(Tōngqílǜshù) 中国古算法. 指古代分数近似算法. 已知实数 a 与 $b(a>b)$, 求 a/b 渐近分数系列的算法方法如下: 首先对 a 与 b 用辗转相除法获得系列商: $\{q_1,q_2,\cdots,q_n\}$, 以及相应的余数系列: $\{r_1,r_2,\cdots,r_{n-1},r_n=0\}$, 并得到最大公约数(等数) $d=r_{n-1}=(a,b)$; 再按法则:

$$\begin{cases}c_1=q_1,\\ e_1=1;\end{cases}\quad\begin{cases}c_2=q_1q_2+1,\\ e_2=q_2;\end{cases}$$

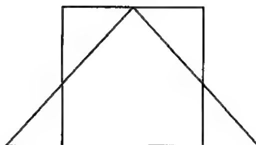
$$\begin{cases}c_i=c_{i-1}q_i+c_{i-2},\\ e_i=e_{i-1}q_i+e_{i-2}\end{cases}\quad(i>2)$$

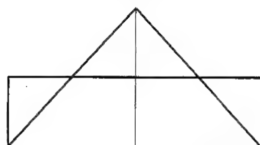
计算, 于是得到 a/b 的渐近分数系列:

$$\left\{\frac{c_1}{e_1},\frac{c_2}{e_2},\cdots,\frac{c_n}{e_n}\right\}, \text{这里}\frac{c_n}{e_n}=\frac{a/d}{b/d}.$$

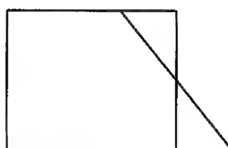
当 a/b 是有理数时, n 有限; 当 a/b 是无理数时, n 无限. 汉代《三统历》计算五星运动周期时有此算法, 称之为“通其率”, 后代数学家常以此法求实数的最佳渐近分数, 并进行约分.

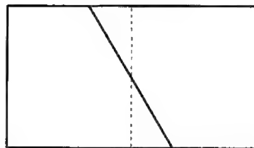
圭田(Guītián) 中国古算名. 即等腰三角形. 最早的文字记载见于《九章算术》“方田”章:“圭田术曰: 半广以乘正从”, 也就是说, 三角形的面积等于高与底边边长乘积的一半. 刘徽注称:“半广者, 以盈补虚为直田也. 亦可半正从以乘广. ”即如图根据“出入相补”原理、采用“以盈补虚”的方法将三角形化为与之等积的长方形, 再利用“方田术”计算其面积.


半广以乘正从


半正从以乘广

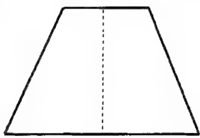
邪田(Xiétián) 中国古算名. 即直角梯形. 最早的文字记载见于《九章算术》“方田”章:“邪田术曰: 并两斜而半之, 以乘正从若广”, 也就是说, 直角梯形的面积等于两底和的一半与高的乘积. 刘徽注称:“并而半之者, 以盈补虚也. ”即如图同样根据“出入相补”原理, 采用“以盈补虚”的方法可将直角梯形





化为与之等积的长方形，再利用“方田术”计算其面积，如图所示.

箕田(Jītián)　中国古算名. 即一般梯形. 最早的文字记载见于《九章算术》“方田”章. 中国古代数学家将箕田的上、下底分别称为舌、踵. “箕田术曰：并踵、舌而半之，以乘正从.”也就是说，一般梯形的面积等于上、下底边边长和的一半与高的乘积. 刘徽注称：“中分箕田则为两箕田，故其术相似.”即如下图将一般梯形分解为两个直角梯形，从而转化为邪田来求.



圆田(Yuántián)　中国古算名. 即圆. 最早的文字记载见于《九章算术》“方田”章：“圆田术曰：半周半径相乘得积步”，也就是说，圆的面积等于以圆的周长的一半为底，半径为高的长方形的面积. 这实际上是将曲线形圆化为直线形矩形来处理的. 刘徽的注文利用无限细分，以直代曲的思想对这一解法作了接近于现代微积分方法的解释. 但在计算圆的周长时，《九章算术》采用了“径一周三”，即取圆周率的值为 3 入算，这是不太精确的. 刘徽的注文正确地指出了这一缺陷，并提出了著名的“割圆术”，为精确地计算圆周率指明了方向(参见“割圆术”).

弧田(Hútián)　中国古算名. 即圆弓形. 最早的文字记载见于《九章算术》“方田”章：“弧田术曰：以弦乘矢，矢又自乘，并之，二而一”，也就是说，若设弦长为 b，矢长为 h，则圆弓形的面积为

$$S = \frac{1}{2}(bh + h^2).$$

显然，这是一个近似公式，即将其看成是一个以矢、弦分别为上、下底，以矢为高的等腰梯形的面积.

弦图(Xiántú)　中国古算名. 即中国古代数学家用来证明勾股定理的一种几何图形. 公元 3 世纪，三国吴人赵爽在注《周髀算经》时，首先利用“弦图”给出了勾股定理的证明. 赵爽在附于《周髀算经》首

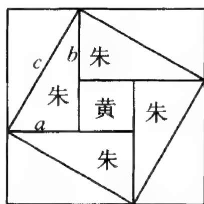


图 1

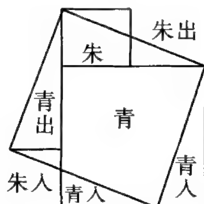
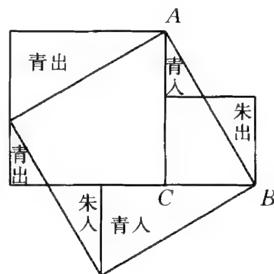


图 2

章的“勾股圆方图注”中给出了“弦图”(如图 1)，并解释说：“又可以勾股相乘为二朱实，倍之为朱实四，以勾股之差自相乘为中黄实，加差实，亦成弦实”. 设勾为 a，股为 b，弦为 c，则如图有朱实四为 $2ab$，中黄实(即差实)为 $(b-a)^2$，因此有弦实一方面为 $2ab+(b-a)^2$，另一方面又为 c^2，所以 $2ab+(b-a)^2=c^2$，即 $a^2+b^2=c^2$. 从而就证明了勾股定理. 实际上，由这张弦图还可以得到许多有关勾股定理的结论. 如由整个图形可知 $(a+b)^2=(b-a)^2+4ab$. 刘徽也曾利用弦图(如图 2)给出过勾股定理的证明. 他的方法是：“勾自乘为朱方，股自乘为青方. 令出入相补，各从其类，因就其余不移动也，合成弦方之幂，开方除之即弦也.”即利用割补的方法将一大一小两个正方形转化成一个与它们等积的大的正方形，从而就证明了勾股定理. 利用弦图，还可以处理许多与勾股定理有关的问题(参见“勾股和较术”).

出入相补(Chūrù xiāngbǔ)　中国古算法. 指中国古代数学中一种利用几何图形推导或说明数学结论的方法. 首先是由刘徽和赵爽等人认识到其在学习与研究数学中的重要性并将其一般化的. 刘徽在注《九章算术》原序中称：“析理以辞，解体用图，庶亦约而能周，通而不黩，览之者思过半矣.”赵爽也在注释《周髀算经》时说：“辄依经为图，诚冀颓毁重仞之墙，披露堂室之奥.”他们都利用图验法给出了许多数学结论的推导或证明. 例如，刘徽在证明勾股定理时就采用了将图形“以盈补虚”、“损广补狭”的方法，如下图.



“勾自乘为朱方，股自乘为青方. 令出入相补，各从其类. 因就其余，不移动也. 合成弦方之幂.”即如上图，图中 $\triangle ABC$ 为勾股形，以 AC 为一边的正方形——“股方”用青色标识，以 BC 为一边的正方形——“勾方”用朱色标识，然后将两块“青出”移至相应的两块“青入”处，将一块“朱出”移至“朱入”处，就合成以 AB 为一边的正方形“弦方之幂”. 这种方法推广到三维空间则被称为“棋验法”.

立方(Lìfāng)　中国古算名. 即长方体(如图 1). 最早的文字记载见于《九章算术》“商功”章. 其体积计算公式为

$$V = abc,$$

其中 a、b、c 分别为其三度的长、宽、高.

堑堵(Qiàndǔ)　中国古算名. 即经过相对两棱斜剖长方体所得到的三棱柱(如图 1、图 2). 最早的文字记载见于《九章算术》“商功”章. 其体积计算公式为

$$V=\frac{abc}{2},$$

其中 a、b、c 分别为其三度的长、宽、高.

阳马(Yángmǎ)　中国古算名. 即经过不相邻的三顶点斜剖堑堵所得到两侧面与底面重直的四棱锥(如图 2 中的四棱锥 $D'-ABCD$). 最早的文字记

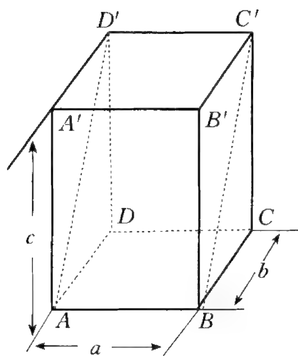


图 1

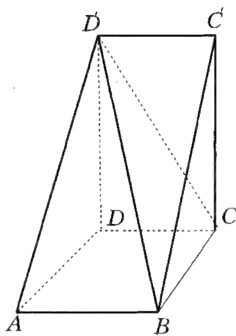


图 2

载见于《九章算术》“商功”章. 其体积计算公式为

$$V=\frac{abc}{3},$$

其中 a、b、c 分别为其三度的长、宽、高.

鳖臑(Biēnào)　中国古算名. 即经过不相邻的三顶点斜剖堑堵所得到的四面体(如图 2 中的三棱锥 $D'-BCC'$). 最早的文字记载见于《九章算术》“商功”章. 其体积计算公式为

$$V=\frac{1}{6}abc,$$

其中 a、b、c 分别为其三度的长、宽、高.

堑(城、垣、堤、沟、渠)(Qiàn(chéng, yuán, dī, gōu, qú))　中国古算名. 即横截面为梯形的柱体(如图所示). 最早的文字记载见于《九章算术》“商功”章. 其体积计算方法为:“并上、下广而半之,以高若深乘之,又以袤乘之,即积尺”,也就是

$$V=\frac{1}{2}(a_1+a_2)bh,$$

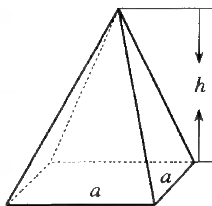
其中 a_1, a_2, b, h 如图所示.

方亭(Fāngtíng)　中国古算名. 即两底面为正方形的正台体(如图). 最早的文字记载见于《九章算术》“商功”章. 其体积计算方法为:“上、下方相乘,又各自乘,并之,以高乘之,三而一”,也就是

$$V=\frac{1}{3}(a_1^2+a_2^2+a_1a_2)h,$$

其中 a_1, a_2, h 如图所示.

方锥(Fāngzhuī)　中国古算名. 即底面为正方形的四棱台(如图). 阳马也是方锥之一种. 最早的文字记载见于《九章算术》“商功”章,其体积计算方法为:“下方自乘,以高乘之,三而一”,也就是



$$V=\frac{1}{3}a^2h,$$

其中 a, h 如图所示.

刍甍(Chúméng)　中国古算名. 指上底为一线段,下底为矩形的楔状体(如右图). 甍通蒙,刍甍原意为层脊. 最早的文字记载见于《九章算术》“商功”章,其体积计算方法为:“倍下袤,上袤从之,以广乘之,又以高乘之,六而一”,也就是

$$V=\frac{1}{6}(2a_2+a_1)bh,$$

其中 a_1, a_2, b, h 如图所示.

刍童(Chútóng)　中国古算名. 指上下底面为矩形的四棱台(如右图). 堑(城、垣、堤、沟、渠)、方亭、方锥、刍甍皆可看作是刍童的特殊情况. 最早的文字记载见于《九章算术》“商功”章,其体积计算方法为:“倍上袤,下袤从之,亦倍下袤,上袤从之,各以其广乘之,并,以高若深乘之,皆六而一”,也就是

$$V=\frac{1}{6}[(2a_1+a_2)b_1+(2a_2+a_1)b_2]h,$$

其中 a_1, a_2, b_1, b_2, h 如图所示.

方堡壔(Fāngbǎochóu)　中国古算名. 即直四棱柱. 最早的文字记载见于《九章算术》“商功”章,其体积计算方法是:“方自乘,以高乘之,即积尺”,也就是 $V=a^2h$,其中 a 为正四棱柱底面边长,h 为其高.

圆堡壔(Yuánbǎochóu)　中国古算名. 即直圆柱. 最早的文字记载见于《九章算术》“商功”章,其体积计算方法是:“周自相乘,以高乘之,十二而一”,也就是

$$V=\frac{1}{12}c^2h,$$

其中 c 为圆柱底面周长,h 为圆柱的高.

圆亭(Yuántíng)　中国古算名. 即圆台. 最早的文字记载见于《九章算术》“商功”章,其体积计算方法是:“上下周相乘,又各自乘,并之,以高乘之,三十六而一”,也就是

$$V=\frac{1}{36}(c_1^2+c_1c_2+c_2^2)h,$$

其中 c_1, c_2 分别为圆台上、下底面的周长,h 为圆台的高.

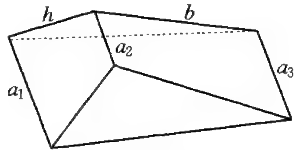
圆锥(Yuánzhuī)　中国古算名. 即今之圆锥. 最早的文字记载见于《九章算术》“商功”章,其体积

计算方法是:“下周自乘,以高乘之,三十六而一”,也就是

$$V=\frac{1}{36}c^2h,$$

其中 c 为圆锥的底面周长,h 为其高.

羡除(Xiànchú) 中国古算名.原意为墓道;在中国古代数学中表示三面为等腰梯形,两面为直角三角形的楔状体(如图).最早的文字记载见于《九章算术》“商功”章,其体积计算方法为:“并三广,以深乘之,又以袤乘之,六而一”,也就是



$$V=\frac{1}{6}(a_1+a_2+a_3)bh,$$

其中 a_1,a_2,a_3,b,h 如图所示.

开方术(Kāifāngshù) 中国古算法.即开平方的方法.见于《九章算术》“少广”章.《九章算术》“少广”章中的“开方术”特指开平方运算,其算法与现在教科书中介绍的开平方笔算方法基本相同.现以“少广”章第12题“今有积五万五千二百二十五步,问为方几何”为例,结合术文将这一方法介绍如下:

1.“置积为实.借一算步之,超一等.”即将被开方数55225称为“实”,下隔一行置一算筹于个位,称为“借算”,将“借算”向左移动,隔一位一“步”,以确定方框的最高位为100.

2.“议所得,以一乘所借一算为法而以除.”即在百位上“议得”方根的第一位数字2,将此数乘以“借算”得“法”:$2\times10000=20000$,以下按除法运算在“实”这一行中有 $55225-2^2\times10000=15225$.

3.“除已,倍法为定法.其复除,折法而下.复置借算步之如初.”即将“法”乘以2为“定法”.然后退一位成:$20000\times2\div10=4000$,按照1中的方法重新确定“借算”的位置,“步得”100.

4.“以复议一乘之,所得副,以加定法,以除.”即在十位上“复议”得方根的第二位数字3,将此数乘以“借算”为“所得”:$3\times100=300$,暂置于“定法”之下称为“副”,又将“所得”加到“定法”4000上的4300,在“实”这一行中进行除法运算,有 $15225-3\times4300=2325$.

5.“以所得副从定法,复除下折如前.”即再把“所得”300加到新的“定法”4300上,得4600.按照3中的方法将“定法”退一位成460,“借算”则表示1.

6.在个位上“议得”方根第三位数为5,仿照2、4在“实”这一行中有 $2325-5\times465=0$,表示开方已尽,方根为235(如开方不尽,还可用“命分”的方法给出其近似方根的值).

刘徽在其注文中,还利用几何图形对这一方法给出了一个直观的解释.

开立方术(Kāilìfāngshù) 中国古算法.即开立方的方法.最早的文字记载见于《九章算术》“少广”章.这一方法可以看作是开平方算法的推广,其方法是:“置积为实.借一算步之,超二等.议所得,以再乘所借一算为法,而除之.除已,三之为定法.复除,折而下.以三乘所得数置中行.复借一算置下行.步之,中超一,下超二等.复置议,以一乘中,再乘下,皆副以加定法.以定法除.除已,倍下,并中从定法.复除,折下如前.开之不尽者,亦为不可开.若积有分者,通分内子为定实.定实乃开之,讫,开其母以报除.若母不可开者,又以母再乘定实,乃开之.讫,令如母而一.”根据术文,仿照“开平方术”不难给出这段术文的解释.刘徽在其注文中也利用正方体模型的分割对这一方法给出了直观的解释.

开立圆术(Kāilìyuánshù) 中国古算法.指已知球体积,求球直径的方法.最早的文字记载见于《九章算术》“少广”章:“开立圆术曰:置积尺数,以十六乘之,九而一,所得开立方除之,即立圆径.”这一方法相当于给出球体积计算公式

$$V=\frac{9}{16}d^3$$

(其中 d 为球的直径).《九章算术》未给出该公式的由来.在刘徽注《九章算术》时,给出了两种解释:

1.由“黄金方寸重十六两,金丸径寸重九两”实测而来.

2.先由截面原理推得正方体与其内切圆柱体的体积之比为4/3,再假定圆柱体与其内切球体的体积之比也是4/3.进而由连比例得到.

刘徽对其第2种解释做了进一步的考察,指出若取 $\pi=3$,则正方体与其内切圆柱体的体积之比为4/3,但圆柱体与其内切球体的体积之比不是4/3,而是“牟合方盖”——两个正交的等径圆柱体的公共部分——与其内切球体的体积之比为4/3.从而指出这一公式是错误的,并阐明了得到球体积计算公式的正确途径是求出牟合方盖的体积.祖暅考察正方体与其内容牟合方盖之间的关系,并应用以他的名字命名的截面原理,得到牟合方盖与其外接正方体的体积之比为2/3.从而得到正确的球体的体积计算公式为

$$V=\frac{\pi}{6}d^3.$$

参见“牟合方盖”条.

方程术(Fāngchéngshù) 中国古算法.指《九章算术》中提出的一种解线性方程组的消元法.今举例如下:第八章“方程”第一题:“今有上禾三秉,中禾二秉,下禾一秉,实三十九斗;上禾二秉,中禾三秉,下禾一秉,实三十四斗;上禾一秉,中禾二秉,下禾三

秉，实二十六斗．问上、中、下禾实一秉各几何？”依术文列出方程如下：

$$\begin{cases}3x+2y+z=39,\\2x+3y+z=34,\\x+2y+3z=26.\end{cases}$$

	左行	中行	右行
上禾	𝍠	𝍡	𝍢
中禾	𝍡	𝍢	𝍡
下禾	𝍢	𝍠	𝍠
实	𝍪𝍥	𝍫𝍣	𝍫𝍨

其消元过程如下：

1.“以右行上禾遍乘中行而以直除”，即以右行上禾 3 遍乘中行各数，然后从中行中累减右行两次，得

左行	中行	右行
𝍠		𝍢
𝍡	𝍤	𝍡
𝍢	𝍠	𝍠
𝍪𝍥	𝍫𝍣	𝍫𝍨

2.“又乘其次，亦以直除”，意即以右行上禾 3 遍乘左行各数，然后从左行内减去右行，得

左行	中行	右行
		𝍢
𝍣	𝍤	𝍡
𝍧	𝍠	𝍠
𝍫𝍨	𝍪𝍣	𝍫𝍨

3.“然以中行中禾不尽者遍乘左行而以直除”，即以中行 5 遍乘左行，然后从左行内累减中行，得

左行	中行	右行
		𝍢
	𝍤	𝍡
𝍫𝍥	𝍠	𝍠
𝍱𝍨	𝍪𝍣	𝍫𝍨

4.“左方下禾不尽者，上为法，下为实，实即下禾之实．”99 为下禾之实．

5.“求中禾，以法乘中行下实，而除下禾之实．余如中禾秉数而一，即中禾之实．”中禾之实为

$$\frac{24\times 36-99}{5}=153.$$

6.“求上禾亦以法乘右行下实，而除下禾、中禾之实．余如上禾秉数而一，即上禾之实．”上禾之实为

$$\frac{39\times 36-99-153\times 2}{3}=333.$$

7.“实皆如法，各得一斗．”以上求得的上、中、下禾之实各为 333，153，99．各除以法 36，得

$$\left(9\frac{1}{4},4\frac{1}{4},2\frac{3}{4}\right),$$

为上、中、下禾一秉之实．

其中“直除法”就是两行对应数字相减，以达到消去其中一个数字的目的．刘徽的解释是“令少行减多行，反复相减，则头位必先尽”．

正负术(Zhéngfùshù)　中国古算法．指正负数的概念及其运算法则．最早的文字记载见于《九章算术》“方程”章．《九章算术》在利用对增广矩阵进行初等变换解线性方程组时，遇到了减数大于被减数而不能在正数范围内实施减法运算的情形，从而引进了正负数的概念及其运算法则．“正负术曰：同名相除，异名相益．正无人负之，负无人正之．其异名相除，同名相益．正无人正之，负无人负之．”这相当于给出以下有理数的减法与加法规则：

$\pm a-(\pm b)=\pm(a-b)$（同名相除），

$\pm a-(\mp b)=\pm(a+b)$（异名相益），

$0-(\pm a)=\mp a$（正无入负之，负无入正之）；

$\pm a+(\pm b)=\pm(a+b)$（同名相益），

$\pm a+(\mp b)=\pm(a-b)$（异名相除），

$0+(\pm a)=\pm a$（正无入正之，负无入负之）．

这里的 a、b，满足 $a>b>0$．元朱世杰《算学启蒙》，又增加了正负数乘除法则．

和较术(Héjiàoshù)　亦称勾股和较术．中国古算法．指中国古代勾股定理应用的一个重要组成部分．“较”在中国古代数学中是“差”的意思．在勾股形中，设其勾、股、弦分别为 a、b、c，且有 $a<b<c$，若已知其中任意两个，则可求第三个元素，这是勾股定理的最基本的应用．若将 a、b、c 中的任意两个元素作和或差，并考虑到差为正数，则有

$$a+b,\ a+c,\ b+c,\ b-a,\ c-a,\ c-b$$

六种形式，在 a、b、c 和这六种表达式中任取两个为条件，都可以解出这个勾股形．这种命题方式及其解法就称为和较术．这一方法的起源最早可追溯到刘徽、赵爽的时代．事实上，他们在注《九章算术》和《周髀算经》时，就已经解决了这类问题中的一部分．在明代，这一方法又得到了进一步的发展，顾应祥、唐顺之等人又将其推广到三个元素的和较问题．

割圆术(Gēyuánshù)　中国古算法．指中国古代刘徽提出的计算圆周率的方法．他是采用内接正

多边形逐渐增加边数使之与圆逐渐逼近的方法来计算圆周率. 刘徽推出的内接正 $4n$ 边形边长公式为

$$l_{4n}=\sqrt{\left[r-\sqrt{r^2-\left(\frac{l_{2n}}{2}\right)^2}\right]^2+\left[\frac{l_{2n}}{2}\right]^2}$$

(其中 r 为半径, l_{2n} 为 $2n$ 边形边长); $4n$ 边形的面积公式为

$$S_{4n}=2n\cdot\frac{r\cdot l_{2n}}{2}.$$

刘徽利用上述公式, 从半径为 1 尺的圆内接正六边形算起, 一直算得正 96 边形的边长, 从而算得 192 边形的面积为

$$S_{192}=3.14\frac{64}{625}\text{ 平方寸}.$$

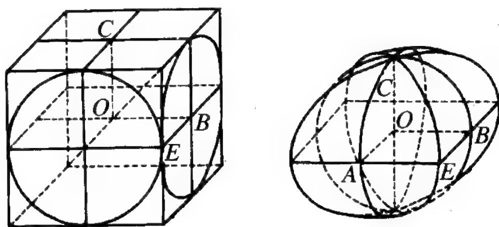
相当于求得 $\pi\approx3.14124$, 并可进一步求得

$$\pi\approx3.14\frac{64}{625\times100}+\frac{36}{625\times100}=3.1416.$$

阳马术(Yángmǎshù) 中国古算法. 指斜截立方得堑堵, 再斜截堑堵得一阳马、一鳖臑, 则阳马体积是鳖臑体积的 2 倍, 这一命题见于《九章算术》"商功"章. 刘徽采用极限的方法对这一命题进行了论证, 并进一步指出"鳖臑之物, 不同器用, 阳马之形, 或随修短广狭. 然不有鳖臑, 无以审阳马之数. 不有阳马, 无以知锥亭之类, 功实之主也", 意即阳马术是计算多面体体积之基础, 实际上是中算体积理论的基础. 与希尔伯特第三问题的所谓德恩条件是等价的, 故今日一般称之为刘徽原理.

徽率(Huīlǜ) 中国古算名. 指刘徽注《九章算术》中, 用割圆术求得圆周率 π 的近似值 $\pi\approx3.14$. 后人称之为徽率.

牟合方盖(Biànhé fānggài) 中国古算名. 指刘徽在研究球体积时引入的一种立体模型. 作一立方体, 先自左而右作内切圆柱, 再自前而后作内切圆柱. 正立方体经过两次切割得到一个立体图形, 像是上下相对的两把方伞, 故名"牟合方盖", 其图形如图所示.



重差术(Chóngchāshù) 中国古算法. 指中国古代的一种勾股测量方法. 该方法需要用两次表或矩重复测量, 并以两个测得的数据的差进行计算, 故称之为重差. 最早记载于《周髀算经》"测日高远", 刘徽又作《海岛算经》阐发此算法. 方法如下: 表高 h, 两表距离(表间)d, 前表影长 s_1, 后表影长 s_2, 则

$$\text{日高}=\frac{dh}{s_2-s_1}+h,$$

$$\text{日远}=\frac{s_1d}{s_2-s_1}.$$

在不使用角与三角函数概念的情况下, 重差术在中国古代测量学中具有与三角法异途同归的作用.

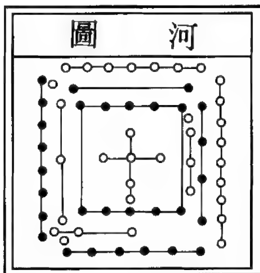
开带从平方(Kāi dàicóng píngfāng) 中国古算法. 指求形如

$$x^2+Bx=A\ (A>0,B>0)$$

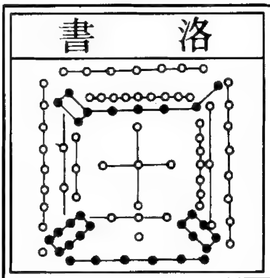
的一元二次方程的正根的一种方法, 这是《九章算术》"开方术"的自然推广. 这里的 B 在《九章算术》中被称为"从法". 事实上, 这一方法可以看作是从开平方法推算第二位数的步骤开始.

开带从立方(Kāi dàicóng lìfāng) 中国古算法. 指求形如 $x^3+Bx^2+Cx=A$ ($A>0,B>0,C>0$)的一元三次方程的正根的一种方法, 这也是《九章算术》"开方术"的自然推广. 这里 B、C 称为"从法". 事实上, 这一方法可以看作是从开立方法推算第二位数的步骤开始.

河图(Hétú) 中国古算名. 河图一词, 最早见于《书经》.《书·顾命》有"天球, 河图". 传云: "河图, 八卦; 伏羲王天下, 龙马出河, 遂则其文以画八卦, 谓之河图".《易·系辞上》说: "河出图, 洛出书, 圣人则之." 此时"河图"、"洛书"是指什么? 尚无记载.《系辞传》说: "天数五, 地数五, 五位相得而各有合". 郑玄以为: 天数是 1,3,5,7,9 五个奇数; 地数是 2,4,6,8,10 五个偶数. 五位是五行的方位. 1,2,3,4,5 谓之"生数", 各加 5, 得 6,7,8,9,10 谓之"成数". 以 1,6 配水, 位于北方; 以 2,7 配火, 位于南方; 以 3,8 配木, 位于东方; 以 4,9 配金, 位于西方; 以 5,10 配土, 位于中央. 宋代的理学家根据天地生成数画出"河图", 如上图.



洛书(Luòshū) 中国古算名.《易·系辞》云: "河出图, 洛出书, 圣人则之." 郑玄按《春秋纬》, 以为河图有九篇, 洛书有六篇. 孔安国则以为河图为八卦, 洛书为九畴. 各家解释不一. 北宋儒家始以九宫数解释洛书, 并画图如右图.



九宫(Jiǔgōng) 中国古算名. "九宫"最早见于

《黄帝内经·灵枢》，其中记载："立秋二，玄委西南方；秋分七，仓果西方；立冬六，新洛西北方；夏至九，上天南方冬至一，叶蛰北方；立夏四，阴洛东南立；春分三，仓门冬方；立春八，天留东北方."后甄鸾《数术记遗》注云："二四为肩，六八为足，左三右七，戴九履一，五居中央"，则明确地指出了"九宫"中数字位置，这是世界上最古老的幻方.它的三条纵行、三条横行、两条对角线上三个数字之和都是十五.

太一算(Tàiyīsuàn)　中国古算法.见载《数术记遗》，该书称："太一之行，去来九道."注称："刻板横为九道，竖以为柱，柱上一珠，数从下始.故曰去来九道也."

两仪算(Liǎngyísuàn)　中国古算法.载于《数术记遗》，该书云："两仪算，天气下通，地禀四时."该书注云："刻板横为五道，竖以为位.一位两珠，上珠色青，下珠色黄.其青珠自上而下，至上第一刻主五，第二刻主六，第三刻主七，第四刻主八，第五刻主九.其黄珠自下而上，至下第一刻主一，第二刻主二，第三刻主三，第四刻主四，而已.故曰'天气下通，地禀四时'也."

成数算(Chéngshùsuàn)　中国古算具.指中国古算书《数术记遗》中所介绍的古算具.用筹五枚，除黄筹单独表示"5"外，其玄、赤、青、白各筹皆配以黄色，每筹表示两个数字.其中1—5为生数，6—9为成数.当算筹的头指向东方、南方表示生数，指向西方、北方表示成数.用黄筹竖放着表示5.

九宫算(Jiǔgōngsuàn)　中国古算具.指中国古算书《数术记遗》中所介绍的古算具.它是以"九宫"为表示数字之用而设立的，故曰"九宫算"(参见"九宫").

三才算(Sāncáisuàn)　中国古算法.《数术记遗》中有记载.原书云："三才算，天地和同，随物变通."注云："刻板横为三道，上刻为天，中刻为地，下刻为人.竖为算位.有三珠，青珠属天，黄珠属地，白珠属人.又其三珠通行三道.若天珠在天为九，在地主六，在人主三.其地珠在天为八，在地主五，在人主二.人珠在天主七，在地主四，在人主一.故曰天地和同，随物变通.亦况三元，上元甲子一、七、四，中元甲子二、八、五，下元甲子三、九、六，随物变通也."

古珠算(Gǔzhūsuàn)　中国古算法.《数术记遗》中有记载.原书云："珠算：控带四时，经纬三才."注云："刻板为三分，其上下二分，以停游珠.中间一分，以定算位.位各五珠，上一珠与下四珠色别.其上别色之珠当五，其下四珠，珠各当一.至下四珠所领，故云控带四时，其珠游于三方之中，故云经纬三才也."

一掌金(Yìzhǎngjīn)　亦称指算.中国古算法.指古代帮助心算的一种"手算"方法.以左手五指作为五位，每指分左、中、右三直行记数，左行1,2,3和右行7,8,9都自下而上，中行4,5,6三个数自上而下.要牢记各数部位，记数时，用右手和左手相同的指尖掐在左手指记数部位上.亦称"袖里吞金"("吞金"系"囤金"之讹传)，后被改称："袖里藏金"或"袖中锦".



八卦算(Bāguàsuàn)　中国古算具.指中国古算书《数术记遗》中所介绍的古算具.原文云："针刺八方，位阙从天.""八卦算"的1—8数字由八卦方位确定，用一根针指向某方，即表示一数.若表示9，则将针锋指天.八卦所在位置与《易·说卦传》所载相同.

龟算(Guīsuàn)　中国古算具.指中国古算书《数术记遗》中所记载的古算具.龟算用十二时辰的方位表示数，用一龟形板置中间，龟首指向某方位，就表示某数.亥、子、丑表示十月、十一月、十二月，此三辰不表示数.所以原文说："春夏秋成，遇冬则停."

五行算(Wǔxíngsuàn)　中国古算具.指中国古算书《数术记遗》中所记载的古算具.这是用九根有颜色的算筹表示数：1—5用单色筹分别以玄、赤、青、白、黄五种颜色表示，6—9用两色筹表示，即玄、赤、青、白各配以黄色表示.

把头算(Bǎtóusuàn)　中国古算具.指中国古算书《数术记遗》中所记载的古算具.把头算由两根筹组成：一个长筹表示5；一个有齿的方筹，四面各刻上一、二、三、四条线，表示1—4.若表示5以上的数，就用一个有齿的和一个长筹.

了知算(Liǎozhīsuàn)　中国古算具.指中国古算书《数术记遗》中记载的古算具.这种算法，一位为一"了"字."了"字有三曲，其内外各记1,9;2,8;3,7;4,6;其首记5.

运筹算(Yùnchóusuàn)　中国古算具.指中国古算书《数术记遗》中所介绍的一种古算具.用五寸长的筹，其上刻上线来表示数.近顶头的一条线表示5，其余相距一寸的线各表示1—4，若倒过来，则表示6—9.将筹夹在手指间，食指三节表示个位、十位、百位；中指三节表示千位、万位、十万位等.

十等数(Shíděngshù)　中国古算名.指中国古代关于大数的10个名称.《数术记遗》称："黄帝为法，数有十等.……十等者，亿、兆、京、垓、秭、壤、沟、涧、正、载."

密率(Mìlǜ)　中国古算名.祖冲之发现的圆周率的分数近似值$\pi\approx355/113$，称为密率.它是相对于约率$\pi\approx22/7$而言的.

祖率(Zǔlǜ)　中国古算名. 即密率. 因为它是祖冲之首先发现的,后人为纪念他而称祖率.

三等数(Sānděngshù)　中国古算法. 指中国古代三种进位法.《数术记遗》称:"三等者,谓上、中、下也. 其下数者,十十变之,若言十万曰亿,十亿曰兆,十兆曰京也. 中数者,万万变之,若言万万曰亿,万万亿曰兆,万万兆曰京也. 从亿至载,终于大衍. 上数者,数穷则变. 若言万万曰亿,亿亿曰兆,兆兆曰京也."即下等记数法皆为十进;中等记数法皆为万进;而上等记数法为乘方进. 南北朝时代董泉曾撰有《三等数》一书,可惜已失传,在《孙子算经》中"大数记法"一节有所介绍.

孙子定理(Sūnzǐ - dìnglǐ)　中国剩余定理的古称. 即一次同余式组求解问题. 最早载于《孙子算经》:"今有物不知其数,三三数之剩二,五五数之剩三,七七数之剩二,问物几何?"书中解答为:"术曰:三三数之乘二,置一百四十;五五数之剩三,置六十三;七七数之剩二,置三十;并之,得二百三十三,以二百一十减之,即得."即求

$$N\equiv 2 \pmod 3\equiv 3 \pmod 5\equiv 2 \pmod 7,$$

$$N=2\times(5\times7)\times2+3\times(3\times7)\times1+2\times(3\times5)\times1-3\times(5\times7)\times2=23.$$

这一问题在民间流传甚广,有"秦王暗点兵"、"韩信点兵"、"剪管术"、"隔墙算"、"鬼谷算"、"物不知数"等称谓,而且将其算法编成歌诀,如南宋人周密《志雅堂杂抄》中作诗曰:

"三岁孩儿七十稀,五留廿一事尤奇.
七度上元重相会,寒食清明便可知."

明代程大位《算法统宗》作歌曰:

"三人同行七十稀,五树梅花廿一枝;
七子团圆整半月,除百零五便得知."

此算题经阿拉伯数学著作传到欧洲,出现于斐波那契(Fibonacci,L.)的著作中,后来欧洲人称之为"中国剩余定理".

中国剩余定理(Zhōngguó shènyú dìnglǐ)　即"孙子定理".

百鸡术(Bǎijīshù)　中国古典算术题. 指《张丘建算经》(公元 5 世纪)内的一道题,称为"百鸡问题". 题云:"今有鸡翁一,直钱五;鸡母一,直钱三;鸡雏三,直钱一. 凡百钱,买鸡百只,问鸡翁、母、雏各几何."这是一个一次不定方程组. 历代称此类问题为"百鸡术".

约率(Yuēlǜ)　中国古算名. 即中国古代对圆周率的一种称谓.《隋书》称祖冲之的圆周率355/113为密率;22/7 为约率. 但在李淳风《九章算术》注中却将 22/7 称密率,因为它比之刘徽的 157/50,即所谓徽率较精密.

祖暅原理(ZǔHèng yuánlǐ)　中国古算著名定理. 数学史界又常称"刘祖原理". 中国古代数学家刘徽曾多次运用比较截面的方法研究由曲面围成的立体体积,特别是对于球体,他首先构造了一个称为"牟合方盖"的立体. 指出球的体积可以利用牟合方盖与其内切球的截面比较的方法来求积,但他自己未能正确地推导出球体积计算公式. 南北朝时期的数学家祖暅根据刘徽的思路巧妙地运用截面原理推导出了正确的球体积计算公式,并第一个用明确的文字将截面原理表达出来,这就是:"缘幂势既同,则积不容异",即如果两个立体的任意等高截面的面积都相等,则它们的体积必然相等. 这与意大利数学家卡瓦列里(Cavalieri,F. B.)在 1635 年提出的一个命题完全一致.

上元积年(Shàngyuán jīnián)　中国古历算名. 中国传统历法所取的一个理想历元(历法起算点)叫上元,要求此时"日月合璧,五星联珠",即日、月、五大行星处于同一位置,同时还要求此点所在年为甲子年,所在日为甲子日,且为夜半时刻. 所推算的历年至上元的积年数称为上元积年. 历算家推算上元积年相当于求解同余式组

$$\begin{cases} N\equiv r \pmod{60}, \\ \dfrac{T}{A}N\equiv r_1 \pmod{60} \end{cases}$$
$$\equiv r_2\left(\bmod \frac{B}{A}\right)$$
$$\equiv r_3\left(\bmod \frac{J}{A}\right)$$
$$\equiv r_2\left(\bmod \frac{G}{A}\right)$$
$$\equiv r_i\left(\bmod \frac{M_i}{A}\right),$$

其中$\frac{T}{A}$,$\frac{B}{A}$,$\frac{J}{A}$,$\frac{G}{A}$,$\frac{M_i}{A}$分别表示回归年、朔望月、交点月、近点月、五星周期. 这一问题是中算关于同余式组求解的科学背景.

调日法(Tiáorìfǎ)　中国古历算法. 由于不使用十进小数计算,早期历法中的天文数据均采用分数形式. 历算家首先确定最基本的两个周期——回归年与朔望月的不足一日的畸零部分,将朔望月畸零部分化成分数 $29+Y/A$ 日($Y<A$),其中 A 叫日法,Y 叫朔余. 据实测 $9/17<Y/A<26/49$,为了确定十分精确的 Y/A,并使 A 尽量地小,南北朝刘宋时期历算家何承天发明了一种分数近似法,即以

$$\frac{9m+26n}{17m+49n}$$

确定 Y/A 的渐近分数. 它是基于下述基本性质:若实数 x 满足

$$\frac{a}{b}<x<\frac{c}{d},$$

则

$$\frac{ma+nc}{mb+nd}$$

是 x 的渐近分数系列，且

$$\frac{a}{b}<\frac{ma+nc}{mb+nd}<\frac{c}{d}.$$

古历家称此算法为调日法.

演纪术(Yǎnjìshù)　中国古历算法. 一种推算上元积年(参见"上元积年")的算法. 各代《律历志》所载历法均未详此算法，仅南宋秦九韶《数书九章》"治历演纪"问题有所叙述. 据所在年(甲子年)冬至时刻 t_1(日名干支及时辰数)与冬至所在 11 月之合朔时刻 t_2(日名干支及时辰数)，推演该年距上元的积年数 N(这里 $N=60n$). 若回归年长为 $T/A=365+R/A$，朔望月长为 $B/A=29+Y/A$ 日，那么推求 N 的演纪术算法如下：

1. 求气定骨 $r_1=[At_1]$ 或 $[At_1]+1$，朔定骨 $r_2=[At_2]$ 或 $[At_2]+1$，则闰泛骨 $W=r_1-r_2$，于是所求上元积年 N 必为下列同余式组的解：

$$\begin{cases}TN\equiv r_1(\bmod 60A),\\TN\equiv W(\bmod B).\end{cases}$$

2. 用调日法求日法 A，朔余 Y，朔率 B，并求出斗分 R.

3. 用"大衍术"(实即所谓"通其率术"的分数近似(参见"通其率术"))求出等数 $d=(R,A)$、岐率 $E=A/d$ 与 $F=R/d$，以及乘率 k，使 $kF\equiv1(\bmod E)$.

4. 将 N 记为 $N=60n=60pE+60Z=PL+M$，求入元岁 $M=60Z$.

由于 $TN\equiv r_1(\bmod 60A)$ 可化为

$$nF\equiv\frac{r_1}{60d}(\bmod E),$$

即 $$nF\equiv\bar{r}_1(\bmod E);$$

而又因为 $(\bar{r}_1,E)=1$，$kF\equiv1(\bmod E)$，所以

$$k\bar{r}_1F\equiv\bar{r}_1(\bmod E);$$

又因 $nF\equiv\bar{r}_1(\bmod E)$，所以

$$(n-k\bar{r}_1)F\equiv0(\bmod E).$$

而 $(E,F)=1$，故有

$$(n-k\bar{r}_1)\equiv0(\bmod E),$$

于是有 $n\equiv k r_1\equiv Z(\bmod E)$ $(Z<E)$.

这样 $n=pE+E$，得

$$N=60n=60pE+60Z=PL+M.$$

5. 求岁率 $T=365A+R$，岁闰 $P=T-12B$.

6. 根据 $N=Pl+M$，求解 $TN\equiv W(\bmod B)$. 由于 $TN\equiv W(\bmod B)$ 等价于 $(P+12B)N\equiv W(\bmod B)$，又 $N=PL+M$，所以有

$$(pPL+PM)\equiv W(\bmod B).$$

为此分别求出入闰 Q：$PM\equiv Q(\bmod B)$ $(Q<B)$，元闰 H：$PL\equiv H(\bmod B)$ $(H<B)$. 又因为 $(pPL+PM)\equiv W(\bmod B)$，所以 $pH+Q\equiv W(\bmod B)$，即 $pH\equiv(W-Q)(\bmod B)$，故再求闰缩 $S=W-Q$. 当 $W<Q$ 时，闰缩 $S=W-Q+B<B$，从而

$$pH\equiv(W-Q)(\bmod B),\text{即}$$

$$pH\equiv S(\bmod B).$$

7. 为了解 $pH\equiv S(\bmod B)$，再用"大衍术"求等数 $m=(H,B)$、岐数 $C=B/m$ 与 $D=H/m$，以及因数 g，使 $gD\equiv1(\bmod C)$，由此求 p. 因为 $pH\equiv S(\bmod B)$，即 $pD\equiv S/m(\bmod C)$，从而有 $p(gD)\equiv gS/m(\bmod C)$，又 $gD\equiv1(\bmod C)$，故 p 可从 $p\equiv gS/m(\bmod C)$ 解出. 秦九韶要求 $p<10^8-M/L$.

8. 最后求朔积年 $V=pL=p(60E)$，上元积年 $N=V+M$.

隙积术(Xìyīshù)　中国古算法. 指北宋沈括在《梦溪笔谈》内提出的一种求长方台垛积的方法. 如图设长方台垛积顶层宽有 a 个物体，长有 b 个物体；底层宽有 c 个物体，长有 d 个物体，高有 n 层，则沈括的求积公式为

$$\begin{aligned}S&=ab+(a+1)(b+1)+(a+2)(b+2)\\&\quad+\cdots+(a+\overline{n-1})(b+\overline{n-1})\\&=\frac{n}{b}[(2b+d)a+(2d+b)c]+\frac{n}{b}(c-a).\end{aligned}$$

会圆术(Huìyuánshù)　中国古算法. 指一种计算圆弓形弧长的近似方法，为北宋时沈括提出. 沈括的《梦溪笔谈》卷 18 的"会圆术"给出的圆弓形弧长的近似公式为

$$l=a+\frac{h^2}{r},$$

其中 r 为半径，h 为矢高，a 为弦长. 沈括并未给出这一公式的推导，它很可能与《九章算术》"弧田术"有着某种密切的关系.

三角垛(Sānjiǎoduò)　中国古算法. 指南宋数学家杨辉著作中提出的一种级数求和公式

$$\begin{aligned}S&=1+3+6+10+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2).\end{aligned}$$

果子垛(Guǒzǐduò)　中国古算名. 指南宋数学家杨辉著作中给出的级数求和公式，有两种：

1. 刍童垛，与沈括隙积术相同(参见"隙积术")；

2. 四隅垛，其公式为

$$\begin{aligned}S&=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2\\&=\frac{n}{3}(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

刍童垛(Chútóngduò)　中国古算名. 即沈括"隙积术"内所指的长方形台垛(参见"隙积术").

增成(Zēngchéng)　中国古算技巧.《梦溪笔谈》卷十八载:"算术多门,如求一,上驱、搭因、重因之类,皆不离乘除,惟增成一法稍异,其术都不用乘除,但补亏就盈而已.假如九除者,增一便是,八除者,增二便是,但一位一因之,若位数少,则颇简捷,位数多,则愈繁,不若乘除之有常."

细草(Xìcǎo)　中国古算名.中国古算书一般多给出数学问题(问)、答案(答)以及求解公式(术),而不给出求解的演算过程,而将求解过程中各个演算步骤记录下来,叫算草(或草),详细地记录算草,便是细草.清代学者在整理古典算书时,常为古算书补充细草.

演段(Yǎnduàn)　中国古算名.即演示、演算的意思.最早见于杨辉著作所录的刘益《议古根源》,后又见于李冶《益古演段》、朱世杰的《四元玉鉴》与《算学启蒙》以及程大位《算法统宗》等明代算书.杨辉对其解释为:"盖欲演算之片段也,知片段则能穷根源."清代学者李锐解释道:"所谓演者,演立天元,段者,以条段求之也."杨辉解释针对《议古源根》之演段,"演算之片段","则能穷根源",即演算法过程之片段以达到示算理之目的.李锐解释是针对李冶《益古演段》来说的,即用"条段法"(参见该条)的几何方式进行演示,以说明所布列的二次方程的系数的由来.程大位的"演段"也有演示解释之义.

开方作法本源图(Kāifāng zuòfǎ běnyuántú)　中国古算名.指正整数次幂二项式的展开式的系数表,其形状像一个等腰三角形.为北宋数学家贾宪所创,故称其为贾宪三角形,西方称之为帕斯卡三角形.《宋史·艺文志》录有贾宪《黄帝九章算法细草》九卷,书已无存,但其许多内容为100多年后的杨辉辑入自撰的《详解九章算法》之中,故又称为杨辉三角形.杨辉此书载有"开方作法本源图",并指明其"出释锁算书,贾宪用此术".图中数字排列成一个三角形,其第 n 行恰好是二项展开式:

$$(x+a)^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i x^{n-i}a^i$$

中的各项系数 $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \cdots, C_n^{n-1}, C_n^n$.满足

$$C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^{k}=C_n^k\ (k=1,2,\cdots,n-1).$$

```
            1
          1   1
        1   2   1
      1   3   3   1
    1   4   6   4   1
  1   5  10  10   5   1
1   6  15  20  15   6   1
       ············
```

图下注文为"左衺乃积数,右衺乃隅算,中藏者皆廉,以廉乘商方,命实以除之."前两句系指三角形最外边的两列数字分别对应各次开方之积与隅算;第三句是说中间的数字分别对应开方过程中所出现的各廉;后两句是对开方算法的概括,提示了诸廉在立成释锁法中的作用,开平方用第三层,开立方用第四层,依此类推(参见"开诸乘方").贾宪还给出了该三角形的造表法,即"增乘方求廉法"或称为"释锁求廉本源",用以说明此图与增乘开方法的关系,其中给出的构成规律相当于 $C_{n+1}^k=C_n^{k-1}+C_n^k$,尽管贾宪三角形仅给出七层,实际上利用这种方法可以给出任意多层的贾宪三角形.另外,由于开方作法本源图蕴涵着这样的组合性质,后来又成为中国古代数学家高阶等差级数与内插法研究的重要工具.

开诸乘方(Kāizhūchéngfāng)　中国古算法.即将开平方、开立方算法推广到开更高次方,是中国古代数学家在《九章算术》"开方术"的基础之上,借助于"开方作法本源图"发展起来的一种算法,最早出现在北宋数学家贾宪等人的著作中.其原理可用现代数学语言解释如下:设 $x^n=A$,若 x 仅为一位数字,不难通过试验确定其值;若 x 具有2个有效数字,令 $x=a+b$ (其中 a 的位值是 b 的10倍),则

$$\begin{aligned}x^n&=(a+b)^n\\&=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots\\&\quad+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n\\&=a^n+b(C_n^1a^{n-1}+C_n^2a^{n-2}b+\cdots\\&\quad+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^{n-1})\\&=A,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}b=&(A-a^n)\div(C_n^1a^{n-1}+C_n^2a^{n-2}b+\cdots\\&+C_n^{n-1}ab^{n-2}+C_n^nb^{n-1}).\end{aligned}$$

在估算出 a 后作减法 $A-a^n$,然后利用上一关系就可以求出 b 来.如果 x 的有效数字多于2,求出第二位数字后又可依照同样的方法继续计算后面的有效数字.

立成释锁开方法(Lìchéng shìsuǒ kāifāngfǎ)　中国古算法.指北宋数学家贾宪提出的一种开高次方的方法."立成"即数表,"释锁"是开方或解数字方程的代名词.所谓"立成释锁"是指在求出所求方根的首位数字以后,再由"开方作法本源图"所提供的 $C_n^i\ (i=1,2,3,\cdots,n)$ 来确定各"廉",然后"以廉乘商方"(即 $C_n^ia^{n-i}b^i$),再"命实以除之",即

$$(A-a^n)\div\sum_{i=1}^{n}C_n^ia^{n-i}b^{i-1},$$

依次求出该方根的各位数字(参见"开诸乘方").

增乘开方法(Zēngchéng kāifāngfǎ)　中国古算法.指中国古代数学中求高次方程数值解的一般方法.该方法由《九章算术》的开方术衍生而来,经过贾宪、刘益、杨辉等人的推广和传播,到13世纪被发展成为求高次方程数值解的系统方法,秦九韶、李冶、

朱世杰的著作中都有记载，其中以秦九韶的《数书九章》论述最为详细. 国外称这种方法为霍纳方法，比秦九韶迟了500多年.

正负开方术(Zhèngfù kāifāngshù)　中国古算法. 指中国古代的一种求一元高次方程数值解的方法. 这一方法起源于《九章算术》的开平方与开立方方法，但在《九章算术》仅限于系数是正数. 允许系数可以是负数的记载，最早见于《隋书·律历志》. 该书在介绍祖冲之的数学工作时，称"又设开差幂，开差立，兼以正负参之". 但由于祖冲之的著作已经失传，这一论述无法确证. 关于系数可为负数的开带从平方法的明确记载，最早见于北宋刘益的《议古根源》. 该书虽已失传，但其部分内容为杨辉的《田亩比类乘除捷法》所引. 由此可知，刘益把传统的开带从平方法推广到"负方"(一次项系数为负数)和"益隅"(二次项系数为负数)两种类型，并指出，在开方的过程中，有时常数项也会由正变负(也称之为"翻法"). 该方法经贾宪、刘益、杨辉和秦九韶等人的推广和传播，发展成为一种求一元高次方程近似解的一般方法.

纵横图(Zònghéngtú)　中国古算名. 即幻方. 源于象数学的河图洛书. 作为数学问题，最早见于杨辉的《续古摘奇算法》卷上. 该书载有纵横图20幅，除了九宫图(这是一个三阶幻方)之外，另外12幅是较高阶的幻方. 它们包括：四四图(又称花十六图，四阶幻方)阳、阴两式，五五图(五阶幻方)阳、阴两式，六六图(六阶幻方)阳、阴两式，七七图(又称衍数图，七阶幻方)阳、阴两式，八八图(又称易数图，八阶幻方)阳、阴两式，九九图(九阶幻方)一式，百子图(十阶幻方)一式. 这些幻方都是由1至n^2，这n^2个数字组成的n行n列方阵，若其每行、每列及每条对角线上的数字之和都等于

$$\frac{1}{2}n^2(n^2+1),$$

则称之为正则幻方，上述幻方除百子图外都是正则幻方. 另有河图、聚五图、聚六图、聚八图、攒九图、八阵图、连环图等，后六种都属于变形幻方，它们不一定要求每行、每列和每条对角线上的数字之和全都相等，也不一定排成方阵的形式，但要具有类似于普通幻方的某些组合性质. 杨辉对于这些幻方一一给出了构造方法，是最早从数学的角度研究幻方的数学家. 在他之后，中算家继续对此又进行了深入的研究，其中较为突出的有：南宋的丁易东，明代的程大位，清代的方中通、张潮、保其寿等人.

求一(Qiúyī)　中国古算法. 古代乘除法的一种. "求一"是把首位是2—9的乘数和除数，用加倍或折半的方法，使首位变为1，对被乘数和被除数也作相应的变化，然后用定身乘除法来计算. 此法首见于南宋杨辉《乘除通变算宝》，其中求一乘歌诀："五六七八九，倍之数不走；二三须当半，遇四两折纽. 倍、折本从法，实即反其有(倍法必折实，倍实必折法)；用加以代乘，斯数足可守". 求一除歌诀："五六七八九，倍之数不走；二、三须当半，遇四两折纽. 倍、折本从法，为除积相就(倍法必倍实，折法必折实)；用减以代除，定位求如旧".

大衍总数术(Dàyǎn zǒngshùshù)　中国古算法. 指南宋数学家秦九韶在《数书九章》中所建立的一种求解一次同余式组的算法. 对于一次同余式组

$$N \equiv R_i (\mathrm{mod}\, A_i)\quad (i=1,2,3,\cdots,n)\qquad (*)$$

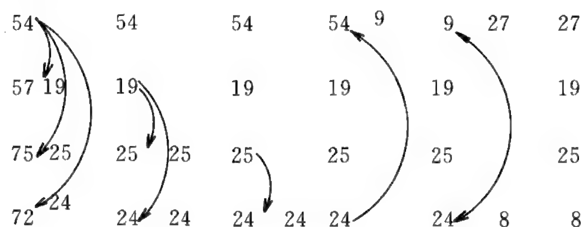
秦九韶"大衍术"解法分三个步骤：

1. 化问数A_i为两两互素的定数a_i. 由于在模数A_i满足$(A_i,A_j)=1(\forall\ i,j,i\neq j)$时，同余式组(*)才可解. 秦九韶在不引入素因数分解概念的情况下设计了一种递次互约的机械化演算程式，把A_i化成满足以下条件的定数a_i：

$$a_i\mid A_j,(a_i,a_j)=1\quad(\forall\ i,j,i\neq j),$$

且 $\prod_{i=1}^{n} a_i=[a_1,a_2,\cdots,a_n]=[A_1,A_2,\cdots,A_n]=M.$

其演算程式是"两两连环求等，约奇弗约偶"，如问数A_i为54,57,75,72，演算如下



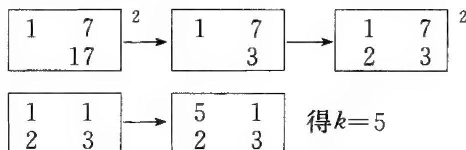
得到定数a_i：27,19,25,8.

2. 大衍求一术. 求使

$$k_i\frac{M}{a_i}\equiv 1(\mathrm{mod}\, a_i)\quad(i=1,2,3,\cdots,n)$$

成立的系列乘率k_i，其中$M/a_i=M_i$为衍数，M为衍母，为求k_i，先确定奇数g_i，使$M_i\equiv g_i(\mathrm{mod}\, a_i)$ $(g_i<a_i)$. 显然$k_i g_i\equiv 1(\mathrm{mod}\, a_i)$，以简化运算.

秦九韶求k_i的"大衍求一术"是由a_i与g_i进行辗转相除的连分数算法："置寄右上，定居右下，天元一于左上. 先以右上除右下，所得商数与左上一相生，入左下，然后乃以右行上下，以少除多，递互除之，所得商数，随即递互累乘，归左行上下，须使右上来后奇一而止，乃验左上所得，以为乘率."如求$7k\equiv 1(\mathrm{mod}\ 17)$，演算如下



对于一般的 $kb\equiv 1(\bmod a)$，对 a、b 使用辗转相除法，求得系列商 $\{q_1, q_2, \cdots, q_n\}$ 与相应的余数系列 $\{r_1, r_2, \cdots, r_{n-1}, r_n=1\}$，归算：

$$\begin{cases} c_1 = q_1, \\ c_2 = q_2c_1 + 1, \\ c_i = q_ic_{i-1} + c_{i-2} \ (i = 3,4,\cdots,n). \end{cases}$$

当 $n=2t$ 时，$k=c_{2t}$，布算如下：

$$\begin{array}{|lll|}\hline \text{天元} 1 & \text{奇数} & b \\ & \text{定数} & a \\ \hline\end{array} \xrightarrow[c_1=q_1\times 1=q_1]{\frac{a}{b}=q_1\cdots r_1} \begin{array}{|ll|}\hline 1 & b \\ c_1 & r_1 \\ \hline\end{array}$$

$$\xrightarrow[c_2=q_2c_1+1]{\frac{b}{r_1}=q_2\cdots r_2} \begin{array}{|ll|}\hline c_2 & r_2 \\ c_1 & r_1 \\ \hline\end{array} \xrightarrow[c_3=q_3c_2+c_1]{\frac{r_1}{r_2}=q_3\cdots r_3} \begin{array}{|ll|}\hline c_2 & r_2 \\ c_3 & r_3 \\ \hline\end{array}$$

$$\rightarrow\cdots\cdots \xrightarrow[c_n=q_bc_{n-1}+c_{n-2}]{\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}=q_n\cdots r_n} \begin{array}{|ll|}\hline c_n & r_n=1 \\ c_{n-1} & r_{n-1} \\ \hline\end{array} \quad (n=2t)$$

于是 $k=c_n$. 这种"求一术"演算由古代分数近似算法的"通其率术"与"调日法"发展而来(参见"通其率术"与"调日法").

3. 求同余式组(＊)的最小整数解 N.

$$N = \sum_{i=1}^{N} R_ik_iM_i - PM,$$

其中 R_i 为余数，k_iM_i 为用数，$R_ik_iM_i$ 为各总，$\sum_{i=1}^{N} R_ik_iM_i$ 为总数.

秦九韶"大衍求一术"的解法是正确的，比诸一次同余式组求解的欧拉方法，更简单易行.

秦九韶把问数分为四种类型：元数格(A_i 为整数)、小数格(A_i 中有小数)、通数格(A_i 中有分数)和复数格(A_i 皆为 10 的倍数). 这样实际上给出了对于任意有理数模的同余式组求解的方法.

秦氏方法在明代失传，直至 19 世纪才被重新阐发. 清人黄宗宪引用西方素因数分解概念，重新改造秦氏算法程序，著《求一通解》(1874)，他有三方面的创意：

1. 用素因数分解法化问数 A_i 为定数 a_i；

2. 不用奇数 g_i 而直接用衍数 M_i 与定数 a_i，按"大衍求一术"，求乘率 k_i；

3. 秦九韶"总数术"中用数 k_iM_i 分正用与借用，完全是赘设，毫无必要，黄氏删去之.

黄宗宪又设"求反乘率"一法，即求满足 $g_ik'_i \equiv m_ik'_i \equiv -1(\bmod a_i)$ 的系数 k'_i，其演算程式与秦氏"大衍求一术"大致相同，只不过程序终止的条件是 $r_{2t+1}=1$，从而归算出 $k'=c_{2t+1}=q_{2t+1}c_{2t}+c_{2t-1}$.

黄宗宪利用反乘率按下述步骤求同余式组(＊)的解 N：

1. 将 A_i 从大到小地排列，设 $A_1>A_2>\cdots>A_n$；

2. 求解 $N\equiv R_1(\bmod A_1)\equiv R_2(\bmod A_2)$，将其化为同解的 $N\equiv R_1(\bmod a_1)\equiv R_2(\bmod a_2)$.

这里 $(a_1, a_2)=1$，$[a_1, a_2]=[A_1, A_2]=a_1a_2=P_1$. 再求满足 $R_1\equiv B(\bmod a_2)$ 与 $a_1\equiv C(\bmod a_2)$ 的 B 与 C，且要求 $B<a_2$，$C<a_2$. 然后再求 $B-R_2=D>0$，若 $B<R_2$，则 $D=(B+a_2)-R_2>0$. 接着由 a_2(类于定母)与 C(类于衍数)求反乘率 k'_1，使 $k'_1C\equiv -1(\bmod a_2)$，得到 $Dk'_1=E$，$Ea_1=F$，$F+R_1=G$，$G\equiv S_1(\bmod P_1)$，则 S_1 为 $N\equiv R_1(\bmod A_1)\equiv R_2(\bmod A_2)$ 的解.

3. 作迭代，求解

$$N \equiv S_1(\bmod P_1) \equiv R_3(\bmod A_3).$$

重复第 2 步，解出 $S_2\equiv G_1(\bmod P_2)$，其中 $P_2=[P_1, A_3]$，继续迭代演算，$S_k\to R_1$，$P_k\to A_1$，$R_{k+2}\to R_2$，$A_{k+2}\to A_2$ $(k=1, 2, \cdots, n-2)$，而 $S_k\equiv G_{k-1}(\bmod P_k)$，$P_k=[P_{k-1}, A_{k+1}]$. 最后得到同余式组(＊)的解：$N\equiv S_{n-1}(\bmod P_{n-1})$.

黄宗宪这种新法是合理的，与欧拉解法同理.

大衍求一术(Dàyǎn qǐuyíshù)　中国古算法. 指南宋数学家秦九韶解一次同余式组中求乘率的算法，详见"大衍总数术".

互乘相消法(Hùchéng xiāngxiāofǎ)　中国古算法. 指中国古代解线性方程组的一种方法. 这是由南宋数学家秦九韶在《九章算术》"方程术"的"遍乘直除法"的基础上加以改进所提出的.

三斜求积术(Sānxié qiújīshù)　中国古算法. 即已知一般三角形的三条边长求其面积的方法. 这一问题的研究在中国最早出现在南宋数学家秦九韶的著作《数书九章》中. 该书卷五第 2 题是为了解决大面积的沙田地亩测量而提出的："问沙田一段，有三斜. 其小斜一十三里，中斜一十四里，大斜一十五里. 里法三百步，欲知为田几何？"其术文是："以小斜幂并大斜幂，减中斜幂，余，半之. 自乘于上. 以小斜幂乘大斜幂，减上，余，四约之为实. 开平方，得积. "若记大斜为 a，小斜为 b，中斜为 c，则这段术文相当于给出了三角形的面积公式为

$$S = \sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}\right)^2\right]}.$$

《数书九章》没有对这一公式给出推导过程. 在国外，古希腊数学家海伦(Heron，(A))也曾提出过用三边表示三角形面积的公式：

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

其中 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

可以证明，这两个公式是等价的.

天元一(Tiānyuányī)　中国古算术语. 它有两种含义：

1. 公元 11 到 13 世纪，中国古代数学家创造的根据已知条件列方程的方法，称为"天元术". "天元"

指未知数，“立天元一为某某”，即“设 x 为某某”的意思.

2. 秦九韶在“大衍求一术”中的“天元一”，即是数 1，“天元”二字只是强调这个 1 在计算中的重要性，并非如“天元术”的“天元一”表示未知数. 在王文素的《算学宝鉴》中亦有类似用法.

天元术(Tiānyuánshù)　中国古算法. 指中国古代数学中的一种设未知数列方程解方程的方法. 大约起源于 13 世纪初叶中国的北方，最初的发展情况已不可详考. 祖颐在为朱世杰《四元玉鉴》所写的后序中曾提到过一些早期天元术流传的线索. 流传至今的有关天元术的著作只有李冶的《测圆海镜》、《益古演段》和朱世杰的《四元玉鉴》、《算学启蒙》四种，其中尤以李冶的著作所述详细. 这两部著作分别以勾股容圆和方圆周幂相求为题材，全部用天元术立算，并有详细的算草，是今人了解天元术的最重要文献. 在天元术中，设未知数称为“立天元一”. 根据题设条件列出两个等量的代数式，然后相减，列出一般的方程，这一过程称为“如积相消”. 就方程的表达而言，通常是在一次项系数的旁边注一“元”字，或在常数项旁边注一“太”字.《测圆海镜》是高次在上，低次在下；如果有负指数项，则依次排列在常数项之下. 例如，表 1 就表示分式方程：

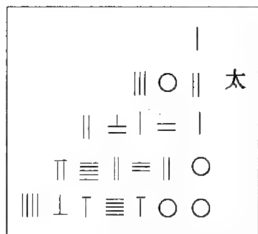
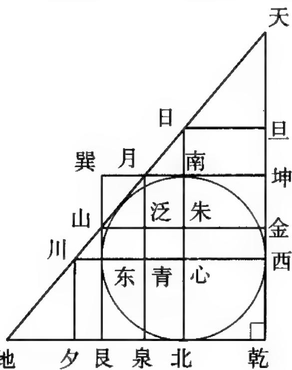


表 1

$$x+302+\frac{27121}{x}+\frac{752\ 320}{x^2}+\frac{4\ 665\ 600}{x^3}=0.$$

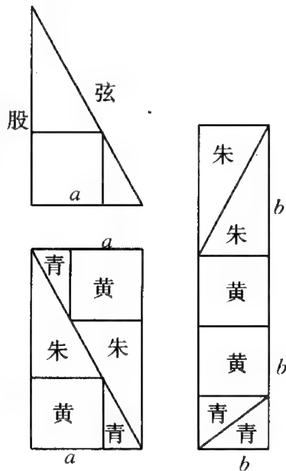
在列出方程以后，即进行增乘开方运算解出这个方程.

圆城图式(Yuánchéng túshì)　中国古算名. 指李冶为了利用天元术阐述勾股容方、勾股容圆图形中的数量关系而设计的一个几何图形，其图如右：假设直角三角形△天地乾的各边长为 680、320、600，从而利用相似比例与勾股定理算出 15 个直角三角形各边之长，并且给出了相应三角形的容圆公式. 此图载于《测圆海镜》卷首，可能源于“洞渊九容术”，它是《九章算术》“勾股”问题在宋元时期发展的结果.



九容(Jiǔróng)　中国古算术语. 指中国古代的一类关于圆与勾股形关系的问题及其解法. 据李冶《测圆海镜》自序称：“老大以来，得洞渊九容之说.”但“洞渊”是人名还是书名现在已无从考证. 自清末李善兰以来，研究者都认为“九容之说”就是《测圆海镜》卷二之勾上容圆、股上容圆、弦上容圆、勾股上容圆、勾外容圆、股外容圆、弦外容圆、勾外容圆半、股外容圆半等九个题目. 李冶在洞渊九容术的启发下写成《测圆海镜》，全书围绕圆城图式讨论勾股形与圆的关系问题.

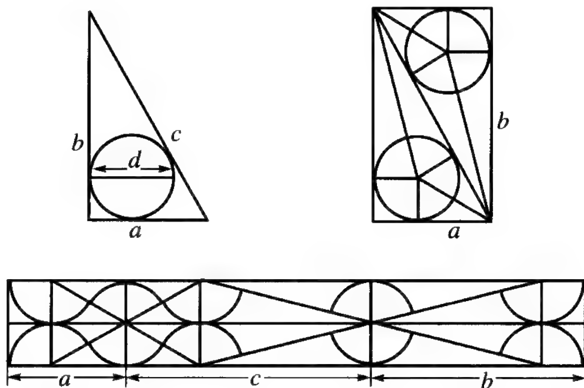
勾股容方(Gōugǔróngfāng)　中国古典几何问题. 即阐述直角三角形中内接正方形问题. 最早见于《九章算术》“勾股”章. 该章第 15 题为：“今有勾五步，股十二步. 问勾中容方几何.”其术文为：“并勾、股为法，勾股相乘为实，实如法而一，得方一步.”刘徽在他的注文中对这一段术文给出了两个证明. 其一采用的是“图验法”. 刘徽注称：“勾股相乘为朱、青、黄幂各二. 令黄幂袤于隅中，朱、青各以其类，令从其两径，共成修之幂：中方黄为广，并勾股为袤. 故并勾股为法.”由图可见，



$ab=(a+b)d$，故直角三角形中为内接正方形的边长

$$d=\frac{ab}{a+b}.$$

勾股容圆(Gōugǔróngyuán)　中国古典几何问题. 即阐述直角三角形中内切圆问题. 此类问题最早见于《九章算术》“勾股”章，该章第 16 题为：“今有勾八步，股十五步. 问勾中容圆，径几何？”其术文为：



“八步为勾，十五步为股，为之求弦. 三位并之为法，以勾乘股，倍之为实. 实如法得径一步.”刘徽注称：“勾、股相乘为图之本体，朱、青、黄幂各二，倍之则为各四. 可用画于小纸，分裁斜正之会，令颠倒相补，各以类合，成修幂：圆径为广，并勾、股、弦为袤. 故并

勾、股、弦以为法."即如图,设 d 为勾股形内切圆的直径,则

$$d=\frac{2ab}{a+b+c}.$$

刘徽还用比类方法对此公式进行了推导,又提出了两个新的公式:

$$d=a+b-c,\quad d=\sqrt{2(c-a)(c-b)}.$$

身外加法(Shēnwài jiāfǎ) 亦称加法、定身加,中国古算法.它是简捷乘法的一种.凡乘数首法是1,可把被乘数看作积数的一部分,并在相应的位上加上乘数首位以后各数与被乘数相乘之积.这种算法称为身外加法.

例如:$863\times12=10356$.

因为 $863\times12=863\times(10+2)$
$=863\times10+863\times2$
$=8630+863\times2$,

故在8630上加上863与2之积即得.唐代《夏侯阳算经》卷下第19题:"今有绢二千四百五十四匹,每匹值钱一贯七百文,问计钱几何?""术曰:先置绢数,七添之,退位一等,即得."此即为身外加法.后杨辉《乘除通变算宝》(1274)作了详细介绍,称为"加法",并推广到法数首数不是1的情况,称为"连身加".

例如:$23\times29=667$.

算草如下:

[23] —命九,加27→ [2五七] —命九,加18→ [四三七]

—加23→ [六六七]

朱世杰《算学启蒙》(1299)叫"身外加法",并有歌诀:"算中加法最堪夸,言十之时就位加;但遇呼如身下列,君从法式定无差".后来《算法全能集》、《详明算法》、吴敬与程大位书中均有介绍.

身外减法(Shānwài jiǎnfǎ) 亦称减法、定身减.中国古算法.它是简捷除法的一种.当除数的首数为1时所用的简捷除法.依杨辉《乘除通变算宝》(1274)内说明,可知先商得"存数",然后用除数1后的数乘"存数",按"言十当身减,言如次身减"的办法,从被除数内减之.所谓"存数"就是商数,由于它在运算中保存下来,故名"存数".

例如:$4788\div14=342$.

算草如图所示: 得三四二.

法四,减十二 存三,命

减 存贰贯 肆拾 叁佰

法四,减十六 存四,命

唐代算书《夏侯阳算经》中已有此法.

重因(Chóngyīn) 中国古算法.简捷乘法的一种.乘法中的一个因数若能分解成一位数因数,则可用一位数因数多次乘之,叫"重因".古人称一位数乘法叫"因",多位数乘叫"乘",所以称"重因".重因法首见于唐代算书《夏侯阳算经》;沈括《梦溪笔谈》(1091)始见此名,未加解说;杨辉《乘除通变算宝》(1274)有详细解释及例题,例如:"绢二百七十四匹,每匹四十八尺,问共几尺?答曰:一万三千一百五十二尺.草曰:置绢数(二百七十四匹,于匹上定得尺),六因,又八因之."这就是说:

$$274\times48=274\times6\times8=1644\times8=13152.$$

损乘(Sǔnchéng) 中国古算法.今称补数乘法.凡两数相乘,其中有一个因数接近 10^n 或 10^n 的倍数,可把此数用 10^n 乘之再减法补数的倍数.

例如:$524\times92=48208$.

可这样计算:$524\times92=524\times(100-8)$
$=52400-524\times8$
$=52400-4192$
$=48208$.

此法在杨辉《乘除通变算宝》(1274)内详述之.杨辉说:"九乘者损一(十去其一即九),八乘者损二(十去其二即八)……并自末尾乘起,即下乘也."

例如:$531\times8=4248$

算草如下:|||||≡|身 —减1×2→ |||||≡ 08 身

—减3×2→ ||||| 248 身 —减5×2→ 4248.

隅(Yú) 亦称隅法.中国古算法.中国古代称高次方程的最高次项系数为"隅",或"隅法".如:$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_3x^3+a_2x^2+a_1x=a_0$ 称 a_0 为"实",a_1 为"方",或"方法",$a_2,\cdots,a_{n-1}$ 皆为"廉",或"廉法"(各为一廉、二廉……),a_n 为"隅",或"隅法".

立成(Lìchéng) 中国古算名.中国古代天文计算中的数表叫"立成".杨辉的《详解九章算法·纂类》(1261)中有"贾宪立成释锁开方法",就是利用贾宪三角形(即"开方作法本源图")表中数字求方根的方法.

比类(Bǐlèi) 中国古算法.指中国古代数学著作中一种展开内容的方法.主要包括两个方面的内容:

1. 与其所研究的原始问题算法相同的例题.

2. 与原题的算法可以比附的例题.

这是杨辉的首创,最早见于他的著作《详解九章算法》. 在这部著作中,他选择当时较为流行而《九章算术》又未备的一些问题,参照《九章算术》的解法,将它们列附于原题之后,大多较有新意或创见. 例如他将方垛比附于方亭,四隅垛比附于方锥,屋盖垛比附于堑堵,三角垛比附于鳖臑,果子垛比附于刍甍等. 这一方法对后代产生了较大的影响,如明代吴敬的《九章详注比类算法》等著作都与其相仿.

四元术(Sìyuánshù) 中国古算法. 指中国古代数学中的一种设未知数求解多元高次方程组的方法. 这可以看作是"天元术"的推广. 当问题含有的未知数不止一个时,就自然地要增加未知数的个数. 朱世杰的《四元玉鉴》是早期惟一一部研究用"四元术"处理含有两个和两个以上的未知数的问题的著作,后来有关的著作大多只是在朱世杰的《四元玉鉴》的基础上作了一些注释和细草工作. 所谓四元就是在天元之外另增地、人、物三元,表示四个不同的未知数. 四元术的表述也是在天元术的表述基础上发展起来的. 四元式布列方法是:"元气居中,立天元一于下,地元一于左,人元一于右,物元一于上",根据已知条件列出四元高次方程组. 再利用剔而消之、互隐通分相消、内外相乘相消等法消去其中的三个元,得到一个仅含有一个未知数的高次方程,最后用增乘开方法求解. 参见本卷"中国传统数学的繁荣"条

招差术(Zhāochāshù) 中国古算法. 指中国古代关于高阶等差数列求和的算法. 朱世杰的《四元玉鉴》(1303)卷中"如像招数"中的问题都是讨论招差问题的,其中朱世杰给出了一个四次招差公式

$$f(n)=n\Delta^1+\frac{1}{2!}n(n-1)\Delta^2+\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)\Delta^3+\frac{1}{4!}n(n-1)(n-2)(n-3)\Delta^4.$$

这与牛顿插值公式一致,但牛顿(Newton, I.)提出这一公式晚于朱世杰 300 多年. 元代郭守敬《授时历》用招差术作三次插值公式,以作数值逼近.

之分开方法(Zhīfēn kāifāngfǎ) 亦称连枝同体术. 中国古算法. 指一种求方程的正有理根的方法. 完整的文字记载见于朱世杰的《四元玉鉴》. 解决这类问题的基本思想是将方程作倍根变换,从而将其转化为求方程的整数根的问题来解.

岚峰垛(Lánfēngduò) 中国古算名. 指中算类于高阶等差数列求和的一类特殊级数. 其形如

$$\sum_{r=1}^{n} rC_{p+r-1}^{p}=C_{n+p}^{p+1}\frac{(p+1)n+1}{p+2}.$$

最早见于朱世杰《四元玉鉴》,清代李善兰《垛积比类》又作了研究.

方箭(Fāngjiàn) 亦称方束、方阵. 中国古算命题. 指以方箭束为方形,知外围箭数,求共箭数的问题. 如右图. 杨辉《田亩比类乘除捷法》方箭题云:"方箭:外围三十二支,问共箭几何? 答曰:八十一支. 草曰:内围八支,并外围三十二支,共四十支. 折半,以四乘之合问."此按等差级数求和公式计算:

$$S=\frac{n}{2}(a+l)=\frac{4}{2}(8+32)=80.$$

再加中心箭 1 支,得 81 支."草"中缺加中心箭,有误.

圆箭(Yuánjiàn) 亦称圆束、圆阵. 中国古算命题. 指以圆箭束为圆形,知外围箭数,求共箭数的问题. 如图. 杨辉《田亩比类乘除捷法》圆箭题云:"圆箭:外围三十支,问共箭几支? 答曰:九十一枝. 草曰:内围六支,并外围三十,共三十六支,折半,以五层乘之. 合问."(答案:应加中心箭一支). 此按等差级数求和公式计算:

$$S=\frac{n}{2}(a+l)=\frac{5}{2}(6+30)=90.$$

加中心箭 1 支,得 91 支.

暗码子(Anmǎzǐ) 中国古算名. 指中国古代记数用的数字. 宋元时期的数字沿用筹算记数,增加了一个"○",表示如下:

横　式	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱	○
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
纵　式	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨	○
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

南宋秦九韶、杨辉书中,对笔画较多的数码加以改进,得出另一套数码:

横式	𝍩	𝍪	𝍫	X	ό	𝍮	𝍯	𝍰	✗	○
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
纵式	𝍠	𝍡	𝍢	X	ō	𝍥	𝍦	𝍧	×	○
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	

根据严敦杰先生考证,宋元数学家所用的"○"码是中国自己创造的,并非来自印度或阿拉伯. 明代流行的数码,是由上面数码演变而来的,俗称"暗码子",表示如下:

𝍠	𝍡	𝍢	X	8	𝍥	𝍦	𝍧	夂	○
1	2	3	4	5	6	7	8	9	

其中"5"和"9"的符号的演变,是由于连笔写的缘故. 此种"暗码子"首见徐心鲁《盘珠算法》(1573),一直

沿用至今.

纳皮尔算筹(Nà Píer - suànchóu) 亦称纳皮尔

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	0/7	0/8	0/9	1
0/2	0/4	0/6	0/8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8	2
0/3	0/6	0/9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7	3
0/4	0/8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/2	3/6	4
0/5	1/0	1/5	2/0	2/5	3/0	3/5	4/0	4/5	5
0/6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4	6
0/7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3	7
0/8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2	8
0/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1	9

计算尺.一种能简化计算的乘法速算器.由英国数学家、对数的发明人纳皮尔(Napier,J.)发明.如图,它由十根木条组成,每根木条上都刻有数码.右边第一根木条是固定的,其余的都可以根据计算的需要进行拼合和调换位置.这种算筹可以用加法和一位数乘法代替多位数的乘法,也可以用除数为一位数的除法和减法代替多位数的除法,从而简化了计算.其计算原理是"格子乘法".例如,要计算 934×314,首先将 9,3,4 和 3,1,4 摆成如右图所示,遇到对角线上的两个数字就加在一起,这就容易得到 934 分别乘以 3,1,4 的结果为 2802,934 和 3736,然后再错位相加,就得到所要求的结果 293276.这种简单的计算器,在当时很受欢迎,流行了许多年.在清代与笔算、比例规算法等一起传入中国,北京故宫博物院至今还藏有此算筹.

	9	3	4	
2	2/7	0/9	1/2	3
9	0/9	0/3	0/4	1
3	3/6	1/2	1/6	4
	2	7	6	

写算(Xiěsuàn) 中国古算名."写算"分"写乘"与"写除"两种.写乘,程大位称"铺地锦",系一种格子乘法.十三、十四世纪盛行于阿拉伯,以后传入欧洲.中国的"写乘"似从天元式的乘法演变而来,并非传自阿拉伯.例如计算 565×23,将被乘数 565 记入右行,乘数 23 记入上行.然后以乘数 23 的每位数字乘被乘数 565 的每位数字,将结果记入相应的格子中,最后按斜行加起来,即得 12995."写除"是程大位改进吴敬的"河图算法"而得来的.

	2	3	
1	1/0	1/5	5
2	1/2	1/8	6
9	1/0	1/5	5
	9	5	

杜氏三术(Dùshì - sānshù) 中国古算名.指法国传教士杜德美(Jartoux,P.)传入中国的三个幂级数展开式:

$$1.\ \pi=3+\frac{3\cdot1^2}{4\cdot3!}+\frac{3\cdot1^2\cdot3^2}{4^2\cdot5!}+\frac{3\cdot1^2\cdot3^2\cdot5^2}{4^3\cdot7!}+\cdots$$

$$2.\ r\sin\frac{p}{r}=p-\frac{p^3}{3!\,r^2}+\frac{p^5}{5!\,r^4}-\frac{p^7}{7!\,r^6}+\cdots$$

$$3.\ r\operatorname{vers}\frac{p}{r}=\frac{p^2}{2!\,r}-\frac{p^4}{4!\,r^3}+\frac{p^6}{6!\,r^5}-\frac{p^8}{8!\,r^7}+\cdots$$

展开式 1 为牛顿(Newton,I.)于 1676 年给出.展开式 2 与展开式 3 是格雷果里(Gregory,J.)于 1667 年给出.梅瑴成将其译成中文载于他的《赤水遗珍》.明安图获此三级数后,创割圆连比例法证明了这些级数,同时又获得六个新的级数,从而 18 世纪末、19 世纪初,清代数学界误传为"杜氏九术".

数根(Shùgēn) 中国古算名.即素数.该术语最早见于《数理精蕴》,是明清之际传入的西方素数概念的汉译.1872 年,李善兰发表了中国素数论研究史上的第一篇论文《考数根法》(载《中西闻见录》第 2,3,4 号),详细介绍了四种判别一个自然数是否为素数的方法,得出了与费马素数定理相同的结论,并指出该定理的逆命题不真.与李善兰同时代的数学家邹伯奇的《乘除捷法》还给出了 1—999 的纯杂数表.这里的纯数即素数,杂数即复合数.清末方士锛的《数根丛草》(1896)在李善兰素数论基础上又提出 20 种素数判别法.

流法(Liúfǎ) 中国古算法.一种简捷乘除法,亦称表算法.首见于方中通的《数度衍》,内分"乘流"、"除流"两种.乘流:先编出法数的 1 至 9 倍的倍数表,次拨实数在盘上,从末位起,按照倍数表依次加相应的倍数,逢倍数首位有进位的,拨去实数本位,从本位起加倍数,如倍数首位非进位数,从本位后一位加起,相加的结果便是所求积数.除流:先求法数的倒数,次算出倒数的 1 至 9 倍数,然后拨实数入盘,从末尾起一一改为相应的倒数倍数相加,所得结果就是所求的商数.利用此口诀,可以把斤下带的两数化为斤的小数.又因它是 1/16 的倍数表,也是 625 的倍数表,所以可以用此口诀解决用 16 除和用 625 乘的问题.

斤两法(Jīnliǎngfǎ) 中国古算法.指旧时利用口诀,解决十六两秤,两化为斤的方法.杨辉的《日用算法》中称"斤求两价念法";朱世杰的《算学启蒙》中称"斤下留法";王文素的《算学宝鉴》中称"两化为斤口诀".其口诀如下:

一退六二五	二一二五
三一八七五	四二五
五三一二五	六三七五
七四三七五	八五
九五六二五	十六二五
十一六八七五	十二七五
十三八一二五	十四八七五
十五九三七五	

割圆连比例(Gēyuán liánbǐlì) 中国古算法.指清代蒙古族数学家明安图所创的一种展开三角函

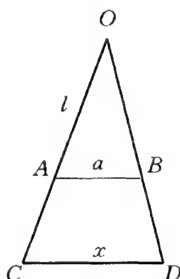
数为幂级数的数学方法. 该方法实质是将刘徽割圆术与西方的几何连比例方法的结合.

借根方(Jiègēnfāng) 中国古算法. 清朝初年,传入中国的列代数方程的方法,称为借根方,也称借根方比例. 例如表达式:

$$“一\frac{立}{方}+二\frac{平}{方}=二八八〇〇”,$$

即为现代的 $x^3+2x^2=28800$.

比例规(Bǐlìguī) 亦称扇形圆规. 一种利用相似形对应边成比例的关系进行乘、除、比例等计算的计算工具. 由伽利略(Galilei,G.)发明,曾流行于欧洲,17 世纪初传入中国. 比例规外形像圆规,两臂上各有刻度,可任意张合,其计算原理十分简单. 以乘法为例,求 a、b 二数的乘积. 如图,设 OC,OD 是张开的两臂,其上有相同的刻度. $OA=OB=l$ 是定长,取 $OC=OD=b$,调整两臂张开的角度,使 $AB=a$,再量出 $CD=x$ 的长. l 一般取 10 的乘幂 10^n,则因 $x=ab/l$,故 x 就是 ab 的有效数字,最后根据 l 来定位.



六宗(Liùzōng) 中国古算名. 明末传教士邓玉函(Terrenz,J.)所译三角学著作《大测》(1631)时,称求圆内接正六边形、正四边形、正三边形、正十边形、正五边形、正十五边形的边长为六宗. 同时将下列三公式:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\sin^2\alpha+(1-\cos\alpha)^2},$$

称为“三要法”,而将下列二公式:

$$\sin\alpha=\sin(60+\alpha)-\sin(60-\alpha),$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,$$

称为“二简法”.

尖锥术(Jiānzhuīshù) 中国古算法. 指清代数学家李善兰在微积分未传入中国前,用中国传统的垛积术和极限思想创造的一种微积分方法. 尖锥术的主要思想是:$x^n(n\geqslant 2)$可以用一个平面面积或线段来表示. 由平面面积 ax^n 积叠起来的尖锥体,高为 h 时,截面积总等于 ah^n. 这种尖锥体(高为 h 时,底面积为 ah^n)的体积为

$$\frac{ah^{n+1}}{n+1}.$$

这相当于定积分

$$\int_0^h ax^n\mathrm{d}x=\frac{ah^{n+1}}{n+1}.$$

他还得出了相当于逐项积分公式

$$\int_0^h a_1x\mathrm{d}x+\int_0^h a_2x^2\mathrm{d}x+\cdots+\int_0^h a_nx^n\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^h(a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n)\mathrm{d}x.$$

李善兰利用尖锥术求出了 π、自然对数、三角函数及反三角函数的幂级数展开式.

李善兰恒等式(LǐshànLán héngděngshì) 中国古算名. 指清代数学家李善兰在《垛积比类》卷二中提出的一个著名恒等式

$$\binom{n+k}{k}^2=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}^2\binom{n+2k-j}{2k},$$

其中

$$\binom{l}{m}=\begin{cases}0 & (当\ l<m\ 时),\\ \dfrac{l!}{m!(l-m)!} & (当\ l\geqslant m\ 时).\end{cases}$$

视学(Shìxué) 中国古算学科名. 即画法几何. 在中国古代,数学家和工程技术人员曾对制图学,特别是仿射变换制图进行过认真的研究. 宋代苏颂的《新仪象法要》和李诫的《营造法式》是古代机械图和建筑图研究的代表作. 清初的宫廷画师年希尧对西方传入中国的透视学进行深入的学习与研究,正确运用正投影图去刻画几何体,描述透视变换,融会中西投影知识建立了系统的画法几何,于 1729 年撰写了《视学》一书,其成就超过了欧洲同类的成果. 该书不仅是中国第一部系统研究透视学的著作,而且比法国数学家蒙日(Monge,C.)著名的《画法几何》早 70 年.

代开法(Dàikāifǎ) 中国古算法. 指清代数学家李锐所创立的一种逐次求一元高次方程全部实根的开方方法. 求得方程一根之后,利用降一阶的方程求另一根. 分为寄位代开与较数代开,后者较前者为简便. 该法是正负开方术的发展.

合数术(Héshùshù) 中国古算法. 一种高位近似法. 清末华蘅芳译自英国人白尔尼的著作. 对于实数 A 可化为

$$A=a_0\left(1+\frac{1}{10}\right)^{a_1}\left(1+\frac{1}{10^2}\right)^{a_2}\left(1+\frac{1}{10^3}\right)^{a_3}\cdots,$$

于是可简记为

$$A=a_0\downarrow a_1,a_2,a_3\cdots,$$

其中 a_i 便是 A 的合数. 在此定义上,可以建立合数的代数运算以作为简化实数近似计算的一种方法.

积较术(Jījiàoshù) 中国古算法. 即高阶等差数列求和算法. 见清代华蘅芳的《积较术》.

中国数学家

周　公(Zhōu Gōng,约公元前 11 世纪) 中国周朝数学家. 姓姬,名旦,亦称叔旦. 西周初年人. 相

传他为周武王之弟，因采邑在周(现陕西岐山北)，称为周公.他曾协助武王灭商.武王死后，成王年幼，由他摄政.其兄弟管叔、蔡叔、霍叔等人不服，并联合武庚和东方夷族反叛.他出师东征，平定反叛.嗣后，大规模分封诸侯，并营建洛邑(现河南洛阳)作为东都.相传他制礼作乐，建立典章制度，主张“明德慎罚”.他与商高问答之辞见于《周髀算经》，还有“周公作九数”的记载，另有“周公作九章之法，以数天下”的传说，所以《九章算术》为周公遗书一说，流传开来.至于《九章算术》成书的情形，专家各有所云，古无定论，又因时隔久远，无从考证.

商　高(Shāng Gāo，约公元前 11 世纪)　中国周朝数学家.西周初年人.据《周髀算经》中周公与商高的问答所载，他懂得数学、天文、历法及天文测量等.他曾说：“数之法，出于圆方；圆出于方，方出于矩，矩出于九九八十一.故折矩，以为勾广三，股修四，径隅五.既方之外，半之一矩，环而共盘，得成三、四、五.”(见《周髀算经》)由此可见，他对数与形有较深的认识，并懂得 3∶4∶5 的三边构成直角三角形，且还能加以应用.

陈　子(Chén Zǐ，约公元前 11 世纪)　中国周朝数学家.专门研究商高的数学理论，有弟子荣方.《周髀算经》中有“昔者荣方问于陈子”和“荣方、陈子是周公之后人，非周髀之本文，然此二人共相解释，后之学者谓之章句，因从其类，列于事下，又欲尊而远之，故云昔者，时世官号，未之前闻”的记载.从他们的问答中，可看他们懂得不少数学哲理.据信，这是荣方记录，故称自己的老师陈子，而不载陈子的名.

墨　翟(Mò Dí，约公元前 468—前 376)　亦称墨子.中国战国时期科学家.鲁国人，他生活的年代略晚于孔子，而早于孟子.他是中国古代著名的哲学家，他聚众讲学，弟子很多，创立了墨家学派，留下了著作《墨子》.

《墨子》是墨家学派的弟子们记述其师圣的言行，并经不断补充、缀辑而成的经典.据《汉书·艺文志》记载，《墨子》共有 71 篇，宋代前后亡佚 18 篇，现存仅 53 篇，其中第 40《经上》、第 41《经下》、第 42《经说上》、第 43《经说下》等 4 篇是中国古代哲学、自然科学和社会科学重要文献.其文体独特，内容丰富，文辞简洁深奥，加之讹夺舛误颇多，所以这一部分是《墨子》中最难整理研究的一部分.晋代鲁胜曾作过《墨辩注》，把这 4 篇统称为“辩经”，后人从之称为《墨经》.近代又有人认为《墨子》中第 44《大取》和第 45《小取》也应算在《墨经》之内.于是，现在所谓《墨经》，就包括上述 6 篇.

《墨经》涉及内容广泛，有逻辑学、数学、物理学、伦理学等方面的论题，其中，关于数学，尤其是关于几何学问题的学说，约有 19 条，大多在《经上》与《经说上》中.文中给出了不少数学名词的“界说”，虽然没有数学符号，没有数学表达式，也没有图解，但是它们含有丰富的数学概念的内涵，含有严密的逻辑推理，含有深邃的数理哲学思想和理论.诸如，部分与全体之间的关系，所谓“端”的问题，有限与无穷的问题，同与异的问题，圆与方的问题，间与有间的问题，虚与实的问题，加倍问题，相交、相比、相次的问题，定位问题以及极限问题等，都有分析与论证，构成了完整的逻辑体系.有许多概念和理论，与西方同时代的古希腊的欧几里得(Euclid)《几何原本》极其相近.因此，《墨经》不仅是中国数学史珍贵的遗产，也是世界数学史中的瑰宝，值得深入地研究.

庄　子(Zhuāng Zǐ，约公元前 369—前 286)　中国战国时期哲学家.姓庄名周，宋国蒙县(今河南省商丘县东北)人，曾为蒙县地方的漆园吏.庄子虽然家境贫寒，却借粟于他人.他不势权贵，曾拒绝了楚威王的厚币礼聘.他继承和发展了老子“道法自然”的观点，强调事物的自身变化，否认有神的主宰.他的思想包含着朴素辩证法因素，著有《庄子》一书，亦称《南华经》，是道家经典之一.原著有 52 篇，现存仅 33 篇，其中有 7 篇，被认定为庄子本人所著，其他外篇杂篇可能是他的弟子们和后来道家的作品.《庄子·天下篇》包含着许多数学哲理，譬如，“至大无外，谓之大一；至小无内，谓之小一”.说明立论者对无穷大、无穷小颇有见解.“飞鸟之景，未尝动也.镞矢之疾，而有不行不止之时”，与古希腊埃利亚学派的芝诺(Zeno，(E))提出的“飞矢不动”悖论如出一辙.而脍炙人口的“一尺之捶，日取其半，万世不竭”，更为著名.它说明立论者对极限的认识也有相当的深度.此外，《庄子》一书以其文笔精妙，设喻警辟而著称，如“庖丁解牛”、“邯郸学步”、“东施效颦”等寓言，成为颇富哲理的著名典故.因此，《庄子》一书在哲学、文学上都有较高的研究价值.

张　苍(Zhāng Cāng，约公元前 250—前 152)　中国汉代数学家.阳武(今河南省阳武县东南)人.秦时曾为御史，掌管图籍文书.汉初曾任常山(今河北省无氏县西北)太守；汉高祖 6 年(公元前 201)，因有功被封为北平侯；吕后 8 年(公元前 180)为御史大夫；文帝 4 年(公元前 176 年)为丞相；文帝后元 2 年(公元前 162)8 月被免相；孝景 5 年(公元前 152)逝世.张苍博览群书，精通用算律历，曾主持改定音律、历法.一生著书 18 篇，论及阴阳律历.刘徽在注《九章算术》时提到，张苍、耿寿昌等以善算而著称于世，并在秦始皇焚书之后，删补增订了《九章算术》.但在《汉书·艺文志》中没有著录，见《史记》卷 98，《张丞相列传》第 36.

毛　亨(Máo Hēng，约公元前 200 年间)　中国

汉代数学家.一说西汉鲁国(今山东省曲阜一带)人;一说河间(今河北省献县东南)人.相传毛亨是古文诗学"毛诗学"的开创者,其诗学传自子夏,又曾作《毛诗故训传》,以授毛苌.有称毛亨、毛苌为大毛公、小毛公.毛亨对许多古籍加以注解,其中在数算方面,对正的高次乘方数的解释,尤具贡献.

许　商(Xǔ Shāng,公元前1世纪)　亦称许商.中国汉代数学家.字长伯,长安人.据《前汉书》、《资治通鉴》等书记载,公元前20—前10年间为经学大师,曾为成帝的老师.公元前14年,为少府,后一年为侍中光禄大夫,公元前8年为大司农,数月后为光禄勋.许商"治尚书,善为算,能度功用",著有《五行论历》、《许商算术》.公元前32—前8年间,他多次成功地主持了治理江河的工程,这与他的数学才能与管理运筹才能是分不开的.据《九域志》记载,棣州西南80里处的滴河县,正是因为"汉都尉许商凿此河近海,故以商为名,后人加水焉".他著的《许商算术》一书,与当时的《杜忠算术》齐名,在《九章算术》之前是一部很有价值的数学著作.公元前26年,太史令尹咸校数学书时,将《许商算术》、《杜忠算术》都列入其中.

杜　忠(Dù Zhōng,约公元前1世纪)　中国汉代数学家.西汉人.据《前汉书・艺文志》记载,他著有《杜忠算术》16卷,与《许商算术》齐名,均为《九章算术》之前很有影响的专门的数学著作.

尹　咸(Yǐn Xián,公元前1世纪)　中国汉代数学家.汝南人.自幼在家从父研习《春秋》、《左传》等经典.曾任大司农、丞相史、太史令等官职.与刘歆共同校点经传.公元前26年,陈农派人在各地访求故典遗书,尹咸校点了《许商算术》和《杜忠算术》.

耿寿昌(Gěng Shòuchāng,约公元前50年)　中国汉代天文学家、数学家.公元前73—前49年间,曾任大司农中丞,精通天文、算术.刘徽在注《九章算术》序中称:"往昔暴秦焚书,经术散坏.自时厥后,汉北平侯张苍、大司农中丞耿寿昌,皆以善算名世.苍等因旧文之遗,各称删补."由此可知,《九章算术》是经张苍、耿寿昌整理、加工之后,才成为一部比较完整的数学著作.

刘　歆(Liú Xīn,约公元前50—公元23)　中国汉代数学家.字子骏,后改名秀,字颖叔.西汉末年沛县(今江苏沛县)人.其父刘向为光禄大夫,父子俩曾主持校点经籍的工作,子承父业,撰成《七略》,即辑略、六艺略、诸子略、诗赋略、兵书略、术数略和方技略.刘歆被誉为古文经学派的开创者、目录学家、天文历算家.哀帝去世(公元前1年)王莽执政时,刘歆留任右曹太中大夫.公元5年为羲和,后封红休侯.公元9年为"国师",嘉新公.后谋诛王莽,事泄而自杀,年逾七旬.刘歆曾受命于王莽,制作量器"律嘉量",即圆柱形标准量器,据铭文推算,他取定圆周率为3.15466,世有"刘歆率"之称.这虽不够精确,但却是寻求更精确圆周率的先导,此前圆周率均取为3.他还考定了律历,著有《三统历谱》.

张　衡(Zhāng Héng,78—139)　中国汉代科学家.字平子,东汉时期南阳西鄂(今河南省南召县南)人,生于公元78年(汉章帝建初三年).青少年时代,他生活清贫,但刻苦学习.17岁离家去长安,后到京城洛阳,访师求学,后成为京城中有名的学者.他家乡南阳的太守鲍德很赏识他的才学,邀请他回南阳协助管理郡政事务.其间,他又博览群书,并从事天文、历算以及文学诸方面的研究.不久,被举荐到洛阳任郎中,负责文书草拟工作.从115年(安帝元初二年)起,他曾三度任主管天文、历算的太史令,这使他更有条件进行科学研究和发明创造.张衡于139年(顺帝永和四年)逝世,其陵墓位于今河南省南阳县石桥镇西南鄂城寺西,寺后尚有"平子读书台"遗址.

张衡是中国古代杰出的科学家,对中国天文学的发展做出了巨大的贡献.他第一次正确地解释了月食的成因,说明月光是日光的反照,月亮进入地球影区而产生月食现象.创立了系统的、完整的天文学,并著有《灵宪》一书,其中明确提出"宇之表无极,宙之端无穷".认识到宇宙的无限性,认识到行星运动的快慢与距离地球的远近有关.他创造了世界上最早利用水力转动的浑天仪和地动仪,开辟了世界古代地震学研究的新纪元.他还发明了指南车、计量鼓车等多种器械.

张衡对数学有较深入的研究.据《后汉书》记载,他著有《算罔论》一书,论述了自己的数学理论,可惜此书现已失传.刘徽注《九章算术》时,曾提及张衡对所谓"立圆"(即球)体积的研究.张衡采用的圆周率,据唐代《开元占经》载为92/29,清代李潢考证为3.162.虽然这两个圆周率近似值都不太精确,但是比印度、阿拉伯数学家算出同样结果约早500年.

此外,张衡所著《东京赋》、《西京赋》、《归田赋》、《四愁歌》、《同声歌》等,在中国文学史上也享有盛名.他还善于绘画,是东汉六大画家之一.

马　续(Mǎ Xù,约90—141)　中国汉代数学家.字季则,东汉扶风茂陵(今陕西省兴平东南)人.自幼聪颖,7岁通《论语》,13岁明《尚书》,16岁会作诗.马续善长数学,精通《九章算术》,懂天文历算.班固未竟的《汉书》中《天文志》由马续完成.

刘　洪(Liú Hóng,2世纪末、3世纪初)　中国汉代天文学家、数学家.字元卓.东汉末,泰山蒙阴(今属山东省)人.他勤学好问,以天文、数术探赜钩深,遂专心锐思,世称"洪善算,当世无偶".206年他在实测的基础上制订了《乾象历》,这是中国历史上

考虑了月球运动不均匀性的第一部历法.在推算日食、月食时采用了定朔的方法,测得一近点月的长度为 27.554756 日,白道和黄道约成 6°交角.在数据处理中,用到正负分数加减法,称为正负术:"强正弱负,强弱相并,同名相从,异名相消;其相减也,同名相减,异名相从,无对互之."

郑　玄(Zhèng Xuán,127—200)　中国汉代数学家.字康成,北海高密(今属山东省)人.他自幼爱好数学,8 岁时就能进行乘除运算.曾入太学,学今文《易》和公羊学,又从张恭祖学古文《尚书》、《周礼》、《左传》等.后从马融学古文经.据传,师从马融时,入学三年未见得师父的尊颜,后来马融听说他能精演《九章算术》,才召见他.21 岁时博极群书,兼精算术、天文.他游学归里,聚徒讲学,弟子众至数百千人.因党锢事被查禁,遂潜心著述,成为汉代经学集大成者,世称郑学.建安年间,曾为大司农.晚年告病还乡,200 年去世.

郑玄在整理古代历史文献方面有贡献,对刘洪的《乾象历》作过注释,精通《三统历》、《九章算术》.撰有《六艺论》、《驳五经异义》等,但都佚而无传.

蔡　邕(Cài Yī,133—192)　中国汉代科学家.字伯喈,东汉陈留围(今河南杞县南)人.灵帝时为议郎,因上书评说朝政而获罪,流放朔方.遇赦后,恐遭陷害,亡命江湖 10 余年.董卓当权时,被任为侍御史,官左中郎将.董卓被诛后,被王允捕,死于狱中.蔡邕精通经史、音律、天文,又善辞赋、书画.与刘洪同时代,并共同讨论历法问题.对圆周率有所研究,认为圆周率 $\pi>3.125$ 或 $\pi>25/8$,这对《九章算术》中取 $\pi=3$ 是一个改进.

王　粲(Wáng Càn,177—217)　中国汉代数学家.字仲宣.汉末,山阳高平(今山东邹县)人.以博洽著称.先依刘表,未被重用,后为曹操幕僚.216 年随军出征吴国,次年春在征途中病逝.王粲为"建安七子"之一,在七子中成就较大.他博物多识,且善长数学,著《算术》一书,略尽算理.与汉代许商、杜忠及吴国陈炽并称于世.此外,他的诗语言刚健,词气慷慨.

徐　岳(Xú Yuè,约 3 世纪)　中国汉代天文学家、数学家.字公河.东汉末年,东莱人.曾从刘洪学习历法,并对数学有所研究.《隋书·经藉志》载,徐岳注《九章算术》2 卷,又有徐岳、甄鸾重述《九章算术》2 卷,徐岳、甄鸾等撰《九章算经》29 卷.《旧唐书·经藉志》载,徐岳撰《九章算经》1 卷,徐岳还著有《数术记遗》及《算经要用百法》各 1 卷.《宋史·艺文志》载,甄鸾注徐岳《大衍算术法》1 卷.现传《数术记遗》卷首题有"汉徐岳撰,北周汉中郡守前司隶臣甄鸾注",但是,《数术记遗》中佛教用语很多,有人认为这不是徐岳所著,而是甄鸾假托徐岳之名而造,是否如此,尚待研究.

陈　炽(Chén Chì,约 3 世纪)　中国三国时代数学家.吴国人.通晓《九章算术》,与汉代许商、杜忠及魏国王粲并称.

王　蕃(Wáng Fān,228—266)　中国三国时代数学家.字永元,吴国庐江(今江西省)人.他博览多闻,兼通术艺,是吴国有名的天算家.曾任尚书郎,258 年孙休即位,任散骑中常侍,加驸马都尉,后为夏口监军.孙皓初年又任中常侍.甘露二年(266 年),孙皓宴请群臣,王蕃贪杯失态,孙皓一怒之下将他斩了.王蕃曾研究过圆周率,谓之"周经之法".他的改进值为 $\pi=142/45$.

陆　绩(Lù Jì,约 3 世纪)　中国三国时代数学家.字公纪,吴国人.他博学多识,星历算数无不备览,曾任郁林太守.他认为周天一百零七万一千里,东西、南北径三十五万七千里,即取圆周率为 3.

周　群(Zhōu Qún,约 3 世纪)　中国三国时代数学家.字仲直,蜀人.刘备定蜀后,周群任儒林校尉.他精于算术,研究天气变化,所言多中,辅刘备得汉中有功.

阚　泽(Kàn Zé,约 3 世纪)　中国三国时代天文学家、数学家.字德润,会稽山阴人.曾师从徐岳研习刘洪《乾象历》,精于天文历算,著有《乾象历注》.

赵　爽(Zhào Shuǎng,约 3 世纪)　中国三国时代数学家.字君卿,又名婴.吴国人,与刘徽同时代,其生平亦不可详考.在《周髀算经》注序中有"负薪余日聊观周髀"之说,由此推测,他曾参加过体力劳动.

赵爽在数学方面留给后人的成就,主要见于《周髀算经》的注释.他在注释《周髀算经》时,利用图形与注文,对勾股定理、有关勾股弦的各种关系式以及相当于现代二次方程的解法,都给出了几何证明.可惜包括"勾股圆方图"、"日高图"、"七衡图"在内的图均已失传,只留下了"图注".这些注文反映了他研究数学的许多成果,其中倍受称道的是"勾股圆方图注",全文仅 540 字,却包含了很重要的内容.譬如,他认为以勾股为边的长方形可视为被对角线等分成两个直角三角形,涂上朱色,即所谓"朱实";以勾股差为边的正方形涂上黄色,即所谓"黄实";那么两块长方形就有 4 个朱色三角形,加上黄色正方形拼成所谓"弦图",即"黄实"在中央,"朱实在四周,成为以弦为边的大正方形,谓之"弦实".这样,他用图形经"移补凑合"而面积不改变的基本思想,轻而易举地证明了勾股定理.若用现代的表示法,a,b,c 表示勾、股、弦之长,则有 $2ab+(b-a)^2=c^2$,经整理即得 $a^2+b^2=c^2$.这种证明方法简单明了,现在仍被采用.在国外,也有类似的证明方法,印度的巴斯卡拉和阿拉伯的阿布尔·韦法都曾用过,但都比赵爽晚得多.又如,他认为"其倍弦为广袤合,令勾股见者自乘为

其实”，即设广、袤为 x_1，x_2，勾股弦为 a，b，c，由前一句话得到 $x_1+x_2=2c$，后一句话得到 $x_1x_2=a^2$（或 b^2）. 这就是一元二次方程 $x^2-2cx+a^2=0$ 或 $x^2-2cx+b^2=0$ 的根与系数的关系. 他还得到相当于

$$x=\frac{2c-\sqrt{(2c)^2-4a^2}}{2}$$

的式子. 可见他有非凡的洞察力. 在《周髀算经》注中，赵爽对分数运算，创始了所谓“齐同术”. 他认为“通周天四分之一为一千四百六十一，通十二月十九分月之七为二百三十五，分母不同，则子不齐，当互乘以齐同之.”这就是把带分数

$$365\frac{1}{4},\quad 12\frac{7}{19},$$

化为假分数

$$\frac{1461}{4},\quad \frac{235}{19};$$

又将它们化同分母

$$\frac{27759}{76},\quad \frac{940}{76}.$$

亦即“互乘以齐同之”.

赵爽治学、教学都有独到之处. 他主张虚心向人求教，“不能自料”就“访之贤者”. 主张“累思”，“若诚能重累思之，则达至微之理”. 主张启发式教学，“凡教之道，不愤不启，不悱不发；愤之，悱之，然后启发”，“举一隅，使反之以三也”. 这些主张至今仍为至理名言. 赵爽与刘徽、祖冲之一样，被誉为两汉之后中国传统数学发展过程中一个高潮时期的代表人物.

刘　徽（Liú Huī，约 3 世纪）　中国魏晋时代数学家. 临淄或淄川（今属山东省）人. 迄今，史籍中尚无刘徽的直接记载. 他的籍贯、生平均不得详考，只能根据有限的史料进行推测.

刘徽是中国古代数学家中的佼佼者，他的数学成就对中国古代数学的发展产生了深刻的影响. 但是，他的数学著述留传后世的很少，而且久经辗转传抄，残缺不全. 主要有他为《九章算术》作的注，散见于《九章算术》各术文之后，世称《九章算术刘徽注》. 在注《九章算术》之余，作为句股章的补充，他又自撰《重差》1 卷，至唐代易名为《海岛算经》. 据《隋书·经籍志》记载，他还著有《九章重差图》1 卷，可惜至今未见传本. 刘徽的数学成就可以概括为两方面：

1. 为中国古代数学体系完善了理论基础.

2. 在继承中提出了自己的创见.

刘徽第一方面的成就，集中地体现在《九章算术刘徽注》中.《九章算术》是中国古代数学流传至今最早、最完整、最重要的经典，它既总结了秦汉以前的数学成就，又成为汉代以后长达两千多年中国古代数学研究与创造的源泉.《九章算术》涉及的数学理论很多，但它以题列术，按术归类而编排成帙，加之言简意赅，致使读者难以了解各种术的数学原理及其内在的逻辑联系. 刘徽的注释，一方面阐述每个具体算法的理论依据，一方面揭示各种算法之间的内在联系，使之成为一个严谨、完整的理论体系. 刘徽第二方面的成就，主要有圆田术注中提出的割圆术：“割之弥细，所失弥少. 割之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣.”阳马术注中提出的凸多面体体积计算原理：“邪解立方得两堑堵，邪解堑堵，其一为阳马，一为鳖臑，阳马居二，鳖臑居一，不易之率也.”开立圆术注中提出的“牟合方盖”说. 方程术注中提出的“方程新术”.《海岛算经》中提出的“重差术”等. 这些创见对中国古代数学的发展都产生了深远的影响.

刘徽的治学思想也是堪称楷模. 首先，他有孜孜不倦的学习态度，《九章算术刘徽注》序中所言“徽幼习九章，长再详览”可见一斑；其次，他对学术问题持有严谨、求实的态度，讲求“析理以辞，解体用图”，“约而能周，通而不黩”. 他对别人的错误观点，决不姑息，对自己不懂的问题，从不隐瞒，总是坦诚相告，“以俟能言者”. 另外，在数学教学方面，刘徽善于启发，主张“告往而知来，举一隅而三隅反”，还用生动的比喻，勉励后学者在学习中要注重抓关键而提纲挈领. 他说：“庖丁解牛，游刃理间，故能历久其刃如新. 夫数，犹刃也，易简用之，则动中庖丁之理.”

孙　子（Sūn Zǐ，约 4 世纪）　中国晋代数学家. 其生平、事迹不可详考，有以“孙子算经”为名的著作流传于世.《孙子算经》共 3 卷，书前有序，论述了数学的用途. 卷上较系统地叙述了算筹记数法，给出了筹算中的乘、除、开方以及分数运算等算法步骤. 这在中国古代算书中属仅见的宝贵资料. 卷下第 26 问是著名的“物不知其数”问题：“今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何. 答曰：二十三.”这是求解一次同余式组问题，常被称为“孙子问题”. 书中给出了一种算法，这种算法据称与古代编制历法过程中计算“上元积年”的算法有密切联系，在古代民间传流甚广，有称之为“鬼谷算”、“隔墙算”、“秦王暗点兵”、“韩信点兵”以及“翦管术”的说法. 宋代的秦九韶对此进行了卓有成效的研究，并称这种算法为“大衍求一术”. 在欧洲直到 19 世纪，高斯（Gauss，C. F.）才在 1801 年出版的《算术研究》中给出了一般性的定理. 因此，孙子问题以其解法在数学史上有一定的地位，人们称之为“孙子定理”或“中国剩余定理”.

赵　歆（Zhào Fěi，约 4 世纪）　中国晋代数学家. 北凉河西人. 据《隋书·经籍志》载，赵歆著有《赵歆算经》、《河西甲寅元历》、《七曜历数算经》和《阴阳历术》各 1 卷.

何承天(Hé Chéngtiān,370—447) 中国南北朝时代天文学家、数学家.生于东海郯(今山东郯城西南).历官衡阳内史、御史中丞等,世称何衡阳.他是当时著名的无神论思想家、天文学家、历算家.443年考定《元嘉历》,呈刘宋朝廷.445年开始在南朝施行此历.他善弹古筝,通音律,发明了一种接近十二平均律的"新律".还曾奉命纂修《宋书》,未成而于447年逝世.

何承天在考定《元嘉历》时,采用了不少较为先进的数学方法,使这部历法有较高的水平.他创造了一种分数近似算法,即求分数 x/y,使它逐渐接近实测数据,由已知的两个分数 a/b,c/d,且

$$\frac{a}{b}<\frac{x}{y}<\frac{c}{d},$$

他以分数

$$\left(\frac{a+c}{b+d},\frac{a+2c}{b+2d},\cdots\right)$$

为不足近似值来计算.此法用于调整"日法",所以他称之为"调日法".由于这种算法在《宋书·历志》中没有记载,所以有人疑为宋周琮伪造,在外国到14世纪才出现类似的算法,较此晚800多年.何承天对圆周率也有研究,在计算周天度数和所谓"南北相去"时,用的圆周率是

$$\pi=\frac{365\dfrac{75}{304}}{116\dfrac{65}{304}}=3.14288\cdots,$$

这个结果就是用"调日法"得到的,与祖冲之的约率22/7非常接近,其中是否有关联,无法推断.

此外,何承天运用当时自然科学所达到的水平,多次进行反佛教的理论斗争.他认为"生必有死,形毙神散,犹春荣秋落,四时代换,奚有于更受形哉?"反对佛教中的"神不灭"说和因果报应说.著有《报应问》、《达性论》.有《何衡阳集》传世.

高　允(Gāo Yǔn,390—487) 中国南北朝时代数学家.字伯恭,北魏渤海蓨(今河北景县)人.自幼喜好文学,博通经史天文术数.当初被尊拜为中书博士,后迁升侍郎,授太子经书.40多岁时曾回乡当教授(官名),受业者千余人.曾与崔浩同修国史,崔浩以国史案被杀,他曾为崔据理争辩,愿与同狱,后被太子营救才免于一死.文成帝时,他位至中书令,文明太后临朝,引他为参决大政.他前后经历五帝,历任要职,达50余年.著有《算术》3卷,《魏书》、《北史》皆有他的传记.有的研究者认为他是《三开》的作者.

成公兴(Chéng Gōngxīng,约5世纪) 中国南北朝时代数学家.字广明,宋时胶东人.能通达《九章算术》、《七曜》,精于天文、历算,《魏书》中有传.

殷　绍(Yīn Shào,约5世纪) 中国南北朝时代数学家.长乐人.424—451年间为算学博士,曾任西曹.他早年受教于成公兴和道人法穆,学习研究了《九章要术》、《九章数学法要》,所以他精通《九章算术》、《七曜》等数学、天文著作,《魏书》、《北史》有传.

皮延宗(Pí Yánzōng,约5世纪) 中国南北朝时代数学家.官至员外散骑郎.他对圆周率有过研究,认为圆周率取3是不精确的,可惜他所取值没有记录流传下来,不过人称"未臻折衷"而已.

张丘建(Zhāng Qiūjiàn,约5世纪) 亦称张邱建.中国南北朝数学家.清河人.其生平、事迹皆不可详考,但有《张丘建算经》流传至今.《隋书·经籍志》称2卷;《唐书·经籍志》称1卷,有甄鸾注;《唐书·艺文志》称3卷,有李淳风注;《宋史·艺文志》亦称3卷.现代传本中最早的是南宋刻本,约刻于1213年前后,藏于上海图书馆.《张丘建算经》大约成书于466—485年间,书中载92问,涉及测量、纺织、交换、纳税、冶炼、土木工程、利息计算等实际问题,是《九章算术》以来的一部较好的数学经典.在求最大公约数与最小公倍数、级数问题、线性方程组解法、二次方程解法、算术难题、重差术应用诸方面,都有独到之处.书最后一问,是闻名于世的"百鸡问题":"今有鸡翁一,直钱五;鸡母一,直钱三;鸡雏三,直钱一.凡百钱买鸡百只,问鸡翁、母、雏各几何."这是一个不定方程问题,书中给出了三组解,其解法仅给15字:"鸡翁每增四,鸡母每减七,鸡雏每益三,即得."对这个问题的研究,在中国古代数学史上有深远的意义.

祖冲之(Zǔ Chōngzhī,429—500) 中国南北朝时代科学家.字文远,南朝人.生于范阳遒县(今河北涞水县北),祖父与父亲都曾在南朝做官.他的家庭有学术传统,其先人有从事工程建筑的,有从事文学创作的,也有从事历法研究的.他自幼学习刻苦、勤奋,尤其对天文、数学有浓厚的兴趣.他广泛收集并认真研习前人的著作,对于天文、数学方面的知识则是"亲量圭尺,躬察仪漏,目尽毫厘,心穷筹策",可谓严谨治学.宋孝武帝(454—464)年间,被安排在华林学省,且"赐宅宇车服",从事学术研究.大约461年,被调南徐州(今江苏省镇江市)做从事史.不久被调建康(今江苏省南京市),在刘宋朝廷任公府参军.464年后,出任娄县(今江苏省昆山县东北)县令.刘宋末年,再度被调建康,任谒者仆射、司礼仪.晚年被提升长水校尉.他曾向朝廷提出"开屯田,广农殖"的主张,当时齐朝廷表示支持,并打算让他"巡行四方",兴建大业.但因连年战乱,"事竟不行".500年祖冲之逝世.

祖冲之的主要学术成就有数学、天文以及机械设计等方面.数学方面,他继承了刘徽的数学思想,曾研究过《九章算术》与刘徽注,并且对《九章算术》

作《九章术义注》，对刘徽注又作“重差注”. 通过研习，祖冲之的数学理论水平达到相当高的水平，也取得了卓越的成就. 最为突出的是他对圆周率的推算，《隋书》卷十六中载有：

$$3.1415926 < \text{正数} < 3.1415927;$$

$$\text{密率}\frac{355}{113}, \text{约率}\frac{22}{7}.$$

所谓“正数”，即圆周率准确值，由于它是无理数，不可能用有限小数或循环小数表示出来. 他是否意识到这一点，尚无明确记载. 但是，他用“盈肭二限”来限定“正数”的范围，无疑属创见. 其中，“正数”与“密率”都是当时世界上最好的结果，并保持了长达千年的世界纪录. 密率在国外直到 16、17 世纪才由德国的奥托（Otto, V.）、荷兰的安托尼斯（Anthonisz, A.）和日本的关孝和分别推算出来. 因此，祖冲之的结果倍受国际重视，日本数学史家三上义夫曾建议把“密率”称为“祖率”. 祖冲之用什么方法求得如此好的结果，没有留下任何记载. 现在人们只能推测，有割圆术法、连分数法、无穷级数法、调日法以及不定方程法等，莫衷一是. 另外，祖冲之还用自己的研究结果去考核古代量具，可视之为他的成果的实际应用. 关于球体积计算公式，在《九章算术》中有所谓“开立圆术”记之，但误差很大：$V=9/16D^3$（V 为球体积，D 为球直径）. 这个结果曾引起张衡的注意，刘徽也深入地研究过. 刘徽作出了重要的改进，提出了球外切几何体“牟合方盖”，其体积与球体积之比为 $4:\pi$，但刘徽终究没有彻底解决这个问题. 大约 200 多年后，祖冲之与其儿子祖暅在刘徽研究的基础之上，计算出“牟合方盖”的体积，并提出著名的“祖暅原理”，从而彻底解决了球体积计算公式的问题. 至于祖冲之本人是否直接解决这个问题，尚无记载可查. 不过，他曾与戴法兴辩论时说：“至若立圆旧误，张衡述而弗改，汉时斛铭，刘歆诡谬其数，此则算氏之剧疵也.”可见他对球体积问题确实进行过深入研究. 祖冲之在数学方面除注《九章算术》和《重差》之外，还自著《缀术》六卷，也有说五卷. 唐代李淳风曾注《缀术》，并将它列为重要教科书. 可惜此书于北宋天圣、元丰年间（1023—1078）失传了.《隋书》卷十六称：“又设开差幂、开差立，兼以正圆参之，指要精密，算氏之最者也，所著之书，名为《缀术》，官学莫能究其深奥，是故废而不理.”于是人们推测《缀术》论述了圆周率的推算、球体积的计算以及由面积差、体积差求某种线段长度等极为复杂的问题，但由于内容深奥难懂，受到冷遇而失传.

在天文、历算方面，祖冲之著《大明历》是一杰出贡献. 他推出的“上元积年”，就是现代数学也未必能轻易解出的问题，必须解由 11 个一次同余式组成的同余式组. 他第一次使用了“岁差”，测得的回归年日数比前人更精密. 他首次引进交点月概念，所得交点月日数与现代所测结果相差甚微. 这些都是值得称道的成就. 在机械设计方面，祖冲之仿制了指南车，创造发明了水碓磨、千里船等. 此外，他还精通音律，注释了许多经典，作过文学作品《述异记》10 卷.

1959 年 10 月 4 日，苏联发射的第三个宇宙火箭，揭开了月球背面的隐秘. 苏联科学院将月球背面的一座环形山命名为“祖冲之”. 这说明祖冲之这位中国古代数学家、天文学家的业绩是得到国际公认的.

祖　暅（Zǔ Hèng，约 6 世纪）　中国南北朝时代数学家、天文学家. 祖冲之的儿子，参见“祖冲之”.

张　缵（Zhāng Zuǎn，约 540）　中国南北朝时代数学家. 字伯绪，梁时人. 历任北平将军，宁蛮校尉，后为岳阳王詧所害. 著有《算经异义》1 卷.

刘孝孙（Liú Xiàosūn，约 6 世纪）　中国南北朝时代数学家. 北齐至隋朝时广平人. 著有《开皇历》1 卷、《七曜新术》2 卷. 据载隋开皇十四年（594 年）曾论历法. 据现宋本《张丘建算经》3 卷，题唐算学博士，臣刘孝孙撰细草.

夏侯阳（XiàHóu yáng，约 6 世纪）　中国南北朝时代数学家. 北魏人. 其生活年代不详，《宋史·礼志》载算学祀典，称之为晋代人，清代阮元《畴人传》认为他是隋代人. 他著有《夏侯阳算经》3 卷，历次版本《算经十书》中都包含这部算经. 但现传本已非夏侯阳原著，人们疑为唐代的韩延增修本.

元延明（Yuán Yánmíng，484—520）　中国南北朝时代数学家. 后魏安丰王之子，亦称之为安丰王延明. 512 年，他曾散家财而拯饥荒. 522 年，诏他定服章. 520—525 年间，曾监修金石，博探古今乐事. 525 年元法僧反，为东道行台徐州大都督，共讨徐州. 526 年从骠骑大将军徐州刺史，迁为仪同三司. 528—529 年间，元灏入洛阳，他受委缘河据守，后因元灏败而南逃，在江南逝世. 元延明号称博极群书，鸠集图书万余卷. 曾著有《五经宗略》23 卷，一说 40 卷. 曾与信都芳在家中共同讨论数学等问题，共著《古今乐事九章》12 图，又集《器准》9 篇.

苏　绰（Sū Chuò，498—546）　中国南北朝时代数学家. 字令绰，西魏京兆武功（今属陕西省）人. 他博览群书，尤善算术. 他深受西魏大臣宇文泰的信任、赏识，官至大行台支尚书兼司农卿. 从此，他参典机密，始制文案程式，掌管贡赋税务，并参与宇文泰的时政改革. 他制定计账、户籍等法，又拟六条诏书，即治心身、敦教化、尽地利、擢贤良、恤狱讼、均赋役，并规定地方官吏不通六条和计账的不得居官. 他常以丧乱未平为己任，终因积劳成疾而去世. 曾受封美阳伯，隋追封邳国公.

庾曼倩（Yǔ Mànqiàn，约 6 世纪）　中国南北朝

时代天文学家、数学家.字世华，新野人.梁世祖在荆州，命为主簿，迁升録事，转为谘议参军等职.他精通天文、历算，注释过《算经》及《七曜历术》.

甄　鸾(Zhēn Luán，约 6 世纪)　中国南北朝时代数学家.字叔遵，北周中山无极人.从他几部著述的署名可知他曾做过官，诸如"前司隶"、"司隶大夫"、"汉中郡守司隶校尉"等.他精于算学，通晓典籍，长于天文，又深受佛教影响.《隋书·律历志》中称周武帝时(561—577)他曾制定《天和历》，《隋书·经籍志》也记有《周天和历》1 卷，为甄鸾于天和元年(566)所定历书.据各种文献记载，甄鸾曾编撰、注释过许多种数学著作，包括《九章算术》、《孙子算经》、《五曹算经》、《张丘建算经》、《夏侯阳算经》、《周髀算经》、《五经算术》、《数术记遗》、《三等数》、《海岛算经》、《甄鸾算术》等，多达 11 种.与天文、佛教有关的著述也有好几种，如《七曜术算》、《历术》、《七曜历算》、《七曜本起》、《笑道论》、《帝王世録》、《年纪》等.对于他做出的如此繁多的编撰、注释工作，在中国数学史界有些褒贬不一，尚待深入研究.

董　泉(Dǒng Quán，约 6 世纪)　中国南北朝时代数学家.北周人.著有《三等数》1 卷，甄鸾曾为之作注，见于《旧唐书》，在日本也有此书目的记录.

信都芳(Xìn Dūfāng，约 6 世纪)　中国南北朝时代数学家，字玉琳，后齐河间人.年少时就以精通算术、天文而为州里人所称道.他思维敏捷，而且专心治学，有时废寝忘食，有时因太专心思恃而掉到路坑中.他曾对人说，每沉思之际，雷声贯耳而未闻.他曾任后齐神武霸府田曹参军.539 年齐献武王在施行新历之前，曾征得信都芳的认可.后魏安丰王元延明曾请信都芳到家中共商数学等问题的研究与著述工作.元延明家藏书多，欲抄集《五经宗略》、《乐书》、《器准图》等书，都由信都芳负责其中推算工作.525—526 年间，信都芳曾受到祖暅的指教，其学术水平更有长进.529 年元延明南奔之后，信都芳自注《乐书》7 卷，《器准图》3 卷，《黄钟算法》20 卷，又注《重差句股》、《周髀四术》.大约 543—550 年间逝世.

刘　焯(Liú Zhuō，544—610)　中国隋代经学家、天文学家、数学家.字士元，信都(今河北冀县)昌亭人.少年刘焯与河间刘炫结盟为至友，又都与刘智海交往.刘智海家有许多藏书，他们都在那里就读.前后 10 年，有时缺吃少穿，但读书学习从未间断.因此，刘焯的学问日益长进，成为当地有名的学者，尤以儒学著称，命为州博士.581—600 年间，被刺史赵煚引为从事，到举秀才，射策甲科，他又和著作郎王劭同修国史，兼参议律历，且直门下省，以待顾问.586 年，有洛阳石经到京师，其中文字有磨灭不能辨认的，由刘焯、刘炫共同考定.后因在国子学释奠礼时，刘焯、刘炫责难群儒，受谤而被削官为民.此后，刘焯不问外事，在家专门从事研究和教学工作.当时到他门下求学的"不远千里而至者"不可胜数.610 年刘焯逝世.《北史》、《隋书》都有刘焯传记，称之为经学家、天文学家、历算家.

刘焯，其貌不扬，"犀额龟背"，但却好学深思.他精通《九章》、《周髀》、《七曜历书》等经典著作.对于推步日月之经，量度山海之术，莫不核其根本，穷其秘奥.600 年、601 年、604 年先后上书论历，又上他所著七曜新术和皇极历.后著成《稽极》10 卷，《历书》10 卷，前者阐述理论，后者说明应用.可惜《稽极》现已失传，而他的七曜新术和皇极历也均遭拒绝.但当时历算家还是深知其学术价值，所以《隋书》18 卷录存了刘焯的《皇极历》.

刘焯在数学方面最重要的成就是在《皇极历》中，四处使用了等间距二次内插法.最典型的是用于求每年 24 节气中两节气间某段日的所谓"迟速数".他把一年时间分为 24 等分，每个分点上为一节气日，这就是所谓等间距.但日行有快有慢，实际上每两个节气之间的时间长度也有短有长，与等分时间相比的差数称为"陟降率".每个节气和两节气间的某一日比按平均计算迟到或早到时间数称为"迟速数"，那么这个问题就是已知两节气间的陟降率($\triangle_1$)，以及后一节气的气率($\triangle_2$)，求此两节气间某日(n)的迟速数 $f(x)$.若 $f(a)$为该日前一节气的气率的迟速数，则刘焯的算法相当于现代数学式：

$$f(x)=f(a)+n\cdot\frac{\triangle_1+\triangle_2}{2}+n(\triangle_1-\triangle_2)-\frac{n^2}{2}(\triangle_1-\triangle_2).$$

这就是所谓"等间距二次内插法公式".刘焯的算法公式对后世历法研究影响很大，619 年，唐代傅仁均制《戊寅历》，644 年，李淳风造《麟德历》都用到类似的公式.李淳风称赞刘焯的算法公式为"微密至当，以示算理通涂".在国外，印度的婆罗摩笈多(Brahmagupta)于 628 年用等间距二次内插法公式计算了正弦值；阿拉伯学者比鲁尼(al-Bīrūnī)也用等间距二次内插法公式计算正弦、正切值，但都比刘焯晚.欧洲直到 17 世纪才在天文学问题中用到内插法进行计算.

刘焯在天文数据的计算过程中还创造了一种所谓"奇零分数算法"，即用分数表示一个数的整数之下的奇零部分的算法.此外，刘焯在历算研究中，严谨求实，从不苟同前人的结论，这也是值得称道的.他认为前人主张的夏至日中午 8 尺标杆"影千而差一寸"的说法未必有根据，于是提出一项实测的建议，他的建议虽然周密可行，但却还未得以实施，他便逝世了.

刘　炫(Liú Xuàn，约 6 世纪)　中国隋代数学

家.字光伯,河间景城(今河北献县东北)人.少年时与刘焯结盟为友,同窗共读,为当时经学家刘献之的三传弟子.581—600年间,奉诏修史.后与诸儒修订五礼,授旅骑尉.旋任太学博士.68岁逝世.著有《算术》1卷.

张去斤(Zhāng Qùjīn,约6世纪) 中国隋代数学家.著有《算疏》1卷,见《隋书·经籍志》.

张 崚(Zhāng Léng,约6—7世纪) 中国隋代数学家.著有《九章推图经法》1卷,见《隋书·经籍志》.

宋泉之(Sòng Quánzhī) 中国隋代数学家.为精通算学的学士.著有《九章术疏》9卷,见《旧唐书·经籍志》,一作《九经术疏》,见《唐书·艺文志》.

杨 淑(Yáng Shù,生卒年代不详) 中国隋代数学家.著有《九九算术》2卷.

刘 祐(Liú Yòu,约7世纪) 中国隋代天文学家、数学家.荥阳人.开皇初(590年前后)为大都督,封索卢县公.他精于天文、历算,曾与刘焯、张宾、马显等定历法,并著有《律历杂文》2卷,《九章杂算文》2卷.

王孝通(Wáng Xiàotōng,约7世纪) 中国唐代数学家.限于史籍,他的籍贯、身世和生卒年代均未能详考.据《唐书》部分记载,他在唐代初年曾为历算博士,并在朝廷升任太史丞.623年,他奉命与祖孝孙以甲辰历校勘傅仁均的戊寅元历,曾提出异议30余条.626年,他又与崔善为等对戊寅元历作了许多校订工作.据他本人《上辑古算术表》称,"臣长自闾阎,少小学算","伏蒙圣朝收拾,用臣为太史丞".可见他出身平民,后来才做了官.

王孝通的数学成就,集中地反映在他的名著《缉古算术》之中,这部著作成书年代不详,也称《缉古算经》.从他的《上辑古算术表》可以看出,这部著作是在他晚年时,总结多年"钻寻秘奥"而得以撰成的,其上表时间大约在626年之后.所以,《缉古算经》编撰工作在此之前,成书可能在626年之后.现存《缉古算经》1卷,共20题.内容包括天文历算、土木工程以及勾股计算等问题.每道题都有答案,有解题步骤,还有自注.其中关于多面体体积计算公式和高次方程(尤其是三次方程)数值解法的成就最为显著.《缉古算经》中关于"堤积"计算是典型的多面体体积计算问题,而且相当复杂.不仅有根据工程具体情况计算体积和长、宽、高的尺寸问题,还有由已知某一部分体积返求其长、宽、高的尺寸问题.他提出了所谓"求堤积都术",就是堤积的一般公式,这在当时堪称一绝.他在《上辑古算术表》中得意地写道:"臣昼思夜想,临书浩叹,恐一旦瞑目,将来莫睹,遂于本地之余,续狭斜之法,凡二十术,名曰辑古,请访能算之人,考论得失,如有排其一字,臣欲谢以千金."可见,堤积问题是《缉古算经》精粹之作.《缉古算经》中的大部分问题,包括上述堤积问题都要用高次方程(主要是三次方程)来求解,这在当时是较为高深的数学理论.王孝通依据实际问题建立起高次方程,在没有符号代数的情况下,他在每一条有关高次方程的术文之下都用自注说明方程各项系数的来历.他相当于列出了28个形如

$$x^3 + px^2 + qx = r \ (p > 0, q \geqslant 0, r > 0)$$

的三次方程,其中r,q,p和三次项系数分别称之为实、方、廉、隅.他还提出了"带从开立方法",这不仅是中国现存典籍中的最早记叙,而且在世界数学史上也是关于三次方程数值解法及其应用的最古老的珍贵之作.古代希腊学者也遇到过三次方程,他们是用圆锥曲线来求解的.公元10世纪的阿拉伯人发展了三次方程的几何解法.13世纪斐波那契(Fibonacci,L.)才得出一个三次方程的数值解法,比王孝通晚600多年.至于一般三次方程的代数解法直到16世纪才出现在意大利人的著作中.

王孝通的《缉古算经》标志着中国古代的代数学开始进入了一个新的发展阶段.此后,发展起中国古代数学的高次方程数值解法,以及列方程的天元术和四元术.《缉古算经》成书之后,影响很大.656年唐代国子监内设数学科,搜集数学典籍时就包括《缉古算经》,直到宋代这部书仍为必修教本.1081—1085年间,出版《算经十书》时,也收了《缉古算经》.后来,此书外传到日本等亚洲国家.

李淳风(Lǐ Chúnfēng,约7世纪) 中国唐代数学家、天文学家.岐州雍人.精通天文历算、阴阳之说.644年为太史丞,648年为太史令,656年因修国史有功,被封为昌乐县男.662年太史局改为秘阁局,他为秘阁郎中,670年间,又为太史令.逝世时享年69岁.

李淳风在数学方面最重要的业绩,是于656年受诏注了十部古代算经,其中包括《九章算术》、《孙子算经》、《五曹算经》、《张丘建算经》、《夏侯阳算经》、《周髀算经》、《五经算术》、《海岛算经》、《缀术》和《缉古算经》.书成之后,唐高宗令国学行用,可见其权威性.现在流传的《算经十书》中没有《缀术》,而添入《数术记遗》,并且每卷第一页都题有"唐朝议大夫,行太史令,上轻车都尉臣李淳风等奉敕注释"的字样.与李淳风同做注释工作的还有国子监算学博士梁述,太学助教王真儒等.李淳风等人的注释为后人提供了学习的方便,尤其对《周髀算经》的注释有很大的贡献.此外,《缀术》失传,幸有李淳风等在注《九章算术》时征引了祖冲之父子在《缀术》中对球体积的研究内容,后人才得知这一宝贵的成果.

李淳风在天文学方面也有重要贡献,曾铸浑天黄道仪,664年又受诏制订《麟德历》.

南宫说(Nán Gōngshuō,约 7 世纪) 中国唐代天文学家、数学家.曾任朝廷太史丞.705 年著有《神龙历法》一书,创用百进小数记天文数据中的"奇零"部分.例如:1 回归年为 365.2448 日,记为期周 365 日,余 24,奇 48.

瞿昙悉达(Qútán Xīdá,约 7 世纪末至 8 世纪) 中国唐代天文学家、数学家.来自天竺.瞿昙,为古代天竺人的姓,据称释迦牟尼姓瞿昙.718 年,奉唐玄宗之命瞿昙悉达将天竺的《九执历》译为中文,另编写了《开元占经》110 卷,其中介绍了古代印度的数码和三角函数表.

张　遂(Zhāng Suí,683—727) 中国唐代高僧、天文学家、数学家.法名一行.683 年生于唐代初年一位功臣之家,原籍敦煌,后内迁魏州繁水县(今河南南乐县),644 年,繁水并入昌乐县,因此史籍称他为昌乐人.张遂自幼聪敏,刻苦好学,博览群书,尤其对天文学和数学感兴趣.他常远道跋涉去藏书极为丰富的长安城南的元都观读书、请教,颇受该观主持尹崇的赏识,称赞为"后生颜子".因此,他在青年时就已成为一位以学识渊博而著名的学者.当时,武则天的侄子武三思想与他结交,欲博取"礼贤下士"的美名,但遭张遂的拒绝.张遂又怕受到迫害,21 岁从荆州景禅师出家,旋从嵩山普寂学禅,后从善无畏、金刚智学密法,又参与善无畏译场,翻译《大日经》.717 年,张遂被唐王强请回京,他不愿做官,在长安城内华严寺编译佛教经典.721 年,"太史频奏日蚀不效",这是因为行用了半个世纪的《麟德历》已不能满足需要.于是张遂向朝廷建议改革历法,当即得到唐玄宗李隆基批准,并由他主持这项工作.他对这项工作认真负责,与梁令瓒同制黄道游仪,用以重新测定 150 余颗恒星的位置,发起在全国 12 个地点进行天文观测,并根据南宫说等一组的测量,归算出相当于子午线纬度的长度.他著有《大日经疏》,着手编制了新历法《大衍历》.可是尚未来得及最后定稿,在 727 年随皇帝去洛阳的途中逝世于新丰(今陕西省临潼县新丰镇).

张遂的科学成就,主要体现在《大衍历》中.他继承了古代天文学上的优秀遗产,又突破了旧传统的束缚,比较正确地掌握了太阳在黄道上运行速度的变化规律.在数学方面,张遂取得了以下几项卓越的成就:

1.关于不等间距二次内插法.在《大衍历》中,他不仅使用了等间距二次内插法,而且在历史上第一次使用不等间距二次内插法,在他所谓"步日躔术"和"步交会术"中使用了这种算法.他认为,刘焯在安排一年 24 节气时的结论"其说非是,必须改等间距为不等间距,根据实测给出,在距某个节气日 a 前后 s 日的太阳视运行速度的计算公式,用现代数学符号表示为:

$$f(a+s)=f(a)+s\cdot\frac{\triangle_1+\triangle_2}{l_1+l_2}+s\cdot\left(\frac{\triangle_1}{l_1}-\frac{\triangle_2}{l_2}\right)-\frac{s^2}{l_1+l_2}\cdot\left(\frac{\triangle_1}{l_1}-\frac{\triangle_2}{l_2}\right),$$

其中$\triangle_1$、$\triangle_2$为前后节气盈缩分,l_1、l_2为前后节气辰数,$f(a)$为前一节气定数,$f(a+s)$为所求日的定数.当 $l_1=l_2$ 时,张遂的公式就变成刘焯的公式,这对后来历法研究的影响都很大.

2.关于三次差分.在《新唐书·历志四上》中记载了张遂在观测日表长短变化时的研究成果.他把全圆周的 365.25 之 1 称为 1 度,并认为日表影长短变化不是均匀的,他将 1 度到 72 度分为 9 段,每度表影长增数恰为三次差分.据此可以列出三次差分表.

3.关于等差级数求和.在求 n 日内某行星匀加速运行度数 s 时,他用了一种算法,相当于现代数学符号写成的公式

$$s=n\left(a+\frac{n-1}{2}\cdot d\right),$$

其中 a 为第一日行星所行度数,d 为每日差.这个公式与《张丘建算经》所给公式各不相同.

4.关于二次方程求根公式.在解上述行星运行问题的逆问题时,他又得出公式

$$n=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(\frac{2a-d}{d}\right)^2+\frac{8s}{d}}-\frac{2a-d}{d}\right],$$

此式显然相当于以 n 为未知数的二次方程

$$n^2+\frac{2a-d}{d}\cdot n-\frac{2s}{d}=0$$

的一个正根.在《大衍历》中,他还用到了"齐同术"、"正负术"、"今有术"等中国传统数学中所特有的方法.此外,张遂还著有《心机算术括》1 卷,又曾算出围棋棋局都数等于 1 至 361 各整数的连乘积,其值有 769 位之多,不知他是如何推算出来的.西方数学家斯特林(Stirling,J.)到 1730 年才有求大数阶乘的公式,那要用对数表求才能得到其位数.

韩　延(Hán Yán,约 8 世纪) 中国唐代数学家(清代戴震曾称之为隋代人).著有实用算术书,分三卷共 83 题,其中有与《五曹算经》、《孙子算经》相同的内容,大部分内容都是结合当时实际需要,对地方官吏和普通百姓提供应用数学知识和计算技能.《新唐书》记有韩延《夏侯阳算经》一卷、《五曹算经》五卷,宋代人误以为韩延的书是《夏侯阳算经》,刻入《算经十书》流传至今.

刘　晏(Liú Yàn,715—780) 中国唐代数学家.字士安,曹州南华(今山东东明)人.上元元年(760 年)为户部侍郎、充度支等使.广德元年(763 年)任吏部尚书、同平章事.不久罢相,仍领度支盐铁

转运租庸使及东都、河南、江淮、山南等道转运租庸盐铁使等职.曾自比贾谊、桑弘羊,后被杨炎构陷而死.刘晏颇具运筹学才能,"安史之乱"后,为了恢复遭到严重破坏的全国经济,他做出了许多最优化的决策.比如,他疏浚汴水,并用分段转运法,年运江淮粮食数十万石,以解决关中缺粮问题;又整顿盐税,行平准法,改善安史之乱后财政紊乱的状况;还选用人才,制定法令,科学理财达 20 年之久.可惜,这些最优化决策仅在《旧唐书·刘晏传》中有实例记载,而没有决策推算的论述.

曹士䓣(Cáo Shìwei,约 8 世纪) 中国唐代天文学家、数学家.780—783 年间,著有《符天历》,又称"万分历",其中用 10000 作为天文数据中分数的共同分母.可惜《符天历》仅行于民间,却未被当时司天监官员们重视.

边 冈(Biān Gāng,约 874—897 时代) 中国唐代天文学家、数学家.874—897 年间为术士,与胡秀林、王墀等改治新历法,由边冈具体操持计算数据.他用算巧,能驰骋反复于乘除间.由是简捷、超径、等接之术兴.虽筹策便易,然皆冥于本原.

龙受益(Lóng Shòuyì,约 785—804 时代) 亦称龙受,又称龙受一.中国唐代数学家.著有《算法》2 卷、《求一算术化零歌》1 卷、《新易一法算范要诀》1 卷、《六问算法》5 卷,附《化零歌》;注王守忠《求一术歌》1 卷、《算范要决》2 卷、《明算指掌》3 卷.

徐 昂(Xú Ang,约 9 世纪) 中国唐代天文学家、数学家.唐代晚期人,822 年著有《宣明历》,他在计算太阳、月亮视运行速度时,用到了张遂的不等间距二次内插法,但比张遂所用公式形式上简便,也比刘焯的公式简明.在某种情况下,与牛顿(Newton, I.)1670 年提出的内插公式相一致.

陈从运(Chén Cóngyùn,生卒年代不详) 中国唐代数学家.亦称陈运.《唐书》艺文志、《宋史·艺文志》、《通志》艺文略都记载有他的著作《得一算经》7 卷、《三问田算术》1 卷.《宋史》律历志称:"唐试右千牛卫,胄曹参军陈从运著《得一算经》,其术以因折而成,取损益之道,且变而通之,皆合于数."

江 本(Jiāng Běn,生卒年代不详) 中国唐代数学家.著有《三位乘除一位算法》2 卷,又以一位因折进退,作《一位算术》9 篇,颇为简约,一说《登象算经》.见于《新唐书》、《宋史》、《崇文总目》等.

黄栖岩(Huáng Xīyán,生卒年代不详) 中国唐代数学家.曾注《心机算术括》1 卷,见于《唐书》艺文志.

宋延美(Sòng Yánměi,约 10 世纪) 中国唐代数学家.930 年因精通数学科举及第,是当年精通数学的五人之首.当年国子司业张溥请命恢复国子学八馆,广揽生徒,以兴绝学.宋延美为数学兴业做了有益的工作.

夏 翰(Xià Hàn,约 10 世纪) 中国宋代数学家.亦称夏翱,著有《新重演议海岛算经》1 卷,见《宋史·艺文志》.

程 柔(Chéng Róu,生卒年代不详) 中国宋代数学家.著有《五曹算经求一法》3 卷,见《宋史·艺文志》.

薛崇誉(Xuē Chóngyù,生卒年代不详) 中国宋代数学家.南汉韶州曲江人.善长算术,通晓《孙子算经》、《五曹算经》,见《宋史》列传.

任弘济(Rén Hóngjì,生卒年代不详) 中国宋代数学家.著有《一位算法问答》1 卷,见《宋史·艺文志》,又见《崇文总目》.

杨 锴(Yáng Kǎi,生卒年代不详) 中国宋代数学家.著有《明微算经》1 卷、《法算机要赋》1 卷、《法算口诀》1 卷、《法算秘诀》1 卷、《算术玄要》1 卷,见《宋史·艺文志》.

徐仁美(Xú Rénměi,生卒年代不详) 中国宋代数学家.据《宋史》律历志在陈从运条目下记载,徐仁美著《增成玄一法》3 卷,设 93 问以立新术,大则测于天地,细则极于微妙,虽粗述其事,亦适用于时.

李绍谷(Lǐ Shàogǔ,生卒年代不详) 中国宋代数学家.著有《求一指蒙玄要》1 卷,见《宋史》卷 207.

楚 衍(Chǔ Yǎn,约 11 世纪) 中国宋代数学家.开封胙城(今河南省延津县)人.他是贾宪的老师,对《九章算术》、《海岛算经》、《缉古算经》、《缀术》等典籍研究颇深,善于天文历算.1023 年曾与宋行古等共同修正《崇天历》,又造《司辰星编历》12 卷.

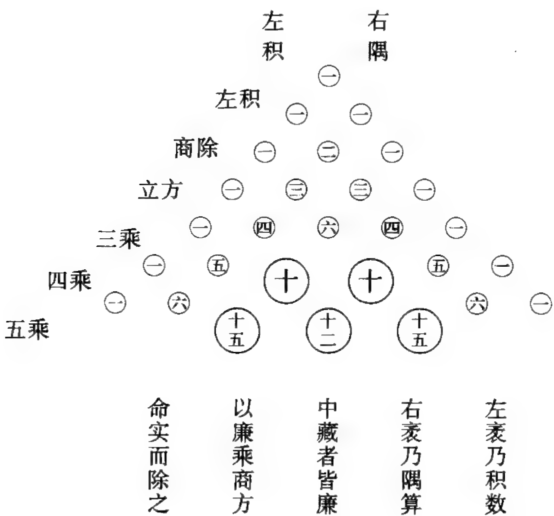
贾 宪(Jiǎ Xiàn,约 11 世纪) 中国宋代数学家.关于他的生平事迹,目前知道的很少.根据与贾宪同时代的王洙所说,贾宪是楚衍的弟子,曾在朝廷里任左班殿值,并有著作传世.又据《宋史·艺文志》记载:贾宪曾撰有《黄帝九章算法细草》9 卷;但此书早已失传.由此可以推定,贾宪生活在北宋年间,并且他著书年代大致在 1023—1050 年间.

贾宪的数学成就,主要在《黄帝九章算法细草》9 卷之中,虽然这本书失传了,但是在 200 年之后的杨辉的著作中记录有贾宪的一部分数学成就,其中"增乘开方法"与"开方作法本源"图,这两项成就在数学史上影响很大.

1."增乘开方法"是贾宪对数学的首要贡献,它是一种开高次方的新方法.在杨辉《详解九章算法》所附的"纂类"中,录有"贾宪立成释锁平方法"、"增乘开平方法"、"贾宪立成释锁立方法"、"增乘开立方法",同时还详细抄录了解法步骤.因此,人们可以确切地知道,贾宪的"立成释锁开方法"和"增乘开方法"的具体作法."立成释锁开方法"与《九章算术》中的开方术大致相同,而"增乘开方法"则比古代流传

下来的开方术简捷得多，很有创造性. 虽然贾宪只处理了开平方和开立方的情形，但是他的方法可以用于开三次以上的任意次方. 在西方，意大利的鲁非尼(Ruffini，P.)和英国的霍纳(Horner，W. G.)分别于1804年和1819年，各自才独立地建立起求解数学高次方程近似根的方法，其演算步骤与贾宪基本相同，但却晚了700多年.

2. "开方作法本源"图是贾宪在解方程时，发现二项展开式的系数规律，造成的一张数表. 包括相当于由0次到6次的二项式展开式的全部系数，即如



图如示. 杨辉明确地指出，这个图"出释锁算书，贾宪用此术"，也就是说"开方作法本源"图为贾宪所创造. 以前，有人以此图出自杨辉著作为据，称之为"杨辉三角"，实为"贾宪三角". 对这种系数规律，阿拉伯的卡西(al-Kāshī)于1427年发表了他的研究成果. 16世纪，德国的阿皮安努斯(Apianus，P.)也研究过，17世纪法国的帕斯卡(Pascal，B.)也造过这种"三角形"，人称"帕斯卡三角形". 但他们都在贾宪之后. 载有"开方作法本源"图的杨辉的《详解九章算法》被收入明代初年编成的《永乐大典》之中. 清代末年，英国侵略者把《永乐大典》掠夺去了许多册，其中正有包括"开方作法本源"图的那一册，现仍藏于英国剑桥大学图书馆.

王　洙(Wáng Zhū，997—1057)　中国宋代数学家. 与贾宪同时代，著有《王氏谈录》，记载了有关贾宪在天文历算方面的成就，称"宪运算亦妙，有书传于世"，即《算法敩古集》2卷.

沈　立(Shěn Lì，约11世纪)　中国宋代数学家. 字立之，北宋历阳人，举进士，曾任益州判官. 1056年4月因水灾，受命治理. 著有《河防通议》，治河者悉守为法，其中有讲算法的内容，被元代郭守敬、沙克什引用.

韩公廉(Hán Gōnglián，约11世纪)　中国宋代数学家. 1095年为吏部令史. 精通《九章算术》，善长勾股、重差测量术，著有《九章勾股验测浑天书》1卷.

苏　颂(Sū Sòng，1020—1101)　中国宋代数学家. 著有《新仪象法要》3卷.

沈　括(Shěn Kuò，1031—1095)　中国宋代科学家、数学家. 字存中，1031年生于钱塘县(现杭州). 父亲曾做过地方官吏，母亲知书达礼. 沈括自幼勤奋好学，在母亲指导下，14岁就读完了家中的藏书. 他还曾随父亲到过福建泉州、江苏润州(现镇江)、四川简州(现简阳)和京城开封等地，增长了不少见识. 1055年他开始踏上仕途，最初作海州沐阳县主簿，后来历任东海、宁国、宛丘等县县令. 1064年中进士，被任命为扬州司理参军. 1067年被荐在京师昭文馆编校书籍，从此开始研究天文历算. 1072年兼任提举司天监，职掌天象观测，推算历书，接着又任史馆检讨. 1073年任集贤院校理，有机会读到更多的皇家藏书. 他曾参与王安石变法，1075年担任三司使，管理全国财政. 1076年变法失败，被诬劾贬官. 后因守边有功，1082年升龙图阁学士. 不久又遭诬陷，降职作均州(现湖北均县)团练副使. 1088年因年老而告退，定居润州梦溪园. 从此闭门谢客，潜心著书，完成《梦溪笔谈》、《忘怀录》等科学巨著. 1095年逝世于梦溪园. 沈括学识渊博，从事研究的领域极其广阔，取得了多方面的成就，是中国古代著名的科学家. 他的巨著《梦溪笔谈》现传本为26卷，加上《补笔谈》3卷、《读笔谈》1卷，共30卷，其中涉及科学技术的有200多条，内容包括数学、物理、化学、天文、地质、地理、气象、工程技术、生物和医学等各个方面. 这是中国古代科学史上的杰作，也是世界科技资料库中的一份宝贵遗产.

沈括在数学方面有精湛的研究，他创立了"隙积术"和"会圆术"，还运用组合数学的概念归纳出"棋局都数"，给出了一些运筹学的简单例子. "隙积术"，载于《梦溪笔谈》卷18第4条. 他通过对酒店里堆起来的酒坛和垒起来的棋子等有空隙的堆体体积的研究，提出了求它们总数的正确方法，称为"隙积术"，也就是高阶等差级数的求和方法. 设层坛、累棋和积罂的上宽为a，长为b，下宽为c，长为d，高为n(在积罂的情形视个数为长度)，则它们的体积或总数由下式计算：

$$v=\frac{n}{b}[(2b+d)a+(2d+b)c]+\frac{n}{b}(c-a).$$

虽然他没有给出该式的证明过程，但他为寻求该式的证明过程提供了一个方向. 他的"隙积术"在数学史上的意义，主要不在于给出了这个公式，而在于发展了自《九章算术》以来的等差级数问题的研究，构成了中国垛积术，即高阶等差级数研究的开端. 这种

研究一直持续到19世纪，并在此基础上产生了李善兰恒等式和“尖锥术”等优秀成果，“创始之功，断推沈氏”．“会圆术”，也载于《梦溪笔谈》卷18第4条．他从计算田亩出发，考察了圆弓形中弧、弦和矢之间的关系，提出了中国数学史上第一个由弦和矢的长度求弧长的比较简单实用的近似公式：

设l为弦长，h为矢长，r为半径，则弧长

$$s\approx l+\frac{h^2}{r},$$

其中$l=2\sqrt{r^2-(r-h)^2}$．虽然沈括没有写出证明过程，但其实这只是勾股定理的一个简单应用．“会圆术”后来被王恂用于天文学计算．倘若进一步考察“会圆术”，还有很深刻的极限思想，即在圆弧很小时，矢h很小，h^2便趋于零，则$s\approx l$，这个近似式反映了直与曲的极限情形的相互转化．然而，沈括并没有提到这些．“棋局都数”的计算，是涉及组合数学的问题．据说唐代张遂曾经计算过，但未留下记载．沈括认为，棋路多了则“非世间名数可能言之”．他从2路开始计算，直到7路：若棋盘是2路见方，有用4个棋子的位置，则可变出81局，即$3^4=81$；若棋盘是3路见方，有用9个棋子的位置，则可变出19683局，即$3^9=19683$；若棋盘是7路见方，则棋局总数无法用当时所有的大数名称表达．而中国围棋棋盘是19路见方，共有361个用子位置，棋局总数更是大得惊人．沈括研究出三种计算方法，求出了“棋局都数”．更重要的是，他在计算中用到了指数运算法则，即同底的幂相乘，等于底不变而指数相加．另外，在《梦溪笔谈》卷26以及《补笔谈》中记载了许多运筹学运用的例子，为后世研究中国运筹学的发展提供了宝贵的资料．沈括的学术成就，在世界科学技术史上也是罕见的．日本数学史家三上义夫曾赞道：“沈括这样的人物，在全世界数学史上找不到，惟有中国出了这样一个．我把沈括称为中国数学家的模范人物或理想人物，是很恰当的．”

谢察微（Xiè Cháwēi，约11世纪末）　中国宋代数学家．著有《谢察微算经》3卷，《谢察微发蒙算经》3卷，见《唐书》经籍志，《宋史・艺文志》．

张　祚（Zhāng Zuò，约1100年）　中国宋代数学家．注有《算法三元化零歌》1卷，见《宋史・艺文志》．

刘　益（Liú Yì，约12世纪）　中国宋代数学家．北宋时期人．曾著有《议古根源》，可参见程大位的《算法统宗》所附“元丰、绍兴、淳熙以来刊刻算书”书目．尽管刘益的这部著作现已失传，但杨辉从其中精选了22个问题编入自己的《田亩比类乘除捷法》一书．刘益的数学成就由此可见一斑．刘益在方程论方面有所突破，在他之前的方程，首项系数是正的而且等于1，而他首先打破了这个限制，考虑了首项系数不等于1，而且可正可负的一般方程，进而提出了相应的方程解法，即“正负开方术”．他还研究了4次方程，这在中国数学史上也是罕见的．在求解二次方程时，他使用了所谓“益积术”和“减从术”，在解4次方程时，采用了所谓“增乘开方法”．杨辉对刘益的成就评价很高，他在《算法通变本末》上卷中称：“刘称以勾股之术演段锁方，撰《议古根源》二百问带益隅开方，实冠前古．”在另一个地方杨辉又说，刘益“引用带纵开方正负损益之法，前古之所未闻”．

赵知微（Zhào Zhīwēi，约12世纪）　中国宋代数学家．1171年，他在重新修订金代杨级的《大明历》时，第一次用到了等间距三次内插法．过了100多年后，元代的王恂、郭守敬在编订《授时历》时，才再次用到等间距三次内插法公式．

鲍澣之（Bào Hànzhī，生卒年代不详）　中国宋代数学家．字仲祺，南宋处州人．1127年，北宋汴都陷于金兵，当时“秘阁图书，狼籍泥土”．鲍澣之视数学遂废于不忍，便留意传刻各种算经，先后于1200年、1212年、1213年刻印了《九章算术》、《数术记遗》、《周髀算经》等数学著作，为中国数学事业的继承与发展做出了贡献．

刘汝锴（Liú Rǔkǎi，约12、13世纪间）　中国宋代数学家．山西平水（现山西新绛县）人．著有《如积释锁》，其中采用了建立方程的所谓“天元术”，但现已失传，见祖颐《四元玉鉴》后序．

石信道（Shí Xìndào，约12、13世纪间）　中国宋代数学家．宋代末年鹿泉县人．据祖颐《四元玉鉴》后序称，石信道曾著有《钤经》，其中用到了“天元术”，它是较早采用“天元术”的数学著作之一．

中山子（Zhōng Shānzǐ，约12、13世纪间）　中国宋代数学家．青阳人．著有《算学通元九章》1卷，载于《通志・艺文略》．

杨云翼（Yáng Yúnyì，生卒年代不详）　中国金代数学家．字之美，其祖先为赞皇檀山人，后迁于平定乐平县．1195年登进士第一，曾任尚书．逝世时享年59岁．著有《勾股机要》和《象数杂说》，分别见卢文绍《补辽金元・艺文志》、钱大昕《补元史・艺文志》和《金史》．

秦九韶（Qín Jiǔsháo，1202？—1261）　中国金元时代数学家．字道古，一说生于1202年，一说生于1209年．自称鲁郡（现山东滋阳、曲阜一带）人．幼年，随父亲在巴州（四川）居住，后到临安（现杭州市）．在临安期间，他不但和朝廷的天文历法家、建筑师等人多有接触，而且“尝从隐君子受数学”．之后，再度跟父亲回到四川，先在乡里为义兵首，后任某县县尉．曾被推荐到南宋朝廷担任校对官，但未赴任，仍留在四川．1236年，蒙古军南下四川，他开始往东撤，曾在湖北等地做官，最后定居于湖州（现浙江吴

兴). 1244 年以通直郎为建康府(现南京市)通判，当年冬由于母亲去世，回到湖州守孝. 守孝期间，主要从事数学研究，1247 年写成《数学九章》9 卷. 1254 年左右，被任命为建康沿江制置司参议，不久又离职家居. 1258 年，到扬州经人推荐到琼州，为代理琼州守. 数月后被免职，又回到湖州. 之后，两次被推荐分别拟任司农寺丞、知临江军(现宁波市、南昌市)，但均未实现. 1260 年，由于受政治派系斗争失败的牵连，被贬到梅州(现广东梅县)做地方官. 1261 年在梅州逝世.

秦九韶的数学成就，主要在他于 1247 年完成的巨著《数书九章》中. 这部书内容丰富，精湛绝伦. 它不仅标志着当时中国数学发展到很高水平，而且也标志着中世纪世界数学的最高水平. 全书列算题 81 道，分为大衍、天时、田域、测望、赋役、钱谷、营建、军旅、市物等九类. 其中既有数学理论的研究成果，又有适应社会各种需要的数学应用问题. 在以下四个方面的成就尤为卓著：

1. "大衍求一术". 这是秦九韶在求解一次同余式组方面取得的杰出成就. 这类问题最早见于《孙子算经》卷下第 26 问："物不知数"题. 用现代的符号可以表示为求解一次同余式组：

$$\begin{cases} N \equiv 2 \pmod 3, \\ N \equiv 3 \pmod 5, \\ N \equiv 2 \pmod 7. \end{cases}$$

其解为 $N=70\times2+21\times3+15\times2-105\times2=23$. 如果推广到一般情形，设 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 为两两互素的除数，$r_1, r_2, \cdots, r_m$ 为余数，$M=P_1P_2\cdots P_m$，P 为一个整数，求解一次同余式组：

$$\begin{cases} N\equiv r_1 \pmod{P_1}, \\ N\equiv r_2 \pmod{P_2}, \\ \quad\cdots\cdots \\ N\equiv r_m \pmod{P_m}. \end{cases}$$

其解为

$$N=k_1\frac{M}{P_1}r_1+k_2\frac{M}{P_2}r2+\cdots+k_m\frac{M}{P_m}r_m-PM.$$

问题的关键在于使 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 分别满足：

$$(*)\begin{cases} k_1\dfrac{M}{P_1}\equiv 1 \pmod{P_1}, \\ k_2\dfrac{M}{P_2}\equiv 1 \pmod{P_2}, \\ \quad\cdots\cdots \\ k_m\dfrac{M}{P_m}\equiv 1 \pmod{P_m}. \end{cases}$$

若 $P_1, P_2, \cdots, P_m$ 不是两两互素，秦九韶能把它们化为互素的情形，只是计算步骤较繁琐. 他最主要的贡献是解决了 $k_1, k_2, \cdots, k_m$ 的具体求法. 由(*)可见，化为"余 1"至关重要，此法通称为"求一术". 又由于秦九韶研究过《易经》，他以"易象"中"大衍挂揲"之理，可用求一术说明，所以，他将求解一次同余式组的方法称为"大衍求一术". 在西方解决这类问题的理论是高斯(Gauss, C. F.)于 1801 年建立的，比秦九韶晚了 554 年. 因此，秦九韶的这一成就受到了世界数学史家的充分肯定，被誉为"中国剩余定理".

2. 高次方程数值解法. 秦九韶在《数书九章》中，集中国秦汉以来"开方术"之大成，运用贾宪提出的所谓"增乘开方法"，解决了数字高次方程有理数根和无理数根的近似值计算问题. 他所设计的演算程序，被称为"秦九韶方法". 在西方关于高次方程数值解法的探讨始于 19 世纪. 1804 年，意大利的鲁菲尼(Ruffini, P.)曾创立了一种逐步近似法解决数学高次方程无理根的近似值问题. 1819 年，英国的霍纳(Horner, W. G.)提出了与"增乘开方法"演算步骤相同的算法，这比秦九韶要迟五六百年.

3. 线性方程组解法. 秦九韶在《数书九章》中，解决了许多相当于解线性方程组的问题，其中数字都很大，计算很复杂. 虽然《九章算术》中也有"方程术"，但有术而无演草. 秦九韶在"均货推本"题草中，完整保留了消元步骤，计图 15 幅. 从"首图"，即方程组增广矩阵，经过 14 次初等变换，最后获得"终图"，这时系数矩阵已变换为单位矩阵，从而解出方程组的一组解. 全过程井然有序，完全合乎现代数学应尽章法. 在西方这种方法是由高斯首创，被称为高斯消元法，其实比中国要晚得多.

4. "三斜求积". 秦九韶在《数学九章》中针对三边分别为 13, 14, 15 时，求出了三角形面积. 他的方法具有一般性，若设 a, b, c 为三边，S 为三角形面积，则可有下列公式：

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]}.$$

这与求三角形面积的海伦公式是等价的. 由于秦九韶的数学成就卓著，国内外许多专家、学者对秦九韶给予了高度的评价. 美国科学史家萨顿评价秦九韶是"他那个民族，他那个时代，并且确实也是所有时代最伟大的数学家之一".

杨　辉(Yáng Huī，约 13 世纪后期)　中国金元时代数学家、数学教育家. 字谦光，他的生平事迹，没有确切的史料记载. 据有关著述中的文字推测，他可能生活在南宋时期的钱塘(现杭州市)一带，曾担任过地方官吏，到过台州(现浙江临海县)、苏州，是当时有名的数学家和数学教育家. 他每到一地，都有人前来请教数学问题.

杨辉编撰的数学著作很多，虽经散佚，但流传至今的还有多种，共计 5 种 21 卷：《详解九章算法》12 卷(1261 年)、《日用算法》2 卷(1206 年)、《乘除通变

本末》3卷(1274年)、《田亩比类乘除捷法》2卷(1275年)、《续古摘奇算法》2卷(1275年).后三种是杨辉后期的著作,一般称之为《杨辉算法》.在继承古代数学方面,他广征博引数学典籍,除汉唐以来的"算经十书"之外,还引用了宋代的许多算书,而且这些算书现已失传,幸得杨辉引用,后人才得知其只鳞片爪,其中,刘益的"正负开方术"、贾宪的"增乘开方法"与"开方作法本源"图,就是极其宝贵的数学史料.也正因为他的《详解九章算法》中,载有"开方作法本源"图,人们一直称之为"杨辉三角".关于高阶等差级数,他继沈括研究"隙积术"之后,研究了所谓"垛积术".他在《详解九章算法》中,把《九章算术》中的方锥、方亭、刍甍、刍童、鳖臑等5种求体积的方法,变通成5种垛积术:

1."四隅垛",即"正方锥形".
2."方垛",即"正方台形".
3."刍甍垛",即"长方楔形".
4."刍童垛",即"长方垛".
5."三角垛",即"正三角锥形".

关于纵横图,即现代所谓"幻方",秦以前称为"九宫",唐以后称"洛书",杨辉创"纵横图"之名.他在《续古摘奇算法》上卷作纵横图13幅,其中有"洛书数"、"四四图"、"五五图"、"六六图"、"七七图"、"六十四图"、"九九图"和"百子图",即三阶至十阶幻方.另外,还录有聚五、聚六、聚八、攒九、八阵、连环诸图,属于纵横图的衍化发展.他还略述了某些纵横图的构造方法,说明他对纵横图构成规律已有所发现.在杨辉之前中国尚无这方面的研究成果,在此之后,明、清两代中国数学家关于纵横图的研究相继不绝.因此杨辉的著述也是关于幻方乃至组合数学历史研究的珍贵资料.关于改进计算技术,杨辉主张广泛采用以加减代乘除,以归除代商除,化乘(除)数的首位为一等民间习用的简捷算法,并加以推广,创造出新的乘除捷法.他提出"相乘六法",其要点在于尽可能化多位数的相乘为一位数的连乘,化乘法运算为加、减法运算,将古代乘法的上、中、下三层运算,变在一个横行里进行.他得到"乘算加法五术"和"除算减法四术",这是他进一步发展唐、宋相传的求一算法的成果,也就是将乘、除数的首位化为1,以便于用加减法代乘除法.另外,他在《乘除通变本末》中卷,即《乘除通变算宝》中引《九归新括》口诀32句,将其分为"归数求成十"、"归数自上加"、"半而为五计"三类,使所谓"增成法"进入一个新阶段.在此基础上,逐步发展成为"归除法",在珠算中行用至今.

杨辉不仅是中国数学史上一位著述甚丰的数学家,而且更是一位杰出的数学教育家.他特别注重数学的普及教育,他的许多著作都是为此而编写的教科书.杨辉主张在数学教育中贯彻理论联系实际的思想.在《日用算法》中,他说:"以乘除加减为法,称斗尺田为问;用法必载源流,命题须责实用."在数学方法上,他主张循序渐进的原则.在《算法通变本末》中,他专门为初学者制订了"习算纲目".在学习方法上,他提倡要抓住要领,反复练习.他认为,要"将九章纂类消详,庶知用算门例",才能穷尽"九章之义".他曾说:"夫学算者,题从法取,法将题验,凡欲明一法,必设一题."又说:"题繁难见法理,定撰小题验法理,义既通虽用繁题了然可见也."可见,他还强调习题应有典型性.杨辉治学严谨,教学一丝不苟,他的这些教育思想和教学方法,也是留给后世的珍贵遗产.

李　冶(Lǐ Yě,1192—1279)　中国金元时代数学家.原名李治,字仁卿,号敬斋,1192年生于金元时期的真定栾城(现河北栾城).少年时,李冶曾在元氏(现河北元氏)求学,1230年到洛阳应试,考中了"词赋进士",随后到河南钧州(现河南禹县)任知州,1232年,蒙古军攻钧州,李冶改装北渡黄河.1234年,金朝灭亡,他流落隐居在崞山桐川(现山西北部),1248年写成《测圆海镜》12卷.1251年又回到元氏,隐居于封龙山,一面进行数学研究,一面收徒讲学.当时他与元好问、张德辉二人友善,号称"龙山三友".1259年写成《益古演段》3卷.1261年,元世祖忽必烈下诏,请李冶做官,因为李冶曾提出"治天下"、"协人意"的政治见解,但是李冶以老病恳求回山.1265年由王鹗荐他去当"翰林学士",并同修辽金二史.一年之后,李冶又告病辞去,仍然回到封龙山隐居.1279年,他在家中逝世.

李冶对数学的贡献,主要在所谓"天元术"方面.天元术是中国古代数学中的一项主要成就,是一种列方程的方法.起初,每一项用一个字表示,很不灵便.李冶在他的得意之作《测圆海镜》和《益古演段》中,对天元术进行了改进与总结,使天元术成为简捷的固定形式.他的这两部著作辗转流传到了现在,成为中国古代数学的珍品.李冶改用一个"元"或"太"字表示一次项或常数项.在一个等式中用"元"不用"太",用"太"不用"元".在《测圆海镜》中由高次幂向低次幂上下排列,而《益古演段》中的次序刚好颠倒过来了."元"或"太"都写在一次项或常数项之旁.如:《测圆海镜》中的天元式为

						丨	
				川	三	丅	
			三	丨	亖	川丨	元
川	三	丌	亖	川	二	○	

相当于方程

$$x^3+336x^2+4184x+2488320=0.$$

而《益古演段》中的筹式

三 T ○ ○
| 二 ○ 元

相当于方程　$120x+3600=0$.

另外，他还用“加斜划”来表示负数项. 如：《测圆

||
一 ⊬ ○ ○
三 T ○ ○ ○ ○ 元

海镜》中筹式相当于方程 $2x^2-1200x+360000=0$.

李冶列天元式的步骤与现代列方程是一样的，首先“立天元一”，再依题意列出两个相等的“天元式”，“相消”后，便得“开方式”即所求方程式. 天元术在元代后期至清代初年几乎失传，正是由于李冶的《测圆海镜》和《益古演段》这两部著作流传下来，才使天元术重显于世. 在几何问题与天元术的应用上，李冶在《测圆海镜》中提出了六七百条几何命题，其中有 170 条属于勾股容圆问题，是所谓“洞渊九容之说”的发展，内容大体上都是求三角形内各种条件下容圆的直径，以及研究勾、股、弦及其和、差之间的关系. 在《益古演段》中共收入 64 道题，大都是各种平面图形之间的面积关系问题，每道题都是用“天元术”和“演段术”两种方法求解. 先用“天元术”解出来，再用“演段术”即等积变换说明问题的图解，使人们更容易理解. 对于这些问题，通常可用除法或开平方法求解，而用天元术列二次方程求解，则以《益古演段》为首创.

李冶不仅是数学家，还是一位精于文史的学者，著有《敬斋古今黈》40 卷、《泛说》40 卷、《文集》40 卷、《壁书丛削》12 卷，后三种书已失传.

元　裕（Yuán Yù，约 12、13 世纪间）　中国元代数学家. 山西翼城县人. 元世祖曾访人才，张德辉曾推荐元裕与李冶二人. 元裕晚年曾与张德辉、李冶游封龙山，时人称为“龙山三老”. 他曾为刘汝锴的《如积释锁》作过细草演算，采用了天元术，他是中国数学史上较早使用天元术的人之一，以后由李冶改进，并总结了这种方法.

郭　荣（Guō Róng，生卒年代不详）　中国元代数学家. 号鸳水. 他是郭守敬的祖父，精于算数，善于水利，曾与当时学者刘秉忠、张文谦、张易、王恂等同游于州西紫金山，对郭守敬的影响很大，见《元史》郭守敬传.

郭守敬（Guō Shǒujìng，1231—1316）　中国元代天文学家、数学家. 字若思，邢台人. 由于父亲早年去世，他从小跟着祖父长大. 祖父郭荣，学识广博，对他亲自管教，郭守敬从小也就养成了志于学而笃于行的良好习尚. 不到 20 岁，郭守敬与王恂从师刘秉忠在邢台县西南 140 里的紫金山研习天文、历法和数学，历时 3 年. 1262 年由张文谦推荐，郭守敬进入元代朝廷. 起初担任主管水利的官职，1276 年，元世祖忽必烈在刘秉忠倡导下改革历法，建立新天文台，于是王恂、郭守敬受命担当此任，并设立太史局，1279 年改为太史院. 在王恂、郭守敬主持下，在大都建成了一座规模宏大的天文台，足以与马拉加天文台媲美. 郭守敬设计制造了近 20 种先进的天文仪器，进行了大规模的天文观测. 在王恂、郭守敬的通力协作之下，1280 年编制了著名的《授时历》，1281 年正式颁行《授时历》后不久，王恂病逝. 而当时《授时历》的推步法则和各种表格尚未最后审定好，此后郭守敬便独立承担了这些工作.

《授时历》除了具有重要的天文学价值以外，在数学方面也取得了卓越的成就：

1. 郭守敬等应用了等间距三次内插法，推算太阳逐日运行的速度以及它在黄道上的经度，还推算月球在近地点周内逐日运行的速度. 这比欧洲要早将近 400 年，而且这种高次内插法，为后来高阶等差数列的研究奠定了基础.

2. 郭守敬等多次反复应用沈括的“会圆术”，并配合使用相似三角形各线段间的比例关系，从而在推算“赤道积度”、“赤道内外度”方面创立了一种新的方法，实现了黄道坐标到赤道坐标的换算. 这解决了中国历代天文学家未能解决的问题，而且从数学意义上讲，这种新的方法相当于开辟了通往球面三角法的途径.

此外，郭守敬多才多艺，他在大地测量、机械制造、仪器制作、农田水利、河道工程等其他方面都取得了成就，达到了相当高的水平，而且在《授时历》编成以后，他曾致力于著书，先后撰成书稿 10 多种，计 100 多卷，可惜这些书籍均已失传.

王　恂（Wáng Xún，1235—1281）　中国元代数学家. 字敬甫，1235 年生于元代中山唐县. 幼年时，他极为聪颖，13 岁就学了《九章算术》，并全部精通. 元代忽必烈时代有一位开国功臣刘秉忠，曾任邢台节度使府令史，1249 年北上途经中山时，听说王恂很有才华. 待他南下时，王恂从师刘秉忠于邢台县西南 140 里的紫金山学习天文历算. 1253 年经刘秉忠介绍，王恂做了太子伴读，1261 年为太子赞善，后升任国子监祭酒. 1261 年，忽必烈在刘秉忠的倡导下改革历法，王恂与郭守敬担当了此任，并设立太史局，1279 年改为太史院，王恂被任命为太史令. 在王恂、郭守敬等人的领导下，1280 年编成了历史上著名的《授时历》，1281 年《授时历》正式颁行后不久，王恂因病逝世，年仅 47 岁.

在编制《授时历》过程中，王恂由于“以算术冠一时”，故由他负责计算工作. 他应用沈括的“会圆术”，推算了“赤道积度”、“赤道内外度”，他至少得知从冬至到春分太阳运行了 88.91 日，即走完了一个象限，约 91.31 度. 他还推出一些关系式，相当于在数学上开辟出通往球面三角的途径. 由于“会圆术”的误差和圆周率取值为 3，结果便不甚精确，所以此法未能继续发展起来. 在《授时历》中，采用高次内插法也是一项杰出的数学成就，为后来高阶等差级数在中国的研究奠定了基础. 虽然《授时历》的推算法则和各种表格在王恂逝世时尚未最后审定好，后来由郭守敬独立地完成，但是对王恂的功绩，人们仍然极为推崇. 廷祐 2 年，即 1315 年，王恂被追赠“定国公”荣誉，谥号“文肃”.

赵友钦(Zhào Yǒuqīu，生卒年代不详)　中国元代科学家. 字子公，或子恭，又字敬夫，鄱阳人，另一说为饶之德兴人(见柯劭忞《新元史》卷 34，志第 1；卷 241，列传 138，“赵友钦”条). 世称缘督先生，他的生活年代大致稍晚于郭守敬. 他在光学、天文学和数学方面都进行过研究，曾著有《革象新书》5 卷. 现传本是修《四库全书》时，从《永乐大典》中抄出来的，还有王炜的删节本《重修革象新书》.

在《革象新书》第 5 卷“乾象周髀”中记载了赵友钦关于圆周率的研究. 他的研究有两个特点：

1. 他从周天直径的计算开始讨论，分析了历代圆周率的近似值，并提出从圆内接正四边形起算圆周率的方法，获得的近似值为 3.141592，验证了祖冲之密率的精确性；他娴熟地应用半圆内圆周角为直角这一命题，计算倍增边数后的圆内接正多边形的边长，直至 12 次增边为 16384 边形的边长.

2. 在他的计算中可以看出他对极限有一定的认识，他认为“其初之小方，渐加渐展，渐满渐实，角数愈多而其为方者不复为方而为圆矣. 故自一、二次求之以至一十二次，可谓极其精密，若节节求之，虽至千万次，其数终不穷”. 可以说，赵友钦研究圆周率的算法与刘徽略有不同，刘徽从圆内接正六边形起算，而赵友钦的极限思想更是刘徽极限思想的继续和发展. 但是，赵友钦所讨论的只是圆内接多边形，所求圆周率应是不足近似值，而他在“乾象周髀”之首所列出的：赤道周天 365.2575，中径 116.2651，是按 π 取 355/113 入算的，这是一个过剩近似值，他却没有能够指出来.

沙克什(Shā Kèshí，1278—1351)　又名瞻思. 中国元代数学家. 他将北宋人沈立所著《河防通议》一书的多种版本，合而为一，并加以补充，于 1321 年重订成《河防通议》2 卷，其中有一部分专门讲述算法，除了一般算术问题和简单的几何问题之外，用天元术解题的方法很有价值. 他列方程的步骤与李冶的完全一致，他曾在李冶的家乡居住过，可能间接受到李冶思想方法的影响.

刘大鉴(Liú Dàjiàn，约 13 世纪)　中国元代数学家. 字润夫，他是霍山邢颂不的高足，编有《乾坤括囊》一书，其中有“人元二问”，即在过去建立方程时所采用的天元与地元之外，又加上“人元”，扩充到三个未知数的情形来研究方程的建立，为以后朱世杰“四元术”的完成，打下了基础.

朱世杰(Zhū Shìjié，13、14 世纪间)　中国元代数学家. 字汉卿，号松庭，他生活在 13、14 世纪间的元朝，关于他的生平事迹，目前只有莫若和祖颐为《四元玉鉴》所作的序文以及其他零星文字提供了一些不完整的资料. 他曾寓居燕京(现北京附近)，精通《九章算术》，“旁通诸术”. 到 1303 年时，他已“以数学名家周游湖海 20 余年矣，四方之来学者日众”. “复游广陵(现江苏扬州市)，踵门而学者云集”. 可见他是以数学研究和数学教育为职业的数学家和数学教育家.

朱世杰全面继承了宋、元以来秦九韶、李冶、杨辉的数学成就和各种实用算法，并创造性地予以了发展，分别于 1299 年、1303 年写出两部数学名著《算学启蒙》和《四元玉鉴》.《算学启蒙》是一部算学入门书，全书 3 卷，共 20 门 259 问. 书首列有一个“总括”，包含乘除口诀等预备知识. 书的内容包括乘除、面积、体积、垛积、盈不足、差分、方程等，最后一门是“开方释锁”即“天元术”. 该书由浅入深，确属算学启蒙之书.《四元玉鉴》是论垛积术与四元术的杰作，全书 3 卷，包括卷上之前“四象细草”10 问，共分 24 门 288 问. 在这两部著作中，朱世杰取得了垛积术、内插法与四元术等三项重大成果. 关于垛积术与内插法，朱世杰在《四元玉鉴》卷中“菱草形段”、“如象招数”和卷下“果垛迭藏”这三门中，集中地记述了垛积术和内插法方面的问题. 他主要给出了三角垛和四角垛这两个基本的垛积系统，以及由此产生的岚峰垛系统和四角岚峰垛，其中有

$$\begin{aligned}&\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{(p+1)!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p)\\=&\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{(p+1)!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p)\\&+\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p!}r(r+1)(r+2)\cdots(r+p-1).\end{aligned}$$

这个三角垛系统具有非常重要的性质，中国古代垛积术中的许多成果都可根据这个性质导出. 他所给出的三角垛系统以及它的这个性质与贾宪三角有密切的关系. 进一步，朱世杰利用三角垛的结果建立了四次内插公式：

$$f(n)=n\triangle^{1}+\frac{1}{2!}(n-1)n\triangle^{2}$$

$$+\frac{1}{3!}(n-2)(n-1)n\triangle^3$$
$$+\frac{1}{4!}(n-3)(n-2)(n-1)n\triangle^4,$$

其中$\triangle^1$、$\triangle^2$、$\triangle^3$、$\triangle^4$分别称为上差、二差、三差、下差. 在《四元玉鉴》中,还有二次和三次的内插公式. 这些公式的建立都是各差乘各积,然后相并,与四次内插公式结构相同. 由此可以认为,朱世杰能够推导出一般的内插公式. 在西方,用这样的方法处理级数问题,出现在17世纪,如莱布尼茨(Leibniz, G. W.)于1673年提到用差分方法处理自然数立方和问题,并指出这个发现归功于法国的穆顿(Mouton, G.). 但这比朱世杰的成果晚了300多年. 关于四元术,这是在天元术和正负开方术的基础上,发展起来的一种四元高次方程组的布列和求解法. 目前只能从朱世杰的《四元玉鉴》中了解四元术的具体内容. 对于高次方程组,朱世杰给出一种固定的记法,这种记法显然是在天元式记法的基础上发展起来的. 求解四元高次方程组的四元术,最精彩的是所谓"相消"法,即由该方程组经过变形得到一个一元的高次方程. 其主要步骤是"剔而消元"、"互隐通分相消"、"内外相消"这三步,但是只有第三步留下了记载. 朱世杰的相消法是中国数学史上一项杰出的成就,在西方,由方程$f(x,y)=0$,$g(x,y)=0$消去一个未知量的方法是法国的贝祖(Bezout, E.)于1764年给出初步方案,1779年在《代数方程的一般理论》中才正式发表. 这比朱世杰已晚了400多年. 另外,朱世杰在他的著作中还提出了许多值得注意的结果,诸如在中国数学史上,他第一次正式提出了正负数乘法的正确法则;在《算学启蒙》中的"九归除法"口诀与现代流传的珠算归除口诀几乎完全一致;他对球体表面积的计算的探讨是中国古代数学典籍中惟一的,虽然结论不很正确,但他的创新精神仍是可贵的.《算学启蒙》曾传入朝鲜.

何平子(Hé Píngzǐ,约13、14世纪间) 中国元代数学家. 元代末年人. 曾与安止斋合著《详明算法》,这是当时口诀化的数学代表著作之一. 这部书有1373年的朝鲜重刻本,也被收入1406年完成的《永乐大典》.

刘 谨(Liú Jǐn,1300年左右) 中国元代数学家. 字公谨,江西安福人. 著有《律吕成书》,其中将小数的整数部分与小数部分分别写在上下错开的两行上,这是世界上最早的小数表示法. 比西方的施泰文(Stevīn, S.)早200多年,比卡西(al-Kāshī)也要早100多年.

祖 颐(Zǔ Yí,约14世纪初) 中国元代数学家. 1303年,他与临川、莫若为朱世杰的《四元玉鉴》作了序,临川、莫若的序在书前,他的序文在书后. 他们的序文不仅评述了朱世杰的工作,而且提供了关于朱世杰生平的历史资料. 在祖颐的后序中还谈到天元术到四元术的发展历史,提到许多其他数学家的著作,可惜的是他所提到的著作大多失传了.

贾 亨(Jiǎ Hēng,约14世纪) 中国元代数学家. 元代末年人. 著有《算法全能集》2卷,这是用歌诀形式表达数学问题及其解法的著作,能增加读者的兴趣,便于读者记忆.

布顿·仁钦珠巴(Bùdùn Rénqīn Zhūbā,约14世纪) 中国元代数学家. 藏族人. 1323年著有《旦孜》,1327年著有《算学知者喜欢》.

陈尚德(Chén Shàngdé,生卒年代不详) 中国元代数学家. 著有《石塘算书》4卷.

安止斋(An Zhǐzhāi,生卒年代不详) 中国元代数学家. 曾与何平子同著《详明算法》.

丁 巨(Dīng Jù,14世纪后半叶) 中国元代数学家. 1355年著有《丁巨算法》8卷,这是一部与商业有关的算题书,共有27道题,其中包括方求圆、圆求方、平面求周、外圆求积、立圆求径、立方求圆、见斜求方、见方求斜等算法,均被收入《永乐大典》. 他还用歌谣、口诀式的语言来表达数学问题,以增加兴趣,便于记忆. 在中国,从朱世杰到程大位之间的3个世纪,没有多少重要的数学创造,而《丁巨算法》以及严恭的《通原算法》(1372年)还是有一定影响的数学著作.

严 恭(Yán Gōng,约14世纪) 中国明代数学家. 姑苏人. 他自幼爱好数学,钻研古代典籍,"读之以明其理". 后来做了官,工作之余又钻研数学问题,其数学水平"益致其精",1372年出版了《通原算法》1卷,内附有极不完全解答的不定方程问题. 此书也收入1406年完成的《永乐大典》.

郭伯玉(Guō Bóyù,约14世纪) 中国明代数学家. 明代初年人. 他精通九数之理,善于历算,见《明史》历志.

刘仕隆(Liú Shìlóng,约14、15世纪间) 中国明代数学家. 临江人. 著有《九章通明算法》(1424年),其中有诗歌、口诀式的算法与应用问题. 这样可以增加读者的趣味感,便于读者记忆.

夏源泽(Xià Yuánzé,约15世纪) 中国明代数学家. 江宁人. 1439年著有《指明算法》2卷,见程大位《算法统宗》附《算经源流》.

吴 敬(Wú Jìng,约15世纪) 中国明代数学家. 字信民,号主一翁,浙江仁和(现杭州)人. 曾几次任浙江布政使司的幕府,掌管全省田赋、税收的会计工作. 当时许多人向他请教各种数学问题,这些问题成为他数学研究的重要内容. 他经过10多年的整理、研究,于1450年著成《九章算法比类大全》10卷. 书成之时,他已年老目昏,由何均、自警书录成

帙，金台、王均、士杰为之传刻行世. 初版刻成后，版毁于火，十存其六，吴敬长嗣怡庵处士，命其季子重加编校而印行.

吴敬的《九章算法比类大全》第一卷之前有首卷，列举了大数记法、小数记法、度量衡单位，以及乘除法中用字的含意、整数与分数的四则运算等. 第一卷到第九卷是 1000 多个应用题的解法汇编，题型分类与《九章算术》各章题名一样. 各卷开始几问主要是引自杨辉的《详解九章算法》、刘徽的《海岛算经》和王孝通的《缉古算术》中的所谓"古问"，接着是结合当时生产、生活实践的应用题，称为"比类". 第十卷专论"开方"，涉及开平方、开立方、开高次幂、开带从平方与开带从立方. 吴敬的《九章算法比类大全》中的算题，涉及商业的问题较多. 此书之后，1478 年，意大利的特雷维沙也出版了第一本西方商业数学书，其中许多算法、名称都与吴敬的书相似，但两者并无因袭关系，可见资本主义萌芽前一个时期商业经济反映到数学中来，东、西方是一样的.

金来朋（Jīn Láipéng，生卒年代不详） 中国明代数学家. 金台人，于 1450—1458 年间，著有《启蒙算法》.

许　荣（Xǔ Róng，约 15 世纪） 中国明代数学家. 金陵人. 著有《九章详注算法》9 卷（1478 年），见程大位的《算法统宗》卷 13，以及《增删算法统宗》卷首.

杨　廉（Yáng Lián，约 15 世纪） 中国明代数学家. 字方震，丰城人. 1478 年中进士. 著有《缀算举例》1 卷，见清代四明范氏《天一阁藏书目录》；还著有《数学图诀发明》1 卷，见清代黄虞稷《千顷堂书目》.

余　进（Yú Jìn，约 15 世纪） 中国明代数学家. 鄱阳人. 1483 年著有《九章详通算法》，它取材于何平子的《详明算法》和刘仕隆的《通明算法》，见程大位的《算法统宗》卷 13，以及《增删算法统宗》卷首.

顾应祥（Gù Yìngxiáng，1483—1565） 中国明代数学家. 字箬溪，吴兴人. 他自幼爱好数学，在没有师长指导的情况下，读了《周髀算经》及《四元玉鉴》等各种数学书籍，常常彻夜研习，久而久之，"若有神告之者，遂尽得其求". 他著有《勾股算术》2 卷（1533 年）、《测圆海镜分类释术》10 卷（1550 年）、《弧矢算术》（1552 年）、《测圆算术》4 卷（1553 年）等. 但是，他对李冶的"立天元一"不理解，以为"漫无下手之处". 可见明代数学家并没有继承宋、元两代的学术遗产.

唐顺之（Táng Shùnzhī，1497—1551） 中国明代数学家. 字应德，号荆川，江苏武进人. 他博览群书，学识广博，1529 年会试第一名，曾任右佥都御史. 1551 年逝世于通州. 唐顺之的数学论著曾被周述学、程大位引用，其中主要有：《勾股测望论》、《勾股容方圆论》、《弧矢论》、《分法论》、《六分论》等. 然而，像唐顺之这样的数学名家，对李冶《测圆海镜》中的"立天之术"却一无所知，可见从元代中到明代，中国数学发展出现了断层现象，没有发展宋、元时代的学术思想.

陈邦称（Chén Bāngchèng，约 16 世纪） 中国明代数学家. 广西全州人，1514 年中进士. 著有《算集》一书，见《粤西文》载.

王文素（Wáng Wénsù，约 16 世纪） 中国明代数学家. 本人是商人，著有《算学宝鉴》（1524 年），这是一本结合社会需要的商业方面的算术书（书中含有珠算的内容）. 他与程大位有相似之处，比程大位稍早一些时间. 他们都将数的起源归于河图、洛书的思想，有唯心主义的色彩.

马　杰（Mǎ Jié，约 16 世纪） 中国明代数学家. 河间吴桥人. 著有《改正算法》（1526 年），为修改吴敬《九章算法比类大全》中的错误而作，并提出"今予辨明，图释参较，免误后学".

郑高升（Zhèng Gāoshēng，约 16 世纪） 中国明代数学家. 福山人. 于 1526 年著有《启蒙发明算法》，见程大位《算法统宗》附《算经源流》.

张　爵（Zhāng Jué，约 16 世纪） 中国明代数学家. 嘉靖金台人. 程大位的《算法统宗》所附《算经流源》、《正明算法》（1539 年）为张爵所著.

陈必智（Chén Bìzhì，约 16 世纪） 中国明代数学家. 江西宁都人. 1540 年著有《算理明解》，见程大位《算法统宗》卷 13 以及《增删算法统宗》卷首.

林　高（Lín Gāo，约 16 世纪） 中国明代数学家. 浙东会稽人. 1540 年著有《重明算法》与《订正算法》，见程大位《算法统宗》卷十三.

周述学（Zhōu Shùxué，约 16 世纪） 中国明代数学家. 字继志，号云渊子，浙江山阴人. 生活在嘉靖（1522—1566）年间，他读书好深湛之思，尤精于数算历学. 当地地方官仇鸾、胡宗宪想招他为官，但他拒而不受，终身为民. 1558 年他著有《神道大编历宗算会》15 卷，此书湮没将近 300 年之久. 前江南图书馆藏有《神道大编历宗算会》八册：第一册卷 1：入算；卷 2：子母分法；第二册卷 3：勾股；第三册卷 4：开方；卷 5：立方；卷 6：平圆；第四册卷 7：弧矢经补上；卷 8：弧矢经补下；第五册卷 9：分法互分；第六册卷 10：总分；卷 11：各分；第七册卷 12：积法；第八册卷 13：立积；卷 14：隙积，算会圣贤姓氏；卷 15：歌诀. 书中对开方弧矢有详细论述，是这一著作的一大特色，而且书中的附图也是独出心裁.

杨　溥（Yáng Pǔ，约 16 世纪） 中国明代数学家. 宛陵太邑人. 1572 年著有《算林拔萃》，载于程大

位《算法统宗》一书的附录《算经源流》内.

徐心鲁(Xú Xīnlǔ,约 16 世纪) 中国明代数学家. 1573 年著有《盘珠算法》,这是程大位《算法统宗》之前论述珠算的著作之一.

柯尚迁(Kē Shàngqiān,约 16 世纪) 中国明代数学家. 字乔可,号阳石山人,长乐人. 曾任邢台县丞. 著有《数学通轨》(1578 年),这是程大位《算法统宗》之前论述算盘的著作之一.

程大位(Chéng Dàwèi,1533—1606) 中国明代数学家. 字汝思,号宾渠,安徽休宁人. 少年时,读书广博,对文字学和数学尤感兴趣. 20 岁以后在长江中下游一带经商,他随时留心收集古代与当代的数学书籍,注意数学研究.

程大位在中国数学史上突出的贡献是在他 60 岁那年,即 1592 年,"举平生师友之所讲求,咨询之所独得者",著成《直指算法统宗》17 卷. 正如他在自序中所说,这部书是"参合诸家之说,附以一得之愚,纂集成编". 书中有 595 道数学题,大多是从传统数学书中摘录而来,但解题时必需的数学计算都在珠算盘里进行演算,与用筹算的传统数学书又有所不同. 全书通俗易懂,详略得当. 当然,在吸取各家算法的精华时,也接受了一些错误的见解. 尽管如此,这部书在明代末年仍是一部较为完备的应用算术书. 出版后不久,就以压倒其他同类型算术书的优势,在国内外广泛地流传. 时至清代康熙五十五年,即 1716 年,他的族孙程世绥又翻刻了这部书,并在序中指出:"风行宇内,迄今盖已百有数十余年. 海内握算持筹之士,莫不家藏一编,若业制举者之于四子书,五经义,翕然奉以为宗."而且清代编的《古今图书集成》全文辑录了这部著作,清末各地书坊也纷纷出版了各种翻印本、改编本,长时间以来成为学习珠算的入门书. 书末附有一篇《算经源流》,记载了宋、元以来数学书 51 种之多,其中大部分失传,所以这一附录也成为宝贵的数学史资料.

余 楷(Yú Kǎi,约 16 世纪) 中国明代数学家. 银邑人. 1584 年著有《一鸿算法》,见程大位的《算法统宗》卷 13.

邢云路(Xíng Yúnlù,约 16 世纪) 中国明代数学家. 字士登,安肃人. 1580 年中进士,曾任陕西按察司副使. 著有《古今律历考》72 卷,所定圆周率为 3.126及 3.121 3034,不甚准确.

朱元浚(Zhū Yuánjùn,约 16 世纪) 中国明代数学家. 新安人. 他于 1588 年著有《庸章算法》,见程大位《算法统宗》卷 13 及《增删算法统宗》卷首.

朱载堉(Zhū Zǎiyù,1536—1595) 中国明代数学家. 字伯勤,号句曲山人. 他于 1536 年出生,是朱厚烷的儿子,也是明代第四代皇帝昭帝的后裔,所以人仍称他为"王子朱载堉". 他的父亲精通数学、天文. 当他父亲被贬之后,朱载堉隐居土屋 19 年,以示孝顺. 其间,他继承父业,从事数学、历法和音乐理论方面的研究,其成果陆续刊印,并最后汇编成全集. 他于 1595 年(一说 1614 年)逝世.

朱载堉对人类最主要的贡献是发现了将音阶调谐成相等音程的数学方法,即求解所谓"十二平均律"的方法. 他就弦线求得这个平均律,极其简单地将第一弦的长度除以 $\sqrt[12]{2}$ 而得到第二音的弦长,然后以同样的方法求得第三音,依此类推,直到求得一个完全八度的第 13 音为止. 比利时数学家兼军事工程师施泰文在西方音乐理论上也第一次提出了以 $\sqrt[12]{2}$ 作为平均律的数学公式,他在荷兰对此进行了研究和推理. 从年代上讲,毫无疑问,朱载堉是第一个在 1584 年提出了一个九位数十二平均律的各律音高数值,而施泰文的各律音高和计算方法的叙述较后才问世,少则迟 1 年,多则要迟 24 年,而且朱载堉还把这个平均律应用到律管上. 但是,朱载堉在 1584 年没有对平均律作出更深入的数学或理论的解说,只是一种数学演算;而施泰文虽然数值计算稍欠精确,但他把平均律定义为两项之间的等比级数,把半音当作 2 的第 12 次方根计算,并把 12 律的音高当作第 12 次方根的 12 次累乘方,这又比朱载堉的研究更科学. 可以说,他们两位学者的算法都是演算程序,不仅取得了音乐声学方面的成果,而且获得了应用数学方面的成就. 朱载堉的研究成果,著成《律学新说》(1584 年)、《律吕精义》(1595 年),后汇编成《乐律全书》;还著有《算学新说》(1603 年出版),附《周经篇》、《嘉量算经》3 卷(1610 年出版),以及《圣寿万年历》等,他将圆周率取为 $\sqrt{2}/0.45$.

由于朱载堉的著述将数学知识、历法科学知识和音律理论糅合在一起进行学术研究,所以国内外的学者交口赞誉他为数学家、天算家和音乐理论家.

徐光启(Xú Guāngqǐ,1562—1633) 中国明代科学家. 字子先,号玄扈. 1562 年 4 月 24 日生于上海一个商人兼小地主家庭. 但他出生后不久,家道衰落. 青年时曾到广东、广西等地以教书为生. 曾七次回乡应试,直到 1597 年方以第一名考中举人,七年后中进士. 先在翰林院、詹事府和礼部任职,1629 年以后,历任礼部左侍郎、尚书和内阁大学士. 1633 年 11 月 8 日逝世.

徐光启虽多次担任官职,但却一直热心于实用自然科学的研究. 他一生勤奋读书,治学严谨. 1603 年在南京结识了意大利传教士利玛窦(Ricci,M.)等人,开始接触到西方先进的科学技术,他一边学习和引进西方科学技术,一边将中西科学融会贯通在一起. 因此,无论在中国传统科学,还是传入的西方科学方面,他都有较深的造诣. 他写了大量的著作,涉

及面很广，最主要的在农业、天文和数学等方面.在数学方面，他最突出的贡献是与利玛窦共同翻译了欧几里得(Euclid)的《几何原本》前6卷，大约在1606年秋到1607年春完成译稿.这是在中国引进西方数学的创始之举.他在没有成规可循的情况下，创造了许多数学专门概念的汉字译名，如几何、点、线、面、平行线、钝角、锐角、三角形、四边形等，都非常贴切，至今仍在沿用.250年后，清代李善兰与英国人伟烈亚力(Wylie,A.)才续译了《几何原本》后9卷.此外，1631年，他还与利玛窦合译了《测量法义》1卷，并附自撰的《测量异同》和《勾股义》1卷.他比较了中西测量方法和数学方法，运用了《几何原本》中的定理把中国古代已有的证明方法严格化，并创造了一些新的证明系统，这也是西方三角学和测量术输入中国的开始.在天文学方面，他融汇中西历算，与李之藻、李天经以及外国传教士龙华民(Longobdrdī,N.)、邓玉函(Terrenz,J.)、汤若望(Von Bell,J. A. S.)、罗雅谷(Rho,J.)等参与了修编新历法的工作.从1629年到1632年间，他完成了130多卷的历书编译工作，他不仅引进西方历法，而且继承了中国治历的传统，注重实际观测.1633年新历未能最后完成，徐光启就逝世了.后来由李天经继续完成，称为《崇祯历书》.在农业方面，他的《农政全书》是极负盛誉的巨著，全书共60卷，50多万字，他自著有6万多字，其余为引录229种古代和当时的文献和资料.他对引征的材料进行分类整理，并加以"兼出独见"的评注.为了写好这部巨著，他常常亲自参加农业生产实践，以取得直接的经验.

徐光启是中国16、17世纪自然科学家中杰出的代表人物之一，也是中国科学技术史、中国数学史上第一次引进西方科学技术，引进西方数学知识的先驱.

李之藻(Lǐ Zhīzǎo,1565—1630)　中国明代数学家.字振之，又字我存，号凉庵，仁和(现杭州)人.1598年中进士，曾任南京工部员外郎.李之藻与徐光启、李天经是同时代人，他们都为西方数学引进中国做了大量工作.李之藻曾随意大利传教士利玛窦(Ricci,M.)周游各地，共同翻译了许多西方数学及其他科学技术方面的著作.1607年译成《浑盖通宪图说》2卷，1608年译成《圜容较义》1卷，1613年译成《同文算指》前编2卷，通编8卷，别编1卷.徐光启曾以通晓天文历法，向朝廷推荐李之藻.1613年，李之藻以南京太仆少卿奏上西方天文学说14事，又请丞开馆局.1629年与徐光启一起受诏共同修订新历法.李之藻与徐光启一样，被认为是在中国数学史上第一次引进西方数学中做出贡献的代表人物.

王应选(Wáng Yìngxuǎn,约16世纪后期)　中国明代数学家.泾阳人，王征的父亲.著有《算数歌诀》1卷.

王　征(Wáng Zhēng,1574—1644)　中国明代数学家.泾阳人.他与瑞士传教士邓玉函(Terrenz,J.)于1627年合译了《远西奇器图说》，其中介绍了"分方分圆尺"，即比例规，这是由伽利略(Galilei,G.)于1597年发明的，能开合的两个带刻度的直尺，通过比例相似原理进行计算.比例规就在此时引进中国.

李笃培(Lǐ Dùpéi,1576—1631)　中国明代数学家.字汝植，号仁宇，山东招远县人.1609年为亚魁，1610年为会魁，曾任工部主事.李笃培与徐光启是同时代人，但没有徐光启名气大.意大利传教士利玛窦(Ricci,M.)来华，带来了西方数学书，李笃培看了之后，将其中内容全部用中国传统数学方法加以演算，分门别类纳入了《九章算术》的体系，融会贯通了中西数学方法，著成《中西数学图说》12册(1631年)，也作10卷.

孙元化(Sūn Yuánhuà,？—1632)　中国明代数学家.字初阳，嘉定人.天启(1621—1627年)年间为举人，曾任兵部员外郎.他是徐光启的学生.著有《几何体论》1卷、《几何用法》1卷(1608年)、《泰西算要》1卷.这些著作都是在西方数学传入中国后所写，现已散落失传.

陈尽谟(Chén Jìnmó,约17世纪)　中国明代数学家.字献可，号啸庵，明代嘉兴人.著有《度测》3卷，附《开方说》、《度算经》各1卷，他取圆周率为$\pi=3.15205$；另著有《皇极图韵》、《文音统韵》、《啸庵檠》等，见阮元《畴人传》.他的数学著作大抵以西方数学之说，符合中国古代数学的意旨.

李天经(Lǐ Tiānjīng,1579—1659)　中国明清时代天文学家、数学家.字仁常，又字性参.赵州吴桥定原乡人.1613年中进士，历任河南、陕西藩臬.明代末年战乱四起，他告老还乡.清代顺治元年(1644年)，他又是清廷诏求遗老之一，应诏入见，不久因故辞仕.李天经精于天文、历算，1632年，徐光启推荐他参与修订历法.1633年徐光启病逝，他继续修订历法，曾进呈历书两次，连同徐光启先前进呈的历书共137卷，称为《崇桢历书》(1634年).他还自著有《浑天仪说》4卷，见1673年《吴桥县志》卷6.李天经与徐光启、李之藻一样，在引进西方历法与数学方面也做了很多有益的工作.

毛　晋(Máo Jìn,1599—1659)　中国明清时代数学家.原名凤苞，字子晋，明末江苏常熟人.年少时，曾为钱谦益的学生.他强记博览，建成"汲古阁"，藏书达数万卷，在明末以博雅好事而名噪一时.他精通数学，并在收集古代数学经典方面做了一些有益的工作.在清代初期，他搜集到宋代元丰七年(1084年)刊印的《算经十书》本，其中有《周髀》、《九章》、

《孙子》、《五曹》、《张丘建》、《夏侯阳》和《缉古》等算经，并照原样各抄一份送往清廷. 另外，他还亲刻各种宋、元代以前的旧帙，自编《毛诗陆疏广要》、《海虞古今文苑》、《苏米志林》、《明时记事》和《毛诗名物考》等书，可见他博学多才.

黄龙吟(Huáng Lóngyín，生卒年代不详) 中国明清时代数学家. 1604 年，他著有《算法指南》2 卷，这是继程大位《算法统宗》之后论述珠算的又一著作.

薛凤祚(Xuē Fèngzuò，？—1680) 中国清代数学家. 字仪甫，清初淄川人. 起初与魏文魁一起学习中国传统数学，后来从波兰传教士穆尼阁(Smogolenski，J.-N.)学习西方数学，其中主要是对数、三角函数、球面三角、对数三角函数表等. 他们还合编了介绍西方天文、数学的著作. 穆尼阁逝世后，薛凤祚著有《历学会通》丛书，分正、续、外三集于 1664 年出版. 此外，他自著有《天步真原》3 卷(1648)，又著《天学会通》1 卷，1781 年收入《四库全书》.

王锡阐(Wáng Xīchǎn，1628—1682) 中国清代天文学家、数学家. 字寅旭，号晓庵，又号余不，又号天同一生，江苏吴江人. 他学贯中西，自立新法，人们称赞他："考古法之误而存其是，择西说之长而去其短."在他研究天文学时，既注重观测，又善于运用数学知识进行理论推导. 他著的《晓庵新法》6 卷，1781 年收入《四库全书》，又著有《晓庵遗书》4 种，即《历法》6 卷、《历法表》3 卷、《大统历法启蒙》1 卷、《杂著》1 卷，共 11 卷. 此外，还有《木犀轩丛书》刻本. 另有《圆解》1 卷、《筹算》1 卷，分别介绍平面三角和纳皮尔筹算，还有《大统历法启蒙补遗》1 卷，未刻.

方中通(Fāng Zhōngtōng，1633—1698) 中国清代数学家、天文学家. 字位伯，安徽桐城人，明末著名哲学家方以智之子. 他从小就继承家学，以博识著称. 在数学、历法、物理以及音韵等方面均有专长. 1640 年波兰传教士穆尼阁(Smogolenski，J.-N.)来到中国，他曾与薛凤祚一起随波兰传教士穆尼阁学习天文、历算. 他曾与梅文鼎等数学家也有交往. 方中通一生颠沛流离，陪伴父亲四处逃避清兵的搜捕. 但他始终坚持着学术研究.

方中通对中、西数学都进行了学习、研究，尤其在天文、历算方面，他能兼收并蓄，互为补益. 1661 年著成《数度衍凡例》，后辑成《数度衍》24 卷，直至 1681 年才有机会在广东恩川刊行. 其中包括他所撰的《尺算》、《珠算》、《几何约》各 1 卷、《笔算》2 卷，以及他与揭子煊共同讨论数学问题的记录《揭方问答》1 卷. 这部著作比较系统地讲述了中、西初等数学的内容，是当时的一部数学百科全书. 梅文鼎、薛凤祚、揭子煊等数学家都参加了该书的校阅工作，后被戴震将该书收入《四库全书》. 方中通在编著《数度衍》时，付出了极大的努力，可谓"半生数度衍，不肯自言苦"，"独思研极十易寒暑而始成". 方中通的学术成就还是得到了世人的肯定. 其弟在《数度衍》序中称："论其长，则珠之加减，笔之除，筹之乘，尺之比例. 叙九章则谓皆生于勾股而师于周髀，虽《几何原本》、《同文算指》、《圜容叙义》自云无出其右乎，而吾兄补其不足者多矣."梅文鼎曾称，是从方中通那里"获知西洋筹算之善". 梅文鼎著《方程论》时，也曾与方中通切磋. 梅文鼎还在题为"复东方位伯等"诗中赞誉道："象数岂绝学，因人成古今. 创始良独难，踵事生其新."

杨定三(Yáng Dìngsān，生卒年代不详) 中国清代数学家. 字崑生，清初江苏无锡人. 与梅文鼎是挚友，著有《方圆订注图说》.

梅文鼎(Méi Wéndǐng，1633—1721) 中国清代天文学家、数学家. 字定九，号勿庵，明末清初安徽宣城人. 1633 年 3 月 16 日他生于一个知识分子家庭. 其父梅士昌通经史，著有《周易麟解》，他不愿在清廷做官，隐居江南山村. 梅文鼎 9 岁，即能熟读五经，伴父亲和塾师罗王宾仰观星象，知之大略，被誉为神童，补博士弟子员. 年近 30 岁时梅文鼎从同里倪正学《台官通轨》，次年又学《大统历算交食法》，并订正讹误，补充遗缺. 倪正十分佩服梅文鼎，认为梅文鼎已超过他自己. 1666 年，梅文鼎赴江宁乡试，从方中通处获知西洋比例规算法. 1675 年由吴门姚氏购得《崇祯历书》并加以研习，后由李光地推荐，开始修明史历志. 梅文鼎为学甚勤，自言废寝忘食者 40 年. 居北京时，常午夜挑灯夜读，昧爽则兴，频年手抄杂帙，不下数万卷. 梅文鼎有 2 个弟弟文鼐、文鼏，儿子以燕，2 个孙子玨成、玗成，曾孙 6 个都通数学，形成数学史上的梅氏家族，其中梅瑴成较为著名. 1721 年，梅文鼎去世，终年 88 岁.

梅文鼎一生研究、探索数学，对整理、研究中国传统数学，和注解、介绍、吸收西方数学都做出了贡献. 对梅文鼎的学术造诣，康熙皇帝都十分赞赏，曾赐"绩学参徽"四个大字. 梅文鼎著书约 70 多种，现今所传，以《梅氏丛书辑要》39 种为最完备，其中，关于数学的内容都是整理西算、会通中西数学的作品：《筹算》3 卷、《平三角举要》5 卷、《弧三角举要》5 卷(1684)、《方程论》6 卷(1690)、《勾股举隅》1 卷、《几何通解》1 卷、《几何补编》4 卷、《少广拾遗》1 卷(1692)、《笔算》5 卷(1693)、《环中黍尺》5 卷(1700)、《堑堵测量》2 卷、《方圆幂积》1 卷. 梅文鼎对待求教的后生十分谦和，毫无保留地耐心指点，并平等地与来访者研讨数学问题，从来不摆学者的架势.

李子金(Lǐ Zǐjīn，17 世纪后期) 中国清代数学

家.字子金,号隐山,河南柘城人,与梅文鼎同时代.著有《隐山鄙事》12 种,其中有 3 种数学书:《算学通义》5 卷、《几何易简集》3 卷、《天弧象限表》.还著有《解环谱》1 卷.

杨作枚(Yáng Zuòméi,生卒年代不详) 中国清代天文学家、数学家.字学山,江苏无锡人.他是杨定三之孙,也是梅文鼎学术上的挚友.杨作枚继承祖业,研习数学与天文历法,著有《锡山历算书》3 种:《溯源星海》4 卷、《王寅旭历书图注》2 卷、《三角法会编》4 卷,均载于《梅氏历算全书》,并有梅文鼎的序和自序.另据 1881 年《无锡金匮县志》记载,他还著有《勾股论》2 卷、《几何补编》1 卷、《几何增解》1 卷、《方程图解》1 卷、《历法大成》10 卷.

梅文鼎赞扬作枚:"独以颖妙心思,探无穷底蕴","皆有精思奥理,自成一家".1721 年梅文鼎去世后,杨作枚应邀承担《梅氏历算全书》的定稿工作,其中为梅文鼎《勾股阐微》4 卷增补了第 1 卷《勾股正义》,提出了一种用新的等积变换证明勾股定理的方法;为梅文鼎《弧三角举要》增补了《解割圆之根》1 卷,系统地论述了有关正多边形的证明和作图方法.这两项增补受到后人的好评.

杜知耕(Dù Zhīgēng,17 世纪后期) 中国清代数学家.字端甫,号伯瞿,河南柘城人.1687 年中举人.1681 年著有《数学钥》6 卷,注释《九章算术》中的纲目;1700 年著有《几何论约》7 卷,对《几何原本》删繁举要而写成,这两部书都被收入《四库全书》.

毛乾乾(Máo Qiánqián,约 1645—?) 中国清代数学家.字心易,别号匡山隐者,与梅文鼎是好友.在梅文鼎《勿庵历算书目》中称,"岁癸未(1703),匡山隐者毛心易乾乾,惠访山居,偶论圆周与径之理,因复推论及方圆相容相变诸率,益觉精明".可见他精于数学,并且他还认为,"盖学问贵相长".常与其婿谢野臣讨论数学,自相师友,著述甚丰,所论多为前人所未有.

陈厚耀(Chén Hòuyào,1648—1722) 中国清代数学家.字泗源,泰州人.康熙年间进士,曾在苏州府做官.随梅文鼎研习过历算,1709 年受康熙皇帝昭见,并调北京从事研究工作.他向康熙提出"定步算诸书以惠天下"的建议,并得到康熙的同意.他又推荐梅瑴成等人来编纂数学书.1713 年他曾完成一部数学书,但未见刊行,也没有传于世.此后他参与编辑《数理精蕴》,多达 53 卷.他本人著有《续增新法比例》40 卷、《借根方算法》8 卷、《算法纂要》1 卷、《八线表根》1 卷,以及《算义探奥》、《陈厚耀算书》等.

陈　讦(Chén Xǔ,1650—1722) 中国清代数学家.字言扬,浙江海宁人.一说 1732 年去世.以贡生被命淳安县教谕.著有《勾股引蒙》,1722 年刊本有 10 卷,《四库全书》本仅收 5 卷;还著有《勾股述》2 卷,附《开方发明》1 卷.

毛宗旦(Máo Zōngdàn,1668—?) 中国清代数学家.字扆再,钱塘(今杭州)人.著有《九章蠡测》10 卷(1716),附《勾股蠡测》1 卷,与《九章算术》相仿,书前有"康熙丙申钱塘毛宗旦发凡"3 页,列出了明、清两代多种算书的名目,有参考价值.

陈世仁(Ché Shìrén,1676—1722) 中国清代数学家.字元之,浙江海宁人,1715 年中进士.著有《少广补遗》1 卷、《方程申论》6 卷.《少广补遗》被收入《四库全书》,专论级数,他把所谓"垛积"看作"少广",给出 37 个垛积式及若干变形式,大致分为 12 类.这些求和公式在中国数学史上占有一定地位,由于当时宋、元时代传统数学著作尚未被发掘出来,所以他所用术语与前人有所不同.

年希尧(Nián Xīyáo,?—1738) 中国清代数学家.字允恭,辽宁广宁(今辽宁北镇)人.曾先后在云南、河北、安徽等地做官.年希尧对科学技术很感兴趣,对数学和医学有较多研究,其数学著作主要有:《测算刀圭》3 种 3 卷(1718),即《三角法摘要》、《八线真数表》和《八线假数表》各 1 卷,《视学》2 卷(1729)、《面体比例便览》1 卷(1735)、《对数广运》1 卷、《对数表》1 卷、《万数平立方表》和《算法纂要总纲》等.年希尧的《视学》是一部中国最早系统地阐明透视原理的著作,是 18 世纪画法几何的一部代表作.1735 年,《视学》修订版内容更丰富,水平也更高,它比法国数学家蒙日(Monge,G.)1799 年出版的《画法几何学》早六七十年.《视学》在中国国内只有两部再版本,而在法国有一残本,在英国有一部抄本.

江　永(Jiāng Yǒng,1681—1762) 中国清代数学家.字慎修,安徽婺源人.他是康熙时代的太学生,精通步算、钟律、声韵等.他终生钻研梅文鼎著作,并将心得著成《翼梅》8 卷,续 1 卷,收入《四库全书》时,改名为《算学》,阮元在《畴人传》中称之为《数学》.在当时这是一部颇有影响力的数学著作,有多种版本刊行.另著《河洛精蕴》9 卷,1774 年易名《两仪堂》出版.著名学者戴震是他的弟子.

梅瑴成(Méi Juéchéng,1681—1763) 中国清代数学家.字玉汝,号循斋,又号柳下居士.安徽宣城人,梅文鼎之孙.1715 年赐进士,曾任左都御史.自幼从祖父、父亲学数学,后由陈厚耀推荐,进入康熙时代的清廷,读到许多宫内秘藏.康熙曾让他与陈厚耀"修书于蒙养斋",但所著书没有见流传下来.从 1713 年 5 月起,他与何国宗负责汇编《律历渊源》,全书分《律吕正义》、《历象考成》和《数理精蕴》三大部分,共 100 卷.

梅瑴成继承和发扬梅氏家族传统,由他编辑《梅

氏丛书辑要》62 卷，末附《赤水遗珍》1 卷，以别于兼济堂纂刻的《梅氏历算全书》75 卷. 他还著有《兼济堂历算书刊缪》1 卷和《增删算法统宗》11 卷，另著《柳下旧闻》16 卷. 他在《赤水遗珍》中，记述了曾失传已久的天元术，为后人所赞赏.

庄亨阳(Zhuāng Hēngyáng，1686—1746)　中国清代数学家. 字元仲，南靖人. 1718 年中进士，曾任徐州知府. 他居官刚直，不惧强暴，任职期内有三年两遇灾荒，他能赈济难民. 他参考《几何原本》、《数理精蕴》、《梅氏全书》编著了《庄氏算学》8 卷，被收入《四库全书》. 1848 年重刊时改名为《秋水堂算法》，其中《几何原本举要》1 卷和《河防算法书》较有价值.

明安图(Míng Antú，1692—1763)　中国清代数学家、天文学家. 字静庵，蒙古族正白旗人. 1712 年为奉天生员. 1723 年起在钦天监任时宪科五官正，长达 30 多年. 1759 年升任钦天监监正. 明安图在天文、历法、大地测量和数学等方面都有不凡的贡献.

明安图曾参加《律历渊源》编写工作，这部巨著共 100 卷，包括《律吕正义》、《历象考成》、《数理精蕴》三大部分，历时近 10 年，1721 年成书. 他还参与编修《历象考成后编》、《仪象考成》和《日躔月离表》等天文历书. 明安图 1755 年、1759 年两次奉命率队深入新疆腹地进行地理勘测，并绘制出详尽准确的新疆地图，使清代康熙年间《皇舆全图》的绘制工作得以全部完成. 在数学方面，明安图经过 30 多年刻苦钻研，写成名著《割圆密率捷法》(1763 年初稿). 书中他不仅证明了法国人杜德美给出的 3 个关于求圆周率、求正弦和求正矢的级数展开式，而且创造性地提出了 6 个新的展开式，并称为"九术"，被誉为"明氏新法".《割圆密率捷法》初稿是明安图毕生研究的成果，但尚未完成就去世了. 他病危临终时，嘱咐他的儿子明新和学生陈际新"多续而成之". 1774 年由陈际新等续成定稿，全书共 4 卷，前两卷为明安图遗稿，后两卷为"辑其解并述其意"而成. 但当时并未出版，李潢、戴敦元等从陈际新处传抄了副本，罗士琳于 1821 年又从戴家影抄一本，到 1839 年才由岑建功"假录其副，算校付梓".

何国宗(Hé Guózòng，? —1766)　中国清代数学家. 字翰如，顺天府大兴县人. 他家世代精研天文，康熙年间以算学闻名，因赐进士，入翰林院，曾任礼部尚书. 他与梅瑴成同在蒙养斋研究数学，1713 年 5 月修律吕、算法诸书，他们都参加了. 何国宗善于教授数学，平易近人，每每详尽阐述，直至别人"了解于心"，还曾做过大地测量方面的工作，受到世人推崇.

李　潢(Lǐ Huáng，　?—1812)　中国清代数学家. 字云门，湖北钟祥人. 生于殷实之家，父亲李兆钰于 1735 年获乡试解元，1736 年为进士，曾赴苏州做官. 李潢于 1765 年也获乡试解元，他自幼聪明好学，素有"读书一目十行下"之誉. 不久其父被劾，落职于苏州，并客死他乡. 李潢扶丧归里，当地土豪妒嫉他家钱财，设陷李潢，致使入狱. 其间，家人探监每次都带去许多书籍，几天就要换一批，他身于囹圄仍孜孜求学不已. 后来，云南李因培巡视湖北，知李潢有冤，他才获释放. 出狱后他更加勤奋学习，并以博学而闻名于当地，尤精算学，兼明音律，人称"钟祥一李". 1771 年，李潢中进士，此后一直在北京做官. 但他仕途坎坷，多次升官又降官，当过工部左侍郎，又当过翰林院编修. 1812 年病逝于北京.

李潢在发掘、整理和研究中国古代数学经典方面做出了突出的贡献. 1773 年开设四库全书馆后，李潢作为翰林院编修在馆中提任总目协纂官，参加了《四库全书》的编辑工作. 当时，《算经十书》以及宋、元诸家名著陆续从民间征集到. 这些书长期埋没于私家藏书阁，久经辗转传抄、重刻，有很多讹文夺字，甚至残缺次错，并且所用概念、名词、术语多，而且同名异意、同意异名屡见不鲜. 因此，要整理出版这份宝贵的遗产，必须认真地校勘，忠实地注释. 李潢对《算经十书》中的《九章算术》及刘徽、李淳风注、《海岛算经》和《辑古算经》进行了全面校注和研究. 这三部书的数学成就辉煌，但又比较难读，经李潢校注之后，大多文从字顺，容易理解，人们称赞李潢"能发古人之直解"，"与古人息息相通"，有"昌明绝学"之功. 他还著有《九章算术细草图说》9 卷、《海岛算经细草图说》1 卷，对戴震疏注时所谓"外错不可通者"一一疏而通之. 可惜，全书尚未最后定稿他即病逝. 他的外甥程矞采遵其遗嘱于 1820 年请沈钦裴算校付印. 在他的遗稿中还有《缉古算经考注》2 卷，1832 年由刘衡算校刻于江西南昌，程矞采任广东布政使时又请吴兰修复校，刻于广州. 吴兰修序称："李云门刊误补缺凡七百余字，每术附以细草及割截分并虚实比例之旨，是书之蕴毕宣，王氏之真尽出，无庸以天元一术推算."虽然，李潢在以上三部书中仍留有几处无法较正和难以肯定的文字和注疏，但他的工作大体上是成功的，为后人的研究提供了极大的方便.

王元启(Wáng Yuánqǐ，1714—1786)　中国清代数学家. 字宋贤，嘉兴人. 1751 年中进士，曾任将乐县知县. 精于律历勾股之学，著有《历法记疑》、《勾股衍》、《角度衍》、《九章杂论》等，其中《勾股衍》因繁求简，最为明晰.

戴　震(Dài Zhèn，1723—1777)　中国清代数学家. 字东原，安徽休宁人. 出生于一个商业世家. 28 岁才师从江永，多次乡试未能及第. 1762 年才中举. 他对天文、数学、历史、地理都有深刻研究，又精通音

韵，擅长考证、训诂．是清代著名的思想家、学者．曾两次主讲于浙江金华书院，一次主讲于山西寿阳书院．1773 年应诏参与《四库全书》编校，任纂修官，1775 年被授以翰林院庶吉士，在馆五年，病逝．

戴震在搜集、校勘、整理古代数学经典著作方面做了有益的工作．鉴于当时古代数学经典著作散佚严重，他校勘了唐代立于官学的 10 部算经，1773 年，曲阜的孔继涵根据他的校勘本刻印成微波榭本《算经十书》．他的校勘工作使传本中的误文夺字得以更正，由于他未能参考宋本《算经十书》，所以也有改错之处．他曾自撰《策算》1 卷，《勾股割圆记》3 卷，《原象》1 卷，《历向》2 卷，《古历考》2 卷，《续天文略》3 卷，以及《准望简法》、《割圆弧矢补论》、《方圆比例数表》各 1 卷，附《勾股割圆全义图》1 卷，手稿合为 1 册．另外，他还为《九章算术》补图，附于各卷末．

孔继涵（Kǒng Jìhán，1739—1783） 中国清代数学家．字体生，一字浦孟，号荭谷，山东曲阜人．1770 年中举人，1773 年中进士，任户部主事，他与戴震是亲家．孔继涵是长于《三礼》的学者，又精天文、历算．著有《勾股粟米法》1 卷、《释数》1 卷（未印）、《同度记》1 卷．又以戴震校点的《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《五曹算经》、《五经算术》、《夏侯阳算经》的武英殿聚珍本，校刻成微波榭本《算经十书》，并将戴震撰的《策算》1 卷、《勾股割圆记》3 卷也附刻于其中，使之成为研究中国古代数学及其经典著作的珍本．

孔广森（Kǒng Guǎngsēn，1752—1786） 中国清代数学家．字众仲，号撝约，又号㲀轩，山东曲阜人．年少时师从戴震学《公羊春秋》、《礼记》等，并能做出令人叹绝的“骈丽文”．1771 年中进士，并做了官．但他性情恬淡，沉溺于著述，不久告退而归．他在翰林院时看到了《缉古算经》、《数书九章》、《测圆海镜》、《益古演段》等数学名著，并做了潜心的研究，数学造诣大大提高．一生著有《少广正负术》6 卷和《勾股难题》、《割圆弧矢术》、《新设三角术》等．

张敦仁（Zhāng Dūnrén，1754—1834） 中国清代数学家．字古余，山西阳城人．1774 年中举人，1775 年中进士．曾任吉安知府，又升任云南盐法道．他学识渊博，无所不学，尤其精于天文、历算．对中国古代数学著作进行过一些整理、注释工作．著有《求一算术》3 卷、《开方补记》8 卷、《缉古算经细草》3 卷，其中《缉古算经细草》由李锐校，艺学轩刊本还题有张敦仁、焦循、汪莱、李锐同撰．可见他与当时数学名家有着密切的交往．

牟 庭（Mù Tíng，1759—1832） 亦称牟廷相．中国清代数学家．字陌人，栖霞人．1803 年著有《两勾和两股较（算草）》1 卷、《投壶算草》1 卷，1804 年著有《带从和数立方算草》1 卷．另著《重差图解》（1796）、《勾股重差图》上、下篇（1803），以及《算学定本》等，但未刊行．

安清翘（An Qīngqiào，1759—1830） 中国清代数学家．字翼圣，山西垣曲人．1819 年著有《数学五书》5 种 19 卷，其中《矩线原本》4 卷、《一线表用》6 卷、《学算存略》3 卷、《乐律心得》2 卷和《推步惟是》4 卷，另著《数学指南》、《几何原本补正》，但未刊行．

焦 循（Jiāo Xún，1763—1820） 中国清代数学家．字理堂，号里堂，江苏甘泉（今扬州）人．幼时从兴化的顾九苞学经，在顾家见到《梅氏丛书辑要》，便开始学习数学．1801 年中举人．他性既专，兼善思，且博学．经学、历史、天文、数学、声韵、训诂，无所不精，每遇一书，必悉心研究，务穷其源．与汪莱、李锐交往甚密，被称为“谈天三友”．

焦循一生著述很多，在算术、代数、几何和球面三角等方面都有杰出的成就，尤其值得称道的是，他提出了许多算术基本运算律，并注重运算律的一般性研究，在中国古代数学中是一个创举，这在当时世界上也是领先的．此外，他在天文学中本轮、次轮的几何理论、椭圆理论以及球面三角术解法方面也有杰出的贡献，对李冶的“天元术”和秦九韶的“正负开方术”也有特别的研究．主要著述有：《加减乘除释》8 卷、《释轮》2 卷、《释椭》1 卷、《释弧》3 卷、《天元一释》2 卷、《开方通释》1 卷、《乘方释例》5 卷、《大衍求一术》1 卷、《补衡斋算学》（第三册）1 卷和《易余录》20 卷等．

阮 元（Ruǎn Yuán，1764—1849） 中国清代数学史家．字伯元，号云台，晚年自号颐性老人．江苏仪征人．1789 年中进士，由翰林累官至体仁阁大学士．先任浙江学政，后任浙江巡抚，又任漕运总督．

阮元博览群书，善长历法、算学，并注重考注古代经典、研究中西数学之异同，还组织当时的名家对天文、数学及科技书籍进行整理、疏注．他与李锐、周冶平等编纂《畴人传》46 卷（1799），用传记体裁记述了从黄帝以来 280 位天文、数学工作者的生平事迹，开创了为科技工作者立传的先河．1840 年，罗士琳写成《续畴人传》，1886 年，诸可宝编成《畴人传三编》，1898 年，黄钟骏又编成《畴人传四编》．此外，阮元在任漕运总督时，提出计算运粮船容积的简捷方法，建立了测量容积的石、斗、升、合的度量系统．

王贞仪（Wáng Zhēnyí，1768—1797） 中国清代数学家．字德卿，江宁人．王锡琛之女，詹枚之妻．著有《西洋筹算增删》1 卷、《重订策算证讹》1 卷、《象数窥余》4 卷、《求算简存》5 卷、《筹算易知》1 卷等．

朱 鸿（Zhū Hóng，生卒年代不详） 中国清代数学家．字云陆，亦字筠麓，号小梁，秀水人．1789 年领乡荐，1802 年入翰林院任编修，1820 年选授湖南

粮储道，因与巡抚不和，改为候补道. 精研数学，对勾股、割圆、弧三角推步等方法均有研究，并能融贯中西数学. 曾求得圆周率为
3.141 592 653 589 793 238 462 643 186 367 472 279 514，还发现圆柱被平面斜截成椭圆.

汪　莱(Wāng Lái，1768—1813)　中国清代数学家. 字孝婴，号衡斋，安徽歙县人. 他自幼家境贫苦，"掘草根，以佐食"，没有从师读书，但勤奋好学，刻苦研习，"深造自得"，15 岁时补博士弟子. 20 岁后就读于苏州葑门外，受江永、戴震等著名学者影响，"力通经史百家，及推步历算之术". 1806 年受命于清廷，测量黄河入海口改道工程中新旧河道间"地势高下"之差. 1807 年以优贡生入京，考上八旗官学教习，在北京从事教学工作. 曾被举荐担任《天文志》、《时宪志》纂修工作，后调安徽石埭县任教谕. 1813 年曾应省试，未中榜，不久逝世，时年 45 岁.

汪莱精于数学、天文学，著有《衡斋算学》7 册，另有《衡斋遗书》9 卷，汪莱在球面三角和方程论两方面有杰出的成就. 在球面三角方面，他于 1795 年冬演推 5 大行星的"伏见"问题，他用球面三角形来演算，并系统地讨论了球面三角形有解和无解的条件. 1798 年，他讨论了勾股形的求解与已知一弧的通弦求五分之一弧的通弦问题，此后又研究了求三分之一弧通弦问题. 1799 年继续研究弧三角形，得出球面三角形有关定理 40 条. 在方程论方面，他研究了方程正根问题，指出了三次方程仅有一个正根的一种充分条件，发现三次方程的根与系数之间的关系，类似于韦达定理. 对高次方程的正根也给出了一些判别定理. 这在中国数学史上也是少有的创见. 此外，他还在中国开创了组合及进位制理论的研究，可惜流传不广，未产生较大影响.

汪莱与当时数学家焦循、李锐齐名，被誉为"谈天三友".《畴人传》对汪莱评价也很高：汪莱天性敏绝，极能攻坚，不肯苟于著述，凡所言皆人所未言，与夫人所不能言.

李　锐(Lǐ Ruì，1768—1817)　亦称李向. 中国清代数学家. 字尚之，号四香，江苏元和(今苏州)人. 自幼爱好天文、历算，有过人的天资. 从书塾中拾得程大位的《算法统宗》，"心通其义，遂为九章八线之学". 后又研究了王孝通的《缉古算经》、秦九韶的《数书九章》、李冶的《测圆海镜》，他"每得一书，其有关于历数者，必广搜博采，穷幽极微，取其精华以资会通辅盖，从不肯轻易放过". 虽然李锐在学术研究上显示出非凡的才能和毅力，但是在科举应试中却屡次失败，终身不曾中举，始终未能谋得一官半职，以致因没有固定的经济来源，使家境十分贫寒. 为了进行学术研究，他一然常是借书阅读. 他还曾在阮元、张敦仁、吴廉山、刘金门、达枚等处当幕僚，既靠他们资助，又与他们合作研习. 当时有许多人都愿聘请李锐当学术顾问，向他请教问题，他总是有求必应. 1817 年事业未竟，即因咯血而逝，年仅 49 岁.

李锐一生著述较多，除了载入《知不足斋丛书》的《测圆海镜细草》12 卷外，后人将他的遗稿整理成《李氏遗书》11 种共 18 卷出版，其中包括历法和数学两大类. 他的数学成就主要在方程论方面，其代表作是《开方说》，这是他生前最后几年潜心研究的结晶，虽然下卷由他的学生黎应南续成，但黎在续成后说："皆谨遵先生遗命，依法推衍，非敢参以己见. 并将先生平日论开方之语，识于简末，与海内明算者共深究焉."他的《开方说》3 卷，在中国方程论发展史上是一部高水平的著作. 书中不仅讨论了开方问题，而且还阐述了方程的理论问题. 他在研究了刘徽的"方程新术"、宋、元时代的"天元术"、梅文鼎的《少广拾遗》，尤其是在汪莱的《衡斋算学》第 5、7 册的基础上，总结和发展了方程理论，写出了这部著作. 他研究了方程正根的个数与各项系数变号之间的关系，明确提出方程有负根和重根的问题，他的这些思想在当时是很先进的. 所得结论与笛卡儿(Descartes，R.)的符号法则相一致，而且在某种意义上还接近了代数基本定理的初步思想. 然而，当时一些遵循古训的人未能完全理解这些，甚至对李锐的研究持怀疑态度. 李锐常与别人合作研习，《畴人传》46 卷就是他和阮元、周冶平共同编撰的，其中定稿工作主要是由李锐完成的. 此外，他还经常替人校订数学书稿，并花费很多精力从事数学教育工作，他常常为学生编教材，写课艺. 在他周围有很多人求学，形成了以李锐为首的学术研究中心，影响很大. 他的学术成就，深受学术界名流的赏识和推崇. 钱大昕是李锐之师，又是当时通儒第一，平生不曾轻易称赞别人，惟独对李锐大加赞许，并认为他已超过自己，因为李锐除数学外，还兼通天文、历法、诗词和历史等. 当时有南李(李锐)、北李(李潢)之称，李潢在北京为翰林院编修，工部左侍郎，他对李锐也非常赞赏，曾写信给张敦仁，请求帮助李锐，以保证李锐能不间断地进行学术研究. 对此李锐感动不已，并将此事记入日记. 罗士琳在《续畴人传》中写有《李锐传》，赞扬李锐在"谈天三友"中，是高于焦循和汪莱的.

时曰淳(Shí Yuēchún，生卒年代不详)　中国清代数学家. 字清甫，嘉定人. 父亲时铭曾任知县，也是数学家，著有《筹算图》、《笔算图》各 1 卷. 时曰淳 1860 年与丁取忠同在武昌胡林翼幕府见到《数学拾遗》一书，即以己意推广丁取忠"百鸡问题"解法，第二年著《百鸡术衍》2 卷，1870 年著《今有术申》1 卷，1873 年又著《求一术指》1 卷. 他还对秦九韶"大衍求一术"进行了深入研究，但终究未能解决原术太复杂的问题.

陈　杰(Chén Jié,？—1839？)　中国清代数学家.字静菴,浙江乌程人.嘉庆末年为钦天监博士,后任国子监算学助教,1839年因足疾告归乡里,后逝世于家中.他著有《算法大成》上编11卷(1823)、《校辑古算经》1卷、细草1卷、图解3卷、音义1卷(1823).他认为数学中的比例论很重要,认为西洋人从中国窃取乘、除法而改为比例.这些看法显然有失偏颇.

骆滕凤(Luò Téngfèng,1770—1841)　中国清代数学家.字鸣冈,号春池,山阳人.1801年中举人,曾任某知县.由于母亲年迈,改任舒城县学训导,但不到一年又归故里,尽心孝敬老母,不再出门做官.他思维敏锐,喜好读书,精研数学,曾受教于李潢,对"大衍求一术"有深入的研究.1815年著有《开方释例》4卷、《艺游录》2卷.他的遗稿由其婿于1843年校刻行业.

戴敦元(Dài Dūnyuán,1773—1834)　中国清代数学家.字金溪,开化人.幼年有神童之称,15岁乡试中举,17岁中进士,曾任刑部尚书.他特别爱好数学,与李潢非常要好,有不少数学著述,只可惜现在传世的很少,仅在刘徽的《九章算术》注中,方程新术改8字,添26字,移26字;朱世杰的《四元玉鉴》中,订正的补脱15字.

冯　澄(Féng Chéng,生卒年代不详)　中国清代数学家.字涵初,南通人.著有《强自力斋集》10种16卷,由易堂石印于1897年,其中有数学著作《续谈天》、《历学杂识》、《三角拾遗》、《数学脞録》、《算课初编》及其《续编》各1卷、《代数启蒙》4卷.还著有《算学考初编》20卷,整理了古代数学书目,对研究中国数学史有参考价值.此外,还著有《勾股九容证解》1卷和《代数详解》6卷,后者未见刊印.

罗士琳(Luó Shìlín,1774—1853)　中国清代数学家.字次璆,号茗香,江苏甘泉(今扬州)人.早年以学经史为主,读"四子六经"之书,兼及"六艺".30岁左右才精研天文、历算,几乎放弃以前所学经史等.他曾游历于江淮之间,遍访"明算君子",博览诸家之作,广采众家之长.被誉为"博闻强识,兼综百家,于古今算法尤具神解"的数学家.

罗士琳对中国古代数学经典进行了详细的校勘和研读,并写出许多研究心得和成果,著述颇丰,主要有:《比例通汇》4卷(1818)、《勾股容三事拾遗》3卷及《附例》1卷(1826)、《演元九式》(1827)、《四元玉鉴细草》24卷(1834)、《台锥演积》1卷(1837)、《三角和较算例》1卷(1840)、《弧矢算术补》1卷(1843)、《续畴人传》6卷,校正《算学启蒙》3卷、《割圆密率捷法》4卷.1844年,他将自己发表的著作合刊为《观我生室汇稿》.1840年前后,他曾著《缀术辑补》2卷,但未刊行;1850年为刘衡编辑整理《六九轩算书》5种并出版.他在比例论、多元方程组、高次代数方程、三角形、弧矢论、垛积术与立体体积等方面均有独到之见.他认为数学是统一的,表现为数与形的统一,代数与几何的统一,并认为比例论与天元术可以作为统一研究数学的工具.他的这些观点和方法,无疑有很大的局限性,但在中国传统数学向新的数学过渡时期,还是有一定的积极意义.

罗士琳所撰《续畴人传》6卷,附于阮元、李锐、周冶平所撰《畴人传》46卷之后,首有阮元于1840年写的序.《续畴人传》较《畴人传》更有时代气息,体现着时代精神,除了记述了当代学者的生平事迹和学术成就外,传后还有论说,其中有不少是他自己的见解.《续畴人传》与《畴人传》一样,成为了专门研究中国数学史的佳作,为人们所推崇.

刘　衡(Líu Héng,1776—1841)　中国清代数学家.字蕴声,一字讱堂,号簾舫,江西广昌人.嘉庆年间以刘瑢为名中榜副贡生,道光年间曾在河南做官,以循吏知名.后转任巴县知事,能体察民情,有事于乡间,计所历有民讼就近为之取决,川民有称刘青天.他平时勤学强记,至老不衰,尤其对《九章算术》、《勾股八线测量》以及中西各种算法颇有精研,又曾受学于李潢.著有《六九轩算书》6种9卷,即《尺算日晷新义》、《筹表开诸乘方捷法》、《缉古算经补注》各2卷,《勾股尺测量新法》、《借根方法浅说》、《四率浅说》各1卷,由罗士琳校,两淮盐署刊印于1850年.还著有《算学备考》,又为李潢著《缉古算经考注》2卷作校.他的《六九轩算书》曾多次重刊重印.

朱骏声(Zhū Jùnshēng,1778—1858)　中国清代数学家.字丰邑,号允清,吴县人.道光年间举人,曾任黟县训导.当时清廷诏海内文学士所著书籍,他呈《说文通训定声》,被赏国子监博士衔,后升任扬州府教授,因病未上任,仍居黟县.著述有《数度衍约》4卷、《天算琐记》4卷.

许桂林(Xǔ Guìlín,1778—1821)　中国清代数学家.字同叔,海州人.著有《玄天元一导窍》4卷、《算牖》4卷(又题为《算学入门》)(1830,1887).

沈钦裴(Shěn Qīnpéi,约18世纪末、19世纪初)　中国清代数学家.字侠侯,号狎鸥,江苏元和(今苏州)人.1807年中举人,曾任荆溪县训导,他平生笃信学而邃于思.他精通算学,并为整理中国古代数学典籍做了不少有益的工作.1820年应李潢的外甥程裔采的要求,也是遵照李潢的遗嘱,将李潢的《九章算术细草图说》算校并付梓,其中对"均输"章增订较多,又附自著《海岛算经细草图说》1卷,由骆滕凤校.1824年著《重差图说》,现存有自序的抄本.1829年著有《四元玉鉴细草》,没有刊印,现存两种抄本,其一为白桂贞、白锟所抄,只有5册,书后有王萱铃跋;另一为6册,书前附有《今古开方会要之图细草》

1 卷，并有序. 两种抄本都藏于首都图书馆. 他还著有《数书九章刊误》，由其门人宋景昌辑其残稿入《数书九章札记》. 他的著述多有创见，只因遭逢乱世，未能尽传.

黎应南(Lí Yìngnán，生卒年代不详)　中国清代数学家. 字见山，广东顺德人. 他是李锐的学生，李锐研究方程论的名著《开方说》3 卷，最后一卷未成定稿，黎应南遵照李锐临终遗嘱，“依法推衍，非敢参以己见，并将先生平日论开方之语”写成跋，将书补成.

项名达(Xiàng Míngdá，1789—1850)　中国清代数学家. 字步来，号梅侣，浙江仁和(今杭州)人. 1816 年中举人，曾任国子监学正. 1826 年中进士，被委知县. 他没有上任就退职还乡，专门从事数学研究. 他与戴煦、陈杰为好友. 夏鸾翔、王大有是他的学生. 晚年，他的数学造诣更臻完美，著述很多.

项名达的数学成就主要有两方面：

1. 他研究了明安图、董祐诚的著作后，对所谓“方圆互通”问题产生了兴趣，他用自己独特的方法求得一系列关于三角函数的幂级数展开式，也有全弧的通弦展开为 n 分之一弧通弦的幂级数. 这些表达式大都具有普遍性，而且改进了前人的结果.

2. 在《椭圆求周术》中，用自己的方法得出计算公式，这与用微积分求得的结果相同，其中具有“无限细分求和”的积分思想和方法.

董祐诚(Dǒng Yòuchéng，1791—1823)　中国清代数学家. 字方立，江苏阳湖(今常州)人. 1818 年中举人. 自幼聪颖过人，5 岁能通九九数，18 岁与同里张彦惟共研数学问题，尽通诸家算法. 居京师后，与朱鸿结识，互相砥砺研习，其学问更有长进.

董祐诚著有《割圆连比例图解》3 卷(1819)，其中从一群成连比例的几何线段入手，探求全弧通弦与分弧通弦之间的关系，发现全弧中矢与分弦中矢的关系，通过复杂的计算找到了四个幂级数，作为“立法之原”，以此可推全部的“九术”. 他的方法具有所谓“方圆互通”的思想，即微积分思想，与明安图相同，似更深刻一些. 董祐诚还著有《椭圆求周术》、《斜弧三边求角补术》、《垛积求积术》、《三统术衍补》各 1 卷. 他去世后，其兄董基诚将他的遗稿整理刻成《董方立遗书》5 种 7 卷，于 1827 年刊行.

顾观光(Gù Guānguāng，1799—1862)　中国清代数学家. 字宾王，号尚之，金山人. 他继承祖业，做医师工作，但他又博学经史，兼通古今中外天文、算学. 平生淡泊名利，爱好校订古书. 著有《九数存古》9 卷、《九数外录》1 卷、《周髀算经校勘记》1 卷、《几何原本六和六较线解》1 卷、《开方余义》1 卷、《对数衍》、《求对数法》、《对数还原法》、《八线对数还原法》各 1 卷、《六历通考》1 卷、《九执历解》1 卷、《四回历解》1 卷. 以上著作除第一种外，均被收入《武陵山人遗书》中. 另外，他还对戴煦、李善兰等人的数学著作提出了许多有价值的补充意见.

徐有壬(Xú Yǒurén，1800—1860)　中国清代数学家. 字君青，亦字钧卿，乌程(今湖州市)人. 1829 年中进士，历任云南按察司、湖南布政司、江苏巡抚. 1860 年 6 月太平军攻克苏州，被太平军杀死. 徐有壬与李善兰很要好，他有出众的数学才华，为世人所惊叹. 他对圆和垛积问题研究较深，另外他用屡乘、屡除法求得对数表，比西方传进的方法更简便. 他的著述很多，主要有：《测圆密率》3 卷、《垛积招差》(即《造各表简法》)1 卷、《椭圆正术》1 卷、《截球解义》1 卷、《弧三角拾遗》1 卷、《椭圆求周术》1 卷、《割圆八线缀本》4 卷、《垛积测圆》3 卷、《圆率通考》1 卷、《四元算式》1 卷. 前 7 种于 1872 年刊印为《务民义斋算学》，并均被收入《白芙堂算学丛书》，后 3 种 5 卷未刊行.

戴　煦(Dài Xù，1805—1860)　中国清代数学家. 初名邦棣，字鄂士，号鹤墅，又号仲乙. 浙江钱塘(今杭州)人. 10 岁时就开始爱好天文、数学. 常常白天潜研读，夜晚反复推理演算，一旦有心得，便“秉烛以记”. 他无心于功名，一生没有做官. 1860 年太平军攻克杭州后，他与其兄戴熙同一日自尽.

戴煦的数学研究大致分两个阶段. 早年与同里谢家禾共同研习古代数学，著有《重差图说》、《勾股和较集成》和《四元玉鉴细草》，但均未刊行. 后来与项名达结“忘年交”，共同研究三角函数的幂级数展开式和椭圆求周术，为项名达续成杰作《象数一原》. 他本人研究对数也很有见地，著有《对数简法》2 卷(1845)、《续对数简法》1 卷(1846)、《外切密率》4 卷(1852)、《假数测圆》2 卷(1852)，四种总称《求表捷法》. 1854 年，英国人艾约瑟(Edkins，J.)在李善兰、张福禧处看到戴煦的著作，大为叹服，专程来杭州拜访他，但戴煦托故谢绝. 而艾约瑟对他敬意未改，将他的书译成英文寄回英国数学会.

陈　旸(Chén Yáng，1806—1863)　中国清代数学家. 亦称陈玚，字子缙，江宁人. 为太学生，学识渊博，对历法、数学尤有研究，著述颇丰，但多毁于兵乱. 自著有《算学启蒙》、《算学重差》各 12 卷、《算学发明》24 卷、《算学一得》16 卷、《九章补余》等，此外，还曾与冯桂芬合著《西算新法直解》8 卷.

冯桂芬(Féng Guìfēn，1809—1874)　中国清代数学家. 字林一，吴县人. 与李善兰同时代，也为引进西方数学做过有益的工作. 他主张学习西方数学，认为“一切西学皆从算学出，西人 10 岁外无人不学算，今欲采西学，自不可不学算”. 自著《弧矢算术细草图解》1 卷(1847)，与陈旸合著《西算新法直解》8 卷，与其他人编《西算新法丛书》初集 8 卷.

丁取忠(Dīng Qǔzhōng,1810—1877) 中国清代数学家.字肃存,号果臣,另号云梧.湖南长沙人.1810年1月9日出生,1852年间客居邵阳,1860年应湖北巡抚胡林翼之邀,到武昌作幕宾.晚年与弟子黄宗宪、左潜、曾纪鸿在长沙近郊古荷花池的白芙堂从事数学研究和著述工作.1877年4月27日逝世.

以丁取忠为首,有黄宗宪、左潜、曾纪鸿、吴嘉善等参加的学术团体在19世纪中期的中国是很有影响的,他们与李善兰、邹伯奇等数学家联系也很密切.丁取忠研究各种数学问题,兼收各家之长,有所心得即写成笔记.1851年著有《数学拾遗》,1852年著成《舆地经纬度里表》初稿,1871年著有《粟布演草》1卷,1874年著有《对数详解》5卷.应李善兰之请,校李善兰《天算或问》1卷.1872—1876年间,陆续刻印数学著作21种,题为《白芙堂算学丛书》,其中有丁取忠自著书4种,友人著作10种,另外7种是李冶、朱世杰,张敦仁、李锐及日本人加悦傅一郎等人的代表作.

李善兰(Lǐ Shànlán,1811—1882) 中国清代数学家.原名心兰,字壬叔,号秋纫.浙江海宁人.1811年1月2日出生,10岁左右在家塾念书,能轻松地读懂《九章算术》,15岁时又能读通《几何原本》前6卷.后应试武林,得《测圆海镜》、《勾股割圆记》以读,1845年在嘉兴陆费家结交了当时浙江一带数学名流,共同研习,时有创见,间或著述.1852年5月来到上海,居大境杰阁,开始从事西方数学著作的翻译,也翻译了一些相关的力学、天文和其他学科的著作.1860年应江苏巡抚徐有壬之邀,到苏州做徐的幕宾.1863年到安庆,投身于洋务派官僚集团,留在曾国藩军中多年.1868年由郭嵩涛举荐,到北京同文馆任天文、算学总教习.1869年钦赐中书科中书,1871年10月加内阁侍读衔.1874年4月升户部主事,加员外衔.1876年10月升员外郎,1879年4月加四品衔,1882年5月升郎中.1882年12月9日病逝北京,后葬于浙江海盐牵罾桥东北.

李善兰在数学方面的研习大致可分为三个阶段:1852年以前,自习自研中国传统数学;1852至1860年间,翻译西方数学著作,将西方数学引进中国;1860年以后,汇通中西数学的学术思想,进行深入的研究.李善兰最早于1840年著成《天算或问》一书,自称:"善兰自束发学算,三十后所造渐深."1845年发表了《方圆阐幽》、《弧矢启秘》和《对数探源》.1846年发表了《四元解》2卷,由顾观光作序.1848年自序,发表了《麟德历解》3卷.这是李善兰研习中国传统数学的成果.1852年,李善兰与英国人伟烈亚力(Wylie,A.)合作,共同翻译《几何原本》后9卷,于1856年完成.1859年由墨海书馆出版了他们合译的《代数学》13卷、《代微积拾级》18卷、《谈天》18卷.同时,李善兰又与英国人艾约瑟共同翻译了《重学》20卷、《圆锥曲线说》3卷.此间,李善兰还与伟烈亚力、傅兰雅(Fryer,J.)合译了牛顿(Newton,I.)的名著《自然哲学的数学原理》.李善兰工作勤奋,积极向中国介绍西方数学,他的这些工作与随后华蘅芳、夏鸾翔等人对西方数学所作的有价值的研究,构成了继徐光启之后在中国的第二次西方数学的引进,对中国近代数学的发展起了积极作用.这次西方数学的引进是以古典高等数学为主,较第一次引进又有很大的发展和提高.李善兰在翻译西方数学著作时,创造了许多数学名词和术语,如微分、函数等不少译名都非常贴切,相当多的名词一直沿用至今.大约1860年左右,李善兰开始汇通中、西数学思想,进行深入的数学研究,并且取得了多方面的成果.先后著有《椭圆正术解》2卷、《椭圆新术》1卷、《椭圆拾遗》3卷、《火器真诀》1卷、《尖锥变法解》1卷、《级数四术》1卷、《垛积比类》4卷.1864年由曾国藩捐金资助将上述著作,连同以前的著作,共13种24卷,请全国各地数学界名流校印,集成《则古昔斋算学》丛书.此外,他还著有《九容图表》7页(载刘铎《古今算学丛书》内)、《测圆海镜解》1卷(仅存抄本)、《考数根法》3卷(1872)、《测圆海镜细草》(1876)、《造整数勾股级数法》2卷(1882)等.在他的这些著作中以《垛积比类》中"李善兰恒等式"和《考数根法》中对费马定理的证明这两项成就最为卓著.

李善兰的数学才能受到当时国内外学者的一致称颂.张之洞在《书目答问》中有:"此编生存人不录,李善兰乃生存者,以天算为绝学,故录一人."英国人傅兰雅在《江南制造总局翻译两书事略》中称:"虽为西国甚深算学,而李君亦无不洞明,且甚心悦,又常称赞牛顿之才.此书(指牛顿《自然哲学的数学原理》)外另设西国最深算题,请教李君,亦无不冰解.想中国有李君之才者极稀,或有能略与颉颃者,必中西广行交涉后,则似李君者庶乎其有."李善兰晚年"曾患风痹,惮于行远,咫尺遥,须人扶掖".但他仍然致力于数学研究和数学教育.逝世前"犹手著《级数勾股》2卷".出任北京同文馆天文、算学总教习时,"口讲指画,十余年如一日",学生先后约百余人之多.

汪曰桢(Wāng Yuēzhēn,1813—1881) 中国清代数学家.字刚木,号谢程,又号新甫.乌程(今湖州)人.咸丰年中举,曾任会稽教谕、精通史学、算学.与李善兰经常讨论各种数学问题.李善兰就是从他这里见到朱世杰的《四元玉鉴》,才"深思七昼夜,尽通其法",而成《四元解》2卷.汪曰桢著有《如积引蒙》8卷(一说10卷稿本)、《历代长术辑要》、《古今推步诸术考》、《推策小识》、《超辰表》等.

徐 寿(Xú Shòu,1818—1884) 中国清代数

学家.字雪村,无锡人.曾与华蘅芳共同研究过轮船设计.1865年在曾国藩、李鸿章开设的江南制造局担任翻译时,与英国人傅兰雅合译《周幂知裁》1卷,并曾着手译《质数证明》,但未能完成.

邹伯奇(Zōu Bóqí,1819—1869) 中国清代数学家.字一鹗,又字特夫,南海人.他是宋代邹忠公23世裔孙.自幼承家训,对数学及科学技术感兴趣.他与吴嘉善、夏鸾翔至交甚笃,相互切磋,其学术造诣颇深.郭嵩涛曾请他到同文馆以资研讨,但因病未果.他的著述由后人于1873年刊印成《邹征君遗书》6种9卷.据1879年《广州府志》记载,他还著有《测量备要》4卷与《弧线格》1卷.另外与丁取忠、左潜合著的《粟布演草》第2卷,被收入《白芙堂算学丛书》.

左　潜(Zuǒ Qián,?—1874) 中国清代数学家.字壬叟,湖南湘阴人.师从丁取忠,为白芙堂数学学术团体主要成员之一.著有《通分捷法》1卷、《缀术释明》2卷、《缀术释戴》1卷;与曾纪鸿、黄宗宪合著《圆率考真图解》1卷;与丁取忠、曾纪鸿、吴嘉善、李善兰等同著《粟布演草》第1卷;为徐有壬《割圆八线缀术》4卷补草,为黄宗宪《求一术通解》2卷参定.上述著作均被收入《白芙堂算学丛书》.

夏鸾翔(Xià Luánxiáng,1823—1864) 中国清代数学家.字紫笙,浙江钱塘(今杭州)人.出身于殷实的书香门第.少年时聪颖好学,博览经史,爱好奇技.17岁补为县学生员,21岁起多次参加科举考试,均告败.在父亲旧友谢家禾、戴煦影响下学习数学,后又师从项名达,系统地学习数学.1852—1856年间,他的数学造诣已相当深,甚至已逐步到达数学研究的前沿.1857年夏到1858年春,他在北京任职,官小事杂,至1858年春夏之交,因母丧归家,就再也没有回京任职.1859—1861年间在清军中做军需工作.1861年底,太平军再克杭州,他仕途无望,1862年初辞官携妻入广东,与邹伯奇、吴嘉善交往,共研数学.1864年曾被郭嵩涛聘为广州同文馆汉文教习,但未及到任,于1864年5月在广州旅舍逝世.

夏鸾翔从事数学研究近20年,与当时国内一流的数学家交往甚密.当时正值中西数学交流时期,所以夏鸾翔数学研究的领域很广,涉及画法几何、方程数值解、组合论、解析几何、微积分.著有《视学简法》(1850,已佚)、《少广缒凿》、《洞方术图解》、《致曲术》、《致曲术图解》、《万象一原》.这些著作除《视学简法》已佚,《万象一原》单行本出版外,均被吴嘉善汇编成《夏紫笙算书遗稿》,由邹伯奇的后人刻邹氏遗书时附刻出版.夏鸾翔多才多艺,书画词章皆为高手,旁及音韵、天文、卜筮、星命、绩事、篆刻等,且自他以下3代人,大多各有所长,皆成大家.

吴嘉善(Wú Jiāshàn,生卒年代不详) 中国清代数学家.字子登,南丰人.1852年中进士,历任翰林院庶吉士,散馆授编修.1879年出使法兰西,回国后不久逝世.他与徐有壬、邹伯奇、丁取忠等非常要好,而且是以丁取忠为首的白芙堂数学学术团体主要成员之一.著有《白芙堂算学初集》(1862)17种17卷,这部书逐次增补,最终由丁取忠校订而成.还与丁取忠、左潜、曾纪鸿、李善兰合著《粟布演草》第1卷.

华蘅芳(Huà Héngfāng,1833—1902) 中国清数学家.字若汀,江苏常州金匮县人.父亲华翼纶是举人,曾任永新知县.华蘅芳7岁能读《大学》,14岁能懂《算法统宗》中的"飞归"题.15、16岁时,他偶尔在故书中找到一些算书,"日夕展玩,不数月而尽通其义".父亲见此,专门为他买来许多算书.后来,他师从邹安鬯深造.20岁以前几乎遍读当时流行的古今中外各种数学著作,并能悟出古今中外数学的异同.1859年前后,在上海遇到李善兰,又学习了代数学和微积分.1861年,华蘅芳可谓学问既成,被曾国藩擢用,在安庆军中效力.他曾与徐寿一道在金陵军械所自绘图纸,造成黄鹄号轮船,开中国自造轮船之先河.同年冬,华蘅芳、徐寿等6人被曾国藩举荐到清廷.1862年又被召回安庆府,1863年在曾国藩军中作幕宾.同年,曾国藩保奏他任知县,并加花翎同知衔.1865年,他参与了曾国藩、李鸿章创办江南制造局的工作,1868年6月,江南制造局开设翻译馆,他担任算学、地质诸类翻译工作.从此,他花费了20年时间从事西方科学著作的翻译工作,同时也进行了不少数学研究.1873—1880年间,曾赴天津机械局任职.1876年起,他从江南制造局到格致书院任教习.嗣后,华蘅芳主要精力转向数学教育.1887年在天津武备学堂任算学教习.1892年7月到武昌主持两湖书院.华蘅芳一生工作勤奋,自恃精力之强而不知其劳苦.39岁时曾大病一场,辍业半年之久,稍有恢复又扶病而出.67岁时又患脑疾.终因积劳成疾,1902年在家病故.

华蘅芳为中国近代科学技术和文化教育的开创和发展做出了贡献.作为数学家,他在引进西方数学,从事数学研究,致力于数学教育等方面都做出很大贡献.他与英国人傅兰雅(Fryer,J.)共同翻译数学著作有7种96卷刊行,其中华蘅芳常常是"书之稿本,改本,清本以及草图,皆一手任之".译著内容大多比较新,能反映当时西方数学的水平,对西方当代高等数学的基础知识和基本方法能在中国广泛传播,起了很大作用,尤其是《代数术》、《微积溯源》和《决疑数学》在当时影响很大,比李善兰的译著更有起色.另外,他的译著较为详尽地介绍了西方代数学、三角学以及概率论等学科的发展史,为中国数学界研究西方数学史提供了有益的资料.他还与美国人玛高温、英国人傅兰雅共同翻译了其他学科的科

技著作，涉及矿物学、地质学、气象学、工程学和军事工程学等，这也是近代中国在这些学科领域内具有创始性的基础工作.

华蘅芳从 25 岁开始从事数学研究，1859 年写成第一部数学著作《抛物线说》，从 1872 年起陆续有 8 种著作问世：《开方别术》1 卷(1872)、《数根术解》1 卷、《开方古义》2 卷(1880)、《积较术》3 卷、《学算笔谈》6 卷(1882)及续 6 卷、《算草丛存》4 卷(1882)及续 4 卷、《算法须知》4 章(1882)、《西算初阶》1 卷. 以上著作的前 6 种除续卷外，均于 1882 年汇编成《行素轩算稿》，后两种分别被收入傅兰雅的《格致须知》和《艺经斋西算新法丛书》. 华蘅芳数学研究的成果主要在整系数高次方程求解、费马小定理、有限差分法、组合论等方面.

华蘅芳注重数学教育，晚年更是如此. 他博学多才，对数学、物理、化学、医学、工程机械、地质乃至音乐，都有所研究，又治学严谨，勤于科学实验，讲究学术道德，寄厚望于学生，所以在培养数学人才和普及数学知识方面，华蘅芳不失为一代宗师. 他的学生江衡、杨兆鋆都成了数学家，他的弟弟华世芳在他的影响下也成了数学教育家.

劳乃宣(Láo Nǎixuān，1843—1921)　中国清代数学家. 字玉初，桐乡人. 著有《矩斋筹算》7 种 22 卷：《古筹算考释》6 卷(1883)、《古筹算考释续编》8 卷(1899)、《筹算浅释》2 卷(1893)、《筹算分法浅释》1 卷(1898)、《筹算蒙课》1 卷(1898)、《垛积筹法》2 卷(1894)、《衍元小草》2 卷. 此外，还著有《笔筹算略》6 卷(1876)，前 5 卷论笔算，后 1 卷论筹算.

陈志坚(Chén Zhìjiān，1844—?)　中国清代数学家. 号思九，新阳人. 中举后任青浦县教谕. 学识渊博，精于天文历算，曾在江融斋书院、江阴南菁书院主讲算学. 著有《求一得斋算学》7 种 11 卷，包括《李氏勾股术补》、《连分数开方》、《整勾股释术》、《粟布术广》、《杂题类存》各 1 卷、《演无定式方程》、《三角新理》各 3 卷，另附《微积阐详》5 卷. 还著有《平面几何形学别证》4 卷，未刊.

曾纪鸿(Zēng Jìhóng，1848—1877)　中国清代数学家. 字粟诚，湖南湘乡人. 曾国藩次子. 师从丁取忠，是白芙堂数学学术团体成员之一. 曾与丁取忠、左潜、吴嘉善、李善兰同著《粟布演草》第 1 卷；与丁取忠合著《对数详解》5 卷；与左潜、黄宗宪合著《圆率考真图解》1 卷. 以上著作均被收入《白芙堂算学丛书》.

黄宗宪(Huáng Zōngxiàn)　中国清代数学家. 字玉屏，号小谷，湖南新化人. 他是丁取忠的学生，是白芙堂数学学术团体的重要成员. 著有《古琴古砚斋算术》5 种 8 卷，其中最重要的是《求一术通解》2 卷(1874)，他对秦九韶大衍求一术做了进一步阐述，不仅解答了一次同余式组问题，而且用"求一术"解决了二元一次不定方程问题，很有利于后人研究.

华世芳(Huà Shìfāng，1854—1905)　中国清代数学家. 字若溪，金匮人. 他是华蘅芳的弟弟，著有《连分数学》、《答数界限》，合编入《恒河沙馆算草》(1893). 在数学教育方面做了不少工作，编有《龙城书院课艺》(1896—1901)、《致用精舍课艺》、《近代畴人著述记》(1884)等，还有《再续畴人传拟目》抄本.

江　衡(Jiāng Héng，生卒年代不详)　中国清代数学家. 字霄纬，元和(今苏州)人. 他为中国引进西方数学做了大量的工作.《算式集要》4 卷，就是由英国人哈司韦编辑、傅兰雅口译，由他笔译的. 自著有《中西算学丛抄》6 种 12 卷(1896)、《天算策学通纂》10 卷(又名《中西天文算学问答》)(1873)，以及《溉斋算学》5 卷(1888—1900). 这些著作涉及面很广，诸如《学计韻言》、《勾股演代》、《纵方备证》、《对数浅释》和《垛积解义》等.

刘　铎(Liú Duó，生卒年代不详)　中国清代数学家. 字振愚，善化人. 他办的最有影响的事情是创建了上海算学书局，书局于 1898 年石印出版了《古今算学丛书》，包括上至《周髀算经》，下至《代微积拾级》、《代数备旨》，共计 97 种算书. 这是中国数学史上最大的一部数学丛书. 他的著述有《若水斋算学书录》8 卷、《古今算学丛书条目》1 卷(1898)，为中国数学史的研究提供了有益的资料.

冯祖荀(Féng Zǔxún，1880—1940(?))　中国数学家、教育家. 生于浙江杭县(今杭州)，卒于北京. 1904 年赴日留学，先入日本京都第一高等学校，1908 年转京都帝国大学理学部读数学. 1914 年任北京大学教授，并在 1934 年前多次任数学系主任，兼任北京高等师范学校(1923 年改名为北京师范大学)数学系主任多年，还兼任东北大学数学系主任. 1935 年中国数学会成立，是九位董事之一. 无子女，故生平事迹保留欠详.

冯祖荀是中国现代数学的早期代表人物之一，专长分析学科，主要贡献在中国现代数学人才的培养和数学教育方面. 在北京大学期间，初步探索出了中国现代大学数学系的办学模式，使课程设置渐趋完善，培养了一批后来有名的数学家，其中在北京高等师范学校培养的有中国著名的数学教育家傅种孙等. 他早期就重视现代科学在中国的传播，在日本期间曾和一些北京留日学生发起成立了"北京大学留日学生编译社"，并在 1908 年创办了《学海》杂志. 这是中国最早的科技译刊之一. 在繁重的教务之余，他还积极从事学术研究，曾发表多篇论文. 在北京高等师范学校创办的《数理杂志》上连载发表的《微分方程式论》，对推动中国早期微分方程的学习、研究起了积极作用.

余子夷(Yú Zǐyí,1885—1970) 中国珠算教育家.1885 年生于苏州.早年就业于上海南洋公学院和爱国学社.他青年时曾参加过辛亥革命,之后,东渡日本,任横滨华侨子弟学校教师.不久回国,先后在苏州第一师范任教师兼附属小学主事、东南大学教授兼附属小学主事和杭州省立女子中学、杭州师范学校、浙江大学教师、教授.1949 年解放后,曾任浙江省教育厅副厅长、厅长等职.1957 年受极左路线迫害被撤职(后平反),1970 年 7 月 24 日病逝于杭州,享年 85 岁.他一生精研小学数学教学,民国时曾主编小学数学教材;对珠算改革也有独到见解,曾编有《笔算珠算混合教学法》(1936 年)、《民教班珠算教学研究》(1948 年)、《初级珠算教材》和《高级珠算教材》(1949)等,1965 年还翻译了日本的《新珠算初级教程》.

胡敦复(Hú Dūnfù,1886—1978) 中国数学家、数学教育家.生于江苏无锡,卒于美国西雅图.1905 年入复旦大学学习,1907 年赴美国康奈尔大学学数学,1909 年毕业后回国任职于游美学务处.1911 年清华学堂成立,任首任教务长,同年到上海创办大同学院(1922 年改名为大同大学),1912—1928 年、1941—1945 年两度任该校校长.1925 年被任命为国立北京女子大学校长,并在北洋工学院兼教职,1930—1945 年还兼任上海交通大学数学系主任,1949 年因其子之邀赴台湾休养.1951 年因美国华盛顿州立大学之聘赴西雅图任客座教授,1962 年退休.1935 年 7 月中国数学会成立时,任数学会董事会主席.为"谋学术之自立"而创办的大同大学,影响较大,是国内第一所规模较大的私立完全大学,同时设立大学部与中学部,各有 2 千多人.大同学院创建之初还成立了《大同学院丛书刊》刊编部,编写教材及教学参考书,胡敦复亲自参与编写了一批中学及大学数学教科书,有的曾被广泛采用.还参与了数学名词的起草及审定工作,为中国的近代教育事业的发展与数学传播做出了贡献.

姜立夫(Jiāng Lìfū,1890—1978) 中国数学家、数学教育家.原名蒋佑,字立夫,1920 年改用"立夫"为名.生于浙江平阳县(今苍南县),卒于广州.1911 年赴美留学,1915 年毕业于伯克利加利福尼亚大学,获学士学位,后到哈佛大学当研究生,1919 年以《非欧几里得空间直线球面变换法》为学位论文获哲学博士学位.1920 年受聘于南开大学,创办了算学系,并任系主任.1925—1927 年应邀到厦门大学任教,1927 年回南开大学.1934—1936 年到德国格丁根大学进修.1938 年任西南联大教授.1941 年任中央研究院数学研究所筹备处主任,1943 年任研究员,曾任"新中国数学会"会长.1946—1948 年在美国普林斯顿高等研究院进修.1947 年中央研究院数学所正式成立,被任命为所长.1949 年受聘到岭南大学创办数学系,任系主任.1952 年起任中山大学数学系教授,直至去世.1948 年 9 月被选为中央研究院院士.在岭南大学任教期间,曾任中国科学院专门委员.

姜立夫主要研究圆(球)素几何的矩阵理论,1945 年发表的"圆素与球素几何的矩阵理论"一文是对这一经典领域的新发展.1923 年担任了中国科学社数学名词审查委员会主席,负责起草了算学名词审查草稿,1938 年由科学名词审定委员会(姜立夫为委员)正式出版,定名为《算学名词汇编》.这是中国第一部数学名词词典.他把一生主要精力花在数学教育事业上,先后创办了南开大学和岭南大学两所大学的数学系,还曾培养了陈省身等许多著名的数学家.

胡明复(Hú Míngfù,1891—1927) 中国数学家.生于江苏桃源县(现泗阳县).曾就读于上海商业学校,1910 年毕业于南京高等商业学堂,同年考取了第二届庚子赔款赴美留学生.1914 年,毕业于美国康奈尔大学,获学士学位,1917 年获哈佛大学哲学博士学位.后回国任上海大同大学数学系教授,并主持数学系工作,还曾任国立东南大学、南洋大学、上海商科大学教授.1927 年 6 月 12 日回无锡为婶母奔丧时,溺水身亡.胡明复是中国第一位以数学为主科、以数学论文在国外获博士学位的数学家,其博士论文是"具有边界条件的线性积分——微分方程",所论及的是当时较新的领域.1914 年,他与赵元任等发起成立科学社,1915 年改为"中国科学社"(1918 年该社迁回国内),他任第一届董事,并担任会计至 1925 年.中国科学社创办了中国历史上第一份综合性现代科学杂志《科学》,在国内发行,影响很大.他为《科学》杂志的出版,在编辑和资金等方面做了大量的工作.1918 年成立科学名词审查委员会,他和姜立夫受科学社委托审定数学名词,为统一中国数学名词做出了贡献.1924 年他还应商务印书馆的邀请兼任了数学函授社主任,主持编写了一批普及性数学书籍,为中国的数学传播事业做了不少基础性工作.

李 俨(Lǐ Yán,1892—1963) 中国数学史家.生于福建福州,卒于北京.1913 年肄业于唐山路矿学堂,考入陇秦豫海铁路局(陇海铁路局前身)做工务员,1921 年升为工程副段长,1924 年起任段长,后任工程总段长及副总工程师.1955 年调中国科学院历史研究所任一级研究员,专门从事数学史研究工作,同年被选为中国科学院哲学、社会学部委员.1957 年起任中国科学院自然科学史研究室(自然科学史研究所前身)主任.

李俨是中国数学史研究的奠基人.1913 年起开

始了对中国古代数学史的研究，但在1955年之前主要是利用业余时间进行这一工作.他一生共发表论文100余篇，用现代数学知识对中国古代数学成就进行了整理和研究，并做出了重要贡献.20世纪20年代到30年代的一系列重要论文，经修订后编成了《中算史论丛》第1—4集(1933，1935，1947)，20世纪50年代又经增删调整重新编成了《中算史论丛》第1—5集(1954，1955).此外，还著有专著10多种，其中有《中国算学史》(1937)、《中国数学大纲》(上册，1931；1958年出版了增订本上册，后又出了下册)，前者曾多次印刷，流传较广，还被译成日文出版.此外，他还为中国的铁路建设，特别是陇海铁路的建设做出了一定的贡献.

钱宝琮(Qián Bǎocóng，1892—1974)　中国数学史家.生于浙江嘉兴，卒于江苏苏州.1908年考取浙江官费留学，赴英国伯明翰大学学习土木工程，1911年毕业.1912年回国任教于苏州中等工业学校；1925—1927年任教于南开大学数学系；1917—1928年任教于中央大学数学系；1928年参加筹办第三中山大学(即浙江大学)并任数学系首任系主任，至1956年一直任浙江大学教授.1956年调中国科学院自然科学史研究室任研究员.1958年起任《科学史集刊》主编.1956年之前，以教学为主要工作，业余时间从事中国数学史研究，是中国用现代数学方法研究中国传统算学的奠基人之一.著有《中国算学史》(上册，1932)、《古算考源》(1933)、《中国数学史话》(1957)、《算经十书》校点(1963)等.1964年主编《中国数学史》，1983年中国科学院自然科学史研究所编辑、由科学出版社出版了《钱宝琮科学史论文选集》.

曾昭安(Zēng Zhāoān，1892—1978)　中国数学史家.字瑊益，生于湖北宜昌县，祖籍江西吉水县，卒于湖北武汉.1917年毕业于武昌高等师范学校.1918年赴美国哥伦比亚大学留学，1925年获博士学位.1926年应邀任武昌大学数学系教授.1927年武昌大学、武昌商科大学等8所高校合并为武昌中山大学，他出任校务委员会主任.1930—1953年任武汉大学数学系主任，曾任武汉大学教务长、理学院院长、图书馆馆长等职.还曾任中国数学会理事、武汉数学会理事长、武汉大学《理科季刊》主编等职.

曾昭安在20世纪30至40年代主要研究代数理论和函数论.他曾结合数学需要编写过《超越数各论》(1938)、《行列式理论》(1938)等讲义.20世纪40年代后，主要研究中外数学史，并于1946年出版了《算术历》一书，该书写法独特，“以事系日，每日叙述学术上一、二事，或缘流以讨源，或触类以旁通”，自元月1日至12月31日止，每日追述两件历史事件，年终成册.他还热心于数学和天文学的科普活动，写过不少这方面的科普文章.1928年，武昌中山大学改名为“国立武汉大学”，他曾任过学校建设筹备委员，参与了新校址的选址、土建等工作，为武汉大学的新校建设做了不少工作.

曾昭安在学生时代就热心于数学社团活动，在武昌高等师范学校学习时，与同学一块组织了数学研究会，这对该校及后来的武汉大学的学术空气的形成有较大影响.数学研究会在20世纪20年代改名为数理化学会，还创办了《数理杂志》(1922年改名为《数理化杂志》).他还是中国数学会的倡导者之一，并在学会成立之初任理事.此外，他还热诚地支持、组织了中学数学刊物的编辑出版工作.1934年，武汉大学部分学生和教授创办了《中等算学月刊》，作为系主任，他曾捐资资助，并给以鼓励，该刊是中国最早并有影响的一种科普刊物.解放初，他还积极在武汉地区提倡和组织中学数学竞赛.除数学外，曾昭安还对天文学有研究，并著有《天文学通论》(1956).

熊庆来(Xióng Qìnglái，1893—1969)　中国数学家、教育家.生于云南省弥勒县，卒于北京.肄业于云南高等学堂及英法文专修科，1913年受云南省政府派遣赴比利时学习.次年欧战爆发，辗转到巴黎就学于巴黎圣路易中学数学专修班、巴黎大学及蒙柏里、马赛等大学，获理科硕士学位.1921年回国任教于云南工业学校和路政学校，同年秋任教于南京高等师范，并创建东南大学(现南京大学)数学系，任教授兼系主任.1926年被聘为清华大学新成立的数学系教授，并任系主任，1930年代理理学院院长.1931年赴巴黎庞加莱研究所做研究工作，并于1933年获法国理科博士学位.1934年回清华大学任教授、系主任.1937年任云南大学校长，1949年第三次赴巴黎，参加联合国教科文组织会议，后留巴黎搞研究工作.1950年因脑溢血，致右手残疾，但他仍坚持用左手工作.1957年回国，到中国科学院数学研究所任研究员，曾任函数论研究室主任.

熊庆来主要研究函数论，最杰出的学术成果是他的博士论文《关于无穷级的整函数和亚纯函数》，把波莱尔(Borel，(F.-É.-J.-)É.)的有穷级整函数理论推广到了无穷级情形，为此，这一成果被称为熊式无穷级理论.在亚纯函数、正规簇理论、代数体函数等方面，他都做出了突出的贡献.著有《关于亚纯函数及体函数，奈望林纳的一个定理的推广》一书(法国出版).在清华大学任教期间他曾培养出中国著名的数学家华罗庚及多位数学人才.在东南大学、清华大学、云南大学任教期间，还编写了《解析函数讲义》、《微分几何讲义》、《偏微分方程讲义》、《亚纯函数组理论》等教材10余种.

陈建功(Chén Jiàngōng，1893—1970)　中国数

学家.生于浙江绍兴.曾于1913年、1920年、1926年三次赴日求学,1919年同时毕业于日本东京高等工业学校和东京物理学校(夜校);1923年毕业于日本东北帝国大学数学系,后任武昌大学数学系教授;1926年赴日本东北帝国大学大学院做研究生,1929年获理学博士学位.同年回国任浙江大学教授、数学系主任.1945年抗战胜利后,曾参加接收台湾大学,并任代理校长兼教务长.1946年回浙江大学,并兼任中央研究院数学研究所研究员.1947—1948年任美国普林斯顿高等研究院研究员.1952年调复旦大学任教授,1958年被聘为杭州大学教授、副校长,同时还兼任复旦大学教授,直至去世.1948年被选为中央研究院院士;1955年被选为中国科学院物理学数学化学部学部委员.曾任中国数学会副理事长、浙江省科学技术协会主席.

陈建功是中国现代数学的奠基人之一,主要研究函数论.1928年独立地与数学家哈代(Hardy,G.)、李特尔伍德(Littlewood,J.E.)等同时解决了函数可以用绝对收敛的三角级数来表示的问题,并证明了这类函数即是所谓杨氏卷积函数.1921年发表在日本《东北数学》杂志上的"无穷乘积的若干定理"一文是中国最早的现代数学论文之一.他的研究工作涉及三角函数、直交函数级数、单叶函数、函数逼近论、广义解析函数及偏微方程等多个领域,并开创了中国在拟似共形映射领域的研究.1930年用日文出版的《三角级数论》一书,影响较大,书中创造的许多日文数学术语,至今仍被日本数学界沿用.曾在国内外发表重要学术论文60余篇,此外还著有《直交函数级数的和》(1954)、《实函数论》(1958)、《三角级数论》(上册,1965;下册,1979).1981年出版了《陈建功文集》.

何 鲁(Hé Lǔ,1894—1973) 中国数学家、教育家.生于四川广安县,卒于北京市.曾就读于南洋公学(上海交通大学前身)和清华学堂(清华大学前身),后赴法国勤工俭学留学,在里昂大学就读,于1919年获科学硕士学位.同年回国任南京高等师范学校算学教授.一年后到上海先后任教于上海中法通惠工商学院、大同大学、中国公学等校.1926年任中央大学理学院算学系主任、教授,后又任安徽大学校长.1932年任重庆大学理学院院长,1937年在云南大学理学院任院长一年左右后至解放,一直在重庆大学任职,曾任过校长、部聘教授等.解放后任西南行政公署文委主任,1956年调北京师范大学数学系任教授,后又调中国科学院出版社任总编辑.

何鲁从1919年回国后,大多时间在高校任教授,培养了不少著名科学家,其中有中国著名物理学家严济慈、数学家吴新谋等.他还对中国中学数学教学改革和课程建设做出了重要贡献.在20世纪20年代初,他参与了中国普教事业的一次较大改革,起草了新学制高中几何课程纲要,编写了《高中代数学》等中学数学教科书,并参与审订了于1938年出版的《算学名词汇编》.还主审了华罗庚的《堆垒素数论》,并以部聘教授名义,坚持授予华罗庚数学奖.他还曾著《行列式详论》(1924)、《虚数详论》(1924)、《微积分》(1928)(以上与段子燮合著),以及《二次方程式论》(1927)、《初等数学倚数变迹》(1933)等介绍现代数学的著作.

杨武之(Yáng Wǔzhī,1896—1973) 中国数学家、教育家.生于安徽合肥市,卒于上海市.1918年毕业于北京高等师范学校,曾任教于安徽省第二中学等校.1923年通过安徽省公费留学考试,赴美国先后就读于斯坦福和芝加哥大学,1926年获芝加哥大学硕士学位,1928年获博士学位.同年回国后,任教于厦门大学,第二年被聘为清华大学数学系教授,1933—1934年任代理系主任.1934年赴德国访问一年.抗战时期任教于西南联大,并曾任数学系主任.1949年解放后,任复旦大学教授,除20世纪50年代初几年外,他身体一直不好,具体执行教务很少.他曾研究代数与数论,在华林问题上颇有建树,特别是关于棱锥数的华林问题.他在博士论文中证明了"每个正整数都可以写成9个棱锥数之和".他还在双二次型的不变量、域论代数等领域做过研究工作.他是中国现代数学的先驱者之一,中国代数和数论研究的开拓者.他对陈省身、华罗庚、柯召等有重要影响,特别是华罗庚能到清华大学任职并走上数论研究的道路,与他有着密切关系.

华印椿(Huà Yìnchūn,1896—1990) 中国珠算学家.江苏无锡人.自幼随叔父学珠算,后入南京江南陆军小学求学,17岁起先后在无锡九所小学任教师、校长.1919年考入上海留法勤工俭学预备科,后转入职业教员养成所学习.毕业后在无锡公益工商中学和上海中华职业学校任数学和珠算教师,还曾任中央实业部统计处科长.解放后任上海市水产专科学校教授.他博览群书,刻苦钻研,先后编写了九部珠算著作,撰写了几十篇论文,如《珠算速计法》(1925年)、《财经珠算》、《大众速成珠算》、《百分比简捷算法》、《珠算教程》、《大众珠算》、《革新珠算》、《简捷珠算法》等.1970年,他已75岁高龄,以惊人的毅力,历时14年,写完了《中国珠算史稿》,填补了中国珠算史的空白.1979年他发表了《论中国算盘的独创性》,以科学的论证,批驳了日本的中国算盘西来说的臆断,维护了民族尊严.

华印椿大力提倡珠算教学改革,支持"三算结合"的教改实验.他是中国珠算协会创建人之一.早在1955年他就与日本后谷清一通信交换有关珠算的学术资料.中日邦交恢复后,1979年5月中日珠

算界进行了有史以来的第一次学术交流,他并亲自主持了这次大会,为以后珠算事业世界化奠定了基础.他以毕生的精力对珠算事业的发展做出了重大的贡献,被誉为"珠算泰斗".

沈百英(Shěn Bǎiyīng,1897—1992) 中国教育家和珠算改革家.江苏吴县人.江苏省立第一师范毕业,曾任江苏省立一师附小教师、上海商务印书馆附设的尚公学校教务主任、校长.1926年任商务印书馆编审员.1929年起先后任上海大夏大学、光华大学、沪江大学教师,教小学各科教学法.1956年任华东师大教育系教授、小学数学教研室主任.

沈百英曾编辑过5套小学教科书、3套儿童读物.曾任《幼童文库》、《小学生文库》、《国民教学文库》、《小学教师进修丛书》的主编.编写了《小学算术教科书》、《小学珠算教科书》、《珠算常识与珠算教法》、《小学数学教学法》等著作.他对小学数学教学有着独特创见,对珠算改革十分热心,1968年与王善彰等指导崇明县"三算结合"教改实验,取得了很大成绩,对全国"三算结合"实验影响很大.

曾炯之(Zēng Jiǒngzhī,1898—1940) 中国数学家.生于江西新建县,卒于四川西昌.原名炯,字炯之,1926年毕业于武昌高等师范学校(武汉大学前身)数学系.曾任教于江西武宁县省立第六师范学校.后考取庚子赔款欧美公费留学生.1928年秋赴柏林大学攻读数学,1929年春进格丁根大学,师从著名女代数学家诺特,E.,1934年获哲学博士学位.同年赴汉堡大学访问阿丁,E.,并继续进修.1935年7月回国,任浙江大学副教授,1937年任天津北洋大学(天津大学前身)教授,后随校迁陕西城固.1939年任教于西昌的西康技艺专科学校(1952年院系调整时撤销).1940年因胃穿孔去世.

曾炯之是国际上早期进入抽象代数领域,并做出重要贡献的数学家,是中国第一个在该领域工作的学者.1933年证明了"设Ω为代数封闭域,则$\Omega(x)$上所有以$\Omega(x)$为中心的可除代数只有$\Omega(x)$自己",这一定理在日本《岩波数学百科辞典》中被称为曾(炯之)定理.1936年推广了拟代数封闭域即C_1域,并引进了C_i域的概念,还证明了另一个定理,此定理1951年被兰(Lang,S.)重新独立发现,现被称为曾-兰定理,而C_i被称为曾层次(sheaf).这一定理连同他1934年证明的定理成了关于超越扩张的布饶尔群的大多数研究工作的基础.

傅种孙(Fù Zhòngsūn,1898—1962) 中国数学家、数学教育家.生于江西高安县,卒于北京.1920年毕业于北京高等师范学校,并留校任讲师,1928年任教授.还曾任教于北京女子师范大学、北平大学女子文理学院、北京大学、辅仁大学.在抗战期间任教于西北临时大学、西北大学.1945—1947年赴英国考察,回国后任北平师范学院数学系主任,1949年以后任北京师范大学教务长、副校长.1935年中国数学会成立时任评议委员.1950年任中国数学会常务理事,曾任《中国数学杂志》(《数学通报》的前身)总编辑.

傅种孙主要研究初等数学,曾研究过群论.曾为中国的数学教育及数学普及工作做出过重要贡献,因长期从事师范教育,对中国的中学数学教育界有深远影响.与程廷熙合著的《初级混合数学》(1923—1925,共六册),使用较广.另外还著有《高中平面几何教科书》(1933)和《初等数学研究》(1935—1937).

孙光远(Sūn Guāngyuǎn,1900—1979) 中国数学家、数学教育家.生于浙江余杭县,卒于南京.1920年毕业于南京高等师范学校,曾留校任教.1925年赴美国芝加哥大学深造,1928年获博士学位.同年回国任清华大学数学系教授,并兼任北京大学教授.1933年到南京任中央大学数学系教授,曾任系主任、理学院院长,并兼任金陵大学教授.1949年南京解放,中央大学改名为南京大学,他出任首任数学系主任,解放前曾两次任南京数学会会长.

孙光远是中国射影微分几何的先驱者,还曾研究过数理逻辑,他是获博士学位后继续从事研究并在国外发表论文的第一个中国数学家.陈省身曾是他指导的研究生,在他指导下研究射影微分几何,开始了数学研究生涯.他的学生中还有多人后来成了中国的知名数学家,如柯召等人.他与人合著的《微分积分学》和他自己撰写的《空间解析几何》、《微分几何》,在中国数学发展史上都有较大影响.在他任南京数学会会长期间,为了提高中学数学教师水平,连续数年举办了暑期中学数学教师进修班,对基础教育的发展起了积极推动作用.

王福春(Wáng Fùchūn,1901—1947) 中国数学家.生于江西安福,卒于江西南昌.1927年毕业于武昌中山大学,并留校任教,后因学校停办,任教于江西省立葆灵女子中学.1929年到日本东北帝国大学留学.1936年回国,任暨南大学教授,还曾任教于西北农林专科学校等.1938—1946年任教于浙江大学.1946年受聘于南昌的中正大学,任首任数学系主任,直至去世.1946年曾被聘为中央研究院数学研究所兼职研究员.

王福春主要研究函数论,涉及傅里叶级数和黎曼ζ函数,在强性求和、黎斯求和、绝对求和、黎曼ζ函数等方面都卓有贡献.1933年解决了哈代(Hardy,G.H.)于1931年提出的两个问题,并推广了赞格蒙(Zygmund,A.)关于黎斯对数平均求傅里叶级数的一个定理.在日本期间的工作涉及黎斯对数平均、切萨罗(Cesaro)平均、收剑因子、黎曼ζ函数等.抗战期间,除担任教职外,还抱病坚持研究工

作，于1942—1945年曾发表论文19篇.

余介石(Yú Jièshí，1901—1968) 中国数学教育家、珠算史家. 字竹平，号慰慈，安徽黟县人. 1923年毕业于南京大学数学系. 曾任东南大学、中央大学讲师，重庆大学、四川大学、金陵女子文理学院、北京农业机械化学院教授. 他著有中学、大学数学用书40余部，编译高等数学10余部. 晚年从事珠算研究，编写了《速成珠算法》、《珠算教学研究通讯》. 对珠算算理和珠算史很有研究，造诣颇深. 他第一次撰文批判中国算盘西来说，20世纪60年代他联络珠算界人士，积极建议成立珠算组织，推动珠算技术发展. 但不幸"文革"动乱受到迫害，含冤而死. 1983年北京农业机械化学院为其平反昭雪，召开了追悼会.

江泽涵(Jiāng Zéhán，1902—1994) 中国数学家、数学教育家. 生于安徽旌德，卒于北京. 1926年毕业于南开大学，1927年赴美留学，1930年获哈佛大学博士学位. 1931年回国任北京大学数学系教授，1934—1952年任数学系主任. 抗战期间在昆明兼任西南联大数学系主任，1946—1947年兼任北大理学院代理院长. 1936—1937年曾到美国普林斯顿高等研究院工作. 1947—1949年在瑞士高等理工学院工作. 1952年以后一直任北京大学教授，1986年退休，1994年3月29日在北京逝世. 他是中国数学会的创建人之一，1935年中国数学会成立，任副理事长，1983年起任名誉理事长. 1962—1983年任北京市数学会理事长，后任名誉理事长. 1955年被选为中国科学院物理学数学化学部学部委员.

江泽涵主要研究拓扑学，是中国拓扑学研究的开拓者. 早期研究莫尔斯理论在分析学中的应用，取得了不少成果，后来又在复迭空间和纤维丛等领域做了许多工作，最重要的贡献是在不动点类理论的研究方面. 20世纪30年代，尼尔森(Nielsen，L.)提出了不动点类的概念，但使用了双曲几何作工具，不便推广. 他首先使用了复迭空间代替非欧几何，为尼尔森理论的发展扫清了道路. 1961年，他又带领了学生致力于尼尔森理论的研究. 他和姜伯驹一起提出了自影射的伦型概念，在他指导下，姜伯驹和石根华在尼尔森数的计算和实现方面取得了重大成果，在国际上引起了很大反响，被认为"打破了50年来国际上在该领域研究的长期停滞的状态". 他们3人并因此获1978年全国科学大会奖. 他为中国培养了一批拓扑学研究人才. 他还著有《拓扑学引论》(1964)、《不动点类理论》(1979)和《多面体的欧拉定理和闭曲面的拓扑分类》(1964)等专著.

苏步青(Sū Bùqīng，1902—) 中国数学家、教育家. 生于浙江平阳县. 1919年赴日求学，1927年毕业于日本东北帝国大学，并入该校研究院作研究生，1931年1月获理学博士学位. 同年3月回国任浙江大学副教授，1932年任教授和数学系主任，1949年杭州解放后曾任教务长. 曾主持中国科学院数学研究所的筹建工作. 1952年起任复旦大学教授，并兼任教务长. 1956年任副校长，1978年被任命为校长. 1958年还兼任复旦大学数学研究所所长. 1936年曾任《中国数学会学报》主编，1980年起任《数学年刊》主编. 1955年被选为中国科学院物理学数学化学部学部委员. 还曾任中国数学会副理事长. 现为复旦大学名誉校长、中国数学会名誉理事长，民盟中央参议委员会主任，1988年当选为全国政协副主席，1993年连任.

苏步青主要研究微分几何、计算几何，特别在仿射与射影微分几何学方面有着重要贡献. 在仿射微分几何学方面，引入了仿射锥曲面和仿射旋转曲面. 在射影曲线论方面，用富有几何意味的构图建立了一般射影曲线的基本理论. 在射影曲面论方面，不仅发展了一般理论，并深入地研究了许多重要类型的曲面和共轭网，得出了有意义的几何构图. 在一般空间的微分几何学方面也有很多重要贡献，特别是在K展空间理论方面. 20世纪70年代又对计算几何进行了研究，首创性地把代数曲线论中的仿射不变量引入了计算几何学，并得到了一系列重要成果. 他和他的学生把这些理论成功地应用到了中国造船工业的船体数学放样，在船体建造中缩短了周期、提高了质量. 后来又把这些理论应用到了建筑、服装和内燃机等行业的计算辅助设计系统中. 1956年曾获国家自然科学奖二等奖；1993年获日本天皇授予的"勋二等瑞宝章"，并表彰了他为中日文化学术交流做出的贡献. 他先后发表论文150多篇，著有《微分几何学》(文言版，1948，语体文版，1988)、《一般空间的微分几何》(1958)、《仿射微分几何》(1982)、《计算几何》(1981，与刘鼎元合作)等专著9种. 科学出版社1983年和1986年还分别出版了《苏步青数学论文选集》和《苏步青文选集》.

朱公谨(Zhū Gōngjǐn，1902—1961) 中国数学家. 字言钧，生于浙江余姚. 1919年入清华大学，后因参加学生运动而离校. 1922年入德国格廷根大学，1927年获博士学位，师从库朗(Courant，R.). 同年回国任上海光华大学教授，1932—1937年任光华大学副校长并主持数学系工作，在此期间，他还曾于1930—1931年兼任南京中央大学教授. 1937年抗日战争开始，任教于光华大学上海分部，并任教务长. 1941年光华大学上海分部停办，失业两年. 1943年任教于上海交通大学. 1945年抗日战争胜利后，再任光华大学副校长，同时兼任上海交通大学、同济大学教职. 1952年任上海交通大学教授；1956年任西安交通大学教授；1960年回上海交通大学任教授，直至去世. 还曾任数学名词审查委员会委员. 中国数

学会的发起人之一，并曾任中国数学会理事会理事、常务理事.

朱公谨在博士论文中曾用直接法证明了一类变分问题解的存在性.在他之前，这类变分问题一般采用间接地归结为求解欧拉方程的方法来解决.他的方法后来被普遍使用.朱公谨一生主要从事数学教育及数学普及工作.1927年起曾在《光华学报》上发表连载“数理丛谈”，1935年集册为《数理丛谈》，在商务印书馆出版，到1948年已出版了六版.他从1937年开始还翻译了《柯氏微积分学》(中华书局，上册1949；下册1952；原著者 Couraut，R.)，此书曾在20世纪40年代末和50年代初在中国各大学广为采用.他还发表过有关变分学、数理逻辑及哲学等方面的论文.他的译著还有《实数探原》(商务印书馆，1940；原著者 Dedekind，R.)等；此外，他还编著过工科院校的教科书《高等数学》(高等教育出版社，1958).

周绍濂(Zhōu Shàolián，1905—1970)　中国数学家.又名周慕溪，生于湖北汉阳县，卒于上海市.1928年毕业于东南大学(后改名为中央大学)，后曾任教于湖北省立一中和湖北省立师范学校.1932年赴法留学，1933年入巴黎大学，1936年获法国国家博士学位.同年回国任山东大学数学系教授、系主任；1937年被聘为重庆大学和中央大学数学教授，并任重庆大学数学系主任；1946年任教于上海暨南大学，同时兼任中央银行经济研究专员，1947年兼任上海商业专科学校校长.1949年上海解放后，任教于复旦大学；1955年调任兰州大学数学系教授、系主任.1970年2月回上海探亲期间，突发脑溢血去世.他在兰州的15年中，有13年是在对他不公正的对待中度过的.

周绍濂主要研究拓扑学和几何学，留法期间，曾到德国、波兰等国讲学、演讲，他在点集拓扑方面的成果曾受到国际数学界的关注.他是在这方面获得重要成果的首位中国数学家.他还研究确定了一些在有限制拓扑群下的测度性质，研究了 n 维流形上的 p 维向量，并把向量几何中的一些性质纳入了黎曼流形.他在向量几何方面，研究确定了四维空间动标形运算公式，推广了通常空间中的彭莱(Bonnet，O.)的挠率公式.1957年后，在极其困难的条件下，他还从事稳定性几何理论的研究，推广了关于线性微分方程最小特征数的理论，并进行了翻译和编著工作，可惜未能出版.他著有《人寿保险计算学》(1945)，编译了《微分几何》(1950)、《曲面几何》(1951)、《黎曼几何与张量算法》等专著.

吴大任(Wú Dàrèn，1908—1997)　中国数学家.生、卒于天津.1930年毕业于南开大学数学系.后任教于中山大学和南开大学.1933年考取中英庚子赔款留英生，到伦敦大学学习，1935年获硕士学位，后到德国汉堡大学进修.1937年回国任教于武汉大学，1942年任教于四川大学，1946年回南开大学.1949年任南开大学教务长，1961年任副校长.1983年辞去领导职务.曾任中国数学会常务理事、副理事长、名誉理事长等.

吴大任主要研究几何学，是中国较早从事积分几何研究的数学家之一.曾首次把欧氏空间积分几何的基本成果推广到三维椭圆空间.还证明了关于欧氏平面和空间中的凸体弦幂积分的一系列不等式.20世纪70年代曾参加了齿轮啮合理论的研究，与人合作研究了“平面二次包络环面蜗杆传动”，从数学上严格证明了二次包络原理，为研制工作打下了理论基础.研究工作还涉及射影几何、非欧几何、圆素与球素几何、微分几何应用等方面.他还长期从事教学与科研的领导管理工作，曾对中国教育领导体制、学制、学年制改为学分制等问题提出过不少有益的建议.所著《微分几何讲义》(第四版，1981)曾获1983年全国优秀科技图书一等奖和1988年国家教委优秀教材一等奖.还与人合作编著了《齿轮啮合理论》(中文版，1985；英文版，1992).

庄圻泰(Zhuāng Qítài 1909—1998)　中国数学家.生于山东莒县.卒于北京.1932年毕业于清华大学，1934年入该校理科研究所算学部做熊庆来的研究生，两年后毕业.1936年被派往法国巴黎大学留学，1938年获博士学位.1939年到云南大学任教，历任副教授、教授，1946年起任北京大学教授.

庄圻泰主要研究函数论.1951年在一个亚纯函数的增长性与其导数的增长性的比较方面取得了重要成果，该成果不仅常被引用，而且还引出了后来的一些研究工作.他还把奈望林纳(Nevanlinna，R.)的亚纯函数理论中的第二基本定理推广到了小函数情况.此外，在亚纯函数的正规族理论方面也有重要成果.在函数的增长性的研究中，他曾改进了波莱尔(Borel，(F.-É.-J.-)É.)的一个重要定理，简化了型函数的构造.曾获1979年全国科学大会奖，1985年国家教委优秀成果奖.还编著了《亚纯函数的奇异方向》等专著.

刘书琴(Liú Shūqín，1909—1994)　中国数学家.生于山东省寿光县，卒于陕西西安市.1932年毕业于北平师范大学，曾任教于青岛胶济铁路中学.1935年赴日本留学，就学于仙台东北帝国大学.1937年7月，因抗日战争爆发，中断学业回国.1938年任北平师范大学教授，1944年到西北，后一直任教于西北大学.曾任陕西省数学会副理事长、名誉理事长.20世纪80年代创刊了《纯粹数学与应用数学》，并任主编.

刘书琴主要研究几何函数论.1954年他在西北

大学建立了一个几何函数论研究基地，组织中青年教师讨论班，几年后成绩显著.他和他领导的集体曾在单叶函数的系数问题、对称单叶函数、单叶函数的开始多项式以及 k 次对称型实照函数等方面取得了不少成果. 20 世纪 80 年代，他又组织了“几何函数论中支撑点和极点的理论”的研究，并取得了一系列成果.著有《单叶函数》(1988)，有译作《范氏高等代数学》(1936)和《复变函数论》(1963).

华罗庚(Huà Luógēng，1910—1985)　中国数学家.生于江苏金坛县，1985 年 6 月 12 日在日本东京大学作学术报告时突发心脏病去世. 1925 年初中毕业后在其父的店铺当店员，并自学数学，1928 年任金坛初中会计. 1929 年、1930 年先后在上海《科学》上发表两篇文章，引起了清华大学数学系教授们的注意，1931 年受数学系主任熊庆来之邀到清华大学任图书馆管理员，1933 年被聘为助教，1935 年升为教员. 1936 年获中华文化教育基金会资助赴英国剑桥大学进修. 1938 年任西南联大教授. 1946 年访问苏联；同年秋去美国普林斯顿高等研究院做研究工作并任教于普林斯顿大学. 1948—1950 年任伊利诺伊大学教授. 1950 年春回国后任教于清华大学并筹建中国科学院数学研究所. 1952—1983 年任数学研究所所长. 1955 年被选为中国科学院物理学数学化学部学部委员、副主任. 1958 年任中国科技大学副校长兼数学系主任. 1980—1983 年还同时任应用数学研究所所长；1978 年任中国科学院副院长. 1951—1983 年任中国数学会理事长.曾获法国南锡大学(1979)、香港中文大学(1983)和美国伊利诺伊大学(1984)荣誉博士称号. 1982 年被选为美国全国科学院外籍院士、1983 年被选为第三世界科学院院士、1985 年被选为德国巴伐利亚科学院院士.还曾任第一至第六届全国人大常委会常务委员、第六届全国政协副主席等职.

华罗庚主要研究解析数论、典型群、矩阵几何、自守函数论与多复变函数论，是中国在这几个领域的研究工作的开拓者. 1938 年解决了任意多项式、系数为整数的一般完整三角和的估计这一历史难题，现称为“华罗庚定理”. 1949 年证明了每一个半自同构或为自同构或为反自同构，由此推出特征 $\neq 2$ 的体上的一维射影几何的基本定理；同年还证明了体的每一个真正规子体均包含在它的中心之中. 20 世纪 40 年代中期，开创了矩阵几何这一研究领域.他以精密的分析与矩阵技巧，结合群表示论得出了典型域的完整正交系，在抽象调和分析、复分析与偏微分方程等研究中，都很有影响.借助于典型域的完整正交系，他又得到了典型域的柯西核、塞格核、伯格曼核及泊松核等，并给出了这些核的表达式. 20 世纪 50 年代末，他倡导应用数学研究，并曾从事近似分析与经济数学的研究.后又亲自到基层推广普及“优选法”与“统筹法”. 1956 年因“典型域上的多复变函数论”的研究获国家自然科学奖一等奖，还和王元获陈嘉庚物质科学奖.他先后发表论文 150 多篇，著有《堆垒素数论》(1940—1942 年写成.俄文版 1947 年出版；中文版，1957 年出版，另还有德、英、日文版)、《数论导引》(1957)、《多复变函数论中的典型域的调和分析》(1959)、《指数和的估计及其在数论中的应用》(1963)、《典型群》(1963，与万哲先合作)、《数论在近似分析中的应用》(1978；与王元合作)等 10 种专著.此外，还编撰教材、科普著作 10 余种. 1983 年德国斯普林格出版社出版了他的《文选》，1984 年上海教育出版社出版了《华罗庚科普著作选集》.

柯　召(Kē Zhāo，1910—　)　中国数学家.生于浙江温岭. 1933 年毕业于清华大学算学系，后任教于南开大学. 1935 年考取庚子赔款留学生，赴英国曼彻斯特大学留学，1937 年获博士学位. 1938—1948 年任四川大学教授，1948—1952 年任重庆大学教授，以后一直任四川大学教授.在四川大学历任数学系主任、教务长、副校长、校长、数学研究所所长、名誉所长. 1955 年被选为中国科学院物理学数学化学部学部委员.还曾任中国数学会副理事长，《数学年刊》副主编、《四川大学学报》(自然科学版)主编.

柯召主要研究领域为数论、代数、组合数学等.在二次型和不定方程方面的研究做出了重要贡献.在表二次型为线性型的平方和、表二次型为不可分解型以及二次型的等价分类等问题上都取得了重要成果. 1940 年证明了不定方程 $x^x y^y = z^z$，当 $(x, y) = 1$ 时无解，当 $(x, y) > 1$ 时有无穷多组解. 1962 年证明了不存在三个连续数都是正整数的乘幂，并证明了方程 $x^2 - 1 = y^n$，在 $n > 3$ 时，无 $xy \neq 0$ 的正整数解，使这两个历史难题一个得以解决，一个得到了重大突破.在组合论中的交集问题上，1960 年和爱尔特希(Erdös，P.)等合作给出了有名的爱尔特希-柯-拉多定理，为极值集论的迅速发展开辟了道路.他的专著有《谈谈不定方程》(1980，与孙琦合作)、《组合论》(上册，1981，与魏万迪合作)、《数论讲义》(上、下册)(1986—1987，与孙琦合作).此外，还有《矩阵论》等多种译作.

李国平(Lǐ Guópíng，1910—1996)　中国数学家.生于广东丰顺县，卒于湖北武汉市. 1933 年毕业于中山大学数学天文系，随之任广西大学讲师. 1934—1936 年为日本东京帝国大学数学科研究生. 1937 年被推荐为中华文化基金委员会研究员赴法国庞加莱研究所做研究工作，1939 年回国，任四川大学教授. 1940 年起任武汉大学教授，直至去世，历任系主任、数学研究所所长、副校长等职. 1955 年被

选为中国科学院物理学数学化学部学部委员. 1956—1958年曾主持筹建了中国科学院数学计算技术研究所,1979年重建为中国科学院数学物理研究所,并任所长. 还曾任湖北省科协副主席、中国系统工程学会副理事长兼学术委员会主任、《数学物理学报》主编.

李国平主要研究函数论、数学物理等. 在半纯函数、整函数和函数逼近论等方面曾做过多年的研究工作. 1936年提出了半纯函数(包括有限级与无限级)的波莱尔方向与填充圆的统一理论,在辐角分布理论方面卓有贡献,在惟一性、有理函数表写问题、整函数理论在函数序列的封闭性问题上的应用、解析函数逼近等一系列问题上都成果卓著. 1948年还给出了概周期函数的准解析性的判定准则. 在微分方程和数学物理等领域也取得了不少成果,1965年把纤维丛理论应用到了基本粒子理论的研究,提出了纤维丛的微积分概念以探讨基本粒子的内外运动. 著有《半纯函数的聚值线理论》(1958)、《自守函数与闵可夫斯基函数》(1979,与郭友中等合作)、《近代函数论》(1983,与刘怀俊等合作)等10余种专著.

许宝騄(Xǔ Bǎolù,1910—1970) 中国数学家. 生、卒于北京. 1928年进燕京大学,学化学二年后,到清华大学改学数学. 1933年毕业,获学士学位,任教于北京大学. 1936年考取庚子赔款留学生,赴英国伦敦大学学习数理统计. 1938年获哲学博士学位,1940年获理学博士学位. 同年回国被聘为北京大学教授,后随校南迁合并到西南联大. 1945—1947年曾被聘任为美国伯克利加利福尼亚大学、哥伦比亚大学和北卡罗来纳大学的访问教授. 1947年回北京大学任教. 1956年北京大学组建概率论数理统计教研室,他任主任,直至去世. 1955年被选为中国科学院物理学数学化学部学部委员.

许宝騄主要研究概率论和数理统计. 在数理统计领域,1938年他给出的检验方法,被称为"许方法",直到现在仍被认为是解决该类检验问题的最实用的方法. 在线性模型的二次估计、多元分析中若干分布的推导等方面他都做出了重要贡献. 他还促进了矩阵论在多元分析中的应用,发展了矩阵论本身的某些技巧. 论证了一元线性假设似然比检验优良性,证明了似然比检验在所有功效函数仅依赖一个非中心参数的检验类中是一致最强的等. 在概率论领域中,对极限定理也做出了卓越的贡献,给出的方法不仅可以用来解决η分布的渐近问题,还可解决样本高阶中心矩、样本相关系数及样本的t统计量的类似问题,是在加强独立随机变量序列大数律结论方面有基础性而有影响的工作. 另外在矩阵论、马氏过程理论、试验设计和组合学、变叙(即次序统计量)的极限分布等方面,亦卓有贡献. 由于他主持的进修班很有成效,为中国概率统计学科的建立与发展做了大量的工作. 1981年科学出版社出版了《许宝騄文集》,1983年斯普林格出版社出版了他的外文版文集.

吴新谋(Wú Xīnmóu,1910—1989) 中国数学家. 生于江苏江阴. 1932年毕业于中央大学数学系,后任教于江阴县立中学,1934—1937年任清华大学数学系助教. 1937年公费留学法国. 1951年回国,任中国科学院数学研究所研究员,1956年起任微分方程研究室主任. 曾任中国数学会理事、常务理事、《中国大百科全书》(数学卷)编委和微分方程分支学科主编. 1988年11月离休后定居江苏张家港市,1989年4月因突发脑溢血去世.

吴新谋早期研究粘性流体运动的稳定性问题. 20世纪40年代开始集中于偏微分方程的研究,曾研究过波动方程时向平面上柯西问题(多个实变数函数的解析延拓)的不适定性,并取得了重要成果. 后来还曾倡导、开拓了混合型、奇型方程、椭圆组的定义、拟线性双曲型方程组间断解等方面的研究. 在他的组织、指导和亲自参与下,在这些方面的研究都取得了一系列成果. 他还曾主持偏微分方程方面的研究班和讲习班,并由此培养出了一批从事偏微分方程的研究人才. 他的著作有《数学物理方程讲义》(1956)、《数学物理方程》(共三册,1957).

蒲保明(Pǔ Baǒmíng,1910—1988) 中国数学家. 生于四川金堂县,卒于四川成都市. 1933年考人华西协和大学,1937年毕业,获学士学位,任教于成都华美女中. 1939年在四川大学和武汉大学做研究工作. 1941年任华西协和大学数学系讲师,1944年升为副教授. 1947年获国际红十字会奖学金赴美国锡拉丘兹大学留学,1948年获硕士学位,1950年获哲学博士学位,曾任教于伯克利加利福尼亚大学. 1951年回华西协和大学任教授;1952年调人四川大学任教授,并被任命为数学系主任,直至1984年. 1978—1984年,他还兼任四川大学数学研究所副所长. 1983—1985年,任中国模糊数学与模糊系统学会首届理事长,后改任名誉理事长. 也曾任中国数学会理事.

蒲保明的研究工作涉及函数论、微分几何与拓扑学等. 他曾在半纯函数方面对奈望林纳定理作过推广,20世纪50年代还推广过瓦利隆(Valiron, G.)和波莱尔(Borel,(F.-É.-J.-)É.)的有关定理. 1952年,他给出了二维不可定向黎曼流形的不等式$A\geqslant kl^2$,对同胚于二维射影平面和麦比乌斯带的黎曼流形的最佳k值,曾被国外同行称为"蒲保明不等式"或"薄保明定理". 1977年,他和刘应明合作解决了有关模糊(Fuzzy)点的概念及其邻近构造以及收敛性两个基本问题,被认为是模糊拓扑方面的基础

性工作.他在点集拓扑学方面也卓有成就.他与人合作著有《拓扑学》(1985).

陈省身(Chén xǐng - shěn,1911—) 美籍华裔数学家.生于浙江嘉兴.1930年获南开大学理学学士学位,1934年获清华大学理学硕士学位,1936年获德国汉堡大学理学博士学位.1936—1937年在法国巴黎大学作博士后研究.1937—1943年任西南联大数学教授;1943—1945年任美国普林斯顿高等研究院研究员;1946—1948年任中央研究院数学研究所代理所长;1949—1960年任美国芝加哥大学数学教授;1960—1979年任伯克利加利福尼亚大学数学教授,1979年开始为荣誉教授;1981—1984年任伯克利数学科学研究所所长,1984年起任名誉所长;同年开始又任南开数学研究所所长.1961年入美国籍.1948年当选为中央研究院院士,1961年当选为美国全国科学院院士,1963年当选为美国艺术与科学学院院士,还是第三世界科学院创始院士、英国皇家学会外籍会员、意大利国家科学院和法国科学院的外籍院士,1995年成为中国科学院外籍院士.先后被香港中文大学(1969)、美国芝加哥大学(1969)、德国汉堡大学(1971)、南开大学(1985)等多所大学授予荣誉博士称号.他还是国内北京大学、南开大学、中国科学院系统科学研究所等14所大学和研究机构以及日本东北大学的名誉教授.1962—1964年曾任美国数学会副主席,并曾应邀三次在国际数学家大会上作报告:1950年作一小时全体会议报告,1958年作半小时报告,1970年作一小时全体会议报告.

陈省身主要研究微分几何、拓扑学,工作涉及射影微分几何、欧几里得微分几何、积分几何、示性类、极小子流形、全纯映射、网、外微分系统和偏微分方程等方面.在这些方面他的许多理论、概念、方法等成果影响深远,因此公认是20世纪的大数学家之一.在德国期间,他曾系统地研读了《微分方程组论》,了解了嘉当-凯勒理论,后又到巴黎随嘉当(Cartan,É.)工作学习近一年,这些对其后来的工作有极大影响.他早期工作主要研究几何结构及等价问题,对等价问题作了详尽地解释,并解决了许多具体的等价问题.1943年到美国普林斯顿高等研究院不久就给出了广义高斯-邦尼公式的一个新的内蕴证明.证明不仅有新意而且解决了技术上的困难,并还开创了许多新的发展,从而解决了微分几何最重要和最困难的问题.在普林斯顿的二、三年中还发现了"陈示性类",建立了具体的分类空间,用主丛上联络曲率计算示性类的微分形式代表."陈示性类"已成为微分拓扑、微分几何、复流形理论、代数几何等许多领域研究的不可缺少的有力工具,而且它还是把这些不同领域的研究融合在一起的纽带.他曾在中国和美国创办了三个研究所,即40年代的中央研究院数学研究所,1981年创办的美国伯克利数学科学研究所,1984年创办的南开大学数学研究所.他还培养了大批的数学人才,在中央研究院期间训练的一批青年现在都已成为国内外卓有贡献的重要数学家.此外,他还指导了40多位博士研究生,其中丘成桐曾于1982年获菲尔兹奖,现已成为国际数学家.除了获得诸多荣誉外,他还获过多种奖励,其中有1970年美国数学协会的查文尼特奖、1975年美国国家科学奖、1982年德国洪堡奖、1983年美国数学会斯蒂尔奖和1983—1984年度的沃尔夫数学奖等.他的著作有《复流形》(Complex Manifolds, 1956)、《微分几何讲义》(1983,与陈维桓合作)等多种专著.斯普林格出版社出版了他的《文选集》(Seleded Papers; vol. I. 1978; vols. Ⅱ. Ⅲ. Ⅳ. 1989),北京科学出版社出版了《陈省身文选——传记、通俗演讲及其他》(1989).

李华宗(Lǐ Huázōng,1911—1949) 中国数学家.生于广州,卒于香港.1933年毕业于中山大学,后任广西大学数学系讲师.1935年考取中英庚子赔款留学生,赴英国爱丁堡大学学习,1937年获博士学位.1938年任四川大学教授,1942年任武汉大学教授.1944年被聘为中央研究院数学研究所兼职研究员,1946年被聘为专任研究员.1947年应邀到英国剑桥大学做研究工作,后因慢性肾炎,在香港医院去世.

李华宗主要研究微分几何学、李群、二次型、矩阵论等.早期研究切变换的微分几何学,并取得了重要成果,1946年对非齐次切变换定义了张量和拟张量,并导出了其不变量.1947年对哈密顿系统引进了泛积分不变量的概念,并证明了只有一个奇数阶的泛积分不变量.对三维实李代数进行过分类,并把分类表示为适当的线性群的代数.在特征不为2的代数闭域上的克黎福特代数、二次型的合成问题的研究中所取得的成果受到了国内外学者的重视.他还是四元数矩阵的特征问题研究的开拓者之一,研究工作并涉及到了量子力学.短短十几年中,他在国内外重要杂志上发表论文竟达30余篇.

周炜良(Zhōw,Wěiliáng,1911—1995) 美籍华裔数学家.生于上海,卒于美国马里兰州巴尔的摩.1928年赴美国读书,1931年毕业于芝加哥大学,获学士学位,1932年获硕士学位.后去德国格丁根大学攻读博士学位,1933年转到莱比锡大学,1936年获博士学位.回国后任南京中央大学数学教授一年,抗战时期滞留上海.1946年被上海同济大学聘为教授,于1947年到普林斯顿高等研究院作访问研究,1948年任约翰斯·霍普金斯大学副教授,1950年升为教授,1955—1966年任数学系主任,1977年

退休.1959年当选为台北中央研究院院士.

周炜良主要研究代数几何,对20世纪前期的代数几何的发展做出了许多重要贡献,是此领域的重要学者之一.1937年,他指出任意n维射影空间ρ^n中不可约射影族X可惟一地由一个配型F_x所决定,配型的坐标被称为周炜良坐标,并还曾证明了著名的周炜良定理:若一个紧致复解析流形是射影的,则它必定是代数簇.为此,代数几何界建立了周炜良族,1956年又建立了周炜良环.这些概念对代数几何的许多领域的发展起到了重要的作用.他还在复解析流形、代数几何中的退化原理、环上代数簇的上同调理论、连通性定理等代数几何的多个方面进行过工作,并都取得了一定成果.1939年发表的"关于一阶线性偏微分方程组",30多年后成了非线性连续时间系统可控性数学理论的基石之一.

胡世华(Hú Shìhuá,1912—) 中国数学家.上海人.1935年毕业于北京大学哲学系.1936—1941年先后在奥地利维也纳大学、德国明斯特大学学习数学,研究数理逻辑及数学基础,并获博士学位.1941—1943年任中山大学数学天文系副教授,1943—1946年任重庆中央大学哲学系教授,1946—1953年任北京大学哲学系教授,1950—1962年任中国科学院数学研究所研究员、数理研究室主任,其间1958—1963年兼任中国科技大学工程逻辑教研室主任.1963年起任中国科学院计算技术研究所和软件研究所研究员,1979年起兼任北京计算机学院院长、名誉院长.1980年被选为中国科学院物理学数学部学部委员.

胡世华主要研究数理逻辑、数学基础及计算机科学.早期在博士论文中就建立了拓扑空间"非完整点"的概念及理论.20世纪40年代末到50年代初研究多值逻辑,给出了把任何一个完全的具有函数的完全性的有穷值命题演算嵌入到一个阿列夫值命题演算中去的方法.20世纪50年代末转向了递归函数和递归算法的研究,提出了一般递归函数具有某种原始递归性.1960年在国际上首先建立了有穷基自由半群的递归函数论、算法理论.后来曾考虑过计算机程序设计语言的描述,提出过"原形文法"的理论和概念.还研究了可计算函数在证明论中的应用.在1990年发表的三篇论文中提出了称为递归结构的一类代数结构,建立了递归结构的形式系统并给出了判定其语句的可判定性充要条件等,证明了目前数论中许多未解决问题是可判定的.著作有《数理逻辑基础》(上,下册,与陆钟万合作).

闵嗣鹤(Mǐn Sìhè,1913—1973) 中国数学家.生、卒于北京.1935年毕业于北平师范大学.1936—1937年任教于北京师范大学附中.1937年被聘为清华大学助教,后随校南迁昆明,任教于清华、北大、南开三校合并后的西南联大.1945年考取公费留学,到英国牛津大学研究解析数论,1947年获博士学位,后又到普林斯顿高等研究院作研究工作一年.1948年回清华大学任副教授,1950年升为教授,1952年起任北京大学数学力学系教授.还曾任中国科学院数学研究所专门委员、北京市数学会理事等.1973年10月10日,因心脏病猝发而去世.

闵嗣鹤研究工作涉及数论、几何、调和分析、微分方程、复变函数、多重积分的近似计算及广义解析函数等,主要贡献在解析数论方面,特别是三角和估计和黎曼ζ函数理论.1940年在"相合式解数之渐近公式及应用此理以讨论奇导级数"一文中给出的完整三角和的值估计,优于莫德尔(Mordell,L.J.)的著名估计所能直接推出的渐近公式.此文章获中国科学社高君韦女士纪念奖.1947年研究了$\zeta(1/2+it)$的估计,得到了当时最好的结果.在黎曼猜想方面,1956年首先定出了$N_0(T)>AN(T)$中的A值$\geq(60\ 000)^{-1}$.这一结果一直保持到1974年,国外才有人做了进一步改进.在指导陈景润研究哥德巴赫猜想上有独特贡献.1969年起又在滤波问题上做出了贡献,为中国石油、地质勘探设备的制造攻克了理论关键,为中国数字石油勘探首创了一套数学方法.著作有《初等数论》(1957,与严士健合作)、《数论的方法》(上册,1958,下册,1981)、《地震勘探数学技术》(一册、二册,合作编著,1974)等.一生发表论文约50篇.有《闵嗣鹤论文选集》(1991)行世.

樊 畿(Fan Jī,1914—) 美籍华裔数学家.生于杭州,1954年入美国籍.1936年毕业于北京大学数学系,后留校任教.1939年赴法国随弗雷歇(Fréchet,M.-R.)学习,1941年获法国国家博士学位.1942—1945年在法国国家科学研究中心、庞加莱研究所从事研究工作.二次大战后赴美国,1945—1947年是普林斯顿高等研究院成员.1947—1960年先后任圣母大学助理教授、副教授、教授.1960年在韦恩州立大学任教一年.1961—1965年任西北大学教授.1965年起任圣巴巴拉加利福尼亚大学教授,1968—1969年任系主任,1985年退休.1964年被选为台北的中央研究院院士,并于1978—1984年任该院数学研究所所长.1960年兼任《数学分析及其应用杂志》(Journal of Mathematical Analysis and Applications)副主编,1990年被巴黎第九大学授予名誉博士学位,1989年被聘为北京大学和北京师范大学名誉教授.

樊畿主要研究泛函分析和拓扑,但工作所涉及的面较广,对非线性分析、不动点理论、凸分析、集值分析、数理经济学、对策论、线性算子理论及矩阵论等都做出了贡献.在法国期间曾从事抽象空间上的分析学研究,并取得了一定成果.后来在全连续算子

谱论研究中做出了重大贡献.1953年证明了第一个不涉及线性结构的极大、极小定理,在势论、优化的对偶理论、函数代数、调和分析、算子的理想、弱紧性等多个数学分支都有应用.在非线性分析的文献中,有以其名字命名的定理、引理和不等式,其中1972年给出的一个樊墭不等式,对非线性分析有着重要影响.在线性与非线性规划、线性代数方面有樊墭相容条件、樊墭优势定理、樊墭乘积、樊墭 K 范数等,在不变子空间、组合定理、拓扑群、复分析等方面也都取得了重要成果,著作有《组合拓扑学引论》(Introduction a la toplogie Combinatoire ,1946;与弗雷歇合作).

段学复(Duàn Xuéfù,1914—) 中国数学家.陕西省华县人.1936年毕业于清华大学算学系,获理学士学位,后任教于西南联大.1940—1941年在加拿大多伦多大学学习,获硕士学位,后到美国普林斯顿大学攻读,1943年获哲学博士学位.1943—1946年先后在普林斯顿大学读博士后、任研究助理,后又到普林斯顿高等研究院担任外尔(Weyl,(C.H.)H.)的助手.1946年回到清华大学,被聘为数学系教授,1947—1952年任系主任.1952—1981年任北京大学数学力学系主任.1955年被选为中国科学院物理学数学化学部学部委员.曾任多种学术期刊编委.《数学进展》主编.《中国大百科全书》数学卷执行副主编.1988年离休.

段学复主要研究群论.1937—1938年,在西南联大时与华罗庚合作对 P 群进行了研究,对含有指数 $P^2(P>2)$ 的循环子群的 P 群,给出了有关计数定理,对这类群进行了完整的分类.后来从事有限群的模表示研究,特别是指标块及其在有限单群和有限线性群构造研究中的应用,在他的博士论文中所得出的结果,直到20世纪80年代还被写入有关专著.1943—1945年间曾与谢瓦莱(Chevalley,C.)合作研究李群、李代数,证明了代数群的基本定理:每个代数李群的李代数是代数的李代数,而每个复数域上的代数李代数必定是某个代数李群的李代数.这一工作用李代数方法把代数李群推广到了特征零的任意域上.20世纪70年代曾进行过有限群对组合问题的应用等应用课题研究,其中有些成果大大提高了实际工作中的计算时效.他还是一位数学教育家,他的学生中不少已成为国内代数学等方面有着杰出贡献的学者.

王湘浩(Wáng Xiānghào,1915—1993) 中国数学家、计算机科学家.生于河北安平,卒于辽宁大连.1937年毕业于北京大学数学系.1938—1939年任教于西南联大,后攻读研究生,从师江泽涵,1941年毕业,接着任西南联大讲师.1946年赴美国普林斯顿大学,师从阿廷,1947年获硕士学位,1949年获博士学位,同年回国任北京大学副教授,1950年升任教授.1952年到东北人民大学(即现在吉林大学)任数学系主任,1976年任吉林大学计算机系主任,后任吉林大学副校长.1955年被选为中国科学院物理学数学化学部学部委员.还曾任中国数学会理事、中国计算机学会副理事长、中国人工智能学会副理事长、全国高校人工智能研究会会长等职.

王湘浩主要从事代数数论和赋值论、人工智能学等研究.在代数数论有理单纯代数方面,对代数结构论、代数 K 理论、代数群论都有重要贡献.早在他的博士论文中,就纠正了格伦瓦尔定理中的错误,推广了该定理,并在后来给出了该定理成立的充要条件,重新证明了迪克森猜想.1958年,他开始了对电子计算机和控制论的研究.20世纪60年代初,在多值逻辑方面提出了利用"保 n 项关系"的方法,解决 n 值逻辑中函数集的完备性问题的思想,他的学生在他指导下于1964年解决了这一问题.1963年提出了多值逻辑中缺值函数的结构的理论.20世纪60年代初,他还在自动机理论的研究方面,引入了圈环的概念,并解决了非奇异线性内动机的分析问题.1990年又解决了非奇异内动机的分解综合问题.在定理机器证明和计算机代数方面推广了归结原理,推广并且改进了文岑特定理.他是中国该领域研究的早期开拓者之一.

林家翘(Lín Jiā-qiào,1916—) 美籍华裔数学家.生于北京市.1937年毕业于清华大学物理系,并留校任教.1940年到加拿大多伦多大学学习应用数学,一年后获硕士学位,并转美国加利福尼亚理工学院学习,1944年获博士学位,留校任工程师一年.1945年任布朗大学应用数学助理教授和副教授,1947年起任教于马萨诸塞理工学院,初任副教授,1953年晋升为教授.1962—1966年任该校应用数学委员会首届主任.1972—1974年任美国工业与应用数学会主席.1951年当选为美国艺术与科学学院院士.1958年当选为台北中央研究院院士,1962年成为美国科学院院士.1987年退休.

林家翘主要研究应用数学、力学等.在流体力学,特别在湍流方面的研究有着重要的贡献.他澄清了物理学家海森堡(Heisenberg,W.)早年在有关湍流方面的一个悬案,从而受到国际力学界的关注.1958年他又和他的学生一起证明了一系列有关的数学定理,从数学上彻底解决了这一悬案.1964年开始,他从事天体物理研究,他与合作者对已发现的各种天体给出了一种动态的数学模型,揭示了天体的结构及其演化过程,并在旋涡星系密度波理论方面取得了重要成就.他不仅自己在应用数学方面做出了贡献,还一贯提倡应用数学,推动应用数学教育.他在马萨诸塞理工学院建立的应用数学部在美

国、在全世界都有较大影响.他还关心并指导过国内有关大学应用数学系的建设和中国工业数学与应用数学学会的有关工作,为推动国内应用数学的发展做了不少工作.1975年,他获美国机械工程学会的铁木辛哥(Timoshenko)奖章,1977年获美国全国科学院颁发的应用数学与数值分析奖,1979年还获美国物理学会的流体动力学奖.著作有《流体动力稳定性理论》(1955)、《数学在自然科学确定性问题中的应用》等.此外,1987年还出版了他的两卷本的《文选集》.

程民德(Chéng Míndé,1917—1998) 中国数学家.生于江苏苏州,卒于北京.1940年毕业于浙江大学,后转为研究生,师从陈建功教授,1942年研究生毕业.1943年任浙江大学讲师,1946年到北京大学任教.1947年赴美国普林斯顿大学留学,1949年获博士学位,后留校做博士后研究.1950年回国后,先后任清华大学副教授、教授.1952年调入北京大学,曾任数学系副系主任.1978—1988年任北京大学数学研究所首任所长.1980年被选为中国科学院物理学数学部学部委员.1982—1986年任北京市数学会理事长.1984—1988年任中国数学会副理事长.1985年和徐利治合作创办《逼近论及其应用》(英文版)杂志,并任主编.还曾任全国数学教材编审委员会副主任、《现代数学基础丛书》和《北京大学数学丛书》主编、《数学年刊》和《应用数学学报》副主编等职.

程民德主要研究函数论与图像识别.早年从事单元傅里叶级数求和法及求和因子等问题的研究.在普林斯顿大学期间从单元三角级数转向了多元调和分析的研究.1950年得到了多重三角级数惟一性的最早结果,并引入了广义多重拉普拉斯运算,纠正了一个著名的定理,从而发展了重调和函数的研究.在函数逼近论的研究方面,1956—1958年与陈永和合作,彻底解决了临界阶以上博赫纳-里斯平均的逼近问题,这一结果因其系统完整而载入专著,对多元三角逼近的整个理论产生了很大影响.1973年开始,他又对沃尔什变换及其在图像频带压缩中的应用等进行了研究,是中国开展模式识别与图像处理研究的先驱与倡导者之一.1978年对高维沃尔什变换进行了系统分析,证明了收敛定理、取样定理,并论证了沃尔什变换对数字图像频带压缩具有的优越性.还与人合作在指纹识别方面做出了重要贡献,著作有《图像识别导论》(1983,与人合作).

严敦杰(Yán Dūnjié,1917—1988) 中国数学史家.生于浙江嘉兴县,卒于北京.1935年高中毕业后,曾在中华书局做校对工作.1938年任重庆民生实业公司会计处办事员,1941年到成都任西南印刷厂会计.一年后回了重庆,在几家单位任办事员、会计等.1943年考取重庆中央大学数学系就读.抗战胜利后回上海任中国石油公司会计处副管理师.1949年解放后,曾先后在上海燃料工业部石油管理局、天津燃料工业部器材室、北京燃料工业部经理司、北京石油工业部财务司等处任财务组长、科长等职.1956年8月调中国科学院自然科学史研究室任副研究员,后任研究员,于1980年任自然科学史研究所副所长.同年当选为中国科学技术史学会首届副理事长、全国数学史学会首届理事长.1958年还曾任《科学史集刊》副主编.

严敦杰从1935年开始一直利用业余时间从事中国数学史的研究,1956年调入中国科学院结束了其业余研究的历史.他治学严谨,通过各种渠道搜集积累资料,除历史文献外,还从古代文艺作品、地方志等资料中寻找与数学史有关的资料.在中算书的考证、中算家的评述、有关专题与综合研究等方面发表了许多重要论著.他对杨辉的数学思想和数学教育主张颇有研究,对中国古代数学家在内插法和垛积招差术方面的成就曾做过明确而全面的论述.他还论证了代表零的符号"0"出自中国,在12、13世纪是先用"□"表示,后演化成符号"0".他还对中国古代数学家在素数论及数学教育等方面的成就有所研究.他一生在科学史,特别是在数学史方面的著述有100余种,300多万字,其中较有影响的著作有《中国古代数学的成就》(1956)、《中学数学课程中的算史材料》(1957)等.此外还主编了《中国古代科技史论文索引》(1986).

严志达(Yán Zhìdá,1917—1999) 中国数学家.生于江苏南通,卒于天津.1941年毕业于清华大学,获学士学位,后任教于云南大学.1947年到法国斯坦福大学学习,1949年获法国国家博士学位.1948—1952年在法国国家科学研究中心做研究工作.1952年回国,任南开大学教授,后为南开数学研究所教授.1993年被选为中国科学院物理学数学部学部委员.

严志达主要研究基础数学和应用数学,是中国最早从事微分与积分几何研究的数学家之一.1939年与陈省身合作建立了几何运动的基本公式,被称为陈-严公式,现已成为积分几何的经典理论之一.在李群李代数及其在微分几何上应用的研究方面,1949年算出了例外单李群的贝蒂数,受到了国际数学界的高度评价,他还对齐性空间的贝蒂数、对称空间、实半单李群李代数进行了研究,并取得了一系列的成果.1959年,他大大简化了实单李代数分类方法,并揭示了实单李代数结构理论的本质,解决了非紧致对称空间分类问题,后来又得到了实半单李代数实表示问题的一般性结果,并在对称黎曼空间的谱理论的研究方面取得了重要成果.20世纪70年

代，他又用微分几何研究了齿轮理论，阐明了齿轮啮合理论的许多重要概念，给出了该理论的数学基础，导出了齿面间的曲率关系，即诱导曲率公式，推动了锥齿轮等方面的科学研究，对中国的齿轮加工工业的发展起了重要作用. 他在齿轮理论方面的研究曾被选为 1978 年全国科学大会的重要成果. 他的著述有《李群和微分几何》(1960)、《半单李群表示论》(1963)、《齿轮啮合理论》(1973，1974)等专著.

莫绍揆(Mò Shàokuí，1917—) 中国数学家. 生于广西桂平县. 1939 年毕业于中央大学，并留校任教，后升任讲师，还曾在中山大学数学系任讲师. 1947 年赴瑞士留学，就读于洛桑大学，第二年到瑞士联邦高等工学院读数理逻辑. 1950 年回国，任南京大学副教授、教授至今. 还曾任中国数学会理事、中国逻辑学会副理事长、江苏逻辑学会会长、名誉会长、《数学研究与评论》副主编等.

莫绍揆主要研究数理逻辑，并在南京大学创建了数理逻辑专业. 在一个命题演算系统中，有一个许多数理逻辑学家尽量避免使用，但又经常被迫使用的“蕴含怪论”. 他在留学期间就曾避开这一“蕴含怪论”，证明了导师没能避开才证明的公式“$P\to\overline{P}\cdot\to\overline{P}$”. 20 世纪 50 年代，他曾研究模态逻辑，他避开“蕴含怪论”，提出了两个新的模态系统，受到了国内外学者的关注. 20 世纪 50 年代，国外很多逻辑学家试图用多值逻辑来解决集合论中的悖论，并构造了许多多值逻辑系统. 莫绍揆 1954 年在他的著名论文“多值系统的逻辑悖论”中指出：引入多值逻辑后也不能无条件地使用概括原理，否则在多值系统逻辑中仍能构造出类似二值逻辑悖论的悖论. 这是对国际数理逻辑学的一个重大贡献. 他 1950 年构造出两个新逻辑体系的文章被认为是相干逻辑的奠基性工作. 他还在 20 世纪 50 年代提出了初基函数和五则函数等新概念，大大地简化了递归函数的构成. 在此基础上他还于 1986 年解决了自 1952 年提出后一直没能解决的一个一阶谓词演算公式的可满足集是什么样的集的问题. 他提出过递归函数论的各种系统，把国际上在这方面的研究推进了一步. 他还在公理集合论、数理逻辑的多个分支中做了许多重要工作. 此外，他还涉及数学史的研究和科普工作. 莫绍揆的数学研究成果曾获 1978 年全国科学大会奖，他编撰的《数理逻辑教程》(1982)曾获全国优秀教材奖，《质点几何》(1991)曾获全国城市出版社优秀图书一等奖、江苏科技成果奖二等奖. 他除已发表 60 多篇学术论文外，还出版了 20 多本专著、教材，其中较有影响的有《递归论》(1987)、《极限论新论》(1991)等. 此外，还撰写科普论文 20 余篇.

王宪钟(Wáng xiánzhōng，1918—1978) 美籍华裔数学家. 生于北京，卒于美国. 1936 年入清华大学，学习物理，后改学数学. 1941 年毕业，并获得学士学位. 1944 年同校研究生毕业，师从陈省身教授. 同年考取英国文化委员会资助的赴英留学生，1945 年到英国曼彻斯特的维多利亚大学研究拓扑学，1948 年获博士学位. 同年，回国任中央研究院数学研究所副研究员. 1949 年到美国路易斯安那州立大学任讲师. 1951—1952 年、1954—1955 年、1961—1962 年、1965—1966 年四次到普林斯顿高等研究院做访问研究. 1952—1954 年任教于亚拉巴马工学院；1955—1956 年任教于华盛顿大学；1956—1958 年任教于哥伦比亚大学；1958—1966 年任美国西北大学教授；1966 年转任康奈尔大学教授，直至去世. 1961 被选为台北中央研究院院士.

王宪钟研究工作涉及数学的多个领域. 早期研究射影微分几何学，曾解决过道路几何学中的一些重大问题. 到英国以后研究代数拓扑学与李群等. 1949 年对基空间是一球面的情况给出了关于全空间、纤维空间和基空间的同调的一个序列，后来被塞尔(Serre，J. P.)称为“王序列”. 在其博士论文中曾深化了霍普夫(Hopf，H.)等人在李群方面的一个研究结果. 后来，他又研究了拓扑群、复结构流形、李群的离散子群，且都有重要成果. 他还曾首次在离散子群的研究中使用了代数群技巧；在连通李群的离散子群的研究中，曾处理过有限子群研究的一般方法，证明了塞尔贝格(Selberg，A.)的一个猜想. 在课题研究的诸方面，共发表论文 39 篇.

关肇直(Guān Zhàozhí，1919—1982) 中国数学家. 生于天津，原籍广东南海县，卒于北京. 1941 年毕业于燕京大学数学系，曾任燕京大学、北京大学助教、讲师. 1947—1949 年在法国巴黎大学庞加莱研究所做研究工作. 1949 年新中国成立，他放弃了获得博士学位的机会，于年底回国，参与了中国科学院的组建工作. 曾任中国科学院编译局处长和图书管理处处长等. 1952 年调到中国科学院数学研究所工作，历任副研究员、研究员、副所长、所学术委员会副主任等职，同时还兼任北京师范大学、北京大学、中国人民大学、中国科技大学教授. 1980 年任中国科学院系统科学研究所所长. 同年被选为中国科学院物理学数学部学部委员. 还曾任国家科委数学学科组副组长、中国数学会秘书长、系统工程学会理事长、自动化学会副理事长、国际自动控制联合会理论委员会成员、《系统科学与数学》杂志主编等职.

关肇直主要研究泛函分析、中子迁移理论、现代控制理论及其应用等. 1956 年，他提出了单调算子的概念，1964 年用希尔伯特空间与不定度规空间中自伴算子的谱理论严格处理了平板几何的中子迁移方程奇异特征函数问题，给中子迁移理论奠定了严格的数学基础. 但文章到他去世后的 1984 年才公开

发表. 1965 年,他还利用泛函工具证明了激光理论中一类非对称核的线性积分方程非零特征值的存在,赋予了激光理论的数学基础. 1961 年在钱学森的倡议下,他在中国科学院数学研究所组建了控制理论研究室,并兼任了研究室主任,领导该室在现代控制理论的多个方面取得了不少成果. 他自己与宋健合作完成的"飞行器弹性控制理论研究",曾获 1982 年国家自然科学奖二等奖. 他主持的研究项目还曾获 1978 年全国科学大会奖和国家科技进步特等奖等,他个人也曾获"科技进步"金质奖章. 著作有《泛函分析讲义》(1958)、《拓扑空间概论》(1958)、《线性控制系统的能控性和能观性》(1975 年与陈翰馥合作)、《线性泛函分析入门》(1979 年与张恭庆等合作)、《极值控制与极大值原理》(1980 年与韩京清等合作)等.

吴文俊(Wú Wénjùn, 1919—) 中国数学家. 生于上海青浦县. 1940 年毕业于上海交通大学,后任中学教师. 1946—1947 年在中央研究院数学研究所工作. 1947 年考取中法交换生,赴法国斯特拉斯堡大学学习,1949 年以《论球丛空间结构的示性类》的学位论文获法国国家博士学位,后又到巴黎法国国家科学研究中心做研究工作. 1951 年回国任北京大学教授. 1952 年任中国科学院数学研究所研究员. 1980 年任中国科学院系统科学研究所研究员、副所长,1983 年任名誉所长,1990 年任该所新成立的数学机械化研究中心主任. 1957 年还被增选为中国科学院物理学数学化学部学部委员,并任该学部副主任. 1983—1987 年任中国数学会理事长. 1991 年被选为第三世界科学院院士. 1986 年曾应邀在国际数学家大会上作报告(中国数学史).

吴文俊主要研究拓扑学与数学机械化. 在法国留学期间,曾在示性类方面获得了一系列重要成果,定义了吴示性类,给出了吴公式,对代数拓扑学的进一步发展和微分拓扑学的兴起有着深远的影响. 20 世纪 50 年代早期,他又研究了庞特里亚金示性类,证明了示性类模 3、模 4 的拓扑不变性;引入了关于多面体的一组非同伦不变的拓扑不变量;提出了示嵌类的概念,系统地发展了多面体欧氏空间中的嵌入理论;后来还把示嵌类理论应用到了印刷电路的布线问题. 1972 年左右提出了 I^* 函数理论;20 世纪 70 年代,他对中国古代数学史进行了系统分析研究. 1976 年开始研究定理机械证明,提出了一套完整的算法,并形成了数学机械化纲领. 在他的领导与参与下,这方面的研究获得了一系列的成果,被国际上称为"吴方法". 1956 年还曾获国家自然科学奖一等奖,1990 年获第三世界科学院数学奖,2001 年获国家最高科技奖. 在拓扑与几何学、对策论、中国数学史、数学机械化等领域前后发表论文 100 多篇. 著有《可剖形在欧氏空间中的实现问题》(中文版,1978;外文版,1957,1965)、《几何定理机器证明的基本原理(初等几何部分)》(1984)、《有理同伦型——通过 I^* 度量理论的构造性研究》等专著. 1986 年山东教育出版社出版了《吴文俊文集》,收入了他在数学机械化等方面的论文,包括了有关中国数学史的文章.

廖山涛(Liào Shāntāo, 1920—1997) 中国数学家. 生于湖南衡山,卒于北京. 1942 年毕业于西南联大数学系. 1950—1952 年在美国芝加哥大学研究生院学习,1955 年获博士学位,1956 年回国任北京大学数学系教授,至去世. 1986 年被选为第三世界科学院院士,1991 年被选为中国科学院物理学数学部学部委员.

廖山涛主要从事基础数学研究,特别是在代数拓扑和微分动力系统方面的工作取得了许多重要成果. 在代数拓扑的周期变换、同伦论与纤维丛等问题上有重要贡献. 20 世纪 60 年代初,开始了微分动力系统的研究,提出了典范方程组和阻碍集两大基本理论,建立了不同于国际上流行的稳定流形与非稳定流形方法和泛函分析法的方法. 此法更便于做定量估计的计算. 他首先提出并研究了被国际上称为李亚普诺夫指数的基本概念;证明了 C^1 封闭引理. 在阻碍集理论中,提出了正常集、歧变集、极小歧变集等一系列重要概念,并对 C^1 稳定性猜测做出了重要贡献,第一个证明了无奇点常微系统的 3 维和 4 维的 C^1 稳定性猜测. 他曾获得 1978 年全国科学大会奖、1982 年国家自然科学奖二等奖、1986 年第三世界科学院首届数学奖、1987 年国家自然科学奖一等奖. 著有《同伦论基础》(1981,与刘旺金合作)等专著.

冯 康(Féng Kāng, 1920—1993) 中国数学家. 生于江苏省苏州市,卒于北京. 1944 年毕业于中央大学物理系,1945—1951 年先后在复旦大学物理系、清华大学物理系和数学系任教. 1951 年调中国科学院数学研究所任助理研究员. 1951—1953 年在苏联斯捷克洛夫数学研究所进修. 1957 年参与组建了中国科学院数学计算技术研究所,历任副研究员、研究员. 1978 年任中国科学院计算技术研究中心主任,1987 年任名誉主任. 1980 年被选为中国科学院物理学数学部学部委员,1978—1986 年任中国计算机学会副主任委员. 1985 年任中国计算数学会理事长,1990 年后任名誉理事长. 还曾任国外多家学(协)会和研究机构的理事、顾问. 去世前还担任着《计算数学》、《计算数学杂志》(英文版)、《数值计算与计算机应用》三刊的主编.

冯康是中国计算数学和科学工程计算学科的奠基者. 1957 年以前主要从事基础数学研究. 1950 年

曾解决最小殆周期拓扑群的结构问题，1957年得到了广义函数的对偶定理和梅林变换. 以后转向应用数学和计算数学领域，独立地创立了有限元方法，并最早为其建立了数学基础. 他还在边界元及辛算法等计算数学领域做出了开创性贡献，形成了能适应大型复杂问题、便于分解计算的一个有限元与边界元兼容并蓄而自然耦合的整体系统. 1984年，他首次系统地提出哈密顿方程与哈密顿算法(即辛几何算法或辛几何格式)，同时提出了从辛几何内部系统构成算法并研究其性质的途径，基本上解决了久悬未决的动力系统长期预测的计算难题. 1979年曾还被评为全国劳动模范，1982年因有限元方法上的创造性工作，与合作者共获国家自然科学奖二等奖.

曹锡华(Cáo Xìhuá，1920—) 中国数学家. 生于上海. 1945年毕业于浙江大学，1946年入中央研究院数学研究所，1947年任清华大学助教. 1948年赴美国密执安大学学习，1950年获哲学博士学位. 回国后任浙江大学副教授，1952年调华东师范大学任教，1978年任教授. 1958年起任数学系主任，1984年起任名誉系主任. 还曾任上海市数学会理事长.

曹锡华研究群的表示和李代数理论、代数群. 1979年以后指导培养了王建磐、叶家琛等多名博士研究生，他们的研究成果受到了国际上的关注. 20世纪70年代末，还先后聘进沈光宇和萧刚两位教授，把华东师范大学代数研究室建成了一个国内的代数研究中心，形成了代数群、代数几何、李代数等几个分支互相促进的研究群体. 与王建磐合作著有《线性代数群表示导论》(上册，1987)，还有译作《基础代数学》(第二卷)等.

徐利治(Xú Lì zhì，1920—) 中国数学家. 生于江苏沙州县(今张家港市). 1945年毕业于西南联大，1946—1948年任教于清华大学. 1949—1950年在英国阿伯丁大学、剑桥大学访问、进修. 1951—1952年任清华大学副教授，兼任北京师范大学副教授. 1952年到东北人民大学(今吉林大学)任数学系副系主任，1956年升为教授，并任教务长兼教务处长. 1980年起先后在吉林大学、大连理工大学、华中理工大学、南京航空航天大学等院校任兼职教授. 1981年任大连工学院应用数学研究所所长、华中工学院数学系主任. 1982年正式调到大连理工大学，并继续在各校兼职. 1981年创办《数学研究与评论》，并任主编.

徐利治的研究课题涉及渐近分析、逼近论、计算方法、数学基础等领域. 在渐近分析方面，他的渐近积分定理和展开定理在国外曾被专门介绍引用，他的高次零差渐近展开公式被称为"徐逼近公式". 在逼近论方面，他提出了解决无界函数逼近的"扩张乘数法"；最先给出了关于线性算子半群理论中著名的希尔第一指数公式的定量形式，并引出了许多后继工作；还给出了广义兰登多项式算子，现被称为"兰登-徐多项式". 在数值积分方面，他发展了激烈振荡函数积分方法，首先提出了"降维展开法"，用以解决了一大类高维边界型求积公式构造法问题. 在计算方法方面，1964年首先发现了平方根迭代法(该结果1973年才正式发表). 在数学基础领域，他首先研究了数学真理性数量上把握的问题，首次提出了数学抽象度问题，研究了超穷数论和悖论等问题. 此外，他还在组合分析方法、非标准分析方面有重要成果，研究工作涉及数论、数学方法论、数学教育体系改革等. 他单独或与其他学者合作共发表论文150多篇，还著有《渐近积分和积分逼近》(1958)、《高维的数值积分》(1963，增订版，1980，增订版与其他学者合作)、《函数逼近论的理论与方法》(1983，与其他学者合作)、《计算组合数学》(1983，与其他学者合作)等多种专著.

余家荣(Yú Jiāròng，1920—) 中国数学家. 生于湖北武汉. 1944年毕业于重庆中央大学，后留校任教. 1947年赴法国留学，就学于斯特拉斯堡大学和巴黎大学，1950年获法国国家博士学位. 1951年回国任教于武汉大学，先后任副教授、教授、武汉大学中法数学与计算机科学中心主任.

余家荣主要研究函数论. 在狄利克雷级数的增长性极值分布方面曾获得了重要成果. 他还把渐近狄利克雷级数的孟德博伋(Mandelbrojt)不等式和半平面内解析函数的惟一性定理从一元推广到了多元的情形. 在随机狄利克雷级数的研究中，证明了：在一定条件下级数几乎必然以其几乎必然收敛轴上每一点作为毕卡点或波莱尔点. 他在解析函数的奇异点方面也有重要工作. 他的研究工作曾引起国内外同行的关注. 此外，他在有关方面支持下，在中法数学交流方面也进行了卓有成效的工作. 从1980年开始办的武汉大学"中法数学试验班"到1988年改名为"中法数学与计算机科学中心"，他一直负责组织并与法方的联络工作等. 该中心在科学研究、人才培养和与法国交流等方面都取得了显著成绩. 他曾获1988年国家教委科技进步二等奖. 他所编撰的《复变函数》一书曾获国家教委优秀教材一等奖. 1991年，他还荣获法国政府授予的棕榈勋章(La grade d'Offieier dans l'Order des Palmes Academiques). 此外，他还单独或与他人合作，在国内外发表学术论文近30篇.

王　浩(Wáng Hào，1921—1995) 美籍华裔数学家. 生于山东济南. 1943年毕业于西南联大数学系；1945年获清华大学哲学系硕士学位；1948年获美国哈佛大学哲学系博士学位. 1949—1953年在

哈佛大学做研究工作；1953—1954 年任巴勒斯(Burroughs)公司研究工程师；1954 年去英国牛津大学，1956—1961 年任数理哲学高级讲师；后回哈佛大学任数理逻辑和应用数学麦凯(Mckay)讲座教授；1967 年转洛克菲勒大学任逻辑学教授. 1953 被选为美国艺术与科学学院哲学部院士，1970 年当选为英国科学院院士. 1985 年和 1986 年被聘为北京大学和清华大学名誉教授. 1954 年曾应邀在国际数学家大会上作报告.

王浩主要研究数理逻辑、数学基础、计算机科学、哲学等. 在形式公理化方面改进了奎因系统，对非直谓集合论进行了研究并做了许多开创性工作. 1953 年，他提出了更接近于实际数学系统的 Σ 形式系统，从而使实数理论中的上确界定理、有限覆盖定理、波尔查诺-魏尔斯特拉斯定理等都能得到证明. 他还澄清了塔斯基的真理论，提出了“算术翻译”概念等. 证明了一阶逻辑中的 AEA 公式类不可判定性的著名难题. 在这过程中他还提出了一种新的铺砖理论，现被称为“王砖”，这一理论已成为研究判定问题、计算复杂性等方面的有力工具. 在理论计算机方面，1954 年，他提出了与图灵机等价但具有实际计算功能的 B 机和 W 机. 他是用计算机证明定理的开拓者之一. 他在计算机上，证明了罗素(Russell, B. A. W.)和怀特黑德(Whitehead, A. N.)的《数学原理》中的 350 多条定理. 1983 年，他曾获人工智能国际联合会和美国数学会的“里程碑(Milestone)”奖. 著作有《数理逻辑综述》(A Survey of Mathematical Logic，1962)、《从数学到哲学》(From Mathematics to Philosophy ，1974)、《计算・逻辑・哲学》(Computation，Logic ，Philosophy ，1990)等.

吴光磊(Wú Guānglěi，1921—1991)　中国数学家. 生于黑龙江宾县，卒于北京. 1939 年进西南联大学习，1943 年毕业后留校任教. 1946 年到清华大学任教，1952 年调入北京大学任副教授，1963 年起任教授.

吴光磊主要研究整体微分几何. 在西南联大时曾师从陈省身教授. 20 世纪 50 年代，他在黎曼空间纤维丛及 $2n$ 维欧氏空间中的 n 维子空间方面做出了重要成果. 1957 年他证明了 n 维子流形上大范围定义的 n 次外微分式在该子流形上的积分恰好等于子流形按惠特尼(Whitney)意义下的自交数及其与法示性的关系，并给出了自交点数与曲率的公式. 但由于缺乏与国外交流，没受到国外注意. 国外 10 年以后才有人得到了该结果. 20 世纪 60 年代，他还得到了建立示性式超度的一般公式，导出了陈类的积分公式. 但这一工作到 1976 年才得以发表. 20 世纪 80 年代，他曾研究了子流形在欧氏空间嵌入的基本问题，并取得了成果. 此外，他还曾对相对论、理论物理、数学史、自然辩证法等做过一些研究. 他的著述有《空间解析几何简明教程》(1966). 此外，还与人合作编撰过两本有关解析几何的教材.

陈国才(Chén Guócái，1923—1987)　美籍华人数学家. 生于浙江. 1946 年获西南联大学士学位；1950 年获美国哥伦比亚大学数学博士学位. 1950—1951 年任教于普林斯顿大学；1951—1952 年在伊利诺伊大学做研究工作；1952—1958 年任香港大学讲师；1958—1960 年任巴西航空技术学院副教授；1960—1961 年任教授；1962—1965 年在拉特格斯大学从副教授升为教授；1965—1967 年任布法罗纽约州立大学教授；1967 年开始任伊利诺伊大学数学系教授，直至去世.

陈国才主要研究拓扑和路径空间上的整体微分. 他在常微分方程的定性理论及代数拓扑学方面曾做出过重要贡献，并被广为引用. 他于 20 世纪 60 年代早期取得的在向量域奇异点附近的轨道行为的成果，代表了向量域奇性理论发展中的一个重大突破. 20 世纪 70 年代和 80 年代早期，他创立的累次积分法导出了分析与拓扑之间的深刻连系.

秦元勋(Qín Yuánxūn，1923—　)　中国数学家. 贵州省贵阳市人. 1939—1943 年就读于内迁到贵州的浙江大学数学系，并获理学士学位. 1944 年到美国哈佛大学攻读数学，先后获硕士(1946)、博士(1947)学位. 1948 年回国，参加了新中国第一届科协大会的筹备工作，并兼任了北京师范大学数学系副教授. 1953 年调到中国科学院，先任计划局处长，从 1954 年起，任数学所、应用数学所副研究员、研究员，从事微分方程及数学应用研究. 1985—1986 年任黄河大学首任校长，1987—1990 年为美国佛罗里达大学访问教授.

秦元勋具备数学理论的坚实基础和丰富的实践经验，研究领域十分广阔，在微分方程、应用数学、计算数学、人工智能诸方面都取得了丰硕成果. 在微分方程方面，20 世纪 70 年代，他提出以“五步法”为核心的近似解的理论，开创了常微近似解析解这一分支. 1979 年后，他对二次微分系统中的中心焦点判别公式，通过计算机的符号运算加以实现，并纠正了苏联数学家巴乌金(Боугин)的一个关键错误. 20 世纪 80 年代，他推翻了苏联数学家彼得罗夫斯基(Петровский, И. Г.)“关于(E_2)系统最多只能有三个极限环”的结论，证明了 $N(2)=4$(1983)，以后又进一步证明了 $N(n)\leqslant 2n(n+1)$，从而建立了复域定性理论——常微分方程所定义的积分曲面. 在数学应用方面，他关于原子弹、氢弹研制的“596 及 639 任务的威力计算”项目，获得 1978 年全国科学大会奖；1982 年他又和其他 8 位科学家一起，获得国家自然科学一等奖.

叶彦谦(Yè Yánqiān,1923—) 中国数学家.生于浙江开化县.1944年毕业于浙江大学,并留校任助教,1947年到中央研究院数学研究所任助理员,1949年回浙江大学,同年任讲师.1952年调南京大学,1956年任副教授,1978年升为教授.

叶彦谦主要研究常微分方程的定性理论,特别是二次多项式系统.1966年以前在二次系统极限环的几何性质、相对位置、(Ⅰ)类方程极限环的存在惟一性等方面做了基本性研究,最先得到有关平面二次微分系统极限环的形状、相对位置以及环内部的奇点个数和性质等方面的最基本的结果,并在1964年出版了专著《极限环论》.1984年该书经与他人合作修订增补后再版.1964年还与人合作把古典环域定理推广到有奇点和多连通域的情况,同时还推广了奇点的概念.1980年开始,又与人合作对环面线性多项式系统的定性理论进行了研究,并主持了曲面定性理论讨论班,取得了多项重要成果.因其工作属于常微分定性理论方面较为基础的部分,对推动该理论发展有一定的重要性,故受到国外同行的关注.他还著有《多项式微分系统定性理论》(1995)和《曲面动力系统》(1991)等专著.

周毓麟(Zhōu Yùlín,1923—) 中国数学家.生于上海,祖籍浙江镇海.1945年毕业于上海大同大学数学系,曾先后在中央研究院数学研究所、清华大学数学系、北京大学数学力学系工作.1954—1957年在苏联莫斯科大学学习,获物理与数学科学副博士学位.1957—1960年任北京大学数学力学系偏微分方程教研室副主任,1960年起到核工业部应用物理与计算数学研究所工作,曾任副所长,现任研究员.1991年被选为中国科学院物理学数学部学部委员.曾任《计算数学》、《计算数学杂志》(英文版)、《数值计算与计算机应用》三刊的副主编,北京大学、清华大学、厦门大学兼职教授,河南大学、云南大学荣誉教授.

周毓麟在拓扑学、偏微分方程、计算数学、计算流体力学等多个领域都有贡献.早期研究同伦论与流形拓扑不变量,20世纪50年代中期研究非线性偏微分方程近代理论,在非线性正则和退化抛物型与椭圆型方程方面做了大量工作,其中1958年与奥列伊尼克(Олейник,O. A.)等合作的关于渗流方程的工作,已被认为是开创性的经典.还在非线性发展型方程与方程组问题的整体解的存在性、惟一性、奇点(Blowup)、渐近性等方面取得了一系列成果.在有限差分方面,在离散函数类中创造性地建立了范数间的内插关系,改变了原来讨论简化的差分方程计算格式性质的方法,使有限差分方法的理论研究形成了一个新的体系.1960年开始,他系统地研究了一维、二维流体力学和物理方程的计算方法,他给出的方法解决了不少重大实际问题.他还分析了误差积累过程的机理,推导出了科学计算用数字电子计算机的主要性能,如速度、内存、字长等指标间的匹配关系,为研制与使用超大型计算机提供了依据.他于1982年获国家自然科学奖一等奖,1985年获国家科学技术进步特等奖,1987年获国家自然科学奖三等奖.著作有《一维非定常流体力学》(1990)、《离散泛分析在有限差分法中的应用》(1990)等.1992年科学出版社出版了《周毓麟文集》,收录了他在不同领域的重要论文.

谢邦杰(Xiè Bángjié,1923—2000) 中国数学家.生于四川犍为县,卒于吉林长春市.1943年进西南联大数学系学习,1946年转入北京大学数学系,毕业后留校任助教.1952年调入东北人民大学(吉林大学前身)数学系任教,1956年升为副教授,后又升为教授,曾任数学系副主任、主任等职.

谢邦杰主要研究代数学,特别是环结构理论,1976年后研究环与体上矩阵理论.他在结合环的幂零理想、诣零理想和理想根的研究中曾取得一系列成果.1955年他引进了所谓零化子的升链、降链和双链条件,改进了当时有关诣零环的某些成果,其中给出的一个定理国外在8年后才有人提出并证明.1957年,他发表的《论根理论》一文,因其概括总结了该分支几十年的研究成果,受到了国内外同行的关注,并曾被引为基础性文献.1959年后,他研究了具半极小条件的各种单纯环,给出了韦德伯恩-阿廷结构定理的各种推广,并给出了三个主要的结构定理.在环与体上矩阵的研究方面,他得到了体上矩阵有理化形式和两类广义若尔当形式,定义了体上可中心化矩阵的行列式,给出了体上矩阵的惟一分解定理,还推广了科克伦定理、阿达马定理、凯莱-哈密顿定理等一系列重要定理,对近代矩阵论的研究发展起了重要作用.谢邦杰曾获1978年吉林省科技成果奖.他的工作曾于1981年被列为国家重要科技成果,他与人合作的"结合环的链条件及其诣零性、交换性"一文曾获1988年国家教委科技进步奖二等奖.他先后发表学术论文40余篇,著作有《超穷数与超穷论法》(1979)、《抽象代数》(1982)及《高等代数简明教程》(1966)等.

谷超豪(Gǔ Chāoháo,1926—) 中国数学家.生于浙江温州.1948年毕业于浙江大学,留校任教,1952年升为讲师.1953年调复旦大学,1956年升为副教授.1957年赴苏联莫斯科大学数学力学系进修,1959年获博士学位.同年回到复旦大学,1960年升为教授.1986年开始任复旦大学数学研究所所长.1988—1993年任中国科学技术大学校长.还曾任复旦大学数学系主任、研究生院院长、副校长、中国数学会副理事长等职.1980年被选为中国科学院

物理学数学部学部委员.

谷超豪主要研究微分几何、偏微分方程和数学物理. 早期从事 K 展空间理论的研究，并给出了新的研究方法. 在莫斯科大学期间，研究了微分几何领域的仿射联络空间和芬斯勒空间，并在两类空间的整体嵌入问题方面得到了完整的结果. 回复旦大学以后，他进行了偏微分方程方面的研究，解决了超音速机翼绕流的数学问题. 还和学生一起解决了间断初始值局部解存在性问题等. 首创性地开展了多自变量混合型方程的研究，1965 年首次在国际上建立了一大类多自变量混合型方程解的存在性定理. 还在高阶多元混合型方程的理论方面做出了先驱性工作. 1974 年他和杨振宁合作研究了规范场理论，证明了一般洛伦茨(Lorentz)流形上有源(包括无源)的杨-米尔斯方程柯西问题解的存在性. 他还成功地把纤维丛中的和乐群理论用到了规范场的研究，并证明了利用标准路径的位相因子和规范场强可惟一决定规范势. 他和胡和生合作，完全决定了球对称规范场的一般结构及其分类. 在双曲型方程的研究中，开辟了关于不定度量流形的调和映射的新研究领域. 他的一些研究成果曾引发了一大批数学家的后继研究. 在孤立子理论的研究方面成果卓著. 此外他还研究了变换群论、计算流体力学等. 他的工作受到了国际数学界的重视. 1978 年曾获全国科学大会奖，1982 年他所领导的偏微分方程和规范场两个项目分别获国家自然科学奖二等奖、三等奖. 1995 年获中国数学会第二届华罗庚数学奖. 先后发表论文 120 多篇. 与胡和生合作著有《齐性空间微分几何》(1964)、与其他人合作的还有《孤立子理论与应用》、《数学物理方程》、《经典规范场理论》(北荷兰出版社)等.

万哲先(Wàn Zhéxiān，1927—) 中国数学家. 生于山东淄州，原籍湖北沔阳. 1948 年毕业于清华大学数学系，留校任教. 1950 年到中国科学院数学研究所工作，曾任研究室副主任. 1980 年到中国科学院系统科学研究所，现任研究员. 曾任过所学术委员会主任、《代数集刊》主编. 1991 年被选为中国科学院物理学数学部学部委员.

万哲先主要从事代数学和组合数学的研究，特别是在典型群、矩阵几何、有限几何、密码学和编码理论等方面有重要成果. 1950 年在著名数学家华罗庚指导下，从事典型群研究，曾先后与华罗庚合作、他自己独立地、与其学生合作解决了典型群的结构和自同构方面的一系列难题. 在 20 世纪 50 年代，他还从理论上证明了运筹学的"图上作业法". 这是中国在图论、运筹学领域的最早工作. 在矩阵几何的研究中，他证明了任意域上对称矩阵几何的基本定理和有对合的任意体上的哈密顿矩阵的基本定理，并把它们应用到了代数、几何和图论中的某些问题上. 他还开创了中国有限几何的研究，并把对有限域上典型群的几何学的研究成果应用到了数理统计中的结合方案和区组设计、保密学中的认识码及编码理论中的射影码，以及由子空间的轨道生成的格等一些数学分支. 他是中国最早从事密码学研究的数学家之一，他和他的学生曾深入地研究过移位寄存器序列，其成果曾获 1978 年全国科学大会奖和 1986 年中国科学院科技进步一等奖. 在密码学研究中，他还和段学复一起在 1972 年解决过急需的实际课题，并曾获有关方面的奖励和表彰. 与华罗庚在典型群方面的研究也曾获 1978 年全国科学大会奖. 他和学生关于"典型群的同构理论"的研究，曾获 1987 年全国自然科学奖三等奖. 1995 年还获得了华罗庚数学奖. 他先后完成学术论文 110 余篇. 著述有《有限域上典型群的几何学》(1992)等 14 本专著.

陆启铿(Lù Qǐkēng，1927—) 中国数学家. 生于广东佛山. 1950 年毕业于中山大学，后留校任教. 1951 年到中国科学院数学研究所工作，1954 年任助理研究员，1962 年升为副研究员，1978 年升为研究员，1980 年任副所长. 同年被选为中国科学院物理学数学部学部委员. 任北京大学和中山大学兼职教授.

陆启铿主要研究多复变函数论和数学物理等. 曾和著名数学家华罗庚一起建立了典型域上的调和函数论和扩充空间的理论；与钟同德一起建立了 C^n 中有界域 D 的具有 B-M 核的积分边值公式；1956 年建立了 C^n 中有界域 D 上的施瓦兹引理，并首先揭示了施瓦兹引理和曲率的关系；证明了"C^n 中有界 D 若具有全纯截曲率为常数的完备的伯格曼度量，则 D 一定双全纯等价于超球，而且此常数是 $-2/(n+1)$"，现被称为"陆启铿定理". 1966 年证明了伯格曼度量的酉曲率为常数的有界域必等价于一球. 由于该文提出了伯格曼核函数有没有零点的问题，被国外称为"陆启铿猜想"，并称伯格曼核函数没有零点的域为"陆启铿域". 就此引起国际上的研究兴趣已长达 20 多年. 20 世纪 70 年代，他开始了对数学物理的研究，1974 年阐明了规范场与微分几何中纤维丛的关系这一研究规范场的基础. 1992 年获首届华罗庚数学奖. 撰写有《多复变函数引论》(1960)、《典型流形与典型域》(1963)、《微分几何学及其在物理学中的应用》(1982)等专著.

丁石孙(Dīng Shísūn，1927—) 中国数学家. 江苏镇江人. 1944—1947 年就读于上海大同大学，1948—1950 年在清华大学数学系学习. 1950 年毕业后，留校任助教. 1952 年调入北京大学数学力学系，先后任助教、讲师、教授. 1978 年升任数学系副系主任，1981 年任系主任，1984—1989 年任北京

大学校长．曾任中国数学会副理事长．1988—1996年任民盟中央副主席，1996年任主席．1998年3月当选为中华人民共和国第九届全国人民代表大会常务委员会副委员长．曾于1985年获日桥创价大学名誉博士学位，1988年获美国内布拉斯加大学名誉理学博士学位．

丁石孙主要从事代数、代数数论、代数编码等研究．1958年发表了《具有一巡回幂零微分的李代数》，1983年发表了《伽罗瓦扩张的一个算术刻画》等有代表性的论文．他长期从事基础课的教学，并编撰了《高等代数讲义》(1964)、《高等代数简明教程》(1966)、《高等代数》(此书获1987年国家优秀教材奖)、《解析几何》(与人合作)等教材．20世纪70年代，曾从事代数编码的研究与教学，1978年以后转向代数数论．他还著有《线性移位寄存器序列》(1982)、《数学与教育》、《代数学引论》等专著．

胡和生(Hú Héshēng，1928—) 中国女数学家．生于上海．1950年毕业于上海大夏大学，1952年在浙江大学数学系研究生毕业，师从苏步青．后到中国科学院数学研究所做研究工作，1956年起任教于复旦大学，1980年升为教授．1991年被选为中国科学院物理学数学部学部委员．曾任德国波恩大学、法国科学研究中心访问教授．

胡和生主要研究微分几何．20世纪50年代初在仿射联络空间、子流形变形理论和常曲率空间的结构等研究方面取得了系统成果，改进了该领域一些著名数学家的工作，受到国际同行的注目．1960—1966年间给出了决定黎曼流形运动群所有空隙的一般方法，并给出了8个空隙；还给出了参数最多的15种黎曼线素，解决了有60多年历史的重要问题．20世纪70年代中期将微分几何运用到规范场的研究，与杨振宁合作得到了关于规范场强决定规范的结果，已收入《杨振宁选集》．在具质量规范场解的研究中，给出了关于静态解的结果，第一个得到了经典场论中不连续性的显式事例．1987年首次提出并研究得到了黑洞外杨-米尔斯方程解的刘维尔型定理，这是弯曲时空规范场研究方面的一个突破．20世纪80年代，对调和映射和闵科夫斯基空间常曲率曲面的整体性质及孤立子型方程等进行了深入的研究，并把三者联系起来，发展了孤立子的几何理论，受到国内外同行的重视．曾于1982年获国家自然科学奖三等奖，1985年获国家教委科技进步一等奖．著述有《微分几何》(1980，与苏步青合作)、《孤立子理论及其应用》(1990，与谷超豪等合作)等专著．

王梓坤(Wáng Zǐkūn，1929—) 中国数学家．生于湖南零陵县，原籍江西吉安县．1952年毕业于武汉大学数学系，任教于南开大学．1955—1958年在莫斯科大学攻读概率论，获副博士学位，1958年回国，仍在南开大学任教，1977年升教授．曾任南开大学数学系副系主任，数学研究所副所长．1985年起任北京师范大学教授，1985—1989年任校长．现任北京师范大学和汕头大学数学系教授．1991年被选为中国科学院物理学数学部学部委员．1988年获澳大利亚麦克里大学荣誉科学博士称号．

王梓坤主要研究概率论．1958年得到了研究生灭过程的“极限过渡法”．后来又作了改进，用概率方法解决了生灭过程的构造问题及生灭过程的泛函分布．20世纪70年代在马尔可夫过程和位势问题的研究方面求出了高维布朗运动最后离开球面的时间、位置以及极大游程等分布，所得到的0—1律被称为“王梓坤零一律”．20世纪80年代在国际上第一次引入了多参变量OUP过程的定义，并系统地研究了其性质等问题．后来还研究了超马尔科夫过程，得到了超过程的拉普拉斯泛函的幂级数展开，求出了全部矩．20世纪60年代，在中国最早研究了随机泛函分析，在广义函数空间中的随机元的极限定理方面有成果．20世纪70年代中期，创造了用统计和转移概率方法预报地震，准确地预报了1976年四川松潘地震，并多次受到嘉奖．著述有《随机过程论》(1966)、《概率论基础及其应用》(1979)、《生灭过程与马尔可夫链》(1980)、《布朗运动与位势》(1983)等专著和科普著作《科学发现纵横谈》(1978)．

丁夏畦(Dīng Xiàqī，1929—) 中国数学家．生于湖南益阳．1951年毕业于武汉大学，后到中国科学院数学研究所工作，1978年任研究员．1980年后，先后任中国科学院系统科学研究所研究室主任、中国科学院武汉数学物理研究所所长，中国科学院应用数学研究所研究员．1991年被选为中国科学院物理学数学部学部委员．现任《数学物理学报》副主编．

丁夏畦主要从事偏微分方程研究，工作还涉及函数空间及其应用、数论、数理统计、调和分析、数值分析等．20世纪50年代后期开始，长期对等熵气流整体解进行了研究，1985年解决了一般等熵气流问题，从而解决了长期未决的等熵气流整体解存在性和拉克斯—弗里德里希斯(Lax-Friedrichs)等格式的收敛性难题，受到国内外同行的高度评价．在混合型方程的研究中，与吴新谋合作提出了abc PQR方法，受到了国际上的重视；与人合作讨论了强椭圆性的定义，证明了一类常系数椭圆型方程组的狄利克雷问题惟一性的充要条件；还解决了长期遗留下的所谓激波和稀疏波的追赶问题及其推广．发现了一类新的函数空间，即 Ba 空间，并对其进行了广泛研究，建立了迹定理及解的正规性等．1988年获中国科学院科技进步一等奖，1989年获国家自然科学奖二等奖．

龚 昇(Gǒng Shēng,1930—) 中国数学家,上海市人.1950年毕业于上海交通大学,先在浙江大学跟陈建功教授学习,1954年调中国科学院数学研究所,师从华罗庚教授,从事多复变函数论研究.1958年调中国科技大学任数学系副教授(1959)、教授(1978),并先后担任数学系主任(1959—1984)、中国科技大学副校长(1984—1989)、研究生院院长、数学所所长等职.还曾担任北京市数学会副理事长兼秘书长(1958—1966)、安徽省数学会理事长(1978—1996),中国科学院数学研究所、应用数学研究所、南开大学数学所学术委员会委员(1985—1988),《中国科学》、《科学通报》、《数学年刊》、《数学研究与评论》、《数学季刊》编委,《中国科技大学学报》主编.他还是中国科学院应用数学研究所、浙江大学等处的兼职教授,美国加州大学圣地亚哥分校、南伊利诺斯大学、内华达大学访问教授.

龚昇的研究工作及其成就主要表现在对酉群上的调和分析的系统研究.他发展了一整套思想、概念和方法,奠定了中国群上调和分析研究的基础.曾出专著《典型群上的调和分析》(1983),获得国家自然科学三等奖(1989).他发现并指出了多复变数的奇异积分与传统的奇异积分的重要差异,开创了多复变数奇异积分的研究路线.此项工作总结在专著《多复变数的奇异积分》(中文版1982,英文版1993)中,获得中国科学院自然科学一等奖(1996).1988年开始,他带领学生和国外合作者一道,开展了多复变数几何函数论的系统研究,将古典几何函数论推广到多复变数中去,开拓了多复变数几何函数论研究的新领域.这方面工作总结在两部专著《多复变数凸映照与星形映照》(1995)、《勃洛赫常数与薛瓦兹导数》(1999).他对比伯巴赫猜想进行了系统研究,将其整理成专著《比伯巴赫猜想》(1989),并获得中国科学院科技进步二等奖和国家自然科学四等奖.

王 元(Wáng Yuán,1930—) 中国数学家.生于浙江兰谿.1952年毕业于浙江大学,后到中国科学院数学研究所工作,1978年升为研究员.1980年被选为中国科学院物理学数学部学部委员.1984—1987年任数学研究所所长,1988—1991年任中国数学会理事长.1984—1988年任《数学学报》主编.

王元主要研究数论.他在哥德巴赫猜想的研究中成功地将已有的各种筛选法综合了起来,证明了(3+4)和(2+3).这是中国学者第一次在哥德巴赫猜想研究方面居世界领先地位,成果于1956年和1957年发表.1962年,他又证明了(1+4),所用方法被国外学者用以证明了(1+3),陈景润所得(1+2)成果,使用的方法也与其有关,后来他又和潘承洞合作简化了陈景润的估计,给出了最简单又本质的证明.他还和华罗庚合作,用数论方法研究了多重积分近似计算,于1960年初获成果,用实二次域与斐波那契序列构造出了一致分布点集贯,1973年又证明了用分圆域的独立单位系构造高维单位立方体的一致分布点贯的一般定理.他们的方法被国际数学界称为"华-王方法".1980年以后,他又研究了代数数域上丢番图分析,并获得了多项成果,他把这一领域的工作进行了总结,写成了《代数数域上的丢番图方程与不等式》,1991年由施普林格出版社出版.1982年因哥德巴赫猜想的研究,与陈景润、潘承洞共获国家自然科学奖一等奖.和华罗庚合作的"数论在近似分析中的应用"研究获1990年陈嘉庚物质科学奖.还与华罗庚合作著有《数论在近似分析中的应用》(1978;英文版1981).另外还著有传记《华罗庚》(1994).

夏道行(Xià Dào xíng,1930—) 中国旅美数学家.生于江苏泰州.1950年毕业于山东大学数学系,1952年在浙江大学研究生毕业.后任教于复旦大学,1954年任讲师,1956年任副教授,1957年去苏联访问,1977年升为教授.1980年被选为中国科学院物理学数学部学部委员.1982年以后去美国工作,曾在普林斯顿高等研究院进行访问研究,后任艾奥瓦大学、俄亥俄大学和纽约州立大学石溪分校访问教授,1984年任范德比尔特大学教授.曾任复旦大学数学研究所副所长、中国数学会常务理事、上海市数学会理事长等职.

夏道行的的研究工作涉及函数论、泛函分析、算子理论等多个领域.早期研究复变函数论,1952年在单叶函数论方面得到了一个极有用的不等式,1957年证明了戈鲁辛的两个猜想,1959年建立了"拟共形映照的参数表示法",还得了被称为"夏道行出数"的一些性质.1965年出版的专著《无限维空间上的测度与积分》,在国际上曾被称为"第一次广泛而详尽地介绍无限维空间上的测度和积分理论,以及在量子场论等方面的应用"、"巧妙地用无限维空间测度论技巧,对拓扑代数上正泛函数表示论做出了新奇而有启发性的发展".在泛函分析方面,他还系统地发展了亚正规算子的谱论.1963年发表的"非正常算子(Ⅰ)"是该领域的奠基性文献.他首创的函数模型,已被国际同行广泛采用.20世纪70年代中期,他还在数学物理领域取得了不少成果.1960年,他提出将泛函分析列入大学本科的基础课程,并编写了中国第一本大学生用的泛函分析教材,这一举措曾受到国外学者的赞赏.他还著有《次正规算子谱理论》(1983,国外出版的外文版)、《线性算子谱理论(Ⅰ)》(1983)、《线性拓扑空间引论》(1986,与杨亚合作)和《线性算子谱理论(Ⅱ)》(1987,与严绍宗合作)等专著.

宋　健(Sòng Jiàn,1931—　)　中国控制理论家.生于山东荣成,1951年考人哈尔滨工业大学.1953年到苏联莫斯科包曼高等工学院学习,1958年毕业,后留校当研究生,1960年获副博士学位.回国后从事导弹、航天事业,历任研究室主任、研究所副所长、副院长.1981年任北京信息控制研究所首任所长,同年任航天部副部长兼总工程师.还担任过中国第一代导弹控制系统的主任设计师、核潜艇发射的潜地导弹副总设计师等职.1979年任中国自动化学会理事长,1984年出任国家科委主任.1991年被选为中国科学院技术科学部学部委员.还曾先后被聘为哈尔滨工业大学、清华大学、复旦大学、北京大学兼职教授和清华大学的博士生导师,还是美国华盛顿大学荣誉教授、墨西哥工程科学院通讯院士.

宋健在航天技术、最优控制理论、偏微分方程控制理论、人口控制论和系统工程等方面都有突出的成就.1958年首先在三维空间中实现了最优控制器的设计和试验.1959年解决了一类非线性系统的双控制最优控制的综合问题,最早发现等时场概念与最优控制系统综合理论之间的内在联系,从而导致了理论上的突破.以最优控制场理论为基础,建立了描述最优场的偏微分方程及其边值条件.确定了由场函数惟一决定的最优控制在相空间中的取值分布,从而解决了线性定常和时变系统的最速控制综合问题.1962年又与韩京清合作把这一理论推广到变系数线性系统.20世纪60年代初,与关肇直等合作建立了由偏微分方程描述的分布参数控制系统理论.首先提出弹性振动控制的概念,建立了由偏微分方程描述的受控对象与常微分方程描述的控制器相互耦合的分布参数系统模型,建立了点观测、点控制等问题的理论基础.还把集中参数系统中的频率法推广到了分布参数系统,建立了传递算子概念.首先提出把最优控制理论应用到导弹控制系统设计上.在反弹道导弹武器系统的研制和核潜艇发射的固体导弹的设计过程中解决了许多关键性技术问题.1978年开始,他用控制论、系统工程的理论与方法对中国人口控制与发展进行了定量理论研究,首次做出了中国人口发展趋势的长期预报,创立了"人口控制论".控制论方面的工作曾获1978年全国科学大会奖;与关肇直等合作的"飞行器弹性控制理论研究"获1982年国家自然科学奖二等奖;人口控制理论方面的工作在1987年获国际数学建模学会的爱因斯坦奖和国家科技进步奖一等奖.主持修订了钱学森的《工程控制论》(上册,1980;下册,1981),还著有《人口预测和人口控制》(1982,与于景元合作)、《人口控制论》(1985,与于景元合作)、《科技与社会系统论》等专著.

陈景润(Chén Jǐngrùn,1933—1996)　中国数学家.生于福建省福州市,卒于北京.1953年毕业于厦门大学,曾在北京任中学教师,后任厦门大学图书馆管理员.在这一期间他自学了解析数论,并对华罗庚的"堆垒素数论"上的三角和积分平均公式作了改进.1956年由华罗庚调入中国科学院数学研究所工作,1979年升为研究员.1980年被选为中国科学院物理学数学部学部委员.

陈景润主要研究解析数论,对华林问题、圆内整点问题、球内整点问题、塔林问题等一系列著名数论问题都做了改进.20世纪60年代,他开始了对筛选法及其应用的研究,证明了"每个充分大的偶数都是一个素数与一个不超过两个素数的乘积之和",即"1+2".这一定理已被国际上称为"陈氏定理",把有关哥德巴赫猜想的研究提高到了新的水平.定理证明过程中,在方法上也有重大创新,他的方法已被国际上称为"转换原理".1982年,他与王元、潘承洞共获国家自然科学奖.著作有《初等数论》、《1+1除外集》等.

石钟慈(Shí Zhōngcí,1933—　)　中国数学家.生于浙江省宁波市.1955年毕业于复旦大学,1960年在苏联科学院斯捷克洛夫数学研究所研究生毕业.回国后,在中国科学院计算技术研究所工作.1964年调中国科学技术大学数学系任教,1980年晋升为教授,任数学系主任,并任中国科学院计算中心主任.1991年被选为中国科学院物理学数学部学部委员.1994年起任《计算数学》、《计算数学杂志》(英文版)、《数值计算与计算机应用》三刊的主编.

石钟慈主要从事计算数学理论与应用的研究.20世纪50年代后期到60年代中期在求解微分方程特征值问题上做了大量的研究工作,建立了一种将变分原理与微扰理论相结合的新算法,并用此算法得到了氦原子最低能态的近似值.在矩阵特征值、行列式和条件数的界限的研究中,得到了一批精度很高的估计公式.20世纪70年代后期,他又提出了"样条有限元",将样条逼近与有限元巧妙地结合了起来.它具有计算量小、精度高、计算机存储量少等优点,曾在许多工业部门得到应用.从20世纪80年代开始,他还系统地研究了非协调元有限元问题,并得到了一系列成果,否定了国际上广为流行的判别非协调元收敛性的准则,揭示了工业直观与数学严密之间的深刻矛盾,并首先证明了非协调元的收敛性强烈地依赖于格网剖分的方式,提出了判别非协调元收敛性的新准则.此准则可用于检验迄今为止的几乎所有非协调元的收敛性,为实际应用提供了强有力的工具.为此,1987年曾获中国科学院科技进步奖一等奖、国家自然科学奖三等奖.著作有《弹性结构的数学理论》(1980)等.

潘承洞(Pān Chéngdòng,1934—1997) 中国数学家.生于江苏苏州,卒于山东济南.1956 年毕业于北京大学,后成为闵嗣鹤的研究生.1961 年研究生毕业,到山东大学任教,1962 年任讲师,1978 年任教授.1979—1984 年任数学系主任,1984 年任山东大学副校长兼数学研究所所长,1986 年任山东大学校长.1991 年被选为中国科学院物理学数学部学部委员.还曾任山东省科协主席、中国数学会副理事长.

潘承洞主要研究解析数论.在算术数列的最小素数的研究中,1957 年明确指出了 λ 主要依赖于和 L 函数有关的三个常数,给出了计算 λ 的具体方法,首次得到了 $\lambda<10^4$,后又改进为 $\lambda<5\,448$.在哥德巴赫猜想、大筛法以及素数分布的均值定理的研究方面,1962 年对大筛法和 L 函数零点分布的结论做了进一步改进,证明了(1+5)成立.1963 年又证明了(1+4)成立;1973 年提出并证明了一类新的素数分布值定理,用此定理给出了陈景润定理,即(1+2)的简单的证明;此定理也成了以后研究哥德巴赫猜想的基础,在一些著名的解析数论问题中也有重要应用,因此受到国际上的高度评价.1988—1990 年间提出了用纯分析方法估计小区间上的素变数三角和,第一次严格证明了小区间上的素数定理,完善了他 1959 年应用分析方法的估计.1981 年出版的《哥德巴赫猜想》(与潘承彪合作)一书是国际上第一本全面系统地介绍研究猜想的专著,得到了国内外的好评.1982 年曾与陈景润、王元共获国家自然科学奖一等奖.还著有《素数定理的初等证明》(1988,与潘承彪合作)、《解析数论基础》(1991,与潘承彪合作)等多种专著.

陆家羲(Lù Jiāxī,1935—1983) 中国数学家.生于上海,卒于包头.出身贫寒,初中毕业后即当学徒,1951 年考入东北师范大学物理系,1961 年毕业后到内蒙古包头钢铁学院任教,不久被调到包头市教育局研究室,后任中学物理教师,直到去世.

陆家羲是位业余数学家,长期在不被理解、没有支持的情况下坚持组合数学的研究工作.20 世纪 60 年代早期,解决了有 100 年历史的柯克曼女生问题,但这一工作因未能获得应有评价而未能发表,1971 年为国外学者著文解决.1979—1981 年证明了组合数学史上逐步形成的著名的大集定理.他利用前人成果,设计了一系列递归构造,写成了论文"关于不相交斯坦纳三元系大集 1—*VI*",分两次于 1983 年 3 月和 1984 年 9 月在美国《组合论杂志》上发表.这是 20 世纪 60 年代以来区组设计理论中最重要的成就之一.此成果获 1989 年国家自然科学奖一等奖.1979 年写成、1984 年发表的《可分解平衡不完全区组设计的存在性理论》是该课题方面的重要成果,在国际上曾处于领先地位,外国学者知道后曾希望译成英文后再度发表.

陆汝钤(Lù Rǔ Qián,1935—) 中国数学家.生于上海.1959 年毕业于德国耶拿大学数学系,同年起在中国科学院数学研究所工作.1987 年至 1990 年任数学研究所副所长、代所长.1991 年至 1994 年任数学研究所学术委员会主任.1999 年当选为中国科学院院士.

陆汝钤早年从事多复变函数论研究,针对 Cartan 猜想被否定后,人们对于在非对称可递域上能否建立调和函数论的疑惑,首先在一大类非对称可递域上建立了调和函数论,肯定地回答了这个问题.1972 年起在计算机科学领域工作.曾倡导并主持以软件的机械化生产和移植为主要内容的系列软件计划(XR 计划),为当时国产机软件缺乏问题的解决做出贡献.在计算机语言、编译理论、形式语义等方面有一系列研究成果.其中包括给出了具动态控制结构程序的代数语义,使代数语义具备了描述完整程序控制结构的能力.把数学中黎曼曲面的思想引进 PETRI 网论,建立了多层 PETRI 网模型,称为 P/R 网,并用它研究并发和分布式语义,包括给出了 CCS 的完全真并发语义.20 世纪 80 年代以后的主要研究方向为知识工程,是中国该领域的主要开拓者之一.研究内容包括知识表示、知识获取、知识工程工具、分布式人工智能、基于知识的软件工程、基于知识的计算机艺术等.他主持开发的大型专家系统开发环境《天马》已应用于国防和经济建设的 20 多个领域,有重要的经济和社会效益.1985 年提出了分布式专家联合思想及其总体设计,并首次把机器辩论引进人工智能领域.他提出的基于类自然语言理解的知识自动获取技术已应用于专家系统和智能计算机辅助教学系统的自动生成.并把该技术和软件工程中的领域分析和领域建模结合起来,提出了"前需求分析"概念及其实现技术,有利于信息系统的自动生成和自动演化.他还提出并实现了一条从中文童话故事自动生成计算机动画的技术路线,在艺术创造领域内发展了人工智能技术.曾先后获 1983 年中国科学院重大成果一等奖,1992 年中国科学院科技进步一等奖,1993 年国家科技进步二等奖.

林　群(Lín Qún,1935—) 中国数学家.生于福建连江县.1956 年毕业于厦门大学,后到中国科学院数学研究所工作.1980 调系统科学研究所,1983 年任研究员,1991 年起任副所长.1993 年被选为中国科学院物理学数学部学部委员.

林群主要研究计算数学,并形成了独特的理论体系.他在有限元计算中,首次揭示了随意的"剖分"和通常的"形函数"表示给计算结果造成的数量级的

差异，提出了使用“最优剖分”和“最优形函数表示”的原则，对计算科学有重要意义. 他在工程计算中，发现了“超收敛”是整体现象，大大推进了工程计算的理论研究，还提出了“最优分析”概念，这一概念证明了在流体计算中也有“超收敛”现象. 他还与合作者一起建立了包括算子迭代、校正和外推在内的高精度算法的系统理论，提出了既可保证算法的高精度又不必引进复杂算法的新的技术路线，从而发展了计算数学. 这些成果在国际上引起了许多后继研究工作，受到了高度评价，其算法被称为“林群迭代”、“林方法”，并被广泛使用. “有限元外推技术”曾获 1989 年中国科学院自然科学奖一等奖.

张景中(Zhāng Jǐngzhōng，1936—) 中国数学家. 生于河南汝南县. 1959 年毕业于北京大学数学力学系，现任中国科学院成都计算机应用研究所研究员. 1995 年当选为中国科学院(技术学部)院士.

张景中从事定理机器证明、距离几何、动力系统、数学教育等研究. 在离散力学的研究中，解决了有关动力系的泛函方程研究中的一些长期悬而未决的问题，并发展了非线性振动技术. 在距离几何方面，解决了初等图形在欧氏空间的嵌入等问题. 他提出了“教育数学”的概念及基本原理，对几何和微积分的入门教学提出了以面积为中心的几何新体系新方法、极限概念的非 ε 语言和连续归纳法等. 他在计算机科学领域，提出并实现了定理机器证明的数值并行法，给出了非线性三角形代数方程组相对单纯分解的算法，解决了多分支几何命题判定的可约性难题，创立了非线性代数方程组相容性判定的含参结式法，提出了弱非退化条件，对著名的吴氏非退化条件做了改进. 他还提出了消点思想，系统地建立了几何定理可读证明自动生成的原理、方法和算法，并与合作者把此法发展成了软件. 他曾获中国科学院自然科学奖一等奖，1982 年又获国家发明奖二等奖，1990 年还被中国科普作家协会审定为贡献突出的科普作家. 张景中已发表论文 100 余篇，著有《从数学教育到教育数学》(1989)、《教育数学探索》(1994)等专著 10 余本、数学科普书 15 本.

张恭庆(Zhāng Gōngqìng，1936—) 中国数学家. 生于上海市. 1959 年毕业于北京大学，并留校任教. 1978 年任副教授，1983 年升为教授. 北京大学数学研究所所长、《数学学报》副主编. 曾任美国库朗研究所、伯克利数学科学研究所、麦迪逊威斯康星大学访问教授. 1991 年被选为中国科学院物理学数学部学部委员.

张恭庆主要研究非线性泛函分析及非线性偏微分方程理论. 他改进发展了莫尔斯理论，系统建立并发展了具有孤立临界轨道的无穷维莫尔斯理论. 1981 年，他首次应用莫尔斯理论研究了渐近线性算子方程，得到了偏微分方程中的一系列多重解结果. 他以同调类的极小极大原理为基础，在新建立的莫尔斯理论中纳入了其他许多临界点定理，形成了统一的理论体系，由此还得到了多个重要的新的临界点定理. 他还发展了山路定理，扩大了其应用范围. 在自由边界问题的研究中，他提出了带间断非线性项的偏微分方程理论，发展了上、下解方程、集值映射拓扑度方法，以及不可微泛函的临界点理论，还用这些方法研究了油井的水锥问题、等离子体磁面平衡问题、障碍问题、燃烧问题等自由边界问题. 他的理论已被国际同行应用到涡环、地下水及夹层薄板等问题的研究中. 他的研究工作还涉及量子场的数学理论、函数空间与伪微分算子、博弈论中的纳什平衡点问题等. 他曾获 1982 年国家自然科学奖三等奖、1986 年陈省身数学奖、1987 年国家自然科学奖二等奖. 著述有《无限维莫尔斯理论及其应用》(1985，加拿大出版)、《临界点理论及其应用》(1986)、《线性泛函分析讲义》(上册，1987；下册，1990，均与人合作)等专著.

陈翰馥(Chén Hànfù，1937—) 中国数学家. 浙江绍兴人. 1961 年毕业于苏联列宁格勒大学. 回国后，在中国科学院数学研究所工作，1980 年到系统科学研究所工作. 现任研究员、副所长，《系统科学与数学》杂志主编，国际自动控制联合会理论委员会副主席. 1993 年被选为中国科学院技术科学部学部委员.

陈翰馥主要从事现代控制理论研究. 20 世纪 60、70 年代从事现代控制理论在国防技术中的应用的研究. 20 世纪 70 年代，他提出了随机能观性的概念，第一次统一了随机系统和确定性系统的能观属性. 20 世纪 80 年代初，他又提出一套分析收敛性的条件，被国外称为“陈氏条件”. 首先解决了随机反馈控制系统的阶和时滞估计，并提出了“变界截尾”随机逼近算法，在自适应制中得到了成功的应用. 他还在自适应控制领域中，提出了“衰减激励”方法，从而使控制的最优性和估计的一致性能同时兼顾. 他还和其学生一起证明了自校正调节器算法的收敛性和最优性，解决了国际上一个 20 多年未解决的问题. 他曾获全国科学大会奖、1985 年中国科学院科技成果二等奖、1987 年国家自然科学奖三等奖等. 现已发表的论文及研究报告近 120 篇，著述有《线性控制系统的能控性和能观性》(1975，与关肇直合作)、《随机系统的递推估计与控制》(1985，英文版，在美国出版)等 5 本专著.

张广厚(Zhāng Guǎnghòu，1937—1987) 中国数学家. 生于河北唐山，卒于北京. 1961 年毕业于北京大学，1962 年考取中国科学院数学研究所研究

生，师从熊庆来，毕业后留所工作，1977年任副研究员，1979年任研究员.1980年任北京科协副主席，1983年任中国科协书记处书记.

张广厚主要研究整函数和亚纯函数理论.1978年在“整函数与亚纯函数的亏值、渐近值和茹利雅方向的关系的研究”一文中，研究并建立了亏值、渐近值和茹利雅方向三个重要概念间的深刻联系，给出了它们之间关系的一般关系式，还解决了于1964年举行的国际函数论会议上提出的有关渐近值方面的4个问题.这些成果均受到了国际著名数学家们的高度评价.1965年到1977年间，他还和杨乐合作在解析函数族正规性涉及重值的研究、亏值、渐近值、波莱尔方向等方面得到了许多具有创造性的结果，特别是在函数值分布论方面，发现了“亏值”和“奇异方向”之间的联系，解决了50年来奇异方向如何分布这一重要问题，还在函数亏值数目的估计方面获得了普遍而准确的结果.他们的这些研究工作开辟了一个新的研究方向.1982年他与杨乐一起获国家自然科学奖二等奖；他所撰写的《整函数和亚纯函数理论——亏值、渐近值和奇异方向》(1986)专著，获1988年第四届全国优秀科技图书一等奖.

姜伯驹(Jiāng Bójū，1937—　)　中国数学家.生于天津.1957年毕业于北京大学数学系，后留校任教.1983年任教授.1980年被选为中国科学院物理学数学部学部委员，1985年被选为第三世界科学院院士，同年兼任南开大学数学研究所副所长.1979年曾到美国普林斯顿高等研究院工作，1980—1981年曾到伯克利加利福尼亚大学和洛杉矶加利福尼亚大学讲学.

姜伯驹长期从事拓扑学研究，主要研究领域为不动点理论.他在尼尔森理论的研究中有重要贡献，解决了尼尔森于20世纪20年代提出，但一直未被解决的猜想：“曲面上尼尔森数等于最少不动点数.”在关于计算尼尔森数方法的研究中，他提出了闭同伦迹群方法，现被称为“姜群方法”，还提出了有限层复叠空间方法.在尼尔森式的周期点理论的研究中，他提出了周期点类的概念、类的约化概念，并定义了周期点的两种尼尔森数，讨论了它们的基本性质和计算方法.1982年，他曾获国家自然科学奖三等奖(与人合作)，1987年以“曲面自映射的不动点理论”项目获国家自然科学奖二等奖，并获第二届陈省身数学奖(1988).著作有《尼尔森不动点理论讲义》(1983)、《解析几何》、《一笔画和邮递路线问题》等.

钟家庆(Zhōng Jiāqìng，1937—1987)　中国数学家.生于安徽安庆.1962年毕业于北京大学，1966年中国科学院数学研究所研究生毕业，师从华罗庚.1966—1969年任教于中国科学技术大学，1969—1978年任教于清华大学，1978年到中国科学院数学研究所工作，任研究员、函数论研究室主任.1987年在美国哥伦比亚大学讲学时于4月12日去世.

钟家庆主要研究多元复变函数论、复流形与微分几何学.1984年与莫毅明合作证明了具有非负全纯双截曲率及正里奇曲率的紧凯勒-爱因斯坦流形必等度于一紧的埃尔米特对称空间.1983年与杨洪苍合作证明了里奇曲率为非负的紧黎曼流形 M 的拉普拉斯-贝尔特拉米算子的第一特征值 $\lambda_1 \geqslant \pi^2/d^2$，其中 d 为 M 的直径.这是已有的最好的估计，因此获首届陈省身数学奖(1985年).为了纪念他所做出的贡献，现设有奖励青年数学家的“钟家庆奖”.

李大潜(Lǐ Dàqiǎn，1937—　)　中国数学家.生于江苏南通.1957年复旦大学毕业留校任教.1966年在职研究生毕业，1980年升为教授.1991年任复旦大学研究生院院长、《数学年刊》常务副主编.1995年当选为中国科学院院士，还担任中国工业与应用数学学会副理事长，上海工业与应用数学会理事长.1996年任中国数学会副理事长.

李大潜主要从事数学的基础理论与应用的研究.他对二变量的一般形式的拟线性双曲组的各类边值问题和自由边界问题以及广义黎曼问题，建立了完整的局部解理论.此理论在物理、力学等多种类型的双曲问题中都有应用.后又引入了“弱线性退化”的概念，获得了有关整体解的系统成果，首次揭示了边界耗散项的存在对拟线性双曲组解的整体正规性的积极影响.在完全非线性波动方程经典解的整体存在性与生命跨度估计问题方面，他取得了完整的结果，提出了处理这类问题的简明而统一的整体迭代法.他还对偏微分方程提出了一类新型的边值问题，即等值面边界问题，并建立了完整的理论.他在一系列理论研究的基础上，对各种电阻率测井建立了统一的数学模型，所完成的“微球形聚焦井”项目，已在10多家油田推广使用，地质效果良好并取代了有关仪器的进口.在拟线性双曲——抛物耦合方程组的理论及应用、分布参数系统最优控制及自然电位测井的数学方法等方面，他也取得了重要的成果.他曾获国家自然科学奖二等奖，国家教委科技进步奖一等奖、二等奖等.他发表论文120多篇，著述有《数学物理方程》、《有限元素法在电质测井中的应用》、《拟线性双曲组的边值问题》(与人合作，在美国出版)等专著、教材12本.

杨　乐(Yáng Lè，1939—　)　中国数学家.生于江苏南通.1962年毕业于北京大学，同年考取中国科学院数学研究所研究生，师从熊庆来，毕业后留所工作，1977年任副研究员，1979年升为研究员.1982年任数学研究所副所长，1987年任所长.1980年被选为中国科学院物理学数学部学部委员.1983—1987年任中国数学会秘书长，1992—1995年

任中国数学会理事长.1979—1990年任全国青年联合会副主席.1998年任中国科学院数学与系统科学研究院院长.

杨乐主要研究函数论.与张广厚合作第一次揭示了亏值与奇异方向这两个基本概念之间的联系,并给出了定量表述,为值分布研究提出了新方向.他们还用构造性方法完整地解决了亚纯函数奇异方向的分布规律,即给出了具有指定波莱尔方向的亚纯函数的构造.首先在一般亚纯函数的研究中引进并研究了亏函数,激发和引导了国际上一些函数论专家的重要工作.他还首先提出了相应于一个皮卡(Picard)型定理与正规定则常有一个奇异方向的思想,从而引进了一些新的奇异方向.发展了全纯函数与亚纯函数的正规族理论,建立了许多新的"正规定则",发现了正规族与不动点之间的深刻联系.1982年,他与海曼合作解决了李特尔伍德(Littlewood, J.E.)于1930年提出的一个猜想.后来又在亚纯函数总导数总亏量的估计方面得到了当时国际上最好的结果.1982年,他与张广厚一起获国家自然科学奖二等奖.著作有《值分布论及其新研究》(1982)等.

刘应明(Liú Yìngmíng,1940—　) 中国数学家.生于福建福州.1963年毕业于北京大学数学力学系.后任教于四川大学(现四川联合大学)数学系.1983年升为教授.1989年任四川大学副校长,国际模糊系统协会副理事长及中国分会主席.1995年当选为中国科学院院士.1996年任中国数学会副理事长.

刘应明主要研究拓扑学和模糊性数学处理等.他奠定了格上拓扑学的有点化的基础,还在嵌入理论、度量化理论、紧化理论等方面有重大成果.在代数拓扑研究中,他给出了CW复形可乘的充分必要条件,解决了怀特黑德问题等.在一般拓扑学方面,他提出了拟仿紧空间与σ集体正规等概念.在不分明拓扑(即埃雷斯曼的格上拓扑学)的研究中,证明了决定邻属关系更本质的属性是集合论的"择一原则".在不分明拓扑中代数与序结构方面,他对一致性结构以至度量化、嵌λ理论等研究中所涉及到的保并映射类、极小类、连续格以及半连续映射整体性质、范畴论等多方面代数或序结构问题,进行了深入的研究,并取得了重要成果.他是不分明拓扑中代数化学派的代表人物.在多元函数的"简单逼近"问题的研究中给出了一类函数的哥氏表示的简洁逼近式,实现了真正的降维.在层次决定映射方法的迪厄多内插入问题的研究中,格值化了迪厄多内插入定理.他在模糊信息处理方面也有成果,并推动了中国模糊技术的产业化.他还在多值逻辑的研究中取得了重要成果.他曾获全国科学大会奖、国家自然科学奖、国家教委科技进步奖等.

冯克勤(Féng Kèqín,1941—　) 中国数学家.生于天津.1964年毕业于中国科学技术大学数学系,1968年又在该校研究生毕业.1968—1973年任山西太原钢铁公司电工和外文科技资料翻译.1973年起任教于中国科学技术大学,任数学系教授、系主任、研究生院院长.后又调清华大学任理学院常务副院长.

冯克勤主要从事代数数论和代数编码理论的研究工作.在整体域的类群和分圆单位群代数结构的研究中,他在1982年给出了分圆数域$Q(\zeta_P)$理想类数第一因子的上界估计,在1984年又对一般的分圆数域$Q(\zeta_P)$的类数第一因子得到了类似的上界.1987年他对于一批(无穷多)循环三次数域F,验证了关于K群K_2O_F的伯奇-泰特(Birch - Tate)猜想偶数部分的正确性(奇数部分已有证明).他还在分圆单位系的独立性和关系等方面取得了一系列成果.在对具有复乘的一些椭圆曲线无穷族的研究中,于1988年、1990年对具有复乘$\sqrt{-1}$、$\sqrt{-3}$和$\sqrt{-7}$的三个椭圆曲线无穷族完全证明了BSD猜想的正确性.他曾获1985年国防部科技成果奖,1988年中国科学院科技进步奖二等奖,1990年第三届陈省身数学奖.著作有《交换代数基础》、《代数数论入门》、《近世代数引论》等.

严加安(Yan Jiaan,1941—　) 中国数学家,生于江苏省邗江县,1964年7月毕业于中国科学技术大学数学系,分配到中国科学院数学研究所工作,1973—1975年在法国斯特拉斯堡大学进修概率论,1980年到中国科学院应用数学研究所工作,1981—1982年作为洪博学者在德国海得堡大学合作研究.1994—1998年任中国数学会概率统计学会理事长,现任国际数理统计和概率论贝努利学会理事和国际概率论著名刊物《概率论年刊》的编委,1999年被选为中国科学院院士.

严加安主要从事概率论、鞅论、随机分析和白噪声分析等领域的研究工作,并有许多基础性贡献.他将苏斯林(Souslin)集论从拓扑形式推广为更适合于概率论应用的可测形式;给出了一类L^1凸集的刻画,该结果被用于证明半鞅的刻画定理,并被广泛用于金融数学中"资产定价基本定理"的研究;推广了无穷维分析中著名的格罗斯(Gross)定理和明劳斯(Minlos)定理;提出了在鞅论中基本的局部鞅分解引理;给出了半鞅随机积分的"初等"定义,为研究随机积分的性质提供了简单途径;用统一简单方法获得了指数鞅一致可积性准则,改进了诺维科夫(Novikov)准则及若干其他结果;与迈耶(Meyer, P. A.)合作,定义了广义泛函的维克(Wick)乘积并对白噪声分析框架进行了系统研究.发表论文60多

篇，出版专著 9 部（其中英文专著 3 部），他的论文和著作已被 27 部国外专著（不包括他自己的专著）引用. 近期从事金融数学研究，参加了国家基金委重大项目“金融数学、金融工程、金融管理”和国家科技部 973 项目“核心数学的前沿问题”等工作. 1987 年获中国科学院科技进步奖二等奖，1992 年获中国科学院自然科学奖一等奖，1993 年获国家自然科学奖二等奖，1999 年获国家图书奖提名奖.

林节玄（Lín Jiéxuán，1942— ） 美籍华裔数学家. 生于香港. 1963 年获香港大学学士学位，1967 年获哥伦比亚大学博士学位. 1967—1978 年在芝加哥大学任教，1968 年起任教于伯克利加利福尼亚大学. 1969—1972 年任助理教授，1972—1976 年任副教授，1976 年升任教授.

林节玄主要研究代数，研究范畴涉及域论、二次型、群与群表示论、环论等. 其著作《二次型的代数理论》（Algebraic Theary of Quadratic Forms ，1973）、《塞尔猜想》（Serre's Conjecture，1978）和有关 K 理论、域上二次型以及他撰写的有序域理论的三篇文章对二次型理论、塞尔问题的解、形式实域的现代理论等方面都给出了深刻的阐述. 因此曾于 1982 年获美国数学会斯蒂尔奖的阐述论著奖.

李邦河（Lǐ Bānghé，1942— ） 中国数学家. 生于浙江乐清县. 1965 年毕业于中国科学技术大学. 1965—1979 年在中国科学院数学研究所工作，1980 年起在中国科学院系统科学研究所工作. 1986 年任研究员，现兼任安徽大学教授. 2001 年被选为中国科学院院士.

李邦河主要从事微分拓扑学、广义函数论和非标准分析及激波等研究. 他在微分流形浸入理论的研究中取得了重要成果，给出了几种新的方法，解决了一些难题. 他把非标准分析应用到了广义函数论中，还证明了与代数结和球的同伦群有关的一些重要结论. 1980 年，他获得了国家重大成果奖二等奖；1986 年，获国家科技进步奖二等奖；1987 年，获第二届陈省身数学奖. 著作有《非标准分析基础》等.

洪家兴（Hóng Jiāxīng，1942— ） 中国数学家. 江苏吴县人. 1965 年毕业于复旦大学，1982 年获复旦大学博士学位，并留校任教. 现任复旦大学数学研究所教授.

洪家兴主要研究偏微分方程，特别是混合型偏微分方程和与几何中等距嵌入有关的微分方程. 在等距嵌入方面得到了完备负曲率曲面在 R^3 中实现的第一个比较一般的存在性结果. 在二阶第二类多元混合型方程方面找到了完全刻画第二类混合型方程适定解问题的提法和解的正则性的不变量. 在高阶混合型方程方面也有贡献. 他曾于 1986 年获国家教委科技进步奖一等奖，于 1995 年获第五届陈省身数学奖.

萧荫堂（Xiāo Yìngtáng，1943— ） 美籍华裔数学家. 生于广东. 1963 年获香港大学学士学位，1964 年获美国明尼苏达大学硕士学位，1966 年获普林斯顿大学博士学位. 1966—1967 年任普度大学助理教授，1967—1970 年任圣母大学助理教授. 后任教于耶鲁大学，1972 年升为教授；1978—1982 年任斯坦福大学教授；1982 年起任哈佛大学教授. 还曾任巴黎第 7 大学、日本京都大学、普林斯顿大学、法国高等科学研究所等多所大学和研究机构的访问教授. 1990 年获香港大学的荣誉博士学位，1993 年被选为德国格丁根科学院通讯院士. 1978 年和 1983 年曾两次应邀在国际数学家大会上作报告.

萧荫堂主要研究复分析，是国际复分析领域的学术带头人之一，曾解决了不少重要问题，并首创性地通过使用层理论、偏微分方程和微分几何开拓了许多新的研究方向. 在他获得博士学位后的最初 5 年内主要研究跨越解析集的扩张解析层问题，并解决了一系列的难题. 1974 年，在复分析领域证明了一个关于正闭流结构的深刻结果，即这类流的密度集是解析集，并给出了在闭、正流扩张问题和跨越子簇的亚纯映射方面的应用. 从 1975 年开始，他的研究工作与微分几何发生了联系，曾与丘成桐合作证明了多个重要问题，其中有具“小”非正截面曲率的单连通流形同构于 C^n 和具正曲率的紧凯勒流形同构于 P^n，后者解决了弗伦克尔猜想. 他还和莫斯托（Mostow，G. D. ）合作构造了不被欧氏球覆盖具负截面曲率的紧流形的例子. 在复流形的研究中，他曾开创性地使用了调和映射，与兰格（Range，R. M. ）一起获得了与 $\bar{\partial}$ 方程有关的重要结果. 他还建立了凯勒-爱因斯坦度量在具正反典范线丛的流形上的存在性. 由于这些研究成果的获得，他于 1993 年获伯格曼奖.

忻元龙（Xīn Yuánlóng，1943— ） 中国数学家. 生于上海. 1965 年毕业于复旦大学，并留校任教，现任复旦大学数学研究所教授.

忻元龙主要研究微分几何，在调和映射的存在性、惟一性、具体构造以及应用等方面取得了不少成果. 1980 年证明了球面 $S^n(n\geqslant3)$ 到任何黎曼流形的稳定调和映射一定是常值映射. 在对球面间调和映射的研究中，提出了关于黎曼浸没保持纤维的等变映射概念，并构造了新的调和映射. 在高维球同伦群调和代表元问题上也有成果. 1978 年，他获得全国科学大会奖，1984 年，获全国科技进步奖二等奖，1985 年，获国家教委自然科学奖一等奖，1993 年，获第四届陈省身数学奖. 著作有《调和映照微分几何学》等.

丁伟岳（Dīng Wěiyuè，1945— ） 中国数学

家.生于上海.1968年毕业于北京大学数学力学系数学专业,1982年获中国科学院数学研究所硕士学位,1986年获博士学位.现任中国科学院数学研究所研究员.1996年任中国数学会副理事长.2001年被选为中国科学院院士.

丁伟岳主要研究几何中的偏微分方程.他曾和人合作给出了一般尼伦伯格问题有解的充分条件.1986年,他在一定条件下建立了获得多个调和映射的临界点理论.他还在非紧完备黎曼流形间调和映射的存在性问题、调和映射中的热流方法等方面取得了不少成果.他曾于1993年获第四届陈省身数学奖,同年还获得中国科学院自然科学奖二等奖,1993年获国家自然科学奖二等奖.

文 兰(Wen Lan,1946—) 中国数学家.北京大学教授. 1946年生于甘肃兰州. 1964年进北京大学数学力学系学习. 1970－1978在河北献县插队,教中学. 1978年进北京大学数学系读硕士,在导师廖山涛先生指导下于1981年获硕士学位,随后在山东大学数学系任教. 1982年赴美国纽约州立大学攻读博士学位,1984年转到美国西北大学,在导师Williams指导下于1986年获博士学位.随后在芝加哥州立大学和德克萨斯大学任教. 1988年回国在北京大学博士后流动站工作,1990年出站留在北京大学工作至今,历任副教授,教授,博士生导师,1999年当选为中国科学院院士.

文兰主要从事微分动力系统的研究,在一些基本问题上作出了重要的贡献,如不可逆系统的CI封闭引理(1991),非扩张双曲吸引子的约化问题(1992),流的CI稳定性猜测(1996),CI衔接引理(与夏志宏合作)(1999),以及CI稠密性猜测的阶段性工作(2002)等. 文兰和他的同事一起,长期以来潜心钻研廖山涛先生系统而深刻的理论,不久前举办了北大和清华廖山涛阻碍集理论研讨班(2002),在一种简化的形式下对廖先生的理论作了系统的讲解. 由于文兰多年来踏踏实实的工作,他先后获得国家教委科技进步二等奖(1992年),国氏博士后奖励基金(1994年),陈省身数学奖(1996年),求是杰出青年学者奖(1997年).

马志明(Mǎ Zhìmíng,1948—) 中国数学家.生于山西.1978年毕业于重庆师范大学,1981年、1984年分别获中国科学院应用数学研究所硕士和博士学位,后留所工作.现任研究员,《应用数学报》执行编委.1995年被选为中国科学院院士.1996年任中国数学会副理事长,1999年任理事长.1994年曾应邀在国际数学大会上作45分钟报告.

马志明主要研究概率论与随机分析,在狄氏型与马氏过程理论、薛定锷方程和费因曼-卡茨(Feynman-Kac)半群、维纳空间的奇异势理论、抽象维纳空间上的容量度等价性及广义泛函的积分表示等方面的研究中,都取得了重要成果.1987年以来,他对狄氏型与马氏型过程理论进行了系统研究,首先发现了无处拉东的光滑测度,为奇异位势的研究开辟了新途径.1989年,他与人合作解决了该领域中存在20年之久的难题,创建了拟正则狄氏型理论这一新的数学框架,建立了狄氏型与马氏过程的一一对应关系,使狄氏型理论发展成为纯分析与概率论有机结合的一个数学分支.现在该框架已被应用于无穷维随机分析等多个领域.他还与人合作首次运用可加泛函获得了维纳泛函表示费因曼-卡茨半群的最广泛条件及半群核的上、下界估计,大大改进了这方面的已有研究结果.他还得到了一般状态空间上的广义泛函的积分表示定理.1992年,他获得德国马普学会和洪堡基金会颁发的马克斯·普朗克研究奖和中国科学院自然科学奖一等奖,1993年又获得国家自然科学奖二等奖,1995年获第五届陈省身数学奖.

张圣蓉(Zhāng Shèngróng Alice,1948—) 美籍华裔女数学家.生于陕西西安.1970年毕业于台湾大学,1974年获美国伯克利加利福尼亚大学博士学位.1974—1975年在纽约州立大学、1975—1977年在洛杉矶加利福尼亚大学,1977—1980年在马里兰大学任助理教授.1980年起任教于洛杉矶加利福尼亚大学,先任副教授,后升教授.1986年应邀在国际数学家大会上作了45分钟报告,是华人女数学家中获此殊荣的第一人.

张圣蓉从事几何型偏微分方程及相关的极值不等式和等谱几何中的问题的研究.她在黎曼流形上的偏微分方程的研究中有重要的成果,特别是她在谱几何中的极值问题和在三维紧流形上固定保形类中等谱度量的紧性方面的工作.她曾于1995年获萨特数学奖.该奖专门奖励女数学家在数学研究中的突出成果.张圣蓉是自1991年该奖设立以来的第三位获奖者.

丘成桐(Qiū Chéngtóng,1949—) 美籍华人数学家.生于广东汕头.1966年入香港中文大学数学系,1969年未毕业就去美国伯克利加利福尼亚大学随陈省身教授攻读微分几何,1971年获博士学位.1971—1972年和1979—1980年在普林斯顿高等研究院作访问研究;1972—1973年在斯托尼希鲁克的纽约州立大学任助理教授;1974—1979年任斯坦福大学副教授和教授;1980—1984年任普林斯顿高等研究院教授;1984—1987年任圣迭戈加利福尼亚大学教授.1988年开始任哈佛大学教授.1993年当选为美国全国科学院院士,1995年成为中国科学院外籍院士.1977年应邀在国际数学家大会上作一小时报告.

丘成桐主要研究微分几何. 1976 年用偏微分方程估计方法解决了一类复蒙日-安培方程的可解性,从而解决了卡拉比猜想,即给定一个紧凯勒流形及其上的固定凯勒类,任何表示第一陈类的(1.1)形式是该固定凯勒类的一个凯勒度量的里奇曲率形式. 同时还证明了负定第一陈类的凯勒流形上凯勒-爱因斯坦度量的存在性. 和合作者一起还把卡拉比猜想推广到了非紧凯勒流形的情形. 他首先开创了最小曲面在几何、数学物理和拓扑等问题中的应用. 他和舍恩(Schoen, R.)合作先在 1978 年解决了一种特殊情形的正质量猜想,不久又解决了最一般情形的正质量猜想. 1984 年与乌伦拜克(Uhlenbeck)合作用偏微分方程估计方法证明了稳定向量丛与紧勒凯流形上不可约杨-米尔斯-埃尔米特度量之间存在一一对应关系. 他的工作在拓扑、代数几何、表示理论、一般相对论以及微分几何与偏微分方程等许多数学和物理领域产生了很大影响. 1981 年,他曾获美国数学会维布伦几何奖,1982 年获菲尔兹奖,1994 年获瑞典皇家科学院颁发的克雷福德奖. 著作有《微分几何》(1988,与孙理察合作).

萧　刚(Xiāo Gāng, 1951—　)　中国旅法数学家. 生于江苏无锡. 大学数学课程主要靠自学,1977 年入中国科技大学数学系读研究生课程,后赴法国留学,1984 年获法国巴黎南大学理学国家博士学位. 回国后任教于华东师范大学. 现任法国教授.

萧刚主要研究代数几何. 曾对亏格二的纤维化做了系统研究,获得了一系列的分类结果,特别是证明了关于这种纤维化的一个重要猜想($K^2 \leqslant 8x$),以及对不规则的亏格二纤维化进行了完整的分类. 他在一般纤维化方面也有成果. 在超椭圆的正指数代数曲面及一般型曲面的存在性方面做出了具体的构造结果,并找到了第一个正指数单连通曲面的例子. 在一般曲面的自同构研究中,他证明了曲面自同构群中阿贝尔子群的阶有一个与陈数成线性关系的上界. 他还在一般型曲面的典范与多典范映射方面取得了一系列成果. 1986 年获国家教委科技进步奖一等奖,1987 年获国家自然科学奖三等奖,1989 年获霍英东高校青年教师奖(研究类一等奖)和第三届陈省身数学奖. 1985 年,斯普林格出版社把他的《以亏格为 2 的曲线纤维化的曲面》收入《数学讲义》丛书出版. 另外,他还著有《代数曲线的纤维化》(1992).

田　刚(Tián Gàng, 1958—　)　中国旅美数学家. 毕业于南京大学,获北京大学硕士学位,1988 年获哈佛大学博士学位. 曾任普林斯顿大学助理教授、纽约州立大学(石溪)和纽约大学库朗数学科学研究所副教授,1992 年开始任库朗研究所教授. 1988 年开始兼任中国科学院数学研究所研究员,1991 年又兼任北京大学数学系教授. 2001 年被选为中国科学院院士.

田刚从事复几何研究. 他的研究工作对弦理论物理学有重要的意义,特别是与"镜面对称"这一新领域有关系,通过量子场理论的方法推导出了其中意外的代数几何公式. 他解决了复曲面上凯勒-爱因斯坦度量存在性问题;证明了具零第一陈类的凯勒-爱因斯坦度量的模空间是非奇异的;还用凯勒-爱因斯坦度量证明了代数流形的稳定性. 曾与丘成桐合作在满足某些正性条件除子的余上系统地构造了凯勒-爱因斯坦度量;还与人合作得到了具某些渐近条件的完全里奇-平坦凯勒流形的紧化. 因以上成果于 1994 年,他获得美国国家科学基金会的沃特曼奖,该奖是专门奖励杰出的青年研究人员的研究成果. 田刚是获此奖项的第 15 位青年数学家. 1996 年他又获美国数学会维布伦几何奖.

撰　稿　马国选　王启贤　古效鸣　朱家生　李兆华　吴裕宾　张柏平　陈　鼎　武多义　胡炳生　侯　刚　徐泽林　郭熙汉　梅荣照　龚宝和　梁俊峰　蒋宏圣

审　阅　王荣彬　邓宗琦　李　迪　李兆华　张奠宙

外 国 数 学 史

外国古代数学史

古代埃及数学(ancient Egyptian mathematics) 数学史专门术语.非洲东北部的尼罗河流域,是人类文明的发祥地之一.尼罗河孕育了埃及文化.在公元前3500—前3000年间,在尼罗河下游建立了统一的国家.埃及的历史主要依据其朝代命名.古代埃及人在长期的生产实践和与自然斗争的过程中,逐步积累了丰富的科学知识.在丈量土地、商品交易和宫殿与陵墓的大规模建筑中,都需要较多的数学知识.

目前对古埃及数学的了解,主要依据两种用僧侣文写成的纸草书.一种是在1858年由英国人莱因德(Rhind,A. H.)发现,现存伦敦大英博物馆,称为"莱因德纸草书";另一种称为"莫斯科纸草书",由俄罗斯收藏者于1893年获得,现收藏在莫斯科博物馆.这两种纸草书的年代大约在公元前1850—前1650年间.古埃及人早在公元前3000年就创造了象形文字.他们用象形文字表示数字:| 表示1;∩ 表示10;𓍢 或 𓍢 表示100;𓆼 表示1000;𓂭 或 𓂭 表示10000;𓆐 表示100000;等等.书写的方式是从右向左,如24写成 |||| ∩∩ .这套数字的写法是十进位,但不是位值制的.分数另有一套专门的记法.整数的四则运算主要用迭加法.加、减法一般靠添上或划掉一些记号;乘、除法则是化为迭加或相反的步骤来进行.分数算术在古埃及数学中占有特殊地位,所有分数都用单位分数(即分子是1的分数)的和来表示.在莱因德纸草书中,有一个形如 $2/(2n+1)$ 的分数表,把这种类型的数表示为单位分数之和,如

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15},\qquad \frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28},\cdots\cdots$$

$$\frac{2}{97}=\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776},\quad \frac{2}{99}=\frac{1}{66}+\frac{1}{198}\text{等}.$$

现代许多数学史家都给出了关于 $2/(2n+1)$ 分数表起源的假说,但始终没有统一的认识.古埃及人已经能解决一些属于一次方程和最简单的二次方程的问题.他们称未知数为"堆"(指一堆东西),并用象形文字表示.解决问题的方法完全是算术的.还出现一些关于等差数列和等比数列的计算问题.根据历史学家希罗多德的记载,几何学起源于古代埃及.尼罗河每年一次的定期泛滥,淹没河流两岸的大片土地.大水退后,法老不得不对土地重新进行分配.这样一来,土地测量知识逐渐积累起来,并最终发展为几何学.可见几何学最初只是一种实用技术.古埃及人能够计算简单图形的面积,他们已掌握求圆面积的近似方法:将直径减去它的1/9后再平方,相当于取圆周率 $\pi=3.16049$.莫斯科纸草书中还记有一个计算四棱台体积的问题,其计算过程与现代正四棱台的体积公式相符.在公元前3000年前后,埃及人建造了许多金字塔(作为法老的陵墓),这些金字塔都有正规的形体,塔基底面为正方形,且一组对边与南北方向几乎平行.可见古代埃及人已能做出高度精确的直角,并有较丰富的天文学知识.

总之,埃及人已积累了许多实用的数学知识,但是还有待于上升为系统的理论.

古希腊数学(ancient Greek mathematics) 数学史专门术语.古希腊的地理范围,指希腊半岛、爱琴海群岛和小亚细亚西岸一带.古希腊人在这里定居之后,创造了自己的文明和文化.这是人类历史上最宏伟的文明之一,它对现代西方文化的发展影响极大.希腊文明大约可以追溯到公元前2800年,一直延续到公元600年.在古希腊,始终没有形成一个统一的国家.长时期内,它都是由许多大小奴隶制城邦组成.公元前6世纪以后,古希腊的生产力有较大的发展,形成了农业和手工业的分工.手工业的发展促进了各城邦之间以及东西方之间的商业和贸易的繁荣.许多城邦的新兴的奴隶主所建立的奴隶主民主政治,也促进了工商业的发展.随着经济和政治的进步,形成了丰富多彩的希腊古典文化.自然科学也得到相应的发展.在与埃及和巴比伦人贸易往来的过程中,希腊人学习到一些数学知识,在此基础上他们创造出光辉灿烂的数学.

古希腊数学,一般指公元前600年至公元600年希腊人所创立的数学.古希腊数学,大体可分为两个阶段:一般是从公元前600年至公元前300年,称为古典时期的希腊数学;另一段是从公元前300年至公元600年,称为亚历山大时期的希腊数学.

古典时期的希腊数学先后在几个中心地点发展起来,每个地点都有一批学者在一、两位杰出人物的领导下开展活动,这类组织称为学派.小亚细亚伊奥尼亚地区的米利都城,是希腊哲学和科学的诞生地,在这里产生了古典时期的第一个学派——伊奥尼亚学派.该学派的代表人物是泰勒斯(Thales,(M)),他是古希腊大哲学家兼数学家.他的世界观是唯物主义的,曾提出单一的宇宙物质基础.他研究星相学,发现了小行星,测定过太阳的运行,还预言过日

蚀等.泰勒斯在数学方面的最大成就是开始引进演绎证明,这是划时代的伟大贡献,数学发展从此进入初等数学阶段.他发现了五条几何定理,并利用相似三角形的性质来测量金字塔的高度.伊奥尼亚学派的著名学者还有安纳西曼德(Anaximader)和安纳西门尼斯(Anaximenes of Miletus)等,他们对后来的毕达哥拉斯学派有很大影响.

在伊奥尼亚学派之后,出现了毕达哥拉斯学派,这是一个带有神秘色彩的政治、宗教、哲学团体,由大哲学家、数学家毕达哥拉斯(Pythagoras)创建,活跃于意大利南端的克罗托城.该学派把"万物皆数"作为信条,讲授音乐、天文、几何与算术四大科,把它们作为净化灵魂的科学.在数学方面,他们研究比例论(与音乐有关)、多角形数、初等数论问题和几何代数法等.毕达哥拉斯学派以发现勾股定理闻名于世,并由此导致不可通约量的发现.他们研究数学并不注重实际应用,而是为了探索世界的本原,从而追求宇宙的和谐性.该学派的习惯是将一切发明都归功于学派的领袖,而且对发明的内容秘而不宣.公元前5世纪以后,毕达哥拉斯学派的思想和发现才公诸于世.与毕达哥拉斯学派齐名的是意大利的埃利亚学派.埃利亚的芝诺(Zeno,(E))是该学派的代表人物.他针对当时关于物质世界的连续性、复杂性、无限性和运动性等朴素概念,提出了许多悖论,其中关于二分说、追龟说、飞箭静止说和运动场问题的四个悖论最为著名,它们给学术界以极大的震动,至今余波未息.埃利亚学派的工作为原子论思想的产生奠定了基础.以德谟克利特(Democritus)为代表的原子论学派受芝诺哲学思想的启发,提出"物质世界是由大量不可分割的元素(他们称之为原子)所组成"的观点,并把这种原子论思想应用于数学之中,成功地计算出某些平面图形的面积和空间图形的体积.德谟克利特的原子论思想是近代积分思想的先声.

公元前480年以后,雅典成为希腊的政治文化中心.这里的第一个学派是智人学派,其中包括各方面的学者.智人学派崇尚公开讨论或辩论的精神,他们研究的主要目标之一是用数学来解释宇宙现象.在数学方面,他们的主要贡献是提出并研究三大几何问题,即化圆为方、二倍立方和三等分任意角.问题的难点在于作图工具只准用不带刻度的直尺和圆规.希腊人的兴趣在于从理论上来探讨这些问题,这是几何学从实际应用向系统理论过渡所迈出的重要一步.这个学派的安蒂丰(Antiphon)提出一种后来称为"穷竭法"的方法来解决化圆为方问题,其方法与中国古代刘徽的割圆术不谋而合.希波克拉底(Hippocrates,(C))、阿尔希塔斯(Archytas,(T))和梅内克谬斯(Menaechmus)等人都曾利用圆锥曲线和割圆曲线来解决三大几何问题.

智人学派之后,活跃在雅典的是柏拉图学派.柏拉图(Plato)是古希腊的大哲学家,在科学方法论方面有重要贡献.他很重视数学,强调数学在训练智力方面的作用,但忽视其实用价值.柏拉图特别推崇几何学,主张通过学习几何学来培养思维能力.柏拉图学派的数学贡献主要在无理数理论、一般比例理论、正多面体和圆锥曲线等方面.这个学派培养了不少优秀的数学家,如欧多克索斯(Eudoxus,(C)),他是古希腊最杰出的学者之一,其数学成就仅次于阿基米德(Archimedes).他创立了比例论,探讨了公理法,是欧几里得(Euclid)的前驱.柏拉图的学生亚里士多德(Aristotle)是古希腊最伟大的思想家,他奠定了形式逻辑的基础,其逻辑思想为日后将几何学整理在严密的逻辑体系之中开辟了道路.亚里士多德在雅典创立了吕园学派.柏拉图学派重视数学的传统,对西方科学界有深远影响.

公元前4世纪,亚历山大帝国被其军事领袖瓜分为三个帝国,它们仍联合在古希腊文化的约束之下,史称希腊化国家.在三个帝国中,位于埃及的托勒密王朝最为强大.托勒密(Ptolemy)王在亚历山大城建造了当时世界上最大的博物馆和图书馆.从此以后亚历山大城成为希腊文化活动的中心,希腊数学开始进入亚历山大里亚时期.这个时期的特点,是数学逐渐脱离哲学和天文学,成为独立的学科.几何学开始建立自己的理论体系,从以实验和观察为依据的经验科学过渡到演绎的科学.希腊数学在公元前4世纪到古希腊灭亡(公元前146年)期间达到它的全盛时期.在亚历山大城,除了举世闻名的博物馆、图书馆外,还设有天文台、植物园等机构,各地学者云集在此进行科学研究.公元前3世纪在亚历山大城出现了一批优秀的数学家,最杰出的代表是欧几里得、阿基米德和阿波罗尼奥斯(Apollonius,(P)).

欧几里得总结了公元前7世纪以来古希腊数学的成就,用公理方法对几何学进行了系统整理,写成13卷《几何原本》,其中包括平面几何学、立体几何学、比例理论、初等数论、可公度与不可公度量的概念、穷竭法等.《几何原本》是一部划时代的伟大著作,它的历史意义在于它树立了用公理法建立演绎数学体系的最早典范,对以后数学的发展产生了极深远的影响.阿基米德是古代最伟大的数学家、力学家和机械师,后人对他的评价极高,常把他和牛顿(Newton,I.)、高斯(Gauss,C.F.)并列为有史以来三位贡献最大的数学家.他在数学上的最大功绩之一是建立抛物弓形等图形的精密求积法.据他的《方法》一书所载,他用力学实验测出数据,然后用穷竭法给出理论证明.阿基米德还研究了螺线及其他曲线、球、圆柱及立体的性质和求积法,他的工作对17

世纪微积分的产生影响很大. 此外，他在 π 值的计算和大数记法方面也都有重要贡献. 阿波罗尼奥斯是著名的几何学家. 他的《圆锥曲线论》把古典希腊时期的圆锥曲线知识，予以严格的系统化，并做出许多新的贡献. 他依据同一个圆锥的不同截面而得到三种圆锥曲线，并分别称之为抛物线、椭圆和双曲线. 他深入研究了这三种曲线的性质和关系. 他的工作对 17 世纪几何学的发展有着重要影响. 这一时期另一位有名望的学者是埃拉托斯特尼(Eratosthenes)，他最著名的贡献是用巧妙的方法测量地球的大小，这是人类历史上第一次进行这样的实测. 在数学方面，他建立了找出素数的方法，称为埃拉托斯特尼筛法.

希腊文化时代随着古希腊被罗马帝国吞并而告终. 从纪元开始，希腊数学的活动能力逐渐衰退，罗马君王并不像托勒密王那样支持数学. 因此，在这个时期产生了与古典时期性质全然不同的数学：几何学专攻那些与计算长度、面积和体积有用的结果. 由于这些工作，唤起了算术和代数的新生. 天文计算的精密化又引起三角术的发展. 这一时期著名的学者有海伦(Heron，(A.))、托勒密(Ptolemy)、帕普斯(Pappus，(A))、丢番图(Diophantus)、尼科马霍斯(Nicomachus，(G))等. 海伦在他的代表作《度量论》(Metrica)中给出了计算各种面积和体积的精确的或近似的法则，其中最著名的是依据三角形三边求三角形面积的公式——海伦公式. 海伦把严密的希腊几何学风格与巴比伦、埃及的近似方法溶为一体，为实际应用提供了方便. 托勒密主要是一位天文学家，在天文观测和计算的过程中，创立了三角术. 在他的重要著作《天文学大成》中采用 60 进制，把圆周分为 360°，给出了从 0°到 90°间隔每半度的弦表，证明了著名的托勒密定理等. 他所建立的较为系统的三角术是西方三角学的一个重要来源. 帕普斯以评注托勒密《天文学大成》和欧几里得《几何原本》而著称，后世数学中的许多材料都是从这些评著中得到的. 他编辑了著名的《数学汇编》，其中介绍古典时期以来最重要的数学著作. 丢番图的重要代表作《算术》是一部完全脱离几何形式的代数著作，它显示了作者在不定分析方面的高超技巧. 丢番图还创立了一套缩写符号，这在古代是绝无仅有的.《算术》一书对后世代数学和数论的发展产生了深远的影响，其中许多问题已成为历代许多数学家的创造源泉. 尼科马霍斯把算术作为一门独立学科来研究，他的《算术入门》是古希腊第一本脱离几何讲法的算术书，并且成为此后一千年间欧洲人的标准课本. 著名的评著家赛翁(Theon，(A))和他的女儿许帕提娅(Hypatia)也是亚历山大里亚后期的学者，他们曾对欧几里得、阿基米德、阿波罗尼奥斯、丢番图和托勒密的著作进行评注. 许帕提娅在公元 415 年遭到基督教徒的野蛮杀害，她的死标志着希腊文明的衰落，许多学者从此离开亚历山大城. 在 5—6 世纪，在雅典可以看到希腊数学最后短暂昌盛，学者们主要从事注释古典时期的名著. 公元 529 年，东罗马皇帝查士丁尼(Justinian)封闭了所有的希腊学校，许多希腊学者离开东罗马. 此时，希腊数学宣告终结.

美索不达米亚的数学(mathematics in Mesopotamia)　亦称巴比伦数学. 数学史专门术语. 亚洲西部的底格里斯河和幼发拉底河之间的地带，通常称为两河流域，是人类早期文明的发祥地之一. 这块地域古代称为美索不达米亚. 最早居住在这里的民族有苏美尔人和阿卡德人. 公元前 19 世纪，这里建立了巴比伦王国. 这个王国的政权几经更迭，统治者变换频繁. 一般称公元前 19 世纪至公元前 6 世纪间该地区的文化为美索不达米亚文化，相应的数学称为美索不达米亚数学，有时也称为巴比伦数学.

美索不达米亚地区曾广泛使用一种楔形文字. 先用削尖了的木笔在软泥板上刻写，然后烧干或晒干，使它坚硬如石. 这些泥板被埋在地下数千年，经久不坏. 19 世纪上半叶，考古学家在美索不达米亚地区挖掘出大约 50 万块刻有文字的泥板，其中有 300 多块被鉴定为数学泥板. 这些泥板大部分形成于公元前 600 年至公元 300 年间，还有一些是公元前 2000 年左右的. 这些泥板上载有数字表和一些数学问题. 现在人们对于巴比伦数学的了解就来源于这些泥板.

大约在公元前 1800—前 1600 年间，巴比伦人就使用了 10 进制和 60 进制记数法. 对于小于 60 的整数，使用𒁹(1)和𒌋(10)两种记号来表示. 如 $25=2\times10+5$，表示为



大于 60 的数则用这两种记号配合位置记数法来表示. 如 $524\,551=2\times60^3+25\times60^2+42\times60+31$ 表示为



这里的𒁹和𒌋都可以表示 60 的各次幂. 因为没有零号，这种记数法是不完善的. 例如记号 𒁹𒌋𒌋，既可以表示 80，又可以表示 3620，具体表示哪个数，要根据上下文来确定. 巴比伦人进行计算主要依靠数表，如乘法表、倒数表、平方表和立方表等. 在一块公元前 1600 年的泥板上，记有 $\sqrt{2}$ 的近似值 1.4142155，由此人们推测他们已经知道开平方的

近似公式，或掌握某种开平方的方法.

巴比伦人的代数知识比较丰富，许多泥板中载有一次和二次方程的问题. 他们解决二次方程问题的过程与现代用公式解这类方程的过程一致，但他们只求正根. 泥板中的"方程"是用语言表述的，偶尔用记号表示未知量. 在某些泥板中，还发现有相当于三次方程和含多个未知量的一次方程组的问题. 数学史家对此曾发生过激烈争论：在什么意义下能把巴比伦人的数学看成代数？

在公元前1800年前后的一块泥板中，记录了一些数表，引起许多学者的兴趣. 经过深入的分析和研究，发现其中有两组数是边长为整数的直角三角形的斜边和一个直角边，由此可以推出第二个直角边，得到不定方程 $x^2+y^2=z^2$ 的整数解. 在泥板中还发现一些关于等差数列和等比数列的计算问题. 泥板中的几何问题都有实际背景. 可以看出，巴比伦人已有三角形相似的一些知识，会算简单平面图形的面积和简单立体的体积. 如求圆面积的经验公式为

$$S=\frac{c^2}{12}$$

其中 c 为圆半径，相当于取 $\pi=3$；平截头方锥的体积公式为

$$V=h\left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]$$

其中 h 为高，a、b 分别为上、下底的边长.

巴比伦的数学和天文学与商业的发展有直接联系. 公元前3世纪时，巴比伦人已经较多地用数学方法记载和研究天文现象. 他们将圆周分为360度的作法一直沿用至今. 巴比伦人很早就知道使用账单、收据、票证等物. 有些数学知识，如复利计算直接由商业引起. 在古代美索不达米亚地区，发展数学的动力来自田亩丈量、天文观测和商旅贸易等许多方面.

巴比伦数学(mathematics in Babylon)　即"美索不达米亚的数学".

印度数学(Hindu mathematics)　数学史专门术语. 印度是世界上文化发达最早的地区之一. 考古研究证明，早在公元前3000年左右，印度河流域就存在着具有高度文明的奴隶制城邦，以摩亨卓·达罗遗址最为著名. 从建筑遗迹和某些出土文物，如彩陶、雕塑品、贝壳，以及各种印章上刻的古代铭文中，可以发现古代印度的某些数学知识.

在印度，数学的发展始终与天文学密切相关，数学作品大都是天文学著作的某些篇章. 最早的数学文献《绳法经》出现在吠陀时期，属于古代婆罗门教的经典，专讲祭祀礼仪，其中的数学知识比较零散，大都是关于祭坛的建造问题，利用绳子和竹竿给出制作几何图形的确定法则. 包括正方形、直角三角形、矩形和梯形等直线形的作法，以及如何从面积为 a 的正方形出发做出面积为 na 的正方形，把直角三角形改为等积的正方形，化圆为方和化方为圆等. 在这些几何问题中，广泛地应用了勾股定理.《绳法经》中还给出了 $\sqrt{2}$ 的近似值，精确到小数点后第6位.

在《绳法经》之后的大约1000年内，由于缺少可靠的史料，数学的发展所知甚少. 公元5至16世纪，印度数学获得了较大的发展，其成就在世界数学史上占有重要地位. 在这个时期出现了一些著名的学者，如6世纪的阿耶波多第一(Āryabhata Ⅰ)，著有《阿耶波多历数书》；6世纪的瓦拉哈米希拉(Varāhamihira，M.)，著有《五大历算全书汇编》，其中最重要的一部是《太阳的知识》；7世纪的婆罗摩笈多(Brahmagupta)，著有《婆罗摩笈多历算书》；9至10世纪的马哈维拉(Mahāvira)和施里德哈勒(Śrīdhara)；12世纪的婆什迦罗第二(Bhāskara Ⅱ)，著有《天文系统极致》等. 除了上述数学著作之外，1881年在印度西北部出土了一份写在桦树皮上的数学手稿，一般认为是6—8世纪的作品，称为《巴赫沙里手稿》，也是一种重要的印度数学文献.

从公元前4世纪起，在印度开始出现书写数字. 例如在现今的阿富汗地区和旁遮普北部，在当时流行所谓的音节数字，这是一种十进非位值制系统，它与古印度的音节文字有关. 在印度领土上，长期以来广泛使用婆罗门数字，这是十进位记数法发展的较高阶段，其书写形式保持了1000多年. 典型的婆罗门数字如下

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 20 30 40 50 60

在印度，整数的十进位值制记数法产生于8世纪以前. 用9个数码字和零号，借助于位值制可以写出任何数字. 零在梵文中是 Sūnya，即"空的"意思. 印度人不仅把数字0看成是"一无所有"或空位，还把它视为一个数来参加运算，这是印度算术的一大贡献. 印度人用新记数法建立了算术运算，包括整数和分数的四则运算、开平方和开立方的法则等. 7世纪著名的数学家婆罗摩笈多较完整地记述了关于零的各种运算；当零作除数时，产生了类似无穷大的概念等. 印度人创造的这套数字和位值记数法在8世纪下半叶传入阿拉伯世界，被阿拉伯人采用并改进. 在13世纪初，经斐波那契(Fibonacci，L.)的《算法之书》(1202)流传到欧洲，成为现代印度-阿拉伯数码及其记数法的早期形式.

印度人对代数学做出了重要贡献. 他们用一些符号表示运算，并用缩写文字表示未知数，其符号比丢番图(Diophantus)所使用的还要优越，这使得印

度代数几乎称得上是符号性的代数.印度人还引进了负数,在婆罗摩笈多的著作中说明了负数的加法和减法法则.12世纪的数学家婆什迦罗第二给出了负数的乘除法法则.他还认识到正数有两个平方根,因此求出二次方程的两个根.印度人在不定方程方面取得很大成就,他们创立了独具特色的方法.例如,婆什迦罗第二解方程 $ax+b=cy$ 的过程与现代借助于连分数的解法相同.他和婆罗摩笈多还研究了二次方程 $y^2=ax^2+b$ 及其特殊情形 $y^2=ax^2+1$(今称佩尔方程)的解法.在婆什迦罗第二的著作中载有所谓百禽问题,相当于解不定方程组:

$$\begin{cases} x+y+z+u=100, \\ 3\cdot\frac{x}{5}+5\cdot\frac{y}{7}+7\cdot\frac{z}{7}+9\cdot\frac{u}{3}=100. \end{cases}$$

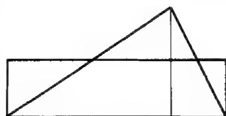
这个问题与中国古代的《张丘建算经》中的"百鸡问题"类似,可能是由中国传入印度的.印度学者还解决了一些其他类型的不定方程.印度学者在精通算术级数性质的基础上,研究了各种级数,如以算术级数各项的平方、立方以及部分和为通项的级数,建立了各种级数的求和法,还探讨了某些递归序列的性质及一些有趣的排列组合问题等.

在三角学方面,印度人的工作晚于其他学科,但他们所做的工作十分重要.印度天文学的发展推动了三角学的进步.印度学者首先用半弦,即圆周角的正弦取代了希腊人的全弦.这一转化有深远的意义,因为这样一来很自然地引进了与直角三角形的边和角有关的各种三角函数.阿耶波多第一的著作中已出现了正弦、余弦和正矢函数,他还称正弦为 jîva,即猎人的弓弦的意思,后经阿拉伯世界传入欧洲,转译为拉丁文的"胸膛"——sinus,后演变成 sine.瓦拉哈米希拉还证明了一些简单的恒等式.婆什迦罗第二给出了两角和与差的正弦法则,他还利用代数知识来解直角三角形.由于天文学的需要,印度人制造了一些三角函数表.阿耶波多第一把圆周分为21600份,取半径为3438个单位,制作了从0°到90°每隔22.5′的正弦和正矢表.在计算过程中,取 $\pi=3.1416$.15世纪的印度数学家尼拉坎塔(Nilakantha)利用后来称为无穷小分析的方法建立了 π 的无穷级数展开式和反正切函数的展开式,他还导出了相当于

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\sin\theta=-\sin\theta$$

的结果,可惜他的工作没有发展为近代数学.

印度人不像希腊人那样善于分析和论证.他们在几何学方面的贡献远没有在算术和代数方面的贡献大.他们不追求逻辑上严谨的证明,只注重发展实用的方法,因此算术和代数占有优势.在多数情形下,印度人显示出的几何知识都不如亚历山大时期的几何学家.在印度几何学中,很少见到命题的证明,多数情形是给出图形和指示语"请看!".偶尔在图形旁边加上简短的说明.例如,关于三角形面积的定理由图中给出印度几何学侧重于面积和体积的计算,给出了各种几何体,如圆锥、圆台等体积的近似公式.婆什迦罗第二还给出棱台、球表面积和体积的精确公式,他给出的勾股定理的证明十分巧妙.婆罗摩笈多推广了关于三角形面积的海伦公式,导出了圆内接四边形的面积公式



$$p=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

其中 a、b、c、d 为四边形各边长,$p=(a+b+c+d)/2$.印度数学在文艺复兴时期经伊斯兰世界传入欧洲,其十进位值制记数法、一系列代数和数论方法,以及三角学的开端等,对欧洲数学的发展产生了较大的影响.

中美洲的数学(mathematics in Central America) 数学史专门术语.古代美洲文明是世界文明的重要组成部分.中美洲是古代玛雅人文化的摇篮.古代的玛雅人分布在现今的墨西哥南部,以及危地马拉、洪都拉斯、伯利兹和萨尔瓦多等地.在公元前1000年左右,这一地带兴起了美洲古老的文化——玛雅文化.公元300—900年之间是玛雅文化的全盛时期,之后便逐渐衰落,16世纪时被西班牙殖民者摧毁.在玛雅文化的全盛时期,有高度发达的农业、数学、天文学、历法和宗教礼仪,并建有许多庞大的石砌"金字塔"(神庙等建筑物)和其他建筑物.玛雅人所建立的数学通常也叫中美洲的数学.对这一地区数学的了解,主要根据一些残剩的玛雅时代的石刻和几种玛雅文古抄本:德累斯顿抄本(约11—12世纪)、马德里抄本(15世纪)、巴黎抄本(约14—15世纪)等,其中德累斯顿抄本中的数学内容较多.

早在公元最初的几个世纪里,玛雅人就创立了以地球围绕太阳旋转一周作为一年的"太阳历".这种历法把一年分为18个月;每月有20天,再加上5个禁忌日,一年共365天;每四年加一天.这种历法比古代希腊、罗马人的历法还要精确.与此同时,玛雅人创造了独特的以20进位的位值制记数法.所有数字都用三个符号来表示,这三个符号是"·"、"—"、"𝋠",分别表示1、5和0.他们很巧妙地把"·"排在"—"之上,以不同的排列组成1—19各个数字,现分列如下:

𝋡 𝋢 𝋣 𝋤 𝋥 𝋦 𝋧 𝋨 𝋩 𝋪

𝋫 𝋬 𝋭 𝋮 𝋯 𝋰 𝋱 𝋲 𝋳

到20则进位,20以上的数再进位为 $20\times20=400$、

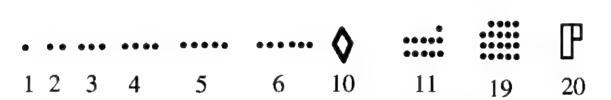
$20 \times 20 \times 20 = 8\,000$ 等. 计位采用竖式，例如 29，916 和 2145 依次表示如右图：第一行的"·"表示 400，"—"表示 $400 \times 5 = 2000$；第二行的"·"表示 20，"—"表示 $20 \times 5 = 100$. 这是一种普通记数法. 时间记数法则不同，这时第一进位仍为 20，第二进位为 $18 \times 20 = 360$，第三进位为 $18 \times 20^2 = 7200$ 等，也采用竖式记位法，例如 43487 表示如右图.

400 20 1
29 916 2145

7200 360 20 1

加减法的运算比较简单，只需对准位数，做加法时，满 20 时向上一位进一个"·"，做减法时，若某一位减数小于被减数，则向上一位借一个"·"，变成下一位的"≡≡"．可见，加减法运算与现代阿拉伯数码的运算相同. 关于乘除法运算，目前人们还持有不同的看法. 已发现的玛雅数学文献中还没有见到这方面的例子，但有的学者根据间接的资料设计出玛雅人乘除法运算的程序. 关于玛雅人对形的认识，只能从玛雅古建筑物中体会到一些，这些古建筑从外形看都很整齐规范，可以肯定当时玛雅人已经掌握一定的几何知识.

在 15 世纪末到 16 世纪初，阿兹台克人（又称诺特奇卡人）在现今墨西哥中南部建立一帝国——阿兹台克帝国，曾繁荣一时. 阿兹台克人创立了一种 20 进制的非位值制的记数法，1—20 各数字表示为



中美洲的数学对世界数学的发展影响不大.

阿拉伯数学（Arabic mathematics） 数学史专门术语. 指 8 到 15 世纪在中东、北非和西班牙等地的伊斯兰国家里所建立的数学. 当时这个地区通用阿拉伯语，因此通常用"阿拉伯数学"来概括. 事实上，为阿拉伯数学做出贡献的数学家中，正统的阿拉伯人并不多. 7 世纪初，伊斯兰教兴起后，阿拉伯人大举向外扩展，经过 100 多年的征战，建立起横跨亚、非、欧三大洲的阿拉伯帝国. 伊斯兰教也随之传播各地. 阿拉伯人很善于吸取被征服民族的文化，希腊、印度、伊朗以及中亚各族古代的科学文化在这里得到继承和发展. 阿拉伯人和其他各民族人民共同把东西方文化精华融合在一起，并创立了新的、别具一格的文化. 当时欧洲正处于漫长的黑暗时期，阿拉伯世界的科学文化却后来居上，成为当时除中国以外的人类科学中心. 从 8 世纪起，大约有一个至一个半世纪是阿拉伯数学的翻译时期. 在这个时期，出现了几位热心提倡科学的哈利发. 在他们的大力支持和鼓励下，设立学校、图书馆和观象台. 阿拉伯帝国的首都巴格达是当时世界商业和贸易的中心之一，阿拔斯王朝哈利发马蒙（al-Ma'mūm）在这里修建了著名的"智慧宫"，使各民族的学者云集在这里. 他们把大量的希腊、印度和波斯的古典著作译成阿拉伯文. 这些翻译工作对东西方文化的交流和世界文化的发展起到了重要作用.

在数学方面，首先是欧几里得（Euclid）的《几何原本》，紧接着是印度数学家婆罗摩笈多（Brahmagupta）的天文学著作，随后，阿基米德（Archimedes）、门纳劳斯（Menelaus，(A)）、海伦（Heron，(A.)）、托勒密（Ptolemy）、丢番图（Diophantus）等许多希腊学者的数学和天文学著作都被译成阿拉伯文. 在翻译过程中，许多文献被重新校订、考证和增补. 大量的古代数学遗作获得了新生. 在上述翻译时期之后，阿拉伯数学进入了兴盛时期. 在巴格达、布拉哈、开罗、科尔多瓦和托莱多等地，出现了许多学术研究中心. 著名的阿拉伯数学家有花拉子米（al - Khowārizmī）、巴塔尼（al - Battānī）、阿布·瓦法（Abul - Wefa）、凯拉吉（Al - Karaji）、比鲁尼（al - Bīrūnī）、奥马·海亚姆（Omar Khayyami）和卡西（al - Kāshī）等.

阿拉伯人原来只有数字，没有数的记号. 在征服埃及和叙利亚之后，才开始使用希腊字母记数法. 8 世纪末，一部印度天文学名著传入伊斯兰世界，印度数字、十进位值制记数系统及其运算法则就这样进入了阿拉伯帝国. 当时印刷术还没有发明，书籍全用手抄，印度数字因人因地而异，出入很大. 印度数字经阿拉伯人改造后就称为阿拉伯数字. 在埃及、叙利亚和伊朗等国通行的数字称为东阿拉伯数字，而在比利牛斯半岛一带通行的数字称为西阿拉伯数字. 12 世纪时，两种数字又逐渐合流（以西阿拉伯数字为主体），并开始传入欧洲. 又经过几百年的改革，这种数字成为人们今日使用的印度-阿拉伯数码.

印度的十进位值制记数系统是通过花拉子米的算术著作传入欧洲的. 花拉子米是阿拉伯数学早期最杰出的数学家，他编写了第一本用阿拉伯文在伊斯兰世界介绍印度数字和记数法的著作，其原稿已经遗失，只有一份 14 世纪抄写的拉丁文译本保存下来. 这份抄本以"Dixit Algoritmi…"开头，后人根据其内容，把它定名为《印度的计算术》. 其中，"Algoritmi"本是花拉子米的拉丁文译名，可是被人们理解为印度的读数法，后来它竟演变成表示任何系统或计算序列的"算法"的专业术语.

阿拉伯学者对代数学的发展做出了重要贡献，代表作是花拉子米的《代数学》(约 820 年). 首先，这部著作提供了代数学这门学科的名称，它的阿拉伯文原名是“ilm al-jabr wa'l muqabalah”，意思是“还原与对消的科学”. 这本书传到欧洲后，简译为 algerba，这就是西文代数学名称的来源.《代数学》系统地讨论了二次方程的一般解法. 作者给出的解法程序相当于二次方程的求根公式，他还特别指出其解法的普遍性. 花拉子米当时已经知道二次方程有两个根，但他只取正根. 在花拉子米之后，另外两位学者艾布·卡米尔(Kāmil, A.)和凯拉吉(Al-Karaji)对代数学继续进行了研究. 前者大量地使用无理数，并给出许多代数运算法则；后者在系统总结前人关于二次方程工作的基础上，研究了某些高次方程的解，还给出求任意 n 次方根的方法.

三角学在阿拉伯数学中占有重要地位. 它的产生与发展和天文学有密切关系. 阿拉伯人在印度人和希腊人工作的基础上发展了三角学. 他们引进了几种新的三角量，揭示了他们的性质和关系，建立了一些重要的三角恒等式，并给出了球面三角形和平面三角形的全部解法，编制了许多较精确的三角函数表. 值得称赞的是巴塔尼和比鲁尼的工作. 前者发现了球面三角中重要的余弦定理，给出平面各种斜三角形的解法等；后者在他的天文学著作《马苏德天文学和占星学原理》(1030)中给出了三角学的独立篇章，对三角学的内容和方法加以了总结. 三角学的系统化是由 13 世纪的学者纳西尔丁·图西(Nasīr al-Din, al-Tūsī)在他的一部独立于天文学的著作《论完全四边形》中完成的. 这部著作较完整地建立了三角学的系统，从基本概念到所有问题的解法，特别指出了球面三角与平面三角的重要差别.《论完全四边形》在三角学史上有特殊重要的地位，它标志着三角学已脱离天文学而成为数学的独立分支，它对三角学的发展有很大影响. 一般认为德国数学家雷格蒙塔努斯(Regiomontanus, J.)的工作是欧洲三角学的开始，但他的工作比纳西尔丁·图西要晚两个世纪.

阿拉伯几何学的成就低于代数学和三角学. 希腊几何学中严密的逻辑论证没有被阿拉伯人接受，虽然欧几里得的《几何原本》被译成阿拉伯文，并经过一些学者的注释. 但几何学在这一时期没有取得本质的进步，只有两项工作较为重要：一项是塔比·伊本·库拉(Thābit ibn Qurra)、奥马·海亚姆和纳西尔丁·图西等学者对平行公设(即《几何原本》中第五公设)所做的工作对非欧几何的产生有过积极的影响；另一项工作是奥马·海亚姆所创立的用圆锥曲线解三次方程的几何方法，它的实质是把代数与几何结合起来解决问题，可以看做是笛卡儿解析几何学的先驱性工作.

阿拉伯学者在近似计算方面取得了卓越成绩. 15 世纪的著名学者卡西在他的《圆周论》中给出了圆周率 π 的十分精彩的计算程序，得到 17 位准确数字. 他还是除中国学者以外第一个使用小数的人. 从 12 世纪起，阿拉伯数字以及由阿拉伯人保存下来的希腊数学，一起经北非的地中海沿岸逐渐传入西班牙和欧洲，对欧洲数学的发展产生了重要的影响. 古希腊的原著失传后，它们的阿拉伯文译本成为欧洲人了解希腊数学的主要源泉. 因此，阿拉伯学者在保存和传播古代科学遗产方面曾做出重大贡献. 同时，阿拉伯人自己的工作也使欧洲人大开眼界，特别是印度-阿拉伯数码、十进位值制记数法、笔算和花拉子米的《代数学》等.《代数学》作为标准课本在欧洲流行了几百年，成为代数教科书的范本. 中国和印度古代数学的某些内容也在中世纪传入阿拉伯世界，并通过阿拉伯世界再传入欧洲. 因此阿拉伯数学对研究比较数学史也很重要.

罗马和欧洲中世纪的数学(mathematics in Roma and medieval Europe)　数学史专门术语. 罗马人活跃于历史舞台上的时期大约从公元前 7 世纪至公元 5 世纪. 他们在军事上和政治上曾取得极大成功. 在文化方面也取得许多成就，尤以建筑、法学和拉丁语，对后世西方文化影响最大. 但是，古代罗马的数学却很落后，只有一些粗浅的算术和近似的几何公式. 整数记数法是非位值制的，算术运算十分复杂，往往要借助于手指和算盘. 分数的记数采用 12 进制，用特殊的符号表示，即

$$\frac{1}{12},\ \frac{2}{12},\ \frac{3}{12},\cdots,\ \frac{11}{12};\ \frac{1}{24},\ \frac{1}{36},\ \cdots,\ \frac{1}{12\cdot n},\ \cdots$$

并且运算也很复杂. 几何学只提供了一些对建筑学和土地测量人员不可少的实用知识.

罗马人对历法改革做出了重要贡献. 儒略·恺撒(Caesar, G. J.)大帝以埃及的太阳历为基础编制历法，后经修改成为儒略历，已接近今天的公历. 罗马人自己编著的科学书籍，以维特鲁维厄斯(Vitruvius, P. M.)的《建筑十书》最为著名. 书中比较注重处理数学问题，使用了建筑物的平面图和立视图，可以看作是画法几何的萌芽.

从西罗马帝国灭亡(476)到 11 世纪，称为欧洲的黑暗时期. 西欧文化处于低潮，基督教的绝对统治严重地破坏了科学发展. 在数学方面，由罗马学者保留下来的仅有的应用知识也被逐渐放弃. 在这个时期，只出现少数几位热心学术的学者和教士. 罗马的名门后裔博伊西斯(Boethius, A. M. S.)是中世纪有名的翻译家. 他将数理科学分为四部分，称为“四道”(即四条道路)，指算术、几何、音乐和天文四大科. 他根据希腊文献选编了这几方面的初等读物. 他翻译

欧几里得(Euclid)的《几何原本》的前3卷组成他的《几何学》的主要内容,但删去了全部证明;翻译希腊数学家尼科马霍斯(Nicomachus,(G))的《算术入门》,但删去了其中一些精彩的命题,编成《算术原理》.博伊西斯还是中世纪经院哲学的奠基者之一,他的名著《哲学的慰藉》一直流传至今.英国教士比德(Beda,V.)是中世纪著名的教会学者.日耳曼侵略者在西方侵吞罗马文明的时期,古代学术的零散资料皆由教会学者保存下来.比德就是其中最著名者之一.由于他的贡献,在文艺复兴时期被称为“英国文化之父”.比德在历法计算和指算方面有较多的贡献.另一位英国学者阿尔昆(Alcuin)也编写了许多初等教科书,并在中世纪广为使用.他曾被法国查理大帝(Charlemagme)请到帝国的宫廷中改组教育,设立学校.在他的影响下,英、德等国也开始创办初级学校.欧洲中世纪在这一时期曾出现短暂的微光(“加洛林复兴”),然而不久就消失了.在10世纪的法国,还有一位最有影响的教会学者热尔贝(Gerbert),他翻译了一些阿拉伯文著作,编写了几部算术、几何教科书,并提倡使用算盘.公元999年,他被选为教皇,改称西尔维斯特二世(Pope Sylvester Ⅱ).在他任教皇期间,大力推动数学学习,扩建教会学校,主张进行“四艺”训练.这是当时少有的开明教皇.

1100年左右,新的思潮开始影响西欧的学术界.欧洲人通过贸易和旅游,和地中海地区与近东的阿拉伯人以及东罗马的拜占庭人发生接触.十字军的东征还使欧洲人进入阿拉伯人的领地.欧洲人开始从阿拉伯人和拜占庭的希腊人那里得到希腊著作,他们对希腊学术发生了很大兴趣,于是到各处搜寻希腊著作的抄本、阿拉伯文译本及阿拉伯人自己撰写的著作,并将它们译成了拉丁文.这些著作使欧洲人大开眼界,从此开始了欧洲数学的第一次复兴和大翻译运动.

12世纪是欧洲数学史上的大翻译时期,是文化传播的世纪.主要的传播地点有西班牙和西西里,著名的翻译家有巴思的阿德拉德(Adelard of Bath)、意大利的杰拉德(Gerard of Cremona)、英国的罗伯特(Robert of Chester)和西班牙的希斯帕伦西斯(Hispalensis,J.)等.希腊学者欧几里得、阿基米德(Archimedes)、海伦(Heron,(A.))、西奥多修斯(Theodosius,(B))、托勒密(Ptolemy)、亚里士多德(Aristotle)等的著作,以及阿拉伯学者,如花拉子米(al-Khowārizmī)的算术和代数著作等都被译成了拉丁文.除了数学和天文学著作外,哲学、医学、神学和占星术方面的著作也都翻译了过来.这些工作为文艺复兴时期科学的发展准备了条件.意大利的斐波那契(Fibonacci,L.)是12至13世纪最出色的学者,他早年到各地旅游,经过比较确认印度-阿拉伯数码最实用.回到家乡后他写成了《算法之书》(1202).这是中世纪最杰出的数学著作之一,印度-阿拉伯数码和阿拉伯数学通过它被介绍到欧洲.斐波那契的另两部著作《实用几何》(1220)和《平方数书》(1225)是专门讨论几何学和二次不定方程的,在当时也较有影响.在14世纪,欧洲数学几乎没有什么发展.值得称道的只有法国僧侣学者奥雷姆(Oresme,N.),他在著作中第一次使用分数指数,并提出用坐标表示点的位置和温度的变化.这可以把它看成是变量和函数概念的萌芽.他的工作影响到文艺复兴后包括笛卡儿(Descartes,R.)在内的学者.

12世纪以后,在欧洲出现了许多大学,它们大都是从原教会学校的基础上转变而来.13世纪上半叶,巴黎、牛津、剑桥、帕多瓦和那不勒斯等地的一些大学里,数学教育开始兴起,这些大学成为后来世界上数学发展的重要基地.

拜占庭数学(Byzantine Mathematics) 数学史专门术语.公元395年,罗马帝国分裂为东西两部分.东罗马帝国的首都君士坦丁堡是在希腊古城拜占庭的基础上建立起来的,因此通常称东罗马帝国为拜占庭帝国,简称拜占庭.拜占庭的地理位置处于欧、亚、非三洲的交界处,是连结东西方的桥梁.拜占庭始终保持着古希腊、罗马和希腊化时代的文化传统,同时还将这种文化背景与基督教文化及东方文化交融在一起.拜占庭数学是拜占庭文化的一个组成部分,其主要贡献是把希腊数学的遗产保存了下来,并传给了伊斯兰世界和西欧,为近代数学的诞生做出了奠基性的贡献.

在查士丁尼(483—565)时代,拜占庭容纳着雅典和亚历山大各学派的成员,他们带来了大批希腊古籍.对古代数学大师的著作的收藏,就从这个时代开始的.当时的数学研究,仅限于对欧几里得(Euclid)、阿基米德(Archimedes)、阿波罗尼奥斯(Apollonius,(P))和丢番图(Diophantus)等数学家的著作的整理和注释.这些工作对数学教育带来一定影响.例如,由于对丢番图《算术》的研究,使得具有碑铭性质的算术题在君士坦丁堡曾流行一时,据《希腊文选》载,丢番图的墓志铭就是一道有趣的算术题.这类问题在8世纪还传入法兰克王国.

经过两个多世纪的沉寂之后,拜占庭的学术研究开始复兴.帝国皇帝狄奥斐卢斯(?—842或829—842在位)是拜占庭学术复兴的主要支持者.他重建君士坦丁堡大学,聘请著名学者利奥(Leo the,M.)为大学校长,鼓动并亲自过问古典著作的研究.利奥作为一名启蒙哲学家和大学校长,培养了大批有才学的弟子.利奥带领他的弟子,不遗余力地

挖掘和收集古代希腊罗马的数学文献，他派人将分散在各地神庙的希腊著作手稿，凡是能找到的，都搜集起来，还有不少属于私人财产的重要珍本，也被购买回来．在当时经搜集和整理出来的希腊数学著作有：阿基米德的著作、丢番图的《算术》、赛翁(Theon,(A))和帕普斯(Pappus,(A))的两部手稿(包括他们关于《天文学大成》的注释)、阿波罗尼奥斯的手稿(现已丢失)，以及欧几里得的《几何原本》(888年时又重抄)等．加上原来已经收藏的手稿，这时的拜占庭已占有几乎全部古希腊数学遗产．当今世界对古希腊数学的了解，主要都是建立在这些原始文献的基础之上的．9世纪阿拔斯王朝哈利发马蒙(al-Ma'mūm)也正是在这一时期派使团到君士坦丁堡求购古籍的，并请利奥到巴格达工作，从而使希腊数学传入伊斯兰世界．在这个时期，大批希腊古籍珍本流入阿拉伯国家．到了12世纪，希腊学术在欧洲第一次复活．希腊著作的阿拉伯文译本大量流入西欧，但直接从拜占庭传入西欧的希腊原著并不多．在十字军东侵期间，东西方的接触并没有促进学术的交流．君士坦丁堡于第四次东侵中陷落(1204)，大批的战利品落到法兰克人的手中，希腊科学遗产又遭受一次劫难．

1261年拜占庭复国后，科学活动逐渐恢复．拜占庭虽几经战乱，但仍保留了一些希腊原著．13—14世纪，这些保存下来的希腊著作被重新挖掘出来．普莱纽迪斯(Planudes,M.)为此做出了重要贡献．他将欧几里得的《几何原本》，丢番图的《算术》和西奥多修斯(Theodosius,(B))的《球面论》等著作重新修订和诠释．他还著有《印度算术》，用东阿拉伯形式代替了西阿拉伯数字．在这一时期，另一位杰出的学者是来自穆尔贝克的威廉(William,M.)，他在1260年之后的20多年内不知疲倦地翻译希腊人的数学和哲学著作．他经常以大主教的身份去希腊，还是罗马教皇宫廷的常客，因此得以接触希腊原著．威廉的译著达数十种，范围极广．在数学方面，他翻译了普罗克洛斯(Proclus)、阿基米德和托勒密(Ptolemy)等学者的著作．其译文极为注重原著，保留了希腊原著的风格，成为中世纪拉丁世界的范本．

15世纪中叶，在拜占庭行将灭亡之际，几个世纪苦心搜集整理出来的希腊著作又面临着新的劫难．值得庆幸的是，当时所有的统治者都了解这批著作的价值，他们委派了人千方百计地把宫廷图书馆的主要资产，包括经典文献收藏起来，并随之安全地转移出去．一些人文主义者为此做出了重要贡献．枢机主教贝萨里翁(Bessarion,J.)在拜占庭灭亡之际向圣马可教堂捐赠了大批私人藏书，其中几乎囊括了所有数学家的著作．由拜占庭学者保存下来的希腊数学著作，终于在文艺复兴之时传入西欧．15世纪以后，欧洲人极力搜寻希腊著作的原本，直接以希腊文译成拉丁文．这些译本要比从阿拉伯文译本转译成拉丁文的译本好得多．希腊数学之所以能够保存下来并传入欧洲，成为近代数学的基础，除了阿拉伯人的功绩外，也有拜占庭人的贡献．

文艺复兴时期的数学(Mathematics in the Renaissance)　数学史专门术语．14至16世纪，在欧洲历史上是从中世纪向近代过渡的时期，史称文艺复兴时期．14世纪初期，由于城市商品经济的发展，资本主义关系已在欧洲封建制度内部形成．中世纪束缚人们思想的宗教观、神学和经院哲学逐步被摧毁，出现了复兴古代科学和艺术的文化运动．在自然科学方面，哥伦布(Colombo,C.)在地理上的大发现，哥白尼(Kopernik,M.)的日心说，伽利略(Galilei,G.)在数学物理上的创造发明等革命性事件相继发生．古希腊著作的翻译出版，阿拉伯科学的输入，都为自然科学和数学的发展创造了条件．

这一时期在数学中最先发展起来的是透视法．艺术家们把描述现实世界作为绘画的目标，他们着手研究大自然，研究如何把三维的现实世界绘制在二维的画布上．以达·芬奇(da. Vinci,L.)为代表，出现了一批优秀的艺术家兼数学家：意大利的阿尔贝蒂(Alberti,L. B.)、弗兰切斯卡(Francesca,P.)、德国的迪勒(Dürer,A.)等，他们研究绘画的数学理论，建立了早期的数学透视法思想，这些工作成为18世纪射影几何的起点．此外，一些学者还研究尺规作图、求物体的重心、空间曲线及其投影、地图的绘制等课题．几何学知识在当时得到广泛的传播和应用．

文艺复兴时期印刷出版了一批普及的算术读本，内容多是用于商业、税收、测量等方面的实用算术．印度-阿拉伯数码的使用使算术运算日趋标准化．当时最有影响的算术著作有帕乔利(Pacioli,L.)的《算术、几何、比及比例全书》(1494)和维德曼(Widmann,J.)的《商业速算法》(1489)．前者是继斐波那契(Fibonacci,L.)的《算法之书》(1202)之后第一本内容全面的数学书，后者首次使用"＋"和"－"符号表示加法和减法．以"计算能手"著称的德国数学家亚当·里斯(Ries,A.)的算术书讨论了算盘、印度算法、三分律的运用以及其他课题等，多次再版，有广泛的影响．荷兰数学家斯蒂文(Stevin,S.)在欧洲最早提倡用十进制表示分数及其运算，以及使用十进制的度量衡．他的著作《论十进》(De Thiende,1585)在欧洲是第一种研究十进分数的文献，其中系统阐述了十进分数的理论．小数的使用方便了天文计算和数学用表的制作，印刷术的发达促进了阿拉伯数码字形的确定．

代数学在文艺复兴时期获得了重要发展．最杰

出的成果是意大利学者所建立的三、四次方程的解法.卡尔达诺(Cardano,G.)在他的著作《大术》(1545)中发表了三次方程的求根公式,后世称之为“卡尔达诺公式”.但此公式的发现应归功于塔尔塔利亚(Tartaglia,N.),关于此事曾引起历史上著名的数学竞赛.四次方程的解法由卡尔达诺的学生费拉里(Ferrari,L.)发现,在《大术》中也有记载.稍后,邦贝利(Bombelli,R.)在他的《代数学》(1572)中给出了三次方程不可约情形的解法,并使用了虚数.他还改进了当时流行的代数符号.

符号代数学的最终确立是16世纪最著名的法国数学家韦达(Viete,F.)完成的.他在前人工作的基础上,于1591年出版了著作《分析术入门》对代数学加以系统整理,并第一次使用字母来表示未知数和已知数.他把代数称为“类的算术”,算术称为“数的算术”,因此代数学更带有普遍性,形式更抽象,应用更广泛.《分析术入门》被西方数学史家推崇为第一部符号代数学.韦达在他的另一部著作《论方程的识别与订正》(1615)中,改进了三、四次方程的解法,还对$n=2,3$的情形,建立了方程的根与系数之间的关系,即现在称为韦达定理的结果.17世纪,笛卡儿(Descartes,R.)改进了韦达的符号体系,他用$a,b,c,\cdots$表示已知数,用$x,y,z,\cdots$表示未知数,这种表示法一直沿用至今.

在文艺复兴时期,三角学也获得了较大的发展.1450年以前的三角学一般指球面三角学,平面三角学的发展是较晚的事.三角学的新方法是在15世纪末叶到16世纪早期由德国数学家建立起来的.雷格蒙塔努斯(Regiomontanus,J.)的《论各种三角形》(1464)在欧洲是第一本使三角学脱离天文学而成为数学的一个独立科目的系统著作.书中对平面三角和球面三角进行了系统阐述,还有很精密的三角函数表,雷格蒙塔努斯采用印度人的正弦,即弧的半弦,取半径为600000和10000000,分别制作了两个正弦表.名著《论各种三角形》是在欧洲发展三角学的基础.在这一时期,由于地理上的大发现和天文观测的日益扩大,推算更精细的三角函数值已成为刻不容缓的事.有许多学者热心于三角函数表的制作,哥白尼的学生雷蒂库斯(Rhaeticus,G.J.)编制了(文艺复兴时期)第一张详尽的正切表和第一张印刷的正割表.他勤奋工作10余年,在重新定义的三角函数基础上,又制作了更精密的正弦、正切、正割表,他的工作由皮蒂斯楚斯(Pitiscus,B.)和奥托(Otho,V.)等进行了校正和完善.

在文艺复兴时期,在文学、绘画、建筑、科技等领域中创造的许多杰作,已成为现代文明的一部分.在数学方面,这个时期的主要贡献是:在中世纪大翻译运动的基础上吸收了希腊和阿拉伯数学的成果.这些工作为下两个世纪数学的大发展准备了条件.

日本数学(mathematics in Japan)　数学史专门术语.日本列岛从何时开始有人定居,至今仍无定论.最早居住在这里的日本原人也称绳纹人.日本的新石器文化有绳纹文化和弥生文化.公元4世纪中叶,在古代的日本建立了第一个统一的国家——大和国.645年,日本发生了“大化革新”,由奴隶社会过渡到封建社会.在10世纪以前,日本国主要吸收外来的文化.中国、朝鲜和印度的文化对日本都有很大影响,特别是中国文化的影响更大.10世纪以后,真正的日本文化发展起来.日本数学的繁荣则更晚,这已是17世纪以后的事了.日本人把受西方数学影响之前,按照自己的特点发展起来的数学叫和算,也称日本传统数学.17世纪后期至19世纪中叶是和算的兴盛时期.

和算渊源于中国数学,并在中国古代数学的直接影响下发展起来.公元6—7世纪,在日本的飞鸟、奈良时代,中国的历法和数学就直接或间接地(通过朝鲜)传入日本.在中国唐朝,日本政府曾多次派留学生来中国学习数学.到8世纪初,日本已仿照隋唐时期的数学教育制度设立算学博士,并采用《周髀算经》、《九章算术》、《孙子算经》、《缀术》等中国古算书作为教材.在889—897年间修撰的《日本国见在书目》中就记录了这些书籍.这是中国数学输入日本的第一个时期.13—17世纪,是中国数学传入日本的第二个时期,宋末和元初,中国算盘和数学书,如《杨辉算法》、《算学启蒙》、《算法统宗》等陆续传入日本,对日本数学的发展产生了重大影响.1627年出版了吉田光由所著的《尘劫记》,使珠算术在日本得到迅速普及.《尘劫记》的内容与《算法统宗》极为相似,只是其中许多例题是根据日本的实际材料编写的.这部著作在日本流行了200多年.还有几部著作专门介绍并解释朱世杰(1300年前后)的《算学启蒙》,如久田玄哲的《算法启蒙训点》(1658)、星野实宣的《新编算学启蒙注解》(1672)、建部贤弘的《算学启蒙谚解》(1696)等.早在17世纪之初,日本数学家就开始写出自己的著作,如毛利能重的《割算书》(1662)和今村之商的《竖亥录》(1639)等.到17世纪末期,通过关孝和等人的工作,逐步形成了具有独特风格和体系的日本数学——和算.

和算的基本思想,由关孝和、建部贤弘、久留岛义太等人建立,经安岛直円、和田宁等人发展,取得显著成果.关孝和在日本被尊为算圣.17世纪末到18世纪初,以他为核心形成一个学派,亦称关流.关氏学派的主要成就是“点窜术”和“圆理”.“点窜术”是把由中国传入的天元术改为笔算,并改进了算式的记法,这就是和算特有的笔算代数学.“圆理”可以看作是和算特有的数学分析.关孝和的弟子建部贤

弦用分弧的方法求得弧长的无穷级数表达式，亦称圆理公式

$$\frac{1}{2}(\arcsin x)^2=\frac{x^2}{2!}+\frac{2^2\cdot x^4}{4!}+\frac{2^2\cdot 4^2\cdot x^6}{6!}+\cdots$$

关氏学派在行列式、方程理论、连分数、幻方和不定方程等方面也有一些成果. 久留岛义太师承建部贤弘，他推广了建部贤弘的圆理公式，发展了圆理的极数术(求极大值和极小值的方法)，并在西方数学家之先发现了欧拉函数和行列式展开定理. 早期关氏学派的数学家还有中根元圭、松永良弼和山路主住等. 山路的学生安岛直円是关氏学派的第四代大师，他对日本和算的发展产生过重要影响. 他深入到微积分的领域，提出一种求弧长的方法：利用等距的平行线，将圆分成极狭的矩形，并用级数和极限法求面积，然后导出弧长；又将此法推广，形成二重积分，求出了两相交圆柱公共部分的体积. 晚期的关氏学派数学家和田宁进一步改进了圆理. 他利用微小的切线线段进行计算. 制作了很多数表，使计算弧长、面积、体积等问题更加简化. 他使用的方法和现代积分法的原理相似，只是可积分的函数限定某些代数函数. 除了关氏学派以外，还出现了一些较小的学派，例如以会田安明为首的宅间派在 18 世纪末也活跃起来. 他们总结了和算中的各种几何问题，研究了计算椭圆、球面等面积和体积的公式，探讨代数方程理论，解决了某些不定方程问题等.

19 世纪中叶，日本政府采取了开国政策，西方数学大量传入. 明治维新时期，日本政府实行"和算废止，洋算专用"政策，和算迅速衰废(只有珠算仍被沿用至今)，同时开始了近代数学的研究. 20 世纪初则加强和提高了大学数学教育水平. 除了大量引进西方近代数学经典著作外，还向欧洲派遣留学生，日本数学很快得到长足的发展. 早期的杰出代表是高木贞治，他所解决的"克罗内克青春之梦"是日本数学家第一次做出具有世界水平的成果. 第二次世界大战后又涌现出一批优秀的数学家，其中小平邦彦和广中平祐曾荣获菲尔兹奖. 时至今日，日本已步入世界上数学研究先进国家的行列.

外国近现代数学史

17 **世纪的数学**(mathematics in 17th century) 数学史专门术语. 17 世纪是由中世纪过渡到新时代的时期. 欧洲封建社会开始解体，代之而起的是资本主义社会，生产力大大解放. 社会经济的发展和生产技术的进步促使自然科学的各学科迅猛发展. 例如，在航海方面，为了确定船只的位置，要求更加精密的天文观测；在工业上，从工场手工业的生产方式向机械生产的过渡，要求工业资产阶级掌握机械生产的技术；在军事方面，弹道学成为研究的中心课题；准确计时器的制造，运河的开凿，堤坝的修筑，行星的椭圆轨道理论等，也都需要复杂的计算. 这些学科提出了许多新的课题，古希腊以来的初等数学已经不能满足需要. 自然科学的发展使数学的面貌发生了根本的变化，涌现出许多崭新的数学领域，数学发展开始进入新的时代.

在 17 世纪初期，纳皮尔(Napier, J.)发现对数，化简了天文计算；伽利略(Galilei, G.)创立动力学，奠定了近代力学的基础；开普勒(Kepler, J.)发现行星运动三大定律，为牛顿万有引力的发现铺平了道路. 在这个世纪中期，德扎格(Desargues, G.)和帕斯卡(Pascal, B.)开辟了射影几何学这一新的领域；笛卡儿(Descartes, R.)、费马(Fermat, P. de)创立了解析几何学；费马为近代数论奠基；惠更斯(Huygens, C.)、帕斯卡、费马对早期概率论的发展做出了贡献. 在 17 世纪末期，牛顿(Newton, I.)和莱布尼茨(Leibniz, G. W.)在 17 世纪一大批数学家工作的基础上，创立了微积分学. 17 世纪对于数学来说，是一个极富创造性的时代.

苏格兰的纳皮尔对数字计算颇有研究，曾多次改进计算方法，他制造的"纳皮尔算筹"化简了乘法和除法运算，并用加法代替乘法，用减法代替除法. 为化简复杂的天文计算，他专门用几年时间研究运算体系，根据非常独特的、与质点运动有关的设想构造出所谓对数方法，其实质表现为算术级数与几何级数之间的联系. 在纳皮尔的《奇妙的对数表的描述》(1614)中阐明了对数的原理. 开普勒的助手、瑞士数学家比尔吉(Bürgi, J.)也独立地发现了对数. 他造出了等差数列与等比数列对比的表，并证明了等比数列各项的乘法、除法、乘方和开方运算等. 可以用等差数列的与之相应项的加、减、乘、除来代替. 他建立的对数体系相当于以 e 为底的自然对数. 法国大数学家拉普拉斯(Laplace, P.-S.)曾高度评价对数的意义. 他说："对数的发现，简化了天文学家的工作，延长了他们的寿命."

几何学在 17 世纪发生了重大变革，其中之一是射影几何的建立. 文艺复兴时期建立起来的透视法在 17 世纪得到新的发展，其基本思想是投影和截面取景原理. 在对这一原理进行研究时，人们提出了一系列新的问题：一个实物的原形与截景之间有什么共同的几何性质？一个原形的两个不同截景之间有什么共同的性质？等等. 法国数学家德扎格对此进行了大量研究，引进无穷远点、无穷远线等概念. 讨论极点与极线、透视、透影等问题. 他的重要著作《圆锥曲线论稿》(1639)奠定了射影几何的坚实基础. 对射影几何做出贡献的第二个主要人物是帕斯卡，他用投影法来研究圆锥曲线，在 1640 年写出著名论文

《圆锥曲线论》,这是自阿波罗尼奥斯(Apollonius,(P))以来圆锥曲线论的最大进步.文中重要的"帕斯卡六边形定理"已成为射影几何的基本理论之一.德扎格和帕斯卡的出色工作在当时没有受到应有的重视,人们只是把他们的工作视为欧氏几何的一部分.直到18世纪末,人们才认识到,他们的工作是几何学一个新分支的开端,这个分支到19世纪被称为射影几何学.

概率论的兴起,最初是与保险事业的发展相关.但刺激数学家思考概率论的特殊问题,却来自与博弈有关的问题.在16世纪,意大利的一些学者开始研究赌博中的简单问题,比较掷两枚骰子出现总点数为9或10的可能性大小.17世纪中叶,法国数学家帕斯卡、费马及荷兰数学家惠更斯等,利用排列组合的方法研究了一些复杂的赌博问题.例如他们曾讨论并解决了一个赌者提出的难题,即"合理分配赌注问题".后来惠更斯写成《论赌赙中的计算》(1657)一书.这是概率论最早的论著.在以后的200多年中,经过瑞士数学家雅各布第一·伯努利(Bernoulli,Jakob Ⅰ)、法国数学家泊松(Poisson,S.-D.)和拉普拉斯等人的工作,概率论发展成为应用广泛的数学分支.

17世纪最重要的数学成就之一是解析几何的创立.它标志着变量数学时期的开始.开普勒发现行星沿椭圆轨道绕太阳运动,伽利略发现抛出去的石子沿抛物线轨道飞行等.这些导致人们必须用新的有力工具来研究几何学.法国数学家笛卡儿和费马共享解析几何创立者的荣誉.笛卡儿是17世纪最杰出的哲学家和自然科学家之一,他试图建立一种普遍的数学,把算术、代数、几何统一起来.这种动机导致他创立解析几何学.他在《几何学》(1637)中阐明了解析几何的原理,后人把它作为解析几何的起点.在《几何学》中,第一次出现变量与函数的思想(笛卡儿当时还没有使用这两个术语).笛卡儿所谓的变量,指具有变化长度和不变方向的线段,还指连续经过坐标轴上所有点的变化的数.正是变量的这两种形式使笛卡儿试图创造一种几何代数互相渗透的科学.笛卡儿从天文和地理的经纬制度出发,建立了平面上的点与实数对(x,y)之间的对应关系.然后指出二元方程$F(x,y)=0$可以确定平面上的一条曲线,用代数方法处理方程又可得曲线的性质.他还根据代数方程的性质将曲线进行分类,提出了一系列新颖的思想.法国数学家费马继续了韦达(Viete,F.)用代数来解决几何问题的方法,深入研究轨迹问题.在他的《平面与立体轨迹引论》(写于1629年,1679年出版)中,专门讨论直线、圆和圆锥曲线,提出一种轨迹理论,其中阐明了解析几何的原理:"由两个未知量决定的一个方程,它对应着一条轨迹——一条直线或曲线."笛卡儿和费马的工作迈出了超越希腊几何学的最重要的一步.应该指出,他们使用的坐标系是不完善的.意大利数学家卡瓦列里(Cavalieri,(F.)B.)最先使用极坐标求曲线所围的面积,牛顿也把极坐标看成是确定平面上点的位置的一种方法.

解析几何学的创立不仅使几何学本身发生了重大变革,而且改变了整个数学的面貌.随之而来的是微积分的创立,这是17世纪最光辉的数学成就.微积分的思想萌芽可以追溯到古希腊时代,阿基米德(Archimedes)的工作中就孕育着定积分的思想.在17世纪,最早研究体积问题的是德国天文学家、数学家开普勒,他利用"无限小元素法"(一种类似原子论的方法)求出近百个旋转体的体积.在开普勒的影响下,卡瓦列里也开展了这方面的研究.他把"无限小元素法"发展成纯粹的几何方法,提出了著名的"不可分原理",由此求出一些面积的值.他的工作相当于计算定积分

$$\int_0^a x^m \mathrm{d}x = \frac{a^{m+1}}{m+1}.$$

这些带有普遍性的结果,对定积分计算方法的建立产生了积极的影响.意大利数学家托里切利(Torricelli,E.)、英国数学家沃利斯(Wallis,J.)、法国数学家帕斯卡、费马和罗贝瓦尔(Roberval,G. P. de)等人都力图把卡瓦列里的不可分原理算术化,或者给出较严格的证明.在17世纪,关于求曲线切线的问题,最先发表的是笛卡儿的关于法线的作法(1637),后来他又给出另一种作法,其实质是把切线看成是割线的极限位置.费马在他的论文《求极大值与极小值的方法》中,给出了利用"准等式"求极值的著名方法,相当于建立可微函数取极值的必要条件.他还利用同样的方法求出了平面曲线的切线.罗贝瓦尔和托里切利从运动学的角度来研究曲线切线的作法,他们把曲线视为质点运动的轨迹,而质点的运动则看成是铅直运动和水平运动的合成.如果这两个运动的大小和方向已知,则其合成运动的大小和方向由平行四边形法则来确定.牛顿的老师、英国数学家巴罗(Barrow,I.)在他的《几何学讲义》(1670)中,也研究了切线的作法.他利用"微分三角形"(或"特征三角形")把切线的斜率定义为函数增量和自变量增量这两个无穷小量的比.他还给出了表明曲线的切线问题和求积问题之间的互逆关系的一个定理.但可惜他没有认识到它的重要性.牛顿和莱布尼茨的先驱者们为微积分的创立做了大量的工作,但是他们都没能揭示出微分和积分的内在联系.最后这关键的工作是由这两位大师完成的.

牛顿早年在剑桥得到巴罗的指导,他研究了笛卡儿、沃利斯和巴罗等人的著作,这些工作对他发现

微积分学起到强烈的刺激作用. 牛顿从运动学的角度来考虑问题,认为所谓变量就是量的连续运动. 他称变量为流数,称其变化率为流率. 他的创造性工作在 1665—1666 年完成,主要体现在《运用无穷多项方程的分析学》(完成于 1669 年,1771 年发表)、《流数法与无穷级数》(完成于 1671 年,1763 年出版)等三本小册子中. 牛顿关于微积分的基本论著完成之后,经过很长时间才发表出来. 在他的巨著《自然哲学的数学原理》(1687)中第一次公开发表了他所发明的微积分.

莱布尼茨在 1675 年前后得到微积分的要领. 他从几何学的角度考虑问题,研究了巴罗等人的著作,意识到微分和积分是相反的过程. 他把微分看作是变量相邻二值的无限小的差,而积分则以变量分成的无穷多个微分之和的形式出现. 莱布尼茨关于微积分学的最早论文《一种求极大、极小值与切线的新方法》于 1684 年发表在《学艺》杂志上. 他所创立的优越符号对微积分的传播和发展有很大影响. 现在所使用的微积分符号

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\ \int \mathrm{d}x$$

等就是莱布尼茨创始的. 他的微积分为伯努利家族和欧拉(Euler,L.)等数学家所继承,在 18 世纪得到发扬光大.

综上所述,17 世纪的数学是沿着超越希腊数学传统的趋势而发展起来的,人们冲破希腊人的传统,使数学向代数化方向前进. 数学和其他自然科学紧密联系在一起. 伽利略确定的实验科学和理论力学,为牛顿开辟了道路,促进了数学的发展,也确立了数学在自然科学中的地位. 数学知识在 17 世纪得到广泛的交流和传播,意、法、英、德、俄等国相继成立了科学学会或研究院. 这些机构所创办的科学刊物成为交流新科学思想的重要工具. 所有这一切都为 18 世纪的数学繁荣准备了条件.

18 **世纪的数学**(mathematics in 18th century) 数学史专门术语. 18 世纪在文化史上称为启蒙时期. 英国首先发生工业革命,以后遍及欧洲. 法国和德国相继兴起了启蒙运动,反对封建势力和宗教权威,提倡民主和自由. 人类的思想得到进一步解放,为科学的发展创造了条件.

微积分学自 17 世纪创立以来,在稳步而深入地向前发展,并大量应用于理论物理、力学和天文学等许多方面. 这些应用刺激和推动了许多新分支的产生:微分方程、无穷级数论、微分几何、变分学和复变函数论等. 微积分本身及这些学科的发展是 18 世纪数学最重要的内容. 正是由于这些新学科的出现和发展,使分析学形成了在内容和方法上都具有鲜明特点的、独立的数学领域. 它成为与代数、几何并列的数学三大分支之一. 18 世纪数学本身的发展,以及这个世纪后期数学研究活动的扩张和数学教育的改革,都为 19 世纪数学的发展准备了条件. 微积分学的深入发展,在英国和欧洲大陆是循着不同的路线进行的. 18 世纪早期,英国牛顿学派的代表人物有泰勒(Taylor,B.)、马克劳林(Maclaurin,C.)、棣莫弗(De Moivre,A.)和斯特林(Stirling,J.)等. 泰勒发现的著名定理

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots$$

是把函数展成无穷级数的最有力的方法. 为反驳贝克莱(Berkeley,G.)主教对牛顿流数法的攻击,马克劳林发表了著名的《流数通论》(Treatise of Fluxions,1742),对牛顿(Newton,I.)的流数方法做出逻辑的系统的阐述. 泰勒、马克劳林之后,英国数学陷于长期停滞、僵化的状态. 这是因为 17 世纪末开始的关于发明微积分的优先权的争论,滋长了不列颠数学家们狭隘的民族偏见. 他们出于对牛顿的崇拜,固守牛顿的流数法,停止了与欧洲大陆的数学交流. 与此对照,在海峡对岸,分析学在德国数学家莱布尼茨(Leibniz,G. W.)的继承者们的推动下蓬勃发展起来. 伯努利家族的数学家们首先继承并推广莱布尼茨的学说. 瑞士数学家雅各布第一·伯努利(Bernoulli,Jakob Ⅰ)运用莱布尼茨引用的符号$\int$,并称之为积分. 莱布尼茨采用他的建议,并列使用“微分学”和“积分学”两个术语. 雅各布第一·伯努利还利用莱布尼茨的计算方法,解决了一系列的几何问题. 如定义了平面曲线的曲率半径,研究了对数螺线、悬链线,发现了双纽线等. 雅各布·伯努利的弟弟约翰第一·伯努利(Bernoulli,Johann Ⅰ)在莱布尼茨的协助之下发展和完善了微积分学. 他借助于常量和变量,用解析表达式来定义函数. 他的函数定义比在此之前对函数的几何解释有明显的进步. 他在求$\frac{0}{0}$型不定式的值时,发现了现称为洛必达法则的方法. 约翰第一·伯努利还完善和发展了积分计算法. 例如,他解决了有理分式的积分问题. 约翰第一·伯努利的学生、法国数学家洛必达(L'Hospital,G.-F.-A. de)根据约翰第一的讲义,编写了第一本系统论述微分学的教科书——《无穷小分析》(1696),对传播微分学起到很大作用. 欧拉(Euler,L.)在伯努利家族的影响下成长起来,成为 18 世纪数学发展的中心人物. 这位瑞士大数学家把由伯努利家族继承下来的莱布尼茨的分析学加以系统整理,于 1848 年出版了《无穷分析引论》. 这部巨著与他随后发表的《微分学原理》和《积分学原理》(1768—1770),标志着微积分历史上的一个转折:欧拉一改以往数学家们以曲线作为微积分主要研究对

象的作法，第一次把函数作为微积分的研究中心.微积分从此被看作是关于函数的理论.函数概念本身也由于欧拉等人的研究而大大丰富.数学家们开始明确区分代数函数与超越函数、隐函数与显函数、单值函数与多值函数等.通过对一些困难积分问题的求解，建立了一系列新的超越函数，如Γ函数、B函数、椭圆不定积分等.已有的对数函数、指数函数和三角函数的研究不仅进一步系统化而且被推广到复数领域.

在整个18世纪，数学家们忙于获得新成果，对微积分基础的严密性很少注意.人们对函数、导数、微分、连续性等基本概念还没形成统一认识.对级数与积分的收敛问题，累次积分交换积分顺序问题，微分方程解的存在和惟一性问题等，都很少过问.尽管如此，也有一些数学家对建立微积分的严密基础做出了重要尝试.除了欧拉的函数理论外，18世纪，另一位法国的天才数学大师拉格朗日(Lagrange，J.-L.)试图使微积分摆脱无穷小量和极限，而采取所谓的"代数的途径".他在1797年出版的《解析函数论》中，提出用函数的泰勒级数来定义它的各阶导数，并以此作为微积分理论的出发点.法国数学家达朗贝尔(d'Alembert，J. le R.)也试图对微积分做出严格的论证，他首次把极限理论作为微积分的基础，并给出单调递增变量的极限的严格定义.欧拉、拉格朗日和达朗贝尔的工作为19世纪微积分的严格表述提供了方向.

同物理、力学的有机结合，是18世纪数学发展的显著特色之一.几乎所有的数学家都以极大的热情致力于运用微积分的新工具去解决各种物理、力学问题.18世纪，数学界的代表人物欧拉同时也是杰出的理论物理学家，而分析大师拉格朗日最负盛名的著作是《分析力学》(1788).分析学的发展直接受到物理和力学问题的推动，一方面数学为解决物理、力学(及天文学)而创造出新的方法和理论；另一方面，物理学和力学的进展也越来越需要新的数学方法和理论作为它的工具.这种广泛的应用使一系列新的数学分支在18世纪兴起.

常微分方程的发展从17世纪开始.三体问题、摆的运动及弹性理论等方面的数学描述引出了一系列常微分方程.18世纪的数学家主要致力于寻找常微分方程的通解.莱布尼茨给出了齐次方程和线性方程的通解，他还和伯努利兄弟利用某种变换把伯努利方程化为线性方程.约翰第一·伯努利还给出高阶线性方程的降阶法.欧拉从1728年开始对二阶方程进行系统研究，他用指数变换 $x=e^t$ 求出常系数线性方程的通解，还建立了任意阶常系数齐线性方程的古典解法.丹尼尔第一·伯努利(Bernoulli，Daniel Ⅰ)和意大利数学家黎卡提(Riccati，J. F.)等人对某些类型的常微分方程进行了深入研究.在18世纪中叶，由于数学物理中的问题，首先是弦振动问题，开始了偏微分方程的研究.1746年，达朗贝尔建立了第一个弦振动方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

这种方程很快被欧拉推广到二维和三维的情形.由于对万有引力的研究，欧拉在1752年又建立了位势方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0.$$

法国数学家拉格朗日和勒让德(Legendre，A.-M.)，特别是后者深入研究了位势方程的解的性质，由此引出所谓"勒让德多项式".一阶偏微分方程首先出现在流体力学和几何问题之中.在流体力学研究中还给出了第一个偏微分方程组.到18世纪末期，微分方程已发展成为一门极重要的数学学科，并且成为研究自然科学的有效工具.

变分法的发展是与微分方程的发展交融在一起的.在17世纪末，约翰第一·伯努利曾向数学界提出挑战，征求对"最速降线"问题的解.问题的提法与求普通的函数极值不同，它是寻求一个满足某些条件的极值函数，即泛函的极值.牛顿、莱布尼茨、洛必达、伯努利兄弟等都给出了正确的答案.变分法的奠基者是欧拉，他从1728年开始寻求泛函极值的一般解法，1736年得到泛函极值有解的必要条件，还陆续求出许多泛函问题的极值.法国数学家克莱罗(Clairaut，A.-C.)于1733年发表的论文《论极大极小的某些问题》是变分法的第一篇重要论著，而欧拉发表于1744年的论文《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧》是变分法发展史上的里程碑，它标志着变分法作为一个新的分支的诞生.拉格朗日在18世纪中期开始研究变分法，在1755年的论文中解决了更广一类的问题，也得到了欧拉的必要条件.拉格朗日和欧拉通信讨论有关泛函极值的问题，并把这种新方法称为变分法.拉格朗日还首先把变分法置于分析的基础之上，充分利用变分法来建立分析力学体系.

在18世纪30至40年代，欧拉曾利用幂级数详细讨论过初等复变函数的性质，并得到了著名的欧拉公式 $e^{ix}=\cos x+i\sin x$.达朗贝尔和欧拉分别在1752年和1777年的论文中讨论复函数 $f(z)=u+iv$ 的导数存在的条件，导出了著名达朗贝尔-欧拉方程(后来更多地称为柯西-黎曼方程).法国数学家拉普拉斯(Laplace，P.-S.)在这一时期也研究过复函数的积分.但是以上三人的工作都存在着本质上的局限性(没把 $f(z)$ 看成是一个基本实体).第一个试图建立复变函数的系统理论的是拉格朗日，他

想利用幂级数来建立解析函数的全部理论，但是没有获得成功．尽管如此，他们的工作已为19世纪复变函数的全面发展奠定了基础．这些新分支和微积分一起，形成了被称之为“分析”的广大领域．在18世纪，其繁荣程度远远超过代数和几何．数学家们力图用纯分析的手法以摆脱对几何论证的依赖，这种倾向是18世纪数学发展的一个特点．

在18世纪，几何与代数也都获得了一定的发展．解析几何在这个世纪成为一个独立的且充满活力的分支．虽然牛顿和雅各布第一·伯努利对特殊问题曾使用过极坐标，但极坐标的正式、普遍使用开始于瑞士数学家赫尔曼(Hermann,J.)于1729年的工作．他利用极坐标研究一般的曲线，并建立了从直角坐标到极坐标的变换公式．英国数学家斯特林把平面二次曲线的一般方程化为标准型(1717)，欧拉建立了平面曲线的参数方程(1748)．空间解析几何是在18世纪发展起来的．约翰第一·伯努利引进了现在通用的三个坐标平面(1715)；法国数学家帕朗(Parent,A.)最早使用三个坐标变量的方程表示曲面；克莱罗和赫尔曼建立了空间曲线和二次曲面的方程等．欧拉和法国数学家蒙日(Monge,G.)对空间解析几何也都有过重要工作．前者用坐标变换把三个变量的二次方程化为标准型，得到6种曲面；后者则阐明二次曲面的截线是二次曲线，并研究了直纹曲面的性质等．

微分几何在很大程度上也是微积分的自然产物，它与解析几何同时发展起来，并在18世纪形成独立的学科．对于平面曲线的研究，在17世纪末已得到许多结果，18世纪主要是发展空间曲线和曲面的理论．空间曲线的理论由克莱罗开创，经欧拉的工作而完善．克莱罗于1731年解析地论述了空间曲线的基本问题，他称空间曲线为“双曲率曲线”，研究了其切线、法线，并给出了弧长表达式．欧拉最初(1774)是为了探索扭曲橡皮带的形状问题而开始空间曲线的研究．他用参数方程来表示空间曲线，引进球面指标线的概念，推导出曲率半径的表达式．法国数学家朗克雷(Lancret,M.A.)也研究了空间曲线理论，给出了挠率公式．他们的工作在19世纪被柯西(Cauchy,A.-L.)发展．曲面理论是从研究曲面上的测地线开始的．欧拉在1760年的论文《关于曲面上曲线的研究》中建立了曲面的理论，对微分几何做出了重要贡献．蒙日自1771年开始发表了一系列论文使微分几何在18世纪发展到高峰．他及其学生全面概括了空间曲线的一般理论，并在可展曲面、极小曲面、曲面曲率及各种曲面簇等方面获得了系统的结果．蒙日还通过微分几何的研究建立了偏微分方程的特征理论．蒙日的《画法几何学》(1798—1799)在18世纪重新唤起对综合几何的兴趣．他指出画法几何只是投影几何的一个方面，这促进了更一般的投影几何学与几何变换理论的发展．

在18世纪，代数很难与分析分开．一方面，代数在许多情形下都服从分析，另一方面，促进代数发展的大量因素也来自分析．首先，人们对于无理数和复数的认识有了一定进展．欧拉和德国数学家朗伯(Lambert,J.H.)，以及法国数学家勒让德等人研究了π的无理性，并区分了代数数和超越数．欧拉提出的对复数的对数的正确认识，达朗贝尔关于一切虚数都有形式$a+bi$的断言逐渐被同时代人所接受．其次是对方程理论的研究，这是18世纪代数学的主要内容．从18世纪中叶开始，许多数学家如达朗贝尔、拉格朗日、欧拉等都在研究代数基本定理．直到1799年，德国数学家高斯(Gauss,C.F.)才给出第一个实质性的证明．高于四次的代数方程的根式求解问题始终困扰着18世纪的数学家，高斯对二项方程的研究及拉格朗日对方程的根的有理函数及其置换的研究，为19世纪代数学的革命性发展开辟了道路．

在18世纪，概率论逐渐发展成为一个数学分支．它的奠基人是雅各布第一·伯努利、法国数学家棣莫弗和拉普拉斯．雅各布第一·伯努利研究了“掷n个骰子所得点数总和等于m”的问题，开母函数方法的先河，他最重要的贡献是建立了概率论中第一个极限定理，即伯努利大数定律，发表在1713年的遗著《猜度术》中．棣莫弗的《机会论》(1718)也是早期概率论的重要著作，其中使用了正态分布曲线，推导出$n!$的渐近公式，即斯特林公式．拉普拉斯系统总结了前人的工作，于1812年出版了《概率的分析理论》，对古典概率做出强有力的综合．

18世纪的数学研究活动，大部分与欧洲各国的科学院相联系．在大学里长期存在着数学教学与研究分离、脱节现象．到18世纪末，格丁根大学首先强调教学与研究的结合．法国大革命期间建立的巴黎综合工科学校和巴黎高等师范学校，则成为新型的科学教育和研究机构的典范．社会政治环境对18世纪数学的发展有直接的影响．英国学术界的保守气氛，同拥教保王的政治环境不无关系；而法国大革命则提供了社会进步促进数学发展的典型史例．18世纪，法国最优秀的数学家，几乎都被吸收到革命政权的各项改革活动中去．而拉格朗日、拉普拉斯、蒙日、勒让德等人都受聘出任巴黎综合工科学校或巴黎高等师范学校的数学教授．蒙日还兼任综合工科学校的校长．他们的工作，使这两所学校成为新一代数学家的摇篮．所有这些都为19世纪数学的大发展奠定了基础．

19世纪的数学(mathematics in 19th century) 数学史专门术语．19世纪的数学打破过去对它的对

象及方法所造成的种种限制，呈现出一种千姿百态的多样性，创造了前所未有的成就，开始成为一门独立的科学，有自己的对象和理论体系，而不像过去那样只是依附于自然科学的工具和技术总汇. 它们为20世纪数学的发展奠定了基础.

17—18世纪以来，数学家们沿着牛顿(Newton,I.)和莱布尼茨(Leibniz,G. W.)开辟的道路，全面开发微积分的丰富宝藏，并将其应用于自然科学的其他领域，取得了空前的成就. 到18世纪末，数学的发展已经达到一种相对完美的程度，这使得数学界产生一种对数学发展前途悲观的情绪，许多著名的数学家感到数学的矿脉已经挖空，已经没有什么事可做. 而实际上，数学却正处于全面兴旺发达的前夜. 18世纪的数学家忙于获取微积分的成果与应用，较少顾及其概念与方法的严密性. 到18世纪末，为微积分奠基的工作已迫切地摆在数学家面前. 与此同时，分析学之外的数学分支在18世纪也积累了一批重要问题，如复数的意义、欧氏几何中平行公设的地位、高次方程的根式可解性条件等，引起数学界的极大关注. 另外，从18世纪开始，自然科学出现了众多新的研究领域，从数学外部给数学以新的推动力. 这些因素促成了19世纪数学的蓬勃发展.

19世纪在文化史上被称为"科学的世纪"，近代自然科学在这一世纪得到全面的发展和进步. 在数学领域则表现出前所未有的成就. 1801年，德国数学家高斯(Gauss,C. F.)的《算术研究》为数论建立一个体系. 同时，非欧几何学的诞生和综合几何学的复兴为几何的蓬勃发展打下了基础. 而分析方法及数学分析基础的建立推动了函数论的发展，并为20世纪数学的发展开辟了广阔的前景. 19世纪，数学本身可以说发生了革命性的变化，主要有下面四个特征：

1. 新题材、新领域、新分支大量涌现. 19世纪之前，大致是算术及数论、几何，以及17—18世纪发展起来的代数及分析四大领域，它们的研究对象大都停留在原来比较自然的对象——数、量、形上面. 到19世纪，数学思想得到空前的解放，主要表现在引进许多新的研究对象，特别是：

1) 数的概念的扩大. 产生了负数、虚数、无理数、复数乃至四元数、八元数，而且从无理数和虚数中分出各种代数数以及超越数. 法国数学家伽罗瓦(Galois,E.)还引进所谓伽罗瓦虚数，实际上是有限域的元素. 量的概念的扩大，产生了向量、张量等. 从这些概念出发，又出现了新的代数及分析领域.

2) 演算对象的产生与扩大. 对代数方程及代数方程组的解法和解的性质的探讨产生出一系列新对象：从线性方程组导致行列式、矩阵、线性空间、线性变换、线性型与多线性型等概念与理论的出现；从代数方程导致复数、对称函数、置换等概念的引入，以及伽罗瓦理论与群论的创立；高次联立代数方程组，则导致代数几何的产生，齐次多项式引出型论和不变式论.

3) 形的概念的扩大. 几何对象一直是三维空间内的图形，特别是曲线和曲面. 德国数学家黎曼(Riemann,(G. F.)B.)把几何对象推广到 n 维空间，而且进一步推广到流形.

4) 函数概念由特殊函数扩大为一般函数. 19世纪由椭圆积分的反演产生椭圆函数，后又推广到超椭圆函数、阿贝尔函数，从而代数函数论得到蓬勃发展. 一般函数论在19世纪后期全面发展起来.

正因为数学新对象大量涌现，研究它们的新学科也就应运而生了. 19世纪，数论已经由问题汇编发展成初具规模的对象理论. 从方法上来分，引进代数数论、超越数论、二次型及高次型算术理论；从演算对象看，不定方程扩大成庞大领域，出现丢番图逼近理论、几何数论、连分数算术理论等新兴学科.

几何学从综合几何的复兴，出现射影几何、反演几何、非欧几何以及各种特殊对象的几何——线几何、圆几何、球几何等. 由于解析方法的引进，解析几何在19世纪已经完备和定型化，从中发展出代数几何学与微分几何学这两大领域，成为20世纪几何学的基础. 但是曲线及曲面几何仍是主要对象. 拓扑学及运动几何学也有所发展. 几何学的研究在19世纪中仍超过数论、代数和分析的总和.

代数学仍然以方程求解及方程论为中心，出现伽罗瓦理论，以及置换群及抽象群和群表示理论. 方程求解问题并不因伽罗瓦理论而告终，它沿着几个方向继续发展，用超越函数解代数方程，以及用数值方法求解. 方程的解的研究到19世纪末仍是重要课题. 除了方程以外，线性代数与双线性代数、行列式与矩阵、四元数与超复系等都为代数带来多样化. 不变式论被第二次称为近世代数，而真正的近世代数——抽象代数，却萌芽于这些新的对象及理论当中.

19世纪常被称为分析或函数论的世纪，但这是19世纪末的数学家的观点. 当然实分析的多样化发展，特别是微分方程的求解引出大量的特殊函数，而从实到复的过渡引出复分析的有力工具，特别是椭圆函数及阿贝尔函数是19世纪分析的中心. 到外尔斯特拉斯解析函数论只是大量特殊函数的一个简要概括. 一般的解析函数论到20世纪上半叶才有较大的发展，而它们却植根于特殊函数的多样性之中.

20世纪数学的主流——结构数学大都源于这种多样性，20世纪的数理逻辑及数学基础也源于19世纪的先驱，从布尔(Boole,G.)到康托尔(Cantor,G. (F. P.)). 可以说19世纪数学题材的多样性造就了现代数学的丰富内容.

2.数学对象的扩大及方法的推广.数学与自然科学不同,并不以客观实在为对象.以前,数学对象受制于哲学观念及古老的规定,到19世纪,数学家的思想逐渐打破这种陈旧的框框.无疑,每一次打破都引起一场风波、一场辩论,但主流是数学对象的扩大化最终取得胜利.几何学最明显,19世纪突破二维和三维欧几里得几何的框框,出现各种各样的"非欧几何学",一是不遵守平行公设的非欧几何,二是不遵守三维限制的高维几何学,三是不遵守阿基米德公理的非阿基米德几何,四是复数的几何学,如此等等.在观念上也有重大突破,空间不一定由点构成,从而出现直线几何学、圆几何学等.图形不一定非装在大空间里,出现流形的概念以及内蕴几何学或自然几何学.还可以引入无穷远点、无穷远线等理想元素,形成新的几何对象.最后研究一层一层的结构,其中最基础的是点集及抽象集合.在19世纪,人们一开始还是习惯于具体的、特殊的对象,避开抽象的、一般的对象.但随着认识的深入,才逐步接受那些奇异的甚至病态的对象,如处处连续而处处不可微的函数,填满正方形的曲线等.但到头来,数学的深化不能不把它们接纳进来,而且在以后的发展过程中产生了意想不到的应用.

3.层次化的出现与严密性的考虑.18世纪以前的数学家大都是解决问题,特别是计算的能手.而解决问题大都是用特殊技术、特殊方法去攻特殊对象的一些特殊问题.到19世纪,数学家开始逐步考虑更高层次的问题,对于微分方程,研究解的存在性与惟一性问题.研究题材的转变不仅是过去盲目求解失败的经验总结,也是为寻找新的求解方法从理论上扫清道路.思想方法的改变也带来对方法的严密性追求.19世纪分析代替几何在数学中占据统治地位之后,分析的有效性不成问题,但严密性却受到挑战.因此,19世纪整个世纪不断对这个问题进行探索,最终由外尔斯特拉斯等人解决.但是留下的无穷集合的问题却产生了无穷的麻烦.

4.统一性的追求.19世纪数学分支的爆炸性增长,使得数学专业化日益严重,形成相互隔离的局面.19世纪初,数学家已经被分为分析学家、几何学家,前者也包括数论、代数专家.到1870年以后,由于群的概念的成熟,一些大数学家,特别是若尔当(Jordan,M. E. C.)、克莱因(Klein,(C.)F.)、李(Lie,M.S.)、庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)等人,尝试以群的观念来统一数学,取得了相当的成功.群的概念不仅联系代数方程,而且也用到了微分方程、函数论,特别是几何学,从而涵盖了大部分当时的数学.另一方面,19世纪四大领域外的四大分支:代数数论、代数函数论、代数几何学与代数不变式论,直接导向当时的理想理论,进而发展成后来的交换环论以及部分域论.对这些部分统一性的抽象化,最终导致20世纪结构数学的萌芽.

此外,19世纪欧洲的社会环境也为数学发展提供了适宜的舞台.19世纪的数学已不再是少数人的工作,数学教学与研究有机地结合在一起,已成为一种社会职业,数学家的人数与研究成果剧增.另外,随着基础教育的普及,大学数学教学的改进,培养数学家的道路基本定型化.到19世纪末,绝大多数数学家是大学毕业,通过取得博士学位后成为数学家.当时已有足够的职位提供给优秀的数学家.数学家也是以其论文来显示其能力的.19世纪,共有950种以上的期刊,全部或部分刊载数学论文.到19世纪后期,各国的科学促进会和数学会相继成立,对数学的交流起了有益的作用.在1897年,由各国数学会发起,在瑞士苏黎世召开了第一届国际数学家大会.以后成为一项定期举办的国际学术活动,对数学发展起着重要的促进作用.

近代数论经历了17与18两个世纪的发展已经初具规模,但主要是零散的结果,只有高斯1801年的《算术研究》一书问世之后,数论才发展成一门系统的学科.可以说,这部著作开创了数论研究的新纪元,明确了数论研究的方向.后来分析方法的引进,由此形成了解析数论这一分支.第一个用解析方法解决数论大问题的是狄利克雷(Dirichlet,P. G. L.),他在1837年用所谓狄利克雷级数证明了每一个算术序列$\{a+nb\}$(a,b互素)中包含无穷多个素数.狄利克雷的工作开辟了近代解析数论的研究领域.他在1863年又撰写了一部《数论讲义》,这是继高斯《算术研究》之后数论史上的又一经典著作.1859年,黎曼把欧拉ξ函数复化,提出黎曼ξ函数,进行系统研究,给解析数论提供了有力工具.在19世经中叶,刘维尔(Liouville,J.)开创了对超越数论的研究,他在1844年构造出第一批超越数.埃尔米特(Hermite,C.)于1874年和林德曼(Lindemann,(C. L.)F. von)于1882年先后证明了e和π的超越性.19世纪超越数论的最高成就是林德曼和外尔斯特拉斯证明的著名定理.由高斯在19世纪初所开创的代数数论的研究,经由库默尔(Kummer,E. E.)、戴德金(Dedekind,(J. W.)R.)和克罗内克(Kronecker,L.)等人的工作,到19世纪晚期已成为内容丰富的现代数学分支.1844年,库默尔在研究费马大定理时提出了理想数理论.戴德金(1871)引进一种代数数类代替库默尔的理想数,重建了代数数域中的惟一因子分解定理,创立了理想论.克罗内克则另辟蹊径,得到相似的概念,创立了有理函数域论,引进在域上添加代数量生成扩域的方法.

19世纪是几何学的黄金时代.这一时期几何学的特点在于几何学对象的扩大,几何学研究方法的

多样性以及几何学的成果多姿多彩、美不胜收，特别是几何学对整个数学产生持续的不可忽视的影响.下面分成三个时期具体地叙述一下：

1.前期(1800—1840) 这一时期的主要特点是综合几何学的复兴及其与解析几何学的对立.19世纪初期几何学的一大特点是综合几何学的复兴，解析几何学的方法虽然精细和有力，但在许多问题上未免显得间接而繁琐，特别是在研究图形过程中摒弃了人们的直观而只是诉诸机械的计算，在计算中也看不到其几何的意义.这就导致许多数学家倡导综合的方法即不用坐标的方法，特别是这种方法导致射影几何学的产生.射影几何学在17世纪已初具规模，但在解析几何学的强大攻势下湮没无闻，一些著作到19世纪中才被发现.这时法国数学家彭赛列(Poncelet,J.-V.)已经建立起自己的射影几何学，这标志着综合几何学的新生.同时与之对应的解析几何学也有巨大的突破，一是各种坐标系以及坐标变换方法的出现，二是用分析方法得出许多新的概念并有各种应用.

2.中期(1841—1870) 这一时期几何学产生了革命性的变革，打破了传统欧几里得几何学的一统天下，这就是非欧几何学的产生，以及黎曼对几何学观念的革新.自古希腊时代起，欧氏几何被认为是客观物质空间惟一正确的理想模型，是严格推理的典范.但欧氏几何中平行公设曾引起历代数学家的关注，以弄清它和其他公理、公设的关系.这个困扰了数学界千百年的问题，终于被高斯、罗巴切夫斯基(Лобачевский,Н.И.)和波尔约(Bolyai,J.)几乎同时各自独立地解决.但由于非欧几何违背传统，所以在创立之初未受到数学界的重视，只是在高斯去世后，他关于非欧几何的通信和笔记出版时，才因高斯的名望而引起数学界的关注.黎曼提出了黎曼式的非欧几何，发展了高斯的曲面论，创立了内蕴几何学，以流形为研究对象，由此几何学由图形的研究转变为对空间的研究，而且这空间不再局限于现实的三维空间，而成为任意维的，这导致后期的高维几何学的发展.黎曼明确区别了几何对象的拓扑性质及度量性质，还把解析几何学转变为代数几何学.这样几何学研究的对象一下子大大膨胀起来，形成了多种多样的学科.如欧氏几何学、球面几何学、非欧几何学、高维几何学、拓扑学、射影几何学、解析几何学、微分几何学(1894年才有这个名称，当时称为无穷小几何学)、反演几何学、线几何学、运动几何学、代数几何学等.

3.后期(1871—1900) 这一时期几何学发展的特点是一方面继续研究中期所产生的一系列对象及方法，一方面寻求多样几何学的统一性以及几何学的基础.德国数学家希尔伯特(Hilbert,D.)在1899年发表的《几何学基础》为几何学，也为整个数学的基础性研究制定了新的纲领，通过几何学公理的增减变化产生一系列新几何学.几何学的公理中几何性质的公理最终归结为基域的代数性质的公理.数域的变化又导致一些新的几何学的产生，除了复数域上的几何学之外，研究最多的是有限域上的几何学——有限几何学.

分析学在18世纪已发展成为具有极为丰富的内容和广泛应用的一门学科.但它自己尚未形成逻辑严密的理论体系，甚至它最基本的概念，如函数、导数、微分、积分、极限、连续性等，都还没有给出严密的定义.19世纪分析的严格化始于高斯、波尔查诺(Bolzano,B.)、柯西(Cauchy,A.-L.)、阿贝尔(Abel,N.H.)和狄利克雷的工作，后又由外尔斯特拉斯(Weierstrass,K.(T.W))做了进一步发展.1812年，高斯对超几何级数进行的严密研究，是历史上第一项有关级数收敛性的重要工作.1817年，波尔查诺首先抛弃无穷小量概念，用极限观念给出导数和连续性的定义，并得到判别级数收敛的一般准则，但他的工作没有及时为数学界了解.柯西是对分析严格化影响最大的学者，他1821年发表的《分析教程》是建立微积分严格理论的第一部重要著作，除独立得到波尔查诺的结果外，还用极限概念定义了函数的定积分.阿贝尔在1826年最早使用一致收敛的思想，证明了连续函数的一个一致收敛级数的和在收敛区域内部连续.1837年，狄利克雷在研究三角级数的论文中给出现代意义下的函数定义.1841年以后，外尔斯特拉斯开始了将分析算术化的工作.他发展了柯西的极限概念，用ε-δ语言给出函数连续性的确切定义.由于他为分析奠基做出了出色的成就，后被誉为“现代分析之父”.

分析的严格化促进了实数理论逻辑基础的建立.1872年，外尔斯特拉斯、康托尔、戴德金等数学家在确认有理数存在的前提下，通过不同途径(戴德金分割、有理数的基本序列等)给无理数以精确定义.又经过不少数学家的努力，最终由意大利数学家佩亚诺(Peano,G.)于1881年建立了自然数的公理体系，并由此从逻辑上严格定义了有理数理论.至此，分析基础的严格化运动才告一段落.在18世纪，瑞士数学家欧拉(Euler,L.)、法国数学家达朗贝尔(d'Alembert,J.le R.)和拉普拉斯(Laplace,P.-S.)等人联系着力学的发展，对于单复变函数已经做了不少工作.但是，函数论作为独立学科是在19世纪发展起来的.柯西、黎曼、外尔斯特拉斯三大数学家奠定了复变函数论的基础.柯西于1814—1825年间得到了计算复函数沿复平面上路径积分的基本定理和留数计算公式.黎曼在1851年博士论文中第一次明确了单值解析函数的定义，指出实函数和复函数

导数的基本差异,阐述了现称为黎曼面的概念和共形映射定理,开创了多值函数研究的深刻思想,打通了复变函数论深入发展的道路.外尔斯特拉斯从研究幂级数出发,提出了复函数的解析开拓理论.此外,还有阿贝尔和雅可比(Jacobi,C.G.J.)的椭圆函数论,以及米塔-列夫勒(Mittag-Leffler,(M.)G.)、皮卡(Picard,(C.-)É.)、阿达马(Hadamard,J.(-S.))等人的工作.函数论的研究成果已经十分丰富,以致有人称19世纪是函数论的世纪.

微分方程是数学分析的核心,可以说数学分析从一开始就是求解微分方程.19世纪的微分方程是在微积分的新概念和方法的影响之下进入新的发展阶段的,它主要研究解的存在性、惟一性和稳定性问题.柯西早在19世纪20年代就研究存在性问题,到19世纪末才受到普遍重视,并成为微分方程理论研究的主要方向.19世纪30年代,刘维对微分方程的性质进行了研究,他证明了里卡蒂方程一般不能用初等积分法求解的事实.与此同时,二阶偏微分方程理论也得到进一步发展,特别是傅里叶(Fourier,J.-B.-J.)在1822年解热传导方程时,提出用三角级数表示方程的未知解的工作,不仅推动了偏微分方程理论,而且开始了傅里叶级数的研究.他还引进了偏微分方程分离变量法,为特殊函数研究开辟了新天地.19世纪80年代,庞加莱系统研究了微分方程定性理论及稳定性理论,同时还提出渐近展开理论.世纪之交,数值解也受到重视.

19世纪,代数学最突出的成果,是阿贝尔于1824—1826年间证明了五次及五次以上的一般方程没有根式解.1830年,皮科克(Peacock,G.)的《代数学》问世,书中对代数运算的基本法则进行了探索性研究,为代数结构观点的形成及代数公理化研究做出尝试.德·摩根(De Morgan,A.)、布尔也曾围绕这个目标进行工作.这一时期最重要的思想来自数学史上的传奇人物伽罗瓦.他在1829—1832年间,提出了“群”的概念,并用群的方法解决了代数方程的可解性问题,引起了代数思维观念的转变.另一项引起代数观念深刻变革的成果来自哈密顿(Hamilton,W.R.)和格拉斯曼(Grassmann,H.G.).哈密顿在1843年创立了四元数理论.数学家从此便突破了实数与复数的框架,比较自由地构造出各种新的代数体系.四元数理论很快成为向量代数、向量分析以及线性结合代数的先导.1844年,格拉斯曼在讨论n维几何时,独立地得到更一般的具有n个分量的超复数理论.他的工作由于表达晦涩而无法使当时的学者接受.在数论方面,由于对费马大定理的研究,库默尔在1845—1847年引进了“理想数”概念.在此基础上,戴德金发展了理想理论.这项工作不仅对代数数论的发展有重要影响,也开辟了代数学发展的道路.1854年,布尔发表了《思维法则的研究》,创立了符号逻辑代数,这是使演绎推理形式化的有力工具.在布尔工作的影响下,凯莱(Cayley,A.)和西尔维斯特(Sylvester,J.J.)共同创造了代数型的理论,奠定了关于代数不变量的理论基础.1870年,若尔当发表《置换论与代数方程论》,第一次对伽罗瓦的贡献给出全面清晰的阐述,为群论在19世纪末的发展奠定了基础.19世纪末期,数学家们从许多分散出现的具体研究对象,抽象出它们的共性来进行公理化研究,完成了来自上述几方面工作的综合,终于使以研究方程理论为主的代数学,发展成为以研究各种代数结构为主的抽象代数学.

19世纪末期,随着分析严格化的完成,数学家们开始对数学基础进行深入的探讨.康托尔在探讨实数定义的同时,研究了傅里叶级数惟一性点集的结构.他从1874年起发表一系列有关无穷集合的文章,开创了集合论这一基础性的数学分支.康托尔把无穷集本身作为研究对象,通过一一对应方法,区分无穷集的大小,定义了集合的基数(或称势),引进序型、序数以及一些属于拓扑学的基本概念.他还提出著名的连续统假设.康托尔的工作影响十分深远,但集合论问世之初曾遭到一些著名数学家(如克罗内克)的激烈反对.到19世纪末,阿达马等证实了康托尔的理论在分析学中的重要应用,才使这一理论得到转机,并成为20世纪数学研究的一个基础.

随着佩亚诺关于自然数公理体系和帕施(Pasch,M.)关于射影几何公理体系的建立,在19世纪末出现了数学公理化运动的热潮.最著名的是希尔伯特于1899年在《几何基础》中阐述的欧几里得几何的公理系统.他考虑了公理系统的独立性、相容性和完备性,并证明了欧氏几何的相容性可以归结为算术的相容性.数学家们在为各数学分支建立公理体系的同时,通过完善所论体系的公理来探索新体系、新问题.

此外,还有一些新的分支,如函数逼近论、组合拓扑学、实变函数论、积分方程等学科的一般理论都在19世纪末登上数学舞台.总之,到19世纪末,数学已发展成为拥有众多分支的广大领域.数学研究越来越专门化.但是,在数学研究专门化趋势之中也蕴含着整体化的趋势,群论的应用就是最好的例证.1872年,克莱因在著名的《埃尔朗根纲领》(Erlangen Progrom)中根据变换群的观点,对几何学进行系统分类,揭示了群的概念在几何中的统一作用(不包括一般的黎曼几何和代数几何),开拓了研究几何的一种有效的方法.1874年,李在研究常微分方程与保持这些方程的解不变的变换群之间的关系时,创建了连续变换群理论(现称李群)以及相应的代数

(现称李代数).

与18世纪末的情况形成鲜明对照,在19世纪末,领头的数学家,如庞加莱、希尔伯特等对数学的前途充满信心.1900年,希尔伯特在第二届国际数学家大会上所作的题为《数学问题》的报告,提出了当时数学前沿尚未解决的23个问题.他的报告成为迎接20世纪挑战的宣言书.

20世纪的数学(mathematics in 20th century) 数学史专门术语.20世纪数学是以往数学,尤其是19世纪数学的自然发展,但是也呈现出它独有的特征.17世纪到18世纪是以微积分为中心的数学分析发展的时期,基本上是作为自然科学的工具而存在着.18世纪末,数学发展经历了约20年的停滞时期.到19世纪,数学的面貌发生了巨大的改变.几何学与分析学是当时数学的两大组成部分,而且出现了数学自身的对象,例如,代数数论、代数几何学、高维微分几何学和李群理论等崭新理论,这些理论连同方程论和数论构成了数学的新的前沿.对于数学基础的探讨导致了19世纪末的基础危机,这些都反映在1900年希尔伯特(Hilbert,D.)的数学问题当中.

进入20世纪,数学就开始呈现自己的特色:一是以集合论为基础的数学如何避开危机;二是以研究数学结构为目标的结构数学的建立,它们导致一系列全新的数学分支的问世.到了20世纪20年代,纯粹数学主要关注于研究结构而不仅仅是被赋予这些结构的对象.数学中的主要问题变成把给定的某种类型的结构按照同构加以分类,然后每一个同构类中给予明显的刻画.19世纪末到20世纪初,数学已经成功地分类了有限生成阿贝尔群、复与实半单李代数、有限域等简单结构,而到1981年连有限单群的分类也全部告成.20世纪30年代中期,布尔巴基学派引进数学结构的概念,并用它对于整个数学进行重新整理和分类.他们进一步找出更基本的代数结构、序结构、拓扑结构,使得20世纪30年代的数学对象更进一步扩大,如拓扑群、拓扑代数、格论、赋范论、算子代数、连续几何等.这时,抽象代数学早已经取代原来的方程论而成为代数学的正宗,它和拓扑学一起,构成大部分数学的基础.

数学的抽象化不仅没有降低它的应用价值,反而更进一步促进许多经典问题的解决,如费尔马大定理、华林问题、高斯猜想、欧拉猜想、关于ζ函数的黎曼猜想及其种种推广,以及希尔伯特问题中的大部分,都得到不同程度的进展.至于新兴学科中的各种新问题,由于彼此相互渗透,方法上相互借鉴,更是取得了巨大的成功,这些都表现出20世纪数学的活力.另一方面,虽然纯粹数学与应用数学分离已久,但纯粹数学往往为应用提供现成的好像是定做的工具,如群表示论在量子力学上的应用,纤维丛在杨-米尔斯场的应用,C^*代数在量子场论的应用,这些都表明整个数学的内在统一性.

20世纪数学的另外一个重要方面是对于数学基础的讨论,虽然并没有如大家所期望的那样为数学建立一个巩固的、牢靠的基础,但是数理逻辑与范畴论都对数学的进步起了巨大的推动作用.

20世纪数学的发展大致可分为四个时期:第一个时期是从19世纪末到20世纪30年代,这是由经典数学过渡到新兴的结构数学的前结构数学时期;20世纪30年代到20世纪60年代的第二个时期是以布尔巴基学派为代表的结构数学的全盛时期,同时,由于战争及战后的需要以及计算机的发展,应用数学在广度上和深度上都取得了前所未有的大发展,而且同纯粹数学和计算数学密切结合;20世纪60年代至20世纪80年代的第三个时期,在结构数学发展的同时,这种统一的现象又呈分化的趋势,经典式的、以个别词题为主的、具体问题具体分析的数学,又重新出现,数学呈现一种千姿百态丰富多彩的局面;最后,进入20世纪80年代以后的第四个时期,数学又呈现新面貌,各种数学的联系日益密切,数学以及理论物理学又呈现空前的大统一的局面,而另一方面,随着计算机的普及,应用数学和计算数学得到了飞跃的发展,各种纯粹数学也找到前所未有的、超过人们想象的应用.

20世纪初期,康托尔(Cantor,M. B.)的集合论被正式接纳为一个数学分支,在此基础上,发展出来测度和积分理论.其中特别是勒贝格(Lebesgue,H. L.)创造了他的积分理论,对后来的实函数论发展有着决定性的影响,并应用于调和分析、微分方程以及后来的泛函分析等学科.勒贝格积分在十几年之内有着各种各样的推广,特别是拉东积分,统一了斯蒂尔杰斯积分和勒贝格积分,对于后来积分几何学乃至x射线成像理论都有重要的应用.当儒瓦(Denjoy,A.)发明了总体化过程,对于不可求和的导数证明微分和积分的互递性,从而得出了最一般的积分概念.19世纪末,贝尔(Baire,R. L.)关于函数类的研究与点集论相结合,导致解析集合论的产生.解析集合论在当时的苏联和波兰得到了长足的发展.

19世纪末,意大利数学家引进了线函数的概念,阿达马(Hadamard,J.(-S.))运用集合论的观念,考虑了闭区间[0,1]上全体连续函数所构成的族,他发现这些函数构成了一个无穷维的线性空间,并于1903年定义了这个空间上的函数,即泛函.1906年,弗雷歇(Fréchet,M.-R.)统一前人的结果,成为抽象的理论,他有意识地把函数与曲线看成一个集合或空间中的点,并对这种抽象空间推广点

列的极限观念.这种有极限概念的集合成为后来拓扑空间的萌芽.他还在抽象空间中引进距离的观念,成为度量空间的前身.他在这类空间中定义泛函及其代数运算和分析运算,这后来成为泛函分析的一个来源.

康托尔的点集论也导致一些病态曲线的研究.20世纪初,对于曲线的定义进行了系统的探讨.布劳维尔(Brouwer,L. E. J.)证明并推广了若尔当曲线定理,他还严格地定义了维数,证明维数的拓扑不变性.他发展了庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)的组合拓扑学,证明了不动点定理,这些都预示了后来拓扑学的发展.20世纪初,希尔伯特已经用邻域观念定义拓扑,到1914年,豪斯多夫(Hausdorff,F.)把这些拓扑学的结果,总结到他的《集论大纲》一书中,这本书成为点集拓扑的第一本著作.

1899年,希尔伯特的《几何基础》一书的出版,产生了巨大的影响,推动了各种数学对象的公理化,其中包括射影几何学、群、环、域,一直到经典力学和热力学.从19世纪末起,代数学的面貌发生了根本的改变,这时抽象群的结构理论和表示理论已经有了一定的发展.1910年,施泰尼茨(Steinitz,E.)对于域论进行统一的抽象处理,而最重要的发展是从19世纪末发展起来的结合代数和非结合代数的结构理论,特别是韦德伯恩(Wedderburn,J. H. M.)在1907年证明了线性结合代数的结构定理,在此前后,嘉当(Cartan,É.)完成了复数域上的半单李代数的结构定理,并推广到实半单李代数,同时研究了它们的表示理论,这些都构成了抽象代数的最初萌芽.但是,抽象代数的发展来源于诺特(Noether,E.)的理想理论.诺特通过公理化方法发展了一般理想理论,建立了诺特环及戴德金环的理想的结构理论,并建立结合代数数的基础.阿廷(Artin,E.)首先把代数的结构理论推广到环上去,导致了环论的诞生.阿廷等人关于实域的研究解决了希尔伯特第十七问题,反映了抽象方法的威力.1930年,范·德·瓦尔登(Van der Waerden,B. L.)的《近世代数学》一书的出版,标志着抽象代数学这门学科的诞生.大约同时,泛函分析也作为一门学科正式诞生,它的来源除了意大利和法国的泛函演算之外,还有希尔伯特和他的学生在20世纪初年所进行的积分方程的研究.他们引进了l_2空间和L_2空间,证明了里斯-费希尔定理,里斯(Riesz,F.)还引进了抽象线性算子,并定义算子的范数,他把希尔伯特关于积分方程中的全连续概念推广到抽象算子上,这样,基本建成希尔伯特空间及其线性算子理论.但一直到1928年才由冯·诺伊曼(von Neumann,J.)加以公理化.泛函分析的第三条路线来源于巴拿赫(Banach,S.)等人的工作.他们主要研究赋范空间,并引进其上的算子,推广了里斯的工作,建立了对偶空间的概念.泛函分析的出现不仅推广了20世纪初期的谱理论,而且后来成为与量子力学的合用的数学工具.量子力学的出现,更进一步推动了泛函分析研究,推动算子理论的产生.20世纪初,经典数学也得到了蓬勃的发展,由于解析方法的运用,首先在素数定理上产生了突破(1896),其后,1908年,希尔伯特证明了华林定理.同时,图兰(Turán,P.)在丢番图逼近和闵科夫斯基(Minkowski,H.)在数之几何学方面的工作,大大扩展了数论的领域.1929年,在超越数论上,取得了突破,几年之内,完全解决了希尔伯特第七问题,由此使超越数论取得迅速发展.1917年,英国数学家哈代(Hardy,G. H.)和李特尔伍德(Littewood,J. E.)创造了圆法,标志着解析数论正式诞生.维诺格拉多夫(Виноградов,И. М.)改进了圆法,发展了三角和方法,于1937年证明了奇数的哥德巴赫猜想.另外,布伦(Bullen,V.)创造了筛法,施尼雷尔曼(Щирельман,Л. Г.)创造了密率法,都对一些经典数论问题的解决起了促进作用.

20世纪,数学上最完美的成就是类域论的完成,希尔伯特在19世纪末总结了代数数论的成就,创建了类域论的系统,并提出一系列猜想.这一系列猜想在20世纪最初30年中得到了完美的证明.另一方面,亨塞尔(Hensel)引进了p进域,开创了局部域理论.同时,作为全局域,除了代数数域之外,还有基域为有限域的单变量代数函数域,从而使代数数论的内容更加丰富.局部与全局的关系表现在很多方面,最简单的情形是闵可夫斯基、哈塞(Hasse,H.)的二次型定理——哈塞原理.

19世纪,数学上的重要成就之一是复变函数论的发展,19世纪末通过整函数的理论,对于ζ函数的零点估计证明了素数定理,更加促进了整函数及亚纯函数理论的发展.这个理论由奈望林纳(Nevanlinna,R.)集其大成.1925年,他提出了著名的值分布理论,定量地给出函数取值的限制,成为后来理论发展的基础.函数论的另一个老问题是单值化问题,一直到1907年,才由寇伯(Koebe)和庞加莱独立解决.黎曼面是函数论的重要分支,1913年,外尔(Weyl,(C. H.)H.)发表了《黎曼面的思想》这部划时代的著作,对黎曼面做了抽象的刻画,引进了复流形的概念.比伯巴赫(Bieberbach,L.)于1916年提出的关于单叶函数的猜想,一直刺激着几何函数论的发展,经过缓慢的、成效不大的进步以后,这个猜想终于在1985年得到完全的解决.20世纪20年代,玻尔(Bohr,H.)引进概周期函数的概念,对数论与函数论都有很大的促进.

20世纪的数学发展的一大特点是把一维推广到了高维.在不同的领域存在着不同程度的困难,其

中，多复变函数论确实是20世纪的一个重要分支.19世纪末，人们就尝试把单复变函数论中的一些定理推广到多复变函数上面，但早在20世纪初，就发现即使是两个变量的复变函数，也同单复变函数有许多差异，尤其是相当于单复变函数中的单位圆或上半平面在多变量情形下是极其复杂多样的.最简单的情形是嘉当(Cartan,É.)在1935年分类的有界对称域，但后来发现非对称的有界奇性域可以是不可数无穷那么多，这说明多复变函数论的困难.另外一个发展是嘉当(Cartan,H.)等关于正则域的刻画，而后来的发展，势必靠新兴的代数拓扑学、抽象代数学、微分几何学与偏微分方程理论的发展才行.

20世纪初，函数逼近论正式发展成为一门新学科，它后来通过泛函分析与最优化理论联系在一起.发散级数的求和理论也与数论应用结合在一起.傅里叶级数收敛性的研究也取得惊人结果，一方面存在L^1中函数的傅里叶级数几乎处处发散，一方面1966—1967年证明$L^p(p>1)$中函数的傅里叶级数几乎处处收敛.

19世纪，常微分方程理论取得了巨大的发展，到20世纪，主要是沿着庞加莱所开创的定性理论与李亚普诺夫(Ляпунов,А.М.)所开创的稳定性理论继续发展.1901年，本迪克松(Bendixson,I.O.)提供周期解存在的一个肯定判据.1912年，庞加莱对狭义三体问题证明存在无穷多周期解，但其中的一个关键的拓扑定理，他生前并未得到证明.他去世不到半年之后，由伯克霍夫(Birkhoff,G.D.)加以证明.其后，他继续用拓扑方法研究回归问题，他的工作总结在1927年出版的《动力系统》一书中，他的极小极大方法后来被莫尔斯(Morse,H.M.)于1925年推广成为著名的莫尔斯理论.他的理论于1934年总结在《大范围变分法》一书中.另一类大范围变分法的理论是柳斯捷尔尼克(Люстерник,Л.А.)和施尼雷尔曼(Шнирельман,Л.Г.)的范畴理论.

20世纪的常微分方程理论着重于非线性振动的研究，其中特别是范·德·波尔关于周期振动稳定性的研究.20世纪30年代，苏联开展了关于动力系统的研究，引进了结构稳定性这个重要概念，这些理论在无线电技术当中有极大的应用价值.

20世纪的几何学有了重新的分化和重组.1906年开始把埃尔朗根纲领同微分几何学结合起来，产生了射影微分几何学，其后又产生了仿射微分几何学.由于黎曼几何学和张量分析的技术被爱因斯坦(Einstein,A.)用在广义相对论上，促进了微分几何学的飞跃发展.特别是1917年，列维-奇维塔(Levi-Civita,T.)引进了平行移动的概念，1918年，外尔引进了仿射联络的概念.其后，嘉当(Cartan,É.)系统地发展了联络理论，他的工具是活动标架法.同时在相对论的刺激下，出现了一系列一般空间的几何学的研究，如芬斯勒(Finsler,P.)空间.另一个经典问题是普拉托问题，在20世纪30年代得到解决后，到20世纪60年代又由偏微分方程及微分几何学的进步而得到新的振兴.20世纪前期的代数几何学主要是意大利学派关于代数曲面的研究，1935年，扎里斯基(Zariski,O.)把它总结在《代数曲面》一书中.

概率论虽然已有300年的历史，但到20世纪初，人们对概论只有一些模糊的认识，概率的计算也没有很严格的基础，当时只有一些古典概率的基本概念以及大数定律和中心极限定理的原始形式.20世纪初，严格地证明了中心极限定理.1909年，波莱尔(Borel,(F.-É.-J.-)É.)得出强大数定律，马尔可夫(Марков,А.А.)开始了马尔科夫链的研究，到20世纪20年代，建立了大数定律与中心极限定理成立的充分必要条件，可以说是古典概率论的最终完成.但是，这个时期对于概率的理解有着很大的不同，对于概率的数学基础，也有不同的看法，一直到波莱尔有意识地把概率论建立在测度论的基础上，建立了可数集的概率论，填补了古典概率以及几何概率之间的空白，概率论才算有了可靠的数学基础.1933年，柯尔莫哥洛夫(Колмогоров,А.Н.)把概率论公理化，概率论才正式成为一门独立学科.20世纪20年代到40年代，是概率论的英雄时代.在这个时期形成了莱维(Lévy,P.P.)为代表的法国学派，柯尔莫哥洛夫、辛钦(Хинчин,А.Я.)等人为代表的苏联学派.以及稍后的美国学派.这个时期研究了独立随机变量和的极限定律以及相关的随机变量情形下大数定律与中心极限定理的推广，而最主要的一个方面是随机过程.随机过程的最典型的例子是布朗运动，在爱因斯坦于1905年的物理解释基础上，维纳(Wiener,N.)首先从数学上建立布朗运动的理论模型，其后列维(Levi,E.E.)从马尔科夫过程观点研究布朗运动，提出假定未来与过去无关这种强马尔科夫性质.后来发现马尔科夫过程的转移概率满足微分积分方程.

作为概率论的应用是数理统计，它来源于优生学.20世纪初，皮尔逊(Pearson,K.)构成相关性的理论，建立了生物计量学的基础.他引进了X分布，开辟了参数检验理论.后来，戈塞特(Gosset,W.S.)开辟小样本检验方法，这些都是建立在古典概率的基础上.20世纪20年代，费希尔(Fisher,R.A.)一系列的理论与实践活动促进了数理统计的极大发展.他主要的贡献是假设检验和实验设计，他还发展了方差分析方法的研究，但他的数学不够严格.后来在概率论公理化的基础上，奈曼(Neyman,J.)等人奠定了统计假设检验的基础.实验设计是应用得非常广的方法，它与组合理论密切相关.特别涉及正交

拉丁方的存在问题以及区组设计理论，这些都已经成为组合理论的独立分支. 数理统计的另外一个发展是瓦尔德(Wald,A.)开创的统计判决函数理论. 在第二次世界大战中，他发展了序贯分析法，有极大的实用价值.

20 世纪初期，集合论的内在矛盾开始暴露出来，使数学界震动最大的是罗素(Russell,B.A.W.)在 1901 年发现的"悖论". 为了解决这个矛盾，罗素提出了分支类型论，他在这个基础上与怀特海(Whitehead, A. N.)合著三大卷《数学原理》(1910—1913). 另一个解决悖论的途径是策梅洛(Zermelo,E.F.F.)于 1908 年提出的集合论的公理化，他的公理体系经过后来的补充和修改成为公理集合论的一个公认的基础. 在这同时，对于数学基础进行了热烈的争论，产生了相互对立的逻辑主义、直觉主义和形式主义三大派. 以希尔伯特为代表的形式主义企图把全部数学建立在少数公理的基础上，然后给公理的无矛盾性一个绝对的证明，这就是所谓"证明论". 1931 年，哥德尔(Gödel,K.)证明了著名的不完全性定理，使得希尔伯特所期望的形式系统的绝对完全性的证明根本做不到，从而使数理逻辑完全转向一个新的方向.

1931 年，哥德尔的不完全性定理导致数理逻辑的大发展，首先是 20 世纪 30 年代发展起来的一般递归函数的概念. 1936 年，图灵(Turing,A.M.)提出了图灵机的概念，给可计算性一个具体的刻画. 由于不完全性定理出现形式系统中的不可判定问题，特别是群的字的问题不可解与希尔伯特第十问题的否定解决. 1938 年，哥德尔证明连续统假设的相对无矛盾性. 20 世纪 60 年代又发现选择公理和连续统假设等的相对独立性，由此产生一系列的数学方面的后果，特别从 20 世纪 50 年代模型论的诞生，对数学本身也有很大的冲击，其中主要的是非标准分析的产生以及拓扑新理论的发表. 由于集合论的公理系统不完全，自然考虑加进一些新的公理，其中选择公理是比较重要的，在代数和分析的许多证明中是不可少的. 但是也有一些公理，比如大基数公理，可以导出所有实数的子集都是勒贝格可测的，这样就直接导致一大套理论变得毫无用处，因而数理逻辑的研究又重新受到数学家的重视.

20 世纪的数学发展到 40 年代，抽象代数学、一般拓扑学、测度与积分理论、泛函分析等新兴学科已趋于成熟，并成为以后数学发展的基础. 这时，布尔巴基学派应运而生，他们在数学结构的观念指引下，对于整个数学进行重新整理. 从 1939 年以来，刊行的《数学原理》，成为新的经典. 在他们的思想影响下，许许多多数学部门通过新的抽象数学工具得到了改造，这主要表明在下面几方面：

1. 组合拓扑学由于群的概念的引进，正式成为代数拓扑学. 20 世纪 40 年代同调论的公理化，统一了同调论的基础，并开辟了以后广义上同调论的发展途径. 同时，同伦论的兴起，丰富了拓扑学的内容，而且使得拓扑学成为数学发展的重要工具. 20 世纪 50 年代以后，对于流形的研究，取得了重要的突破. 1956 年，发现球面上的不等价的微分结构，证明了广义庞加莱猜想，解决了主猜想，并发展了大范围的动力系统理论. 对于微分流形的研究，促进了起点理论的发展. 同时解决了一系列与微分几何学有关的拓扑问题，并且发展了叶状结构理论.

2. 新学科的发展给古典分析提供了重要的工具，其中包括不动点定理、拓扑度的观念，尤其是广义函数论大大推动了偏微分方程理论的发展. 在微分流形上，考虑微分算子促使浩治理论的产生. 这个理论把流形的拓扑性质与分析性质结合起来，它与黎曼-洛赫定理共同深化为阿蒂亚-辛格理论. 阿蒂亚-辛格理论又是引进伪微分算子的主要推动力，伪微分算子不仅包含线性微分算子，而且包含了以前研究的奇异积分算子，从而使线性偏微分方程理论系统化，这套理论后来又推广为傅里叶积分算子理论.

3. 20 世纪前 30 年所发展起来的希尔伯特空间的算子谱理论，由于盖尔范德(Гельфанд,И.М.)等于 1941 年所创始的巴拿赫代数理论而大大简化和推广. 冯·诺伊曼在这之前已经开始了算子代数的研究，冯·诺伊曼代数在 20 世纪 70 年代初取得了新的突破，康耐进一步使这个孤立的学科与阿蒂亚-辛格理论、叶状结构理论乃至数学中许多分支结合在一起，形成了非交换几何学.

4. 交换环理论给代数几何学打下了牢固的基础. 从范·德·瓦尔登、韦伊(Wetl,A.)、扎里斯基一直到格罗腾迪克(Grothendieck,A.)，不仅发展了抽象代数几何学，而且解决了一系列经典问题，其中特别是广中平祐解决了特征 0 的代数簇的奇点解消问题，而且建立了算术代数几何这一前沿学科，并导致一系列重要猜想的证明. 1973 年，德利涅(Deligne,P.)成功地证明了韦伊猜想，这是不定方程理论最重大的成就. 1983 年，法尔廷斯(Faltings,G.)证明了莫德尔猜想，这是丢番图几何的中心问题之一. 1994 年，怀尔斯(Wiles,A.)取得世纪性的成就，证明了费马定理.

5. 由低维到高维、由局部到整体是这个时期数学发展的特征之一. 如多复变函数论的发展，势必借助于抽象代数拓扑学以及微分几何学、偏微分方程等学科的进步. 由于层的理论以及上同调理论，解决一系列问题如正则域的刻画、斯坦因空间理论、塞尔对偶定理等.

20世纪,数学最重要的成就之一是群表示论,先是有限群,其次20世纪20年代外尔及嘉当(Cartan,É.)发展了半单李群的表示.20世纪30年代,对于李群的本质有了深刻的了解,在一般的局部紧群上面,引进了测度、积分、概周期函数,并开始了无穷维不可越表示的研究.从这时起,半单李群、幂零李群、可解李群的表示都取得了重要进展,并且广泛地应用于数论、分析、代数几何及自守形式理论上.20世纪30年代,类域论由薛华荔(Chevalley,C.)引进伊德尔而代数化、韦伊又引进阿德尔.1967年,朗兰兹(Langlands,R.P.)把群表示论和数论以及调和分析结合起来,成为代数数论发展的新纲领.代数数论另外一种表述是用同调代数方法,而同调代数又是从代数拓扑学中产生出来的,它在代数和数论方面起着重要作用.代数几何与群论的结合又产生代数群理论,代数群中的算术子群又是古典二次型理论的推广,而借助于李代数得出的李型单群,大大推动了有限单群的分类问题的解决,这些理论有机地结合在一起,成为这个时期数学发展的一个特征.

狄利克雷问题在20世纪也有了重大的发展,首先是希尔伯特恢复了狄利克雷原理的可靠性,外尔提出希尔伯特空间射影算子理论,成为解决狄利克雷问题的新方法,这直接导致调和积分论.20世纪30年代起,位势理论运用新的数学工具成功地取得新发展,如位势空间从欧氏空间推广到拓扑群上,并摆脱了度量概念,形成一套抽象的位势理论.1944年,角古静夫发现古典位势与布朗运动有关.经过杜布(Doob,Joseph L.)及洪特(Hunt,R.)等人的研究,证明任何一个马尔可夫过程都同一种位势理论有关,这把两个原来互不相关的领域联系在了一起.

在流形的拓扑学与几何学的推动下,流形上的分析成为20世纪60年代的热点,其后导致大范围分析和几何分析的诞生.大范围分析一个重要组成部分是斯梅尔(Smale,S.)开创的微分动力系统理论.进入20世纪70年代,庞加莱所预见的非线性现象,特别是分叉与混沌理论,进一步得到更深的理解,并产生众多的应用.

20世纪的数学应用不仅在物理科学方面继续深入发展,而且扩展到生物科学、经济科学、管理科学各个方面.20世纪40年代以后,随着计算机的发展,应用数学与计算数学密切相关地发展,解决了一系列的重要问题.它不仅应用于基础数学,而且应用到了新兴的抽象学科,如拓扑学、抽象代数、泛函分析等.反过来,应用数学也促进了纯粹数学的发展,甚至直接促使纯粹数学问题的解决,如1982年由杨-米尔斯理论,导致四维庞加莱猜想的证明.在第二次世界大战中发展起来的运筹科学,其中最重要的分支是规划理论,特别是线性规划理论与算法复杂性有着密切的关系,并有着多方面的应用.1948年发展起来一整套信息理论,其中编码问题与代数问题密切相关.由于卫星和火箭的控制问题,产生了控制理论、应用抽象代数、泛函分析、随机过程理论乃至微分几何学、代数几何学等.1958年,庞特里亚金(Понтрягин,Л.С.)等学者提出最优控制所满足的必要条件,而形成集中参数系统的最优控制理论.

1960年,卡尔曼(Kalman,R.E.)等提出递推滤波算法,适合于计算机进行计算,便于应用.对策理论的发展较早,1944年,冯·诺伊曼等学者的《对策论和经济行为》一书出版,是前人对于对策模型研究的总结,其中给对策以公理化的定义,奠定了这门科学的基础.与此同时,他们也确立了数理经济学的一个发展方向.

随着数学应用的发展,对计算机的要求也越来越高,大量数值计算使人们对于研究数值计算方法更加重视.1947年,冯·诺伊曼等学者发表了"高阶矩阵的数值求逆",标志着数值分析这门学科的诞生.数值分析最常用的方法是解线性方程组,除了高斯消元法外,还发展了迭代法,并研究了一类应用价值很广的稀疏矩阵,以及广义逆的概念.为了解偏微分方程,常用差分法以及库朗(Courant,R.)等人在20世纪20年代奠定基础的有限元法,这个方法是应用范围最广的方法.其他还有样条函数、快速傅里叶变换,以及线性规划的单纯型方法及其种种改进.20世纪60年代,随着计算数学的实践,出现了计算复杂性的分支,它对于算法进行了定量的评价.

外国数学名著

莱因德纸草书(Rhind Papyrus)　古埃及数学著作.公元前1650年左右的埃及数学著作,是世界上最古老的数学著作之一.作者是书记官阿梅斯(Ahmes).其内容大概是依据更早年代(公元前1849—前1801)的教科书,为当时的包括贵族、祭司等知识阶层所作.最早发现于埃及底比斯的废墟中,公元1858年,由苏格兰的埃及学者莱因德(Rhind,A.H.)购得,故名.现藏英国伦敦博物馆.该纸草书全长544cm,宽33cm.纸草书的卷首载录了一组分数分解表,把$2/n$(n为3到101之间的奇数)分解为单位分数(分子为1的分数)之和,如将

$$\frac{2}{33}\text{写为}\frac{1}{22}\,\frac{1}{66}.$$

之后,是用10除1—9各数所得的分数表.接着列出了87个问题,对每个问题都给出了解答.如问题3是10个人分6只面包,问各得多少.开头的一些题都涉及分数运算.问题24—38的内容在今天可归为一元一次方程,其解法使用了假位法.其后是关于量

器使用和面包分配等问题，涉及等差数列．如第40题为："把100只面包分给5个人，使每人所得成等差数列，且使最大的三份之和的1/7是最小的两份之和，问各得多少？"其后是一些体积和面积问题，涉及圆、正方形、等腰三角形、等腰梯形等．求圆面积时相当于取圆周率 $\pi=3.16049$．第56—60题是金字塔问题，从中可以看到三角学的初步知识．第61题之后是杂题，涉及许多实际问题，如食物中所含原料的比例、饲料分配等，其中第79题是一个等比数列问题．

《莱因德纸草书》鲜明地体现了埃及数学的实用性，各种问题的解答都没有给出公式，基本上看不出埃及人有寻求一般方法的兴趣，其数学知识缺少系统性，没有逻辑证明．从莱因德纸草书这一宝贵的史料中，人们不仅可以了解古埃及数学的状况，还可以窥见当时埃及社会生活的某些侧面，因而它不仅在数学史上，而且在埃及文明史上也具有重要的价值．

几何原本(Elements)　古希腊数学著作．希腊数学家欧几里得(Euclid)著，是用公理方法建立演绎数学体系的最早典范，成为至今流传最广、影响最大的一部世界数学名著，它对人类思想的巨大影响仅次于圣经．欧几里得之前的希腊数学已经历了300多年蓬勃发展的历史，积累了丰富的成果，并且也有人曾试图综合整理希腊几何学的成就，但欧几里得的《几何原本》所取得的巨大成功，使这些同类著作黯然失色．

《几何原本》共13卷，每卷(或几卷一起)都以定义开头．第Ⅰ卷在给出23个定义(如点、线、面的定义)之后给出了5个公设．第5公设即著名的平行公设，它断言："若一直线与两直线相交，使同旁内角小于两直角，两直线若不加限制地延长，那么一定在小于两直角的一侧相交．"众所周知，对这一公设的持续不断的研究导致了非欧几何的诞生．公设之后有5个公理．由这些基本定义、公设和公理出发，欧几里得运用严格的逻辑工具在第Ⅰ卷中逐步推出了48个命题，这也是整部著作的特点．《几何原本》前6卷属于平面几何内容．第Ⅰ卷命题47是著名的毕达哥拉斯定理(勾股定理)．

第Ⅱ卷在定义了磬折形之后，给出了14个命题，是第Ⅰ卷中有关面积变换命题的继续．若将几何变换翻译成代数语言，则命题4相当于用几何方法证明了代数等式

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

命题5、6、11、14就相当于解二次方程

$$ax-x^2=b^2, ax+x^2=b^2, x^2+ax=a^2, x^2=ab.$$

第12、13命题相当于余弦定理的证明．

第Ⅲ卷的37个命题，论述了圆、圆的相交与相切，以及弦、圆周角等．

第Ⅳ卷的16个命题全部是有关圆的问题，尤其是圆的内接与外切直线图形，包括圆内接正多边形的作图．如命题16要求作圆内接正15边形．

第Ⅴ卷发展了一般比例论，赢得后世数学家的高度赞扬．该卷的核心即含于开篇的定义中，定义4表明："两量之间有一个比，若其中之一个量倍乘时能超过另一量．"定义5给出的比例的定义，被认为是古希腊数学中几个最富创造性的成果之一，它与今天所谓的阿基米德公理异曲同工．

第Ⅵ卷应用前一卷建立的一般比例论于相似图形，给出了33个命题．其中命题25、27—29是有关面积贴合的问题，其方法之巧妙给人们留下了很深的印象．至于这种方法的来源则令数学史家们感到困惑．这种命题在第Ⅹ卷中被用来处理无理数，但更重要的是它们成为其后阿波罗尼奥斯(Apollonius，(P))发展圆锥曲线论的基础．事实上，"抛物线"(parabola)、"椭圆"(ellipse)及"双曲线"(hyperbola)几个词即来源于面积贴合方法．

第Ⅶ、Ⅷ、Ⅸ三卷是算术内容，主要讲数论，分别有39、27、36个命题．在第Ⅴ卷中发展的一般比例论被用于数．第Ⅶ卷命题1给出了欧几里得算法，第22—32命题是关于素数的．第Ⅷ卷主要处理成连比例的数列问题．第Ⅸ卷命题20相当于证明了"素数个数无穷多"这一结论．值得注意的是，所有命题使用的都是几何语言．

第Ⅹ卷包含了115个命题，试图将无理线段进行分类．主要详尽讨论了可以表示成

$$\sqrt{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}$$

的线段的各种可能的形式，但并未取得很大成功．本卷命题1："给定两不等的量，如果从较大的量中减去它的一大半，再从余下的量中减去其一大半，如此继续不断，总可使余下的量小于所给的较小的量"是穷竭法的基础，在第Ⅻ卷中得到应用．

最后3卷致力于立体几何．第Ⅺ卷的大量命题是有关平行六面体．第Ⅻ卷主要是应用穷竭法证明了图形的面积和体积之比的一些命题．运用穷竭法对命题的证明是非常严格的，它是古希腊数学最重要的创造之一．第XⅢ卷研究了五种正多面体．

《几何原本》从很少的几个定义、公设、公理出发，推导出大量结果，"这是几何学的光荣"(牛顿(Newton，I.)语)．更重要的是它给出的公理体系标志着演绎数学的成熟，主导了其后数学发展的方向．当然，《几何原本》的公理系统并不完备．

欧几里得的希腊文《几何原本》手搞早已失传，现存的各种版本都是后来整理出来的．如今世界各主要文种都有《几何原本》的译本．中国最早的中文译本是1607年由利玛窦(Ricci，M.)和徐光启合译

的，他们依据的底本是克拉维乌斯(Clavius,C.)校订增补的15卷拉丁文本.利玛窦和徐光启只译出前6卷.经过250年后的1857年，伟烈亚力(Wylie,A.)和李善兰合译出后9卷(依据另一个版本).1990年，陕西科技出版社出版了根据希思(Heath,T.L.)的标准英文版本《欧几里得几何原本13卷》(The Thirteen Books of Euclid's Elements,1956)译出了新版本.希思的英译本的底本是海伯格(Heiberg,J.L.)的权威版本《欧几里得全集》(Euclidis opera omnia,1883—1916,希腊文-拉丁文对照).

《几何原本》作为重要的数学经典著作，它不仅具有极大的历史价值，而且仍具有重要的现实意义.

已知条件(Data)　古希腊数学著作.希腊数学家欧几里得(Euclid)著.它是除《几何原本》外，欧几里得所著的、在纯几何学方面惟一以希腊原文幸存至今的另一部著作.

《已知条件》的内容与《几何原本》第Ⅰ至Ⅵ卷密切相关.它考虑了在各种不同意义下的已知条件，意在提供一系列命题.例如，在一已知图形中某些部分或关系是已知时，其他部分或关系在这种或那种意义上也是已知的.因而该著作是以各种意义上的所谓"已知"的定义开始的.在这些定义之后，共有94个命题，分别处理了量(命题1—23)、线段(命题24—38)、直线图形(命题39—86)，以及圆(命题87—94).该书中最有趣的命题是一组与《几何原本》中的面积贴合方法有关的命题，即命题58、59、84、85.命题58，即："如将一已知面积贴合到一线段上，使亏形的形状是已知的，则亏形的边是已知的."命题84，则相应于面积贴合方法中的亏形贴合情形.命题59和85相应于余形贴合.这些命题为理解《几何原本》的内容提供了线索.

《已知条件》在希腊数学中的真正作用是为"分析"这种重要的数学方法提供必要的辅助手段，它为理解通常以综合方法写出的希腊数学著作提供了线索.它并非仅仅是关于《几何原本》中内容的练习，其中的命题大大便利了解决问题的"分析"过程.该书在希腊数学家中曾被广泛利用，产生了相当影响.

《已知条件》没有像《几何原本》那样得到系统地研究，但它在古代数学史中有着不容忽视的地位.

数沙者(Sandreckoner)　古希腊数学著作.希腊数学家、物理学家、天文学家阿基米德(Archimedes)著，它是阿基米德所著流传至今的惟一的一篇算术论著，其中给出了一整套表示大数的方法.

《数沙者》是阿基米德写给国王盖伦(Gelon)的一封信，它一开头便提出要解决大量沙粒数目的表示问题.当时希腊记数制度采用数词或希腊字母，对较大的数目便采用组合法来记数.人们对表示像地球体积这么多的沙粒的数目感到无能为力，而阿基米德给出的方法，甚至能写出像宇宙间沙粒数目那样大的数.起初他对天体的体积根据当时的天文学知识给出一些假定，推出宇宙的直径小于10^{10}斯达迪(希腊长度单位).之后给出了记数法则.阿基米德称1—万万(10^8)为第一级数.以此为出发点，即以万万作为第二级数的单位，可数至10^{16}，依此类推，便可数至$(10^8)^{10^8}$，称之为P.仿上程序可数至P^{10^8}.阿基米德给出了如下定理：如果一个等比数列A_1，A_2，…，A_m，…，A_n，…，A_{m+n-1}，…中，$A_1=1$，$A_2=10$，$A_3=100$，…则任两项A_m与A_n相乘时，乘积$A_m\cdot A_n$是该数列中的项，且该项距A_n的项数与A_m距A_1的项数相等.同时，该项距A_1的项数比A_m和A_n各自距A_1的项数之和少1，即$A_m\cdot A_n=A_{m+n-1}$，这相当于得到$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$.之后，阿基米德将以上理论应用于数沙中，推出结论：一个能容纳整个宇宙的球体所能包含的沙粒总数小于10^{51}，而比上述"宇宙"还要大的恒星球所能含的沙粒总数小于10^{63}，而他能数至P^{10^8}，即$((10^8)^{10^8})^{10^8}$.

《数沙者》的重要性在于发表了可以把数加大到不受限制的思想，当然创造一套记大数的方法也是一种贡献.此外，《数沙者》还是研究阿基米德生平的重要史料.阿基米德未能发明十进位置制记数法，这反映了希腊记数制度发展的局限性.

论球和圆柱(On the Sphere and Cylinder)　古希腊数学著作.希腊数学家、物理学家、天文学家阿基米德(Archimedes)著.阿基米德的几何学著作是希腊数学的顶峰之作.该著作是作者关于几何形的面积和体积方面的几种主要著作之一.由其卷首的序言可知，该著作是作者的《抛物弓形求积》的继续，并先于另外的著作《论螺线》和《论劈锥曲面体和椭球体》.

《论球和圆柱》共分两卷.第一卷开头先给出了6个定义和5个假设.如定义了底为球面的圆锥(扇形圆锥)以及由二圆锥组成的算盘珠形的立体.第一个假设(或公理)是：具有两相同端点的所有(曲)线中以直线为最短.类似地，具有相同边界(边界在一平面上)的所有(曲)面中以平面为最小(假设3).第五个假设是所谓阿基米德公理："在不相等的线、面或立体中，累加较大者与较小者的差，总可超过任给一可与之相比的量."用现代术语即，对任意二量A，B，$A-B>0$，则对任意大的量C，总存在n，使$n(A-B)>C$.之后在第一卷中给出了44个命题，内容涉及圆柱和圆锥的表面积、球的表面积与体积，以及球缺与扇形圆锥的体积.如命题13："任一正圆柱(不计两底面)的表面积等于一圆的面积，该圆的半径是圆柱的高与直径的比例中项."命题33："任一

球的体积等于一圆锥体积的 4 倍，该圆锥以球的大圆为底，高为球的半径.”该命题的推论是：“以球的大圆为底、以球的直径为高的圆柱，其体积是球体积的 3/2，其包括上、下底在内的表面积是球表面积的 3/2.”这就是刻在阿基米德墓碑上的著名定理.第二卷中讨论了由第一卷命题推出的结果，主要关于球缺内容.如命题 9：“在所有球缺中，与半球具有相同表面积者体积最大.”阿基米德在《论球和圆柱》中还用几何方法解决了相当于三次方程

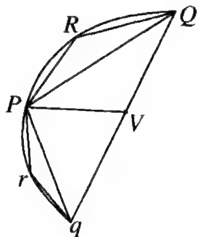
$$x^2(a-x)=b^2c$$

求解的问题.

《论球和圆柱》中所有结果都以穷竭法进行严格证明，是古代数学严格性的典范.其中关于面积和体积的系统结果，充分反映了希腊几何学的高度发展水平，对其后一切关于面积和体积方面的研究产生了深远影响.

抛物弓形求积(On the Quadrature of the Para-bola)　古希腊数学著作.希腊数学家、物理学家、天文学家阿基米德(Archimedes)著.阿基米德精通力学，尤其娴熟于杠杆原理的运用.他把力学技巧应用于数学问题，从而得到了许多新发现.这在该著作中得到充分体现，它为了解阿基米德的方法提供了宝贵的资料.

在《抛物弓形求积》的前言中阿基米德申明，他的一些数学发现是通过力学手段得到的，并最终从几何学上加以证明.他首先给出了证明赖以进行的基础，即阿基米德公理，并历数了前人运用此公理得到的一些关于面积和体积方面的结果.全篇共 24 个命题，主要证明了如下的结论：“由一抛物线与其一条弦围成的抛物弓形的面积，等于与抛物弓形同底等高的三角形面积的 4/3.”(命题 24).阿基米德用两种方法求得上述结论，但首先运用了力学方法.在命题 16 中给出：“抛物弓形以 Qq 为底(q 到弓形顶点的距离不远于 Q)，过 q 点作直线 qE 平行于抛物线的轴，且与 Q 点的切线相交于 E，证明弓形的面积等于$\triangle EqQ$ 的面积的三分之一.”之后他运用一系列定理(命题 18—24)给出了严格的数学证明.阿基米德的证明使用了穷竭法，但该处与他的其他著作中所采用的穷竭法的形式不同.他采用了现在可称之为逼近的方法.他用一系列三角形“穷竭”抛物弓形(如图).如果



A_1 为原三角形(P 为抛物线顶点)，以此三角形的两边为底所作的两小三角形之和为 $A_1/4$.继续此程序，各小三角形之和依次为

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 A_1,\left(\frac{1}{4}\right)^3 A_1,\cdots$$

为证明抛物弓形的面积等于 $4A_1/3$，阿基米德首先在命题 22 中证明了以上序列的有限项之和小于弓形的面积.之后在命题 23 中证明了，如果序列 A_1，$A_2,A_3,\cdots$满足条件 $A_1=4A_2,A_2=4A_3,\cdots$，则

$$A_1+A_2+A_3+\cdots+A_n+\frac{1}{3}A_n=\frac{4}{3}A_1.$$

由以上结论及《几何原本》第 X 卷命题 1，阿基米德利用双重归谬法证明了抛物弓形面积等于 $4A_1/3$(命题 24).这里他实际上是求出了无穷几何级数

$$1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{4}\right)^n+\cdots$$

的和.

《抛物弓形求积》与阿基米德的其他著作一样，体现了他数学论证的高度严格性.他清楚地意识到了物理论证和数学证明之间的区别.这一点在数学史上受到高度评价.

论劈锥曲面体与回转椭圆体(On Conoids and Spheroids)　古希腊数学著作.希腊数学家、物理学家、天文学家阿基米德(Archimedes)著.是作者在有关由曲线和曲面所围成的面积和体积方面的几种主要著作之一.主要论述由圆锥曲线旋转所形成的立体的性质，以及这些立体被平面截取部分的体积.阿基米德的所谓直角劈锥曲面体是指一旋转抛物面，钝角劈锥曲面体则是由旋转双曲面的一支所成，而所谓椭球体即旋转椭圆而得.全书共含 32 个命题.开篇给出了圆锥截段与圆柱截段的定义之后给出了两个引理，其中之一是：如果一递增算术序列 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的公差为其中最小项 A_1，则 $2(A_1+A_2+\cdots+A_{n-1})<nA_n<2(A_1+A_2+\cdots+A_n)$.阿基米德用穷竭法证明了许多漂亮的命题，如命题 5：“若 AA' 和 BB' 分别为一椭圆的长、短轴，d 是任一圆的直径，则椭圆与圆的面积之比等于 $AA'\cdot BB'$ 与 d^2 之比.”此定理相当于给出了用椭圆长、短轴表示的椭圆面积公式.命题 19 和命题 20 为：“已给一旋转抛物体或一双曲线旋转体由一平面截取所得的截段，或一旋转椭圆体由一平面截取所得的小于其一半的截段，那么可以在截段内内接一立体图形和在其外外接一立体图形(立体图形由等高的圆柱或圆柱截头组成)，使外接图形与内接图形的体积之差小于任一已知立体.”这一结果是此类问题运用穷竭法的基础，其中蕴含了原始的积分思想.紧接着证明了如下重要结论，即命题 21 和命题 22：“旋转抛物体任一截段的体积是同底同轴圆锥或锥台体积的二分之三.”命题 24：“若以任意两平面截一旋转抛物体得两截段，则其体积之比等于它们轴的平方之比.”对于双曲线旋转体及椭球体，也有类似结果(命题 25—32).

《论劈锥曲面体与回转椭球体》不仅给出了许多

关于由圆锥曲线旋转所成立体的体积的有趣结果，而且还含有他在圆锥曲线方面的研究结果，显示了阿基米德处理此类问题的高度技巧. 在对命题的严格证明中所采用的穷竭法是对欧多克索斯方法的发展. 欧洲中世纪以后，对阿基米德著作的研究和改进是发明微积分的主要源泉.

圆锥曲线论(Conics)　古希腊数学著作. 希腊数学家阿波罗尼奥斯(Apollonius,(P))著. 作者与欧几里得(Euclid)、阿基米德(Archimedes)常被合称为古希腊亚历山大前期的三大数学家. 本书原共8卷，卷Ⅰ—Ⅳ的希腊文本及Ⅴ—Ⅶ的阿拉伯文本被保存了下来，最后一卷散失了，但其中一些内容的思想方法可以从帕普斯(Pappus,(A))给出的一些引理中看到. 该书的写作风格与欧几里得、阿基米德的著作一脉相承. 在阿波罗尼奥斯之前，希腊数学家曾对圆锥曲线进行了研究，但当时三种曲线要分别由三种不同截法得到. 阿波罗尼奥斯则做了综合统一处理，他只依据同一个圆锥的截面便得到三种圆锥曲线. 这种新方法与旧方法相比有许多优点：

1. 所有三种曲线都可以用面积贴合的方法来表示.

2. 由他的方法立即可进行斜交贴合.

正由于此，可以认为《圆锥曲线论》开创了圆锥曲线的现代研究.

《圆锥曲线论》第一卷首先给出了圆锥曲线的定义. 在介绍了圆锥曲线的基本性质之后，证明了关于共轭直径的一些简单事实. 第二卷开头给出了双曲线渐近线的作法和性质，然后引入双曲线的共轭，并证明它与所给双曲线具有相同的渐近线，之后说明如何求一圆锥曲线的直径. 第三卷论述关于切线所成的图形的面积的一些定理，并论述了极点和极线的所谓调和性质. 第四卷介绍极线的其他性质，讨论了各种位置的圆锥曲线之间可能有的交点的数目，这一点是前人没有论述过的. 总之，前四卷除个别内容之外基本上是前人成果的集大成，只是在论述上更加全面和具有一般性，其余几卷则是更加深入的研究. 第五卷有许多新颖和独特之处，论述了从一特定点到圆锥曲线所能作的最长和最短的线. 第六卷讲述合同圆锥曲线、相似圆锥曲线及圆锥曲线弓形，指出如何在一给定的直角圆锥上做出与一已知圆锥曲线相等的圆锥曲线. 第七卷介绍了有心圆锥曲线两共轭直径的性质，并把这些性质与轴的相应性质进行比较. 第八卷的内容大概是关于怎样求出有心圆锥曲线的直径，使其满足一定条件.

《圆锥曲线论》一书是古代关于圆锥曲线研究的登峰造极之作，它将圆锥曲线的性质网罗殆尽，使得后人几乎没有再插手的余地. 在这方面直到公元17世纪才有所突破，对它的研究大大促进了坐标几何的诞生.

度量论(Metrica)　古希腊数学著作. 希腊数学家、测量学家、机械工程师海伦(Heron,(A.))著. 该著作过去一直被认为是失传了，直到1896年，舍内(Schöne,R.)在君士坦丁堡(今土耳其伊斯坦布尔)发现了它的手抄本，并于1903年出版.

《度量论》共分为三卷. 第一卷讨论了平面图形和普通立体表面面积，每一情形都以数值例子开始，并提供了形式的几何证明. 海伦从矩形和三角形开始，在命题Ⅰ和命题8(第一卷命题8)中给出了求三角形面积的著名的“海伦公式”，即

$$A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

实际上海伦并非该公式的发现者，根据阿拉伯数学家比鲁尼(al-Bīrūnī)的记载，此公式早已为阿基米德(Archimedes)所发现. 这一公式后来也被印度和中国数学家独立得到. 在具体运用该公式时，出现了求无理根的问题. 海伦对此采用了近似公式. 在命题Ⅰ和命题8中，设 $N=a^2\pm r$，则

$$a_1=\frac{1}{2}\left(\frac{N}{a}+a\right)$$

是 $\sqrt{N}$ 第一个近似值，

$$a_2=\frac{1}{2}\left(\frac{N}{a_1}+a_1\right)$$

是第二个更精确的近似值. 他能反复利用这一关系求得越来越精确的近似值. 其后，海伦通过将一般直线图形剖分为矩形和三角形，从而求得其面积. 第一卷命题17—25，讨论了从3到12条边的正多边形，有些情形的处理与巴比伦人的方法无异. 在讨论了圆和圆环之后，海伦广泛讨论了圆的截段(不是扇形)的面积，提供了三个公式，其中两个为当时已知的，另一个是他自己发现的. 对于椭圆、抛物线的面积及圆锥、球等立体的表面积，海伦给出了一些近似公式，内容并未超过阿基米德的结果. 第二卷讨论了立体图形的体积. 从圆锥和圆柱开始，他处理了以各种直线形为底面的棱柱. 之后讨论了五种正多面体. 第三卷处理了将平面和立体图形按一定比例分割的问题，其风格及内容与欧几里得(Euclid)的《论图形的分割》非常相似，其中用到求立方根的近似公式.

海伦的工作反映了亚历山大里亚时期希腊数学的特点，具有重要的历史意义. 他把严密的希腊几何学风格与巴比伦、埃及数学中的近似方法融为一体，毫不顾忌地给出各种精确的和近似的有用结果，为实际应用提供了方便. 因此可以说，海伦是他所处时代的一位优秀的应用数学家. 更重要的是海伦用算术方法提出和解决了代数问题. 他的工作促进算术和代数脱离几何学而成为独立的学科.

算术入门(Introduction to Arithmetic)　古希腊数学著作. 希腊数学家、哲学家尼科马霍斯(Nico-

machus,(G))著.这是古希腊数学中第一本完全脱离几何讲法的算术(即数论)书,对算术成为一个独立学科起了重要作用.它对于算术的重要性可以与欧几里得(Euclid)的《几何原本》对于几何的重要性相比,它成为此后一千年间的标准算术课本.尼科马霍斯属于毕达哥拉斯学派,他在哲学思想和数的理论方面都继承了毕氏学派的衣钵,使已趋衰亡的毕氏学派的传统重新活跃起来.他强调算术是各科之母,认为这"不仅是因为我们说它在造物主的心中先于其他一切而存在……而且也因为它本来就是存在较早的……"毕氏学派关于数的神秘现象在他的著作中得到全面反映.

《算术入门》共分 2 卷,其主要内容是早期毕氏学派在算术方面的工作.前面有 6 章致力于阐述数学的哲学重要性,之后考察了数本身,论述了相对数、平面数、立体数、比例.他给出了几种数的定义,将数分为奇数和偶数,给出了定理:任何整数都等于其前后两整数之和的一半.他将偶数进行了分类(偶乘偶、奇乘偶、偶乘奇),并将奇数分为素数、合数和相对数.他认为数的基本关系可分为相等和不相等,后者又分为大于或小于.第一卷最后归结出一个一般原理,据此,任何形式的比例不等式都可由三个等式产生.第二卷首先给出了倒换原理,接着详细讨论了正方形数、立方数和多边形数.他将比例分成不连续和连续的两种,划分了 10 种类型,与欧几里得在《几何原本》中的做法不同.尼科马霍斯没有给出演绎证明,而是用一些特殊的数为例说明他的原理.本书从思想内容上讲并无独到之处,大部分是前人成果的汇编,但也包含作者本人的一些发现.例如,他发现相继几个奇数之和是一个立方数.他比毕氏学派的早期成员更能进一步看出一些一般性质,如他说第$(n-1)$个三角形数加上第 n 个 k 角形数会得出第 n 个$(k+1)$角形数.又如第$(n+1)$个三角形数加上第 n 个正方形数得出第 n 个五角形数等.用现代的记号,即

$$\frac{n(n-1)}{2}+n^2=\frac{n}{2}(3n-1).$$

再如,第 n 个三角形数、第 n 个正方形数、第 n 个五角形数等,形成一个递增算术序列,其公差为第$(n-1)$个三角形数.

《算术入门》改变了当时希腊数学的状况,使算术而不是几何流行于亚历山大里亚时期.该著作后来在欧洲有多种译本.

天文学大成(Almagest) 古希腊数学著作.希腊亚历山大里亚时期的天文学家、数学家托勒密(Ptolemy)著,是托勒密的主要天文学著作.其希腊原名"Μαθηματικη Συνταξις",意为"数学(即天文学)汇编",其后被非正式地称为"大汇编",大约是为了与此前的一部关于初等天文学的希腊著作"小天文学汇编"区别.阿拉伯人将其译成"almajistī",这便成为后来中世纪拉丁译文的"almagesti"或者"almagestum"的来源.

《天文学大成》共 13 卷,是一部囊括了古代全部数理天文学知识的巨著,其中天文学和三角学是混在一起的,内容则全部具有数学性质,其基本点是地球中心说.托勒密假定读者只懂得欧几里得几何学和一些基本的天文学概念.从第一原理出发,通过必要的宇宙论和天文学知识工具,表述了古代所知道的一些天体(太阳、月亮、水星、金星、火星、木星、土星)的运动理论,并解释了与它们相关的各种现象,如日、月食等.对每一种天体,托勒密又描述了这些现象的类型,为之设计了适当的几何模型,又从一些观测数据中推导出其直径数值,最后制作了一些表,使人们能够确定它们在指定日期的运动或现象.

《天文学大成》的第一卷主要讲述球面三角学,这是最具有数学兴趣的一卷,其余各卷主要讲天文学.他的目的是想把天文学建立在"不容置辩的算术和几何方法"的基础之上.托勒密在第一卷的第 9 章一开头就计算圆弧所对的一些弦的长,从而充实了希帕索斯(Hippasus,(M))和门纳劳斯(Menelaus,(A)的工作.他将圆周分成 360 份,直径分为 120 份,然后他提出:给定一弧为 360 份中的若干份,求相应弦的长.他先计算了 36°弧和 72°弧所对应的弦,然后得到 144°弧的弦长.他证明了相当于 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$ 这样的关系式.接着托勒密证明了一引理(现称为托勒密定理):给定圆的任一内接四边形 $ABCD$,则有

$$AC\cdot BD=AB\cdot DC+AD\cdot BC.$$

其次,托勒密指出怎样从圆的任一给定弦,求出相应半弧所对的弦,用现代术语这就是从 $\sin A$,求 $\sin(A/2)$.他还给出了相应于现在 $\sin(A+B)$ 和 $\sin(A-B)$ 的化积公式.利用这些技巧,他把从 0°到 180°间所有相差为$(1/2)^\circ$的弧所对应的弦都算出并列成表.这是第一个三角函数表.然后托勒密着手(在第一卷第 11 章里)解决需要求出球面大圆上的一些弧的天文问题,这些弧是球面三角形的边.为了定出这些弧,托勒密证明了球面三角学中的一些关系式.他证明了在 C 为直角的球面三角形中,记 a 为 A 的对边,则有(用现代记法)

$$\sin a=\sin c\sin A;$$
$$\tan a=\sin b\tan A;$$
$$\cos c=\cos a\cos b;$$
$$\tan b=\tan c\cos A.$$

当然,这里的各种三角函数在托勒密的著作中都是弧的相应弦.

《天文学大成》基本上将三角术定了型,并于此

后一千多年间保持了不变. 虽然托勒密在此著作中讲的三角术主要是球面三角,但该著作实际上也奠定了平面三角学的理论基础,因而该书不仅在天文学史,而且在数学史上也具有重要的意义. 该书于 8 世纪末传入阿拉伯世界,数次译成阿拉伯文,12 世纪以后又传入西欧.

算术(Arithmetica)　古希腊数学著作. 希腊数学家丢番图(Diophantus)著. 该书序言中记载共有 13 卷. 长期以来,人们都以为只有雷格蒙塔努斯(Regiomontanus,J.)于 1464 年在威尼斯发现的前 6 卷希腊文手抄本保存了下来,但 20 世纪 70 年代初又在伊朗东北部的马什哈德发现了 4 卷阿拉伯文译本.

《算术》是一部问题集,它显示了作者在不定分析方面的高超技巧. 丢番图使问题的求解完全脱离了几何形式,这与欧几里得时代的希腊经典大异其趣,在希腊数学中独树一帜,对后来的阿拉伯数学、文艺复兴时期的意大利数学乃至整个欧洲数学产生了巨大的影响. 也为包括韦达(Viete,F.)、费马(Fermat,P. de)、高斯(Gauss,C. F.)等在内的许多数学家提供了创作源泉. 在数学史上,《算术》对代数学、数论的发展产生的影响,可与《几何原本》对几何学发展的影响相比,是数学史上一部重要经典著作.

《算术》并不是一部毕达哥拉斯学派意义上的理论算术方面的著作,它处理的大部分内容可归入代数范围,解答实际问题所使用的是计算算术(logistic). 丢番图引入了代数符号,用$\triangle^{\gamma}$ 表示 x^2(x 表示未知数),K^{γ} 表示 x^3,$\triangle^{\gamma}\triangle$表示 x^4,$\triangle K^{\gamma}$ 表示 x^5,$K^{\gamma}K$表示 x^6;未知数只简称为"数"('αριθμός),用 s 形状的符号 S 表示之. ↑表示减号,没有加号;因为没有括号,所以在一个式子中负项都放在后面. 有了这样一些符号,方程式的表示便变得简短易懂,如 $630x^2+73x=6$ 便表示为$\triangle^{\gamma}\ \overline{\chi\lambda}S\ \overline{o\gamma}$'ισ. $\mathring{M}\overline{C}$(Ⅵ,8). 式中利用了"等于"('ισos)一词的缩写. 这样,丢番图迈出了从文辞代数向符号代数发展的重要一步.

《算术》中的问题既有确定问题,又有不确定问题;既有用代数方程解的,也有用代数不等式处理的. 第一卷(及第二卷问题 1—7)是有关一次与二次方程的确定问题,第二卷及以后各卷只包括不定问题,从二次方程开始,到第四卷便涉及高次方程,这些方程通过巧妙地选择数值便化归为低次的. 本书主要内容——不定分析的大量问题大体上可分为以下几类:

Ⅰ. 将多项式表示为平方数.

1. 一个方程一个未知数.

(Ⅵ,18) $ax^3+bx^2+cx+d=u^2$.

一个方程两个未知数.

(Ⅴ,7,引理 1) $xy+x^2+y^2=u^2$.

一个方程三个未知数.

(Ⅴ,29) $x^4+y^4+z^4=u^2$.

2. 两个方程一个未知数.

(Ⅱ,11) $\begin{cases}a_1x+b_1=u^2,\\a_2x+b_2=v^2.\end{cases}$

3. 三个方程三个未知数.

(Ⅳ,19) $\begin{cases}xy+1=u^2,\\yz+1=v^2,\\xz+1=w^2.\end{cases}$

4. 四个方程四个未知数.

5. 其他变化,如Ⅴ,5,Ⅳ,20 等.

Ⅱ. 将一多项式表示为立方数.

(Ⅳ,26) $\begin{cases}xy+x=u^3,\\xy+y=v^3.\end{cases}$

Ⅲ. 求两多项式,其一表为平方数,另一表为立方数.

(Ⅵ,21) $\begin{cases}x^3+2x^2+x=u^3,\\2x^2+2x=v^2.\end{cases}$

Ⅳ. 将一数分解为几部分.

(Ⅴ,13) $10=x+y+z$,且满足

$x+y=u^2,y+z=v^2,z+x=w^2$.

Ⅴ. 将一数分解为一些平方数的组合.

(Ⅱ,10) $60=x^2-y^2$.

Ⅵ. 其他形式的问题.

丢番图解决问题的过程中,并未提出一般方法,而是对每个问题使用特定的技巧. 我们可以看出他至少使用了如下几种方法:

1. 对一次与二次方程,丢番图具备解它们的基本技巧. 对方程组,他能利用第一个方程将其中之一未知数表出,然后代入第二个方程求解.

2. 减少未知数的数目,这通常是由取定数来进行的.

3. 将方程降阶.

4. 利用已知结果.

5. 限定法.

如求得 $80<(8x)^2<128$,则$(8x)^2=100$.

6. 倒推法.

《算术》的部分问题属于数论范围,这些问题在 17 世纪得到广泛研究,从而建立起近代数论. 费马阅读巴歇(Bachet de M. C. G.)注释的希腊-拉丁文对照本,在其书页的空白之处写下了著名的"费马大定理"(或费马猜想). 由此引发出对该问题的长期研究. 为了纪念丢番图,现在对于具有整系数的不定方程,如果只考虑其整数解,就称丢番图方程. 但丢番图的解答并不要求是整数,只限于正有理数;他排除方程的负根,虽然他已知道负数的运算法则. 此外,丢番图的工作与巴比伦人的数学性质相近,但其真正来源至今仍然是一个谜.

数学汇编(Mathematical Collection)　古希腊数学著作.希腊亚历山大里亚后期的数学家帕普斯(Pappus,(A))著.在此著作中,作者把他以前从希腊古典时期到亚历山大里亚时期的希腊优秀数学著作精心予以整理、加以阐释和评注,并附了它们的历史发展过程和一些原始材料,从而使许多珍贵的希腊数学著作得以保留下来,其中不乏帕普斯本人的创见.该书是研究希腊数学史的重要原始资料.

《数学汇编》共含 8 篇,实际上覆盖了希腊几何学的全部领域,其每一篇都有系统的序言,指明所论课题的内容及其范围,对特定问题帕普斯有时给出不同的证明.第Ⅰ篇及第Ⅱ篇的部分章节已失传,残留的第Ⅱ篇从命题 14 开始,阐释了阿波罗尼奥斯(Apollonius,(P))的大数系统,推测第Ⅰ篇也是讲算术.第Ⅲ篇共有 4 节,第 1 节论述了在两已知线段中间如何求两比例中项的问题;第 2 节研究了算术平均、几何平均和调和平均理论;第 4 节讨论如何把 5 种正多面体内接于一个球内,其方式不同于《几何原本》第 13 卷.第Ⅳ篇共 5 节,第 1 节给出了一些互不相关的命题,其中头一个是毕达哥拉斯定理的推广;第 2 节讨论内接于一名为“鞋匠刀”的图形中的圆的关系;第 3 节讨论化圆为方;第 4、5 节论述了三等分角问题,利用了螺线、蚌线和割圆曲线.第Ⅴ篇论述等周问题,在前言中帕普斯赞扬了蜂房的巧妙构造;在第 1 节中他给出了芝诺多罗斯(Zenodorus)关于等周问题的一些结果;第 2 节他比较了具有相同表面积的立体的体积,表明球的体积比具有相同表面积的任何圆锥、圆柱或正多面体的体积都大.第Ⅵ篇内容属于天文学.第Ⅶ篇在《数学汇编》各篇中最为引人注意,它对近代数学有很大影响,其中命题 130 所叙述的结论用今天的语言来说就是:若一完全四边形的六条边(四边及两对角线)与一直线相交的点有 5 点固定,则第 6 点也固定;命题 131 相当于这样一定理,即在每个四边形中,一对角线被另一对角线及两组对边交点的连线分割成调和比;命题 139 给出今日的帕普斯定理:若 A、B、C 是一直线上三点,而 A'、B'、C' 是另一直线上三点,则 AB' 与 $A'B$、BC' 与 $B'C$,以及 AC' 与 $A'C$ 分别相交的三点共线.第Ⅶ篇所载的所谓帕普斯问题曾极大地推动了笛卡儿(Descartes,R.)的坐标几何学研究.该问题的叙述如下:在平面上给定三条直线,求所有这样的点的位置(即轨迹),使从这点作三条直线各与一条已知线交于已知角,在所得的三条线段中,某两条的乘积(指长度之积)与第三条线段的平方成定比;如果给定四条直线,画法同上,但要求所得的四条线段中某两条的乘积与其余两条的乘积成定比;若是已知五条直线,则要求所得的五条线段中,某三条的乘积与其余两条的乘积成定比;当所给定的直线多于五条时,作法照此类推.帕普斯问题刺激了新解析几何方法的诞生.牛顿(Newton,I.)的《自然哲学的数学原理》中有些问题也是由帕普斯问题所引起的.本篇还讨论了平面图形绕一固定轴旋转所产生的立体体积问题,后来为古尔丁(Guldin,P.)重新独立发现,因而有时称为帕普斯定理,有时称为古尔丁定理.第Ⅷ篇主要研究力学问题,同时给出了一些具有几何意义的命题.

阿耶波多历数书(Āryabhaṭīya)　古印度数学著作.印度数学家、天文学家阿耶波多第一(Āryabhata Ⅰ)著.该书写于公元 499 年.公元 10 世纪时印度还有一位数学家阿耶波多(Āryabhata),为防混淆,称本书作者为阿耶波多第一.这部著作是现存最早的冠以个人作者姓名的印度数学与天文学著作.

《阿耶波多历数书》共有诗 121 行,分为四部分.第一部分 13 行为引言,其中 10 行以非常简略的形式给出了阿耶波多第一的天文系统中最重要的数据.他采用了特殊的字母符号,如给出地球的直径是 1 050 尤加那(yojana),太阳直径为 4 410 尤加那,月亮直径是 315 尤加那,还给出了太阳系中其他行星的直径.第二部分论述数学,共 33 行.第三部分共 25 行,有关计时与行星模型,属于天文历法内容.第四部分共 50 行,是关于球的测量.本书主要内容涉及:记数法;整数的运算法则;自然数平方、立方等求和公式;分数约分和通分法则;三率法、算术序列、三角垛等算术问题;假位法、逆推法、特殊的线性方程组解法及一次不定方程(组)解法;建立“库塔卡”算法(粉碎法)解一次不定方程;从利息问题引进的二次方程求根公式;直线形面积公式;还明确提出了勾股定理,并借此解决在弓形中弦矢关系及相交两圆的弦矢关系问题中.阿耶波多第一对希腊人的三角学做了两项改进:

1. 他把半弦与全弦所对弧的一半相对应,他这种关于正弦的观点为以后所有印度数学家和阿拉伯数学家所采用.

2. 他把半径的 3438 分之一作为单位.

阿耶波多第一计算了正弦和余弦表.他提出圆面积等于半周乘半径,并给出圆周长的计算方法,该方法相当于取圆周率 $\pi \doteq 3.1416$.对于几何立体也提出了一些体积公式,其中关于球和四面体的体积公式都是错误的.关于天文学,他提出,地球是运动的,它有自转,这与印度传统天文学主张是背道而驰的,因而这一大胆主张受到了他以后的印度天文学家的激烈批判.

《阿耶波多历数书》叙述简略,是一本描述性的概论,给出了阿耶波多体系的最显著的特点.自阿耶波多第一之后,历代印度数学家对它多有评述.大约

在公元 800 年左右，该书被译成阿拉伯文，因而该著作对印度和阿拉伯数学与天文学产生了相当大的影响.

婆罗摩笈多历算书(Brahmasphut asiddhānta) 古印度数学著作. 印度天文学家、数学家婆罗摩笈多(Brahmagupta)著. 于公元 628 年写成. 全书共 24 章，主要为数理天文学内容，其中有两章专论数学. 第 1、2 两章为关于行星的经度问题；第 3 章为有关周日运动的三个问题；第 4 章论述月食；第 5 章论述日食；第 6 章有关行星的偕日升落问题；第 7 章论述新月；第 8 章论述月亮的阴影；第 9 章行星会合问题；第 10 章有关行星与恒星的会合；第 11 章是对前人天文学著作的评述；第 12 章专论数学；第 13—17 章分别为第 1—5 章及第 7 章的补充；第 18 章专论代数问题；第 19 章关于磬折形；第 20 章关于量器问题；第 21—23 章有关仪器与度量；第 24 章是本书的一个摘要.

第 12 章名为“算术”(Gaṇitādhyāya)，实际上除了关于零和负数的运算法则之外，还涉及三角形、四边形的一些几何知识以及属于代数内容的二次方程问题. 婆罗摩笈多在印度最早使用了负数，他用负数表示欠债，并且提出了负数的四则运算法则. 在几何学方面，他得到两个定理：

1. 圆内接四边形的面积公式.
2. 给出了四边形对角线的计算公式.

第 18 章名为“库塔卡法”，研究不定方程问题，给出了求解不定方程的“库塔卡法”，这一方法类似于辗转相除法. 婆罗摩笈多还研究了二次不定方程 $Du^2+1=t^2$(D 为非平方整数，即佩尔方程)，得到一些结果，后人称之为婆罗摩笈多推论. 他还强调了代数学的重要性.

《婆罗摩笈多历算书》对印度后世天文学与数学产生了很大影响. 婆什迦罗第二(Bhāskara Ⅱ)的《天文系统极致》一书的第三部分中的许多内容便取自此书. 在曼苏尔王朝时期(公元 753—774 年)从印度到巴格达的使者将《婆罗摩笈多历算书》带入阿拉伯国家，并译成阿拉伯文，被阿拉伯学者广为学习和研究. 印度记数法及其算术由此传入阿拉伯国家，对阿拉伯数学的发展起了推动作用. 据传，花拉子米(al - Khowārizmī)的《印度计数法》一书便是根据婆罗摩笈多的著作写成的.

代数学(al - Kitāb al - mukhtaṣar fī ḥisāb al - jabr wa'l - muqābala) 古阿拉伯数学著作. 伊斯兰数学家、天文学家花拉子米(al - Khowārizmī)著. 阿拉伯原文书名直译为《利用还原与对消运算的简明算书》. 该书 1183 年被译成拉丁文传入欧洲. 比较流行的一种说法，认为西文中“代数学”(英文 Algebra)一词是由阿拉伯文的拉丁转写 al - jabr 演变而来，后渐称该书为《代数学》. 这是历史上使用这一名称的最早的代数著作. 一般认为该著作是近代意义下的代数学的真正肇始之作. 书名中包含了两种运算：al - jabr 原意为“还原”，意指从方程中消去负项的过程，实即移项；而 al - muqābala 意为“对消”，指从方程两端消去相同的正项的过程，即合并同类项. 这些正是解方程中对方程变形的基本代数运算.

作者在前言中说明了《代数学》的目的，意在提供“算术中最简单最有用的东西”，考虑了人们经常遇到的如遗产继承、财产分配、土地测量、几何计算等各种各样问题. 全书由三部分组成. 第一部分讲述了现代意义下的初等代数；第二部分讲述了各种实用算术问题；第三部分列举了大量有关遗产继承的各种问题. 全书未使用符号，而是用语言叙述. 第一部分中只讨论了一次和二次方程. 根据花拉子米的方法，所有他提出的问题都可化归为六种标准形之一，这六种类型的方程如下(用现代符号表示)：

$$ax^2=b,\ ax=b,\ ax^2+bx=c,$$
$$ax^2=bx,\ ax^2+c=bx,\ ax^2=bx+c,$$

其中 a、b、c 均为正整数. 他给出了每一种方程的解的法则. 对于一般方程 $x^2+px=q$，他相当于给出了公式

$$x=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}-\frac{p}{2}.$$

花拉子米还对二次方程的解法给出了几何证明. 如对 $x^2+10x=39$，他给出的证明，事实上就是配方法. 如第一种证明是在边长为 x 的正方形的四条边上向外作另一边长为 x 的 10/4 的矩形，再把该图补充为边长等于 $x+5$ 的正方形. 两种方法都是利用已知方程求出大正方形之面积，然后开平方，求得一边长，再求出根来.

《代数学》是受到了希腊数学，乃至印度数学的影响. 该书通俗易读，联系实际，流传久远，它不仅对阿拉伯数学，而且对欧洲数学的发展产生了深远的影响. 花拉子米因之有“代数学之父”的尊称.

天文系统极致(Siddhāntaśiromaṇi) 古印度数学著作. 印度数学家、天文学家婆什迦罗第二(Bhāskara Ⅱ)著. 作者为 12 世纪印度最卓越的数学家和天文学家，也是古代印度最后一位重要数学家. 该书用散文的形式写成，通常认为它包括四部分，其前两部分为数学内容，后两部分为天文学内容.

第一部分为“丽罗娃蒂”，为“美丽”之意，传说为婆什迦罗第二之女儿或妻子之名，作者以此为篇名，有纪念之意. 这一部分共有 13 章. 第 1 章为所用词项的定义；第 2 章讲述算术运算，包括整数、分数、平

方根和立方根等的计算；第 3 章介绍了一些方法，如假位法；第 4 章涉及一些实用问题，如利率之类；第 5 章是关于算术级数与几何级数的问题；第 6 章是平面几何内容，如平面图形面积的计算；第 7—10 章属于立体几何；第 11 章讲述磬折形问题；第 12 章属于代数内容，讲述求解一次不定方程的库塔卡法(该法实质同辗转相除法)；第 13 章为数字组合问题.

第二部分名为“求根”，属于代数内容，共 12 章. 第 1 章讲述正负数法则；第 2 章专门处理关于零的运算问题；第 3 章关于未知数；第 4 章关于根式问题；第 5 章讲述库塔卡法，同第一部分第 12 章内容；第 6 章研究二次不定方程；第 7 章给出了一些简单方程的例子；第 8 章解二次方程；第 9 章研究含有多个未知数的方程；第 10 章处理具有多个未知数的二次方程；第 11 章关于未知数的运算；第 12 章是关于作者及其著作的介绍.

第三部分由 12 章组成，细目如下：第 1、2 章行星经度；第 3 章周日运动；第 4 章朔望；第 5 章月食；第 6 章日食；第 7 章行星纬度；第 8 章行星的偕日升落；第 9 章新月；第 10 章行星的会合；第 11 章行星与恒星的会合；第 12 章关于太阳与月亮的一种现象.

第四部分由 13 章组成，涉及行星理论及天文仪器等内容.

《天文系统极致》是古代印度数学的登峰造极之作. 作者集婆罗摩笈多(Brahmagupta)以来印度数学之大成，在无理数的处理、解不定方程等方面取得了很高的成就. 婆什迦罗第二倍受同时代人及后世学者的推崇，其著作在印度产生了很大影响. 自他之后，印度的数学和天文学便日趋衰微，直至近代才得以复兴.

算法之书(Liber abbaci)　中世纪欧洲数学著作，曾被译作《算盘书》. 意大利数学家斐波那契(Fibonacci，L.)著. 出版于 1202 年. 作者是中世纪西方第一个大数学家，早年随父经商，游历甚广，熟悉不同国家在商业上使用的算术体系. 他回国后把在各地学到的数学知识进行比较和总结，写出该书. 这是在欧洲介绍印度-阿拉伯数码和阿拉伯数学的最早的著作，对后世数学家如帕乔利(Pacioli，L.)、塔尔塔利亚(Tartaglia，N.)等人有很大影响.

《算法之书》共有 15 章，可分为 4 部分. 第一部分(第 1—7 章)中，斐波那契首先介绍了印度-阿拉伯数码，说明利用它们记数是很方便的，之后通过大量的示例给出了整数四则运算的方法. 最后引入许多符号表示分数，如用

$$\frac{1\,1\,1\,5}{5\,4\,3\,9}$$

表示

$$\frac{5}{9}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\frac{5}{9},$$

并介绍了分数运算方法. 这部分中有许多乘法表、素数表等. 第二部分(第 8—11 章)包括了许多有关商业的问题，例如货物的价格、利润计算，利息、工资的计算等，还较详细地讲述了如何将新的记数制度和运算法则运用到上述问题的计算中去，其中有一问题与中国数学中的“百鸡问题”相同，属于不定分析问题. 第三部分(第 12 和 13 章)论题广泛，包括了许多类型，但大部分是数学游戏，其中有“蓄水池问题”(一只蜘蛛在池壁上爬，每天前进若干步，每夜又倒退若干步，问多少天它可以爬出水池). 还有来自埃及数学的著名问题(可以表述为 $ax \pm b/cx = s$ 的形式). 另一类为“运动问题”，包括追及和相向运动，许多问题中，速度并非常数，而是算术地增加，所以在第 12 章开头给出了求级数和的公式. 有一类问题属于“给与取”问题，有一个简单的例子导致如下方程组

$$\begin{cases} x+7=5(y-7), \\ y+5=7(x-5). \end{cases}$$

有些则是属于不定分析的. 此外，书中还有其他一些问题值得一提，如中国剩余问题“大衍求一术”，几何级数求和，古埃及的“七个老妇”问题(求 $\sum_{i=1}^{n} 7^i$)，象棋问题(求 $\sum_{i=0}^{64} 2^i$)，以及兔子问题(1228 年修订版中添加). 兔子问题的解导致著名的斐波那契数列，通项为

$$K_n = K_{n-1} + K_{n-2}.$$

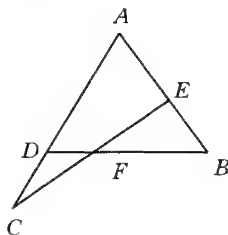
有关斐波那契数列的数学理论，后来得到深入发展，在数论、优选法等许多方面得到应用. 20 世纪 60 年代，美国创刊《斐波那契季刊》. 在第 13 章中使用了“假位法”和“双假位法”，解决了一次和二次方程. 斐波那契对许多问题给出了两种或更多解法. 第四部分(第 14 和 15 章)表明斐波那契是应用代数方法的大师，也是欧几里得(Euclid)的卓越的学生. 第 14 章致力于开方运算，他认为《几何原本》第 Ⅱ 卷中的命题是他的方法的证明. 他使用了逼近公式，如 $\sqrt{A}=\sqrt{a^2+r}$ 的第一个近似值为 $a_1 = a + r/2a$. 尽管该书的数学内容并未超过阿拉伯人，但其例子的丰富、方法的安排，以及严格的证明都值得重视. 第 15 章末尾分为 3 部分，表明了他娴熟地运用几何与代数方法解二次方程的技巧. 第一部分是比例及其变换问题；第二部分给出了毕达哥拉斯定理的应用；第三部分是二次方程问题，表明他熟悉花拉子米(al - Khowārizmī)的工作，对未知量及其幂赋予了一些名字，但还未固定成为一种代数符号.

论完全四边形(Kashf al - qinā^c fī asrār Shakl

al－qitā[c]）　古代阿拉伯数学著作．阿拉伯天文学家、数学家、哲学家纳西尔丁・图西（Nasīr al－Din，al－Tūsī）著．作者是伊斯兰科学史上最著名和最有影响的人物之一．该著作在历史上首次不依赖天文学而发展了三角学，因而成为三角学史上的经典著作．

《论完全四边形》书名的原意是“由横截线构成的图形”，此处图形是指完全四边形．全书共分5卷．在第一卷中，纳西尔丁・图西为了三角学的需要（因为三角函数值即是线段之比，且除少数例外，都是不可公度量之比），发展了希腊数学中的比例论．他从关于比的乘积的定义开始，证明了成对的比之间的交换性，并认为每一个比都是一个数，这使数的概念得到了扩展．在第一卷第14节中，他给出了合成比的一系列性质，其中最主要的是：比 A/B 由 C/D 和 E/F 合成的充分必要条件是 $A\times D\times F$ 等于 $B\times C\times E$．第二卷论述了完全四边形，给出了与之相关的一些定理的证明．纳西尔丁・图西讨论了这种图形的各种情况．对于完全四边形 $ABCDEF$（如图），他用六种方法证明了如下等式

$$\frac{BE}{EA}=\frac{BF}{FD}\times\frac{DC}{CA}.$$



第三卷叙述了关于平面圆中的三角函数．纳西尔丁・图西定义了弧的正弦，即现今所谓对应于弧的正弦，并证明了具有同一端点的两个弧的角的正弦之比等于联结两弧其他两端点的直径所分成的线段之比．由此结论即可解决由两个弧的正弦和或差求两个弧的问题．第四卷是关于球面上的完全四边形的论述．第五卷中对球面三角形进行了分类，其中纳西尔丁・图西引入了弧的余弦、弧的正切、弧的余切、弧的正矢，以及弧的余矢等概念．证明了正弦和余弦定理．在该书中，纳西尔丁・图西第一次给出了直角球面三角形中的所有六种情形如下（用现代形式，C 是球面三角形的斜边）：

$$\cos C=\cos a\cos b \qquad \cot A=\tan b\cot C$$
$$\cos C=\cot A\cot B \qquad \sin b=\sin C\sin B$$
$$\cos A=\cos a\sin B \qquad \sin b=\tan a\cot A$$

纳西尔丁・图西还利用极三角形求解一般的球面三角形，这在数学史上是一个首创．

论各种三角形（De Triangulis Omnimodis）　欧洲文艺复兴时期的数学著作．德国数学家、天文学家雷格蒙塔努斯（Regiomontanus，J.）著，完成于1464年，但直到1533年才出版．在欧洲这是第一本使三角学脱离天文学而正式成为数学的一个独立分支学科的系统著作．

《论各种三角形》基于欧几里得几何，共分5篇．第一篇的头一部分（从定理1到定理19）讨论了量和比，其余部分给出了直角、等腰及不等边三角形的几何解，其中定理20、18、27中提到或明确使用了正弦函数．斜三角形的四种情形的解法在定理49、50、52、53中得到处理．三角学知识的系统处理开始于第二篇的定理1，这里雷格蒙塔努斯阐述了正弦定理．他利用该定理对定理4和定理5中的斜三角形进行了处理：当三角形中两角和一边已知，或两边及其一对应角已知时，三角形余下的部分便可以求得．此外，在定理12、13中，雷格蒙塔努斯提出了求三角形边长的代数解法，其中用到解二次方程．其次，定理26隐含了三角形面积的三角公式．第三篇是为第四篇做准备的初等基础，其中定理25、26、27处理了直角球面三角形，定理28—34给出解斜球面三角形的六种情形．第五篇继续解球面三角形，定理2是球面三角形中的余弦定理，用现代符号表示为

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}.$$

总之，雷格蒙塔努斯建立了三角学在平面和球面几何中牢固的基础．他的后继者哥白尼（Kopernik，M.）等人从其著作中为自己的三角学汲取了营养．由于雷格蒙塔努斯等人的工作，三角学从天文学中分离了出来，并成为一个独立的数学分支．

算术、几何、比及比例全书（Summa de arithmetica，geometria，proportioni et proportionalita）　欧洲文艺复兴时期的数学著作．意大利数学家帕乔利（Pacioli，L.）著．1494年出版于威尼斯，是作者的两部重要著作之一（另一部为《神圣比例》）．它在数学上虽然没有多少独特的创见，但却是西方继斐波那契（Fibonacci，L.）的《算法之书》之后第一本内容全面而丰富的数学著作，也是最早印刷的数学书籍之一．

《算术、几何、比及比例全书》分两部分，内容包括理论和实用算术与代数基础、意大利各共和国使用的币值、重量度量表、复式簿记法以及欧几里得几何的概述，几乎罗列了当时的所有数学知识．其材料的来源主要是欧几里得（Euclid）、托勒密（Ptolemy）、博伊西斯（Boethius，A. M. S.）、斐波那契等人的著作．书中采用了印度-阿拉伯数码，并大量采用了符号．帕乔利在书中论述了三次方程问题，认为：“x^3+mx+n，$x^3+n=mx$（m,n 是正数）现在之不可解，正像化圆为方问题一样．”该书尤为引人注意的，是在第一部分第9编“关于计算与记录”的标题下分了36章，就复式簿记进行了极为详尽的论述，被认为是关于复式簿记的最早的文献．帕乔利对当时流行的簿记知识进行了整理．他列举的簿记的特点有如下几点：

1. 账簿体系是日记账、分类账和总账三种账簿记制.

2. 分类账除了进行所谓的分类外，还有核算、统一价额的任务.

3. 盈亏核算每次都是在各项业务的终了进行，不存在商品买卖的预算和商品盘点.

4. 使用与现在不同的独特的汇总结账与预算的方法.

《算术、几何、比及比例全书》在16世纪广为流传，对当时欧洲数学的发展有相当影响. 意大利数学家卡尔达诺(Cardano,G.)在其《实用算术》(1539)中曾专辟一章，纠正帕乔利的错误(正是由于帕乔利的讨论导致数学家们的进一步研究，从而建立了三、四次方程的解法)，并向帕乔利致谢. 意大利数学家塔尔塔利亚(Tartaglia,N.)的《数量概论》(1556—1560)遵循了帕乔利著作的风格. 意大利数学家邦贝利(Bombelli,R.)在其《代数学》的引言中称，帕乔利是斐波那契之后第一位对代数学有贡献的数学家.

《算术、几何、比及比例全书》于1523年出了第2版，1543年被译成英语，从此其影响超出了欧洲大陆诸国.

大术(Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus,Ars magna)　16世纪欧洲数学著作. 意大利学者卡尔达诺(Cardano,G.)著. 1545年在纽伦堡出版. 卡尔达诺是16世纪人本主义的代表人物，也是数学史上有名的怪人. 他博学多才，精力过人，通晓医学、数学与天文学，且喜好赌博与占星术，终生狂放不羁. 他对他那个时代的一切知识倾注了满腔热情.

《大术》是卡尔达诺最重要的数学著作，尤以其中首次披露了一般三次方程的求根公式而闻名于世. 由此引起的与另一位意大利数学家塔尔塔利亚(Tartaglia,N.)的争执是数学史上有名的事件. 大约1500年左右，意大利波仑亚大学的数学教授费罗(Ferro,S.)解出了$x^3+mx=n$类型的三次方程，并把他的方法秘传给菲奥尔(Fior,A. M.). 由于1535年菲奥尔对塔尔塔利亚的挑战，卡尔达诺知悉塔尔塔利亚已经掌握三次方程的解法，于是恳求塔尔塔利亚将方法传授给他，并发誓保密. 后来当卡尔达诺肯定塔尔塔利亚的方法与费罗的方法是相同的后，便不顾他的誓约，将这一方法发表在他的《大术》之中，因而后人称此方法为“卡尔达诺公式”. 虽然卡尔达诺在书中注明了方法的出处，但由于他的失信，遭到塔尔塔利亚的激烈攻击.

卡尔达诺发表在《大术》中的方法，先以具体方程为例说明了一般方程$x^3+mx=n$(m,n为正数)的解法. 卡尔达诺引入t和u两个变量，并令

$$t-u=n \text{ 及 } (tu)=\left(\frac{m}{3}\right)^3$$

之后，他断言$x=\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{u}$. 他利用以上两个假定进行消元，得到一个二次方程，解之得

$$t=\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}+\frac{n}{2},$$

$$u=\sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{m}{3}\right)^3}-\frac{n}{2}.$$

于是便得到三次方程的一个根. 之后他利用几何方法对之进行了证明. 在书中他自始至终都给出正根和负根，但没有认真对待虚根，尽管在解方程时曾得到$5+\sqrt{-15}$和$5-\sqrt{-15}$这样的复数. 他认为它们的乘积是40，但由此认为“算术是精致而又不中用的”. 对三次方程的可约情形的讨论详细之至，但在1545年版本中他没有涉及不可约情形.

除了所谓卡尔达诺公式，《大术》中还载录了一些卡尔达诺自己的创造，反映了他对代数学的许多新思想. 如在一个一般三次方程中消去二次项的线性变换；注意到高于一次的方程具有一个以上的根；当方程的一个根已知时，对方程进行降次等. 书中还载录了费拉里(Ferrari,L.)得到的四次方程的解法. 卡尔达诺还研究了数值方程的近似解法. 他考察了方程的根与系数的关系，而在此之前人们只注重方程的求解，因此他被认为是代数方程论的先驱. 在1570年的新版《大术》中，他讨论了三次方程的不可约情形，其中卡尔达诺公式被推广到虚数.

《大术》是16世纪最重要的数学著作之一，在它出版后的几十年内，一直被认为是最好的代数学著作. 法国数学家韦达(Viete,F.)曾对它详加研究，并在代数学中引入了系统的符号，从而使代数学的发展产生了质的飞跃.

数量概论(General trattato di numeri et mi-sure)　16世纪欧洲数学著作. 意大利数学家塔尔塔利亚(Tartaglia,N.)著，共6篇，于1556—1560年间出版. 作者出身寒微，自学成材，其原名为丰坦那，因孩提时脸部受伤而引起口吃，故有“塔尔塔利亚”之称，意即“口吃者”. 塔尔塔利亚意欲仿效帕乔利(Pacioli,L.)的《算术、几何、比及比例全书》，将本书写成一本包含他的新发现的百科全书式的巨著，但他未能完成全书而去世，后半部分是在他去世后出版的.

与塔尔塔利亚的名字联系在一起的最重要的数学内容是三次方程的解法. 意大利数学家费罗(Ferro,S.)曾于16世纪头10年发现了三次方程的解法，但未发表. 1535年，塔尔塔利亚在与菲奥尔(Fior,A. M.)(费罗的学生)的竞赛中重新发现了这一解法，但也没有公开发表. 1539年3月25日，在

卡尔达诺(Cardano,G.)的恳求下，塔尔塔利亚将自己的发现告诉了他，条件是不得告诉别人.但1545年卡尔达诺在其著作《大术》中将这一方法公开了出来，并对费罗和塔尔塔利亚表示了感激.但塔尔塔利亚被卡尔达诺的行为激怒，与他的学生费拉里(Ferrari,L.)之间展开了一场数学竞赛，互相之间交换了许多包含各种问题的小册子，并于1548年8月10日在米兰大教堂进行了一场公开辩论.这些小册子不仅包括算术、几何、代数问题，而且还有地理、天文、建筑等内容，生动地反映了16世纪意大利的精密科学的状况，其中有些内容又写进了《数量概论》一书中.无论如何，三次方程的解法如今称为“卡尔达诺”公式，这是误称.在该书中还出现了“塔尔塔利亚三角形”(亦称“帕斯卡三角形”(1665)或“贾宪三角形”(11世纪)).

《数量概论》第一篇是实用算术，包含四则运算的练习和应用，例题是从实际商业贸易中选取的.第二篇主要是基于欧几里得(Euclid)《几何原本》的理论算术，研究了比例论、无理量理论、完全数等，讨论了开平方和开立方的计算，使用了近似公式

$$\sqrt{a^2+b}\approx a+\frac{b}{2a},$$

$$\sqrt[3]{a^3+b}\approx a+\frac{b}{3a(a+1)},$$

给出了“塔尔塔利亚三角形”.第三篇是实用几何学.第四篇为几何学，其中介绍了阿基米德(Archimedes)的《论球和圆柱》.第五篇研究了平面和立体几何的作图问题.第六篇是代数学方面的内容，是由作者的遗稿片断组成的，讨论了方程的解法.原想包含三次方程解法，后未竟.

砺智石(The Whetstone of Witte)　16世纪欧洲数学著作.英国数学家雷科德(Recorde,R.)著，1557年出版于伦敦.这是第一篇用英文写成的代数学著作.除此书外雷科德还撰有《技艺基础》(1543)等书.《砺智石》是作者惟一的一本没有再版的书，无疑是因为它对于伦敦的艺人来说不如《技艺基础》等书有直接的用途.《技艺基础》是雷科德最受欢迎的书，在第一版中只讨论了整数的各种运算、黄金律等，1552年扩充再版，加入了分数运算、假位法等内容，其后多次再版，在一个半世纪的时间里一直是算术教科书的楷模，最后一版出版于1665年.在此书中，雷科德首次在英语国家使用了“+”及“-”号，这是今天数学中加号与减号的原型.

《砺智石》包含有原打算写入《技艺基础》中的“算术的第二部分”，以及通过二次方程介绍的初等代数内容.它基于德文资料，特别是绍伊贝尔(Scheubel,J.)和施蒂费尔(Stifel,M.)的著作，其代数使用了德文符号.雷科德在这些符号中加入了新的符号“=”，从而使之完全变成了符号代数，这就是现在的等号的来源.作者说他所知道的最相象的两种东西是两根平行线，所以用两根平行线来表示相等.除此之外，该书还有一些值得注意的特点，如：代数长除法中零系数的运用；使用任意数检验代数运算的正确性，而不是运用逆运算来检验；以及对二次方程的处理等内容都颇为新颖.雷科德不承认方程的负根，但确实使用了负系数.所有二次方程都写成平方项等于根加上或减去一个数，或者是平方项等于一个数减去根的形式(即 $x^2=q+px$, $x^2=q-px$, $x^2=px-q$).对上述方程他给出了通常的解公式.但对于具有两正根的方程 $x^2=px-q$，他着重使用了根与系数的关系式：

$$x_1+x_2=p,\quad x_1x_2=q.$$

雷科德在该书中努力寻求适当的英文本语来代替拉丁文和希腊文的数学术语.

代数学(L'algebra)　16世纪欧洲数学著作.意大利数学家、工程师邦贝利(Bombelli,R.)著.1572年出版了他的大部分关于代数学的内容，第4、5两卷的手稿直到1923年才被发现，于1929年出版.邦贝利是意大利文艺复兴时期最后的一位数学家，他的前辈们曾将这个学科推向一个发展高潮，其中卡尔达诺(Cardano,G.)于1545年出版的《大术》一书对邦贝利影响很大.他认为除了卡尔达诺还没有人能够深入代数学这一科目.但他对卡尔达诺的表述并不满意，因此他准备写一本代数书，以清楚明了的表述使任何人都可以不借助别的书就可以掌握代数学的知识.《代数学》写于1557—1560年间，是一本系统地、逻辑地表述代数学的著作，其中邦贝利不仅综合了当时这一科目的所有知识，而且以自己的贡献丰富了它的内容.

《代数学》共分5卷.第1卷包括基本概念(幂、根、二项式、三项式)及基本运算.第2卷引入代数幂和符号，之后解一次、二次、三次及四次方程.当时邦贝利只考虑了正系数的方程.因此他必须处理大量的情形，包括5种二次方程、7种三次方程、42种四次方程.他对每一种类型的方程都给出解的法则，并用实例示之.第4、5卷是该书的几何部分.在卷4中他将几何方法应用于代数，卷5则致力于用代数方法解几何问题.在该书的前3卷中可以看到丢番图(Diophantus)著作的影响.其对不可约三次方程的处理表明邦贝利是远远超出其时代的，他的处理方式差不多正是今天的方式.卡尔达诺曾经注意到费罗(Ferro,S.)的一般法则是不能适用于三次方程的情形的，但邦贝利处理虚数的技巧使他证明了在这种情形下法则的适用性.他发现了不可约三次方程的根中出现的复数的立方根，指出复根总是伴随其共轭出现的.他给出了计算复数的公式，并给出了表

明其应用的实例. 在第 5 卷中,他还指出三等分角问题可以化为解三次不可约方程. 尽管他没有对四次方程的解有重要贡献,但他展示了费罗的公式在各种情形下的应用. 他的目的是讲解"高等算术",把代数提高到一个独立的学科的地位,将代数学与算术分离开来. 事实上,他是第一个普及丢番图著作的人. 除此之外,他对代数学的最突出贡献是他采用的符号. 他用半圆表示未知量的幂,将指数放在半圆中. 如 $\underset{\smile}{2}$表示 x^2、符号 RU 则表示根号. 他采用的符号对代数学的发展有重要意义. 第 4、5 卷表明了他对几何学的广博知识. 他不认为用代数方法得出的结果必须用几何证明,从而打破了从古希腊以来的传统. 此外,在《代数学》中邦贝利第一个用连分数来逼近平方根,并明确定义了负根.

《代数学》一书奠定了邦贝利在数学史上的地位. 荷兰数学家斯蒂文(Stevin,S.)认为"邦贝利是我们时代的大算术学家". 大约在《代数学》出版一个世纪之后,德国数学家莱布尼茨(Leibniz,G. W.)在自学数学时便采用该书作为学习三次方程的指南,用莱布尼茨的话说,邦贝利是"分析术的卓越大师".

论十进(De Thiende)　16 世纪欧洲数学著作. 荷兰数学家、工程师斯蒂文(Stevin,S.)著,1585 年在莱顿出版. 原文为佛兰芒语,同年有法文版本(La Disme)出版. 作者做过荷兰军队的军需官,对商业簿记和工程技术有贡献,实际事务的需要使他最先认识到十进制的优越性,因而竭力倡导.

在数学史上,《论十进》虽然被认为是欧洲第一本系统论述十进分数(小数)理论的书,但斯蒂文的意图却是利用十进位思想和他发明的记数符号避免分数,而以整数运算取代之. 他在该书的标题下写道:"教授商业中遇到的一切计算如何可以只使用整数而无需分数之助进行". 当时的欧洲,由于受巴比伦及希腊数学传统的影响,数学与天文学计算都是采用六十进位制,极为复杂. 斯蒂文在该书中发明的记数方法虽然看起来笨拙,但由于采用了十进位值制,因而大大简化了分数运算. 当然十进分数的发明不能归功于任何个人. 佩罗斯(Pellos)于 1492 年曾用小数点分出被除数的一位、二位或三位(当除数是 10、100 或 1000 的倍数时). 赖瑟(Reise,A.)于 1522 年印刷了一张平方根表,其中无理数计算到三位值. 最为重要的是鲁多尔夫(Rudolff,C.)于 1530 年在一张复利表中使用了符号"|"作为小数点. 但斯蒂文是第一个系统讨论十进分数及其算术的人.

在《论十进》的前言中,斯蒂文强调了十进思想的重要性. 全书篇幅很小,正文分为两部分,此外有 6 个附录. 正文第一部分给出了十进数的定义:"十进数是一种基于以十进位思想的算术,它使用通常的阿拉伯数码,其中任何数都可以写出来,利用它商业中遇到的一切计算都可以只用整数而无需分数之助进行"(定义 1). 之后给出了具体表示方式和符号. "任意已知数称为单位并有符号⓪"(定义 2). "单位的十分之一称为第一级,有符号①,第一级的十分之一称为第二级,有符号②,依此类推"(定义 3). "定义 2 和定义 3 的数称为十进数"(定义 4). 正文第二部分阐明了十进数的四则运算法则. 根据斯蒂文的记数法,2⓪3①5②7③和 $\overset{⓪}{2}\ \overset{①}{3}\ \overset{②}{5}\ \overset{③}{7}$都表示 2.357. 他分别以实例演示,利用 4 个命题规定了加、减、乘、除运算的方式. 除此之外的 6 篇附录分别讲述了十进分数在实际问题计算中的应用. 如附录 1 给出了在测量计算中的应用,附录 5 则介绍了天文计算. 斯蒂文主张应在一切度量衡和印制中使用十进制.

从斯蒂文尚还笨拙的记数法中,十进分数(小数)的原理已明显可见. 事实上,中国利用十进分数比斯蒂文早得多,但斯蒂文是在西方第一个系统论述十进分数及其算术的人,因此《论十进》对欧洲计算数学和度量衡制的影响使它在数学史上有重要的地位.《论十进》有法文(1585,1608)、德文(1965)、英文(1608,1619,等)等多种版本.

分析术入门(In artem analyticem isagoge)　16 世纪欧洲数学著作. 法国数学家韦达(Viete,F.)著,1591 年出版. 作者是职业律师,同时也是 16 世纪第一流的数学家. 本书建立了符号代数学的基础. "分析"在这里是相对于"综合"而言的. 对韦达来说,代数是发现数学真理的特设步骤,它执行了分析的过程,所以韦达把他的代数称为分析术. 在代数学中,韦达之前虽然也有一些人如古希腊数学家欧几里得(Euclid)、丢番图(Diophantus)等人曾用字母代替特定的数,但这种用法只是偶然的. 韦达是第一个有意识地、系统地使用字母的人. 他不仅用字母代表未知量(用元音表示)以及未知量的幂,而且用字母表示一般的系数(用辅音表示已知量). 据此对方程做了一般的表示,从而把代数学从求未知数的一些技巧提高到方程式理论的高度. 这是数学史上最重要的进步之一,它为代数学的进一步发展开辟了道路.

《分析术入门》共 8 章. 在该书第 1 章中,韦达对"分析"术进行了重新表述,他在帕普斯(Pappus,(A))的"理论的"分析和"问题的"分析基础上又添加了第三种,他称为"注释的"分析. 在第 2 章中,韦达在《几何原本》一些定义、定理的基础上提出了一些他自己的约定,从而为展开方程理论创造了条件. 在第 3 章中他给出了基本的"齐性原则",据之只有同类的量可以进行比较. 因而他的方程均限定为齐次的,显示出希腊数学的特征. 在第 4 章中他提出了

“类计算的典型规则”，它们对应于通常的计算中应用的四则运算法则.这里韦达把他的符号性代数称为“类的算术”(logistice speciosa)，以区别于普通的“数的算术”(logistice numerosa).他的这种区分就规定了算术与代数的分界，代数学从此成为研究一般类型的形式和方程的学问.在第5章中韦达研究了方程的基本运算，其中命题1给出了方程中移项的规则；命题2告知如何化约方程的次数；命题3介绍了将方程转化为比例形式的方法.第6章讨论了综合与分析的关系.在第7章中，韦达讨论了他给出第三种分析术的作用，这种方法被应用于数(当所求的量可以表示为数时)、长度、平面与立体(当所求的东西本身必须表示出来时).在第8章中韦达给出了一些定义，如方程是未知量和确定的量的一个比较.此外，还给出了一些规则和他的另外一部著作的纲要.

奇妙的对数表的描述(Mirifici Logarithmorum canonis descriptio,…)　17世纪初西方数学著作.苏格兰数学家纳皮尔(Napier,J.)著，1614年出版于爱丁堡.纳皮尔是对数的发明者之一，该书是关于对数的最早著作.

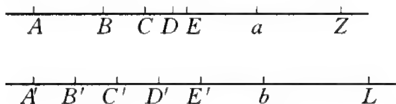
对数思想约始于1594年，纳皮尔当时的动机是寻求一种球面三角计算的简便方法，以便利天文学计算.纳皮尔的发明使计算数学产生了革命.他的思想发表在该书及他去世后出版的《奇妙的对数表的构作》(Mirifici logarithmorum canonis constructio,…)中.在纳皮尔的发明中，算术级数与几何级数的理论起着核心作用，它们的项之间的对应关系已为16世纪的许多数学家所注意.施蒂费尔(Stifel,M.)在其《整数算术》(1544)中给出了相当于

$$a^m a^n = a^{m+n},\ (a^m)^n = a^{mn}$$

的基本法则，但他只研究了离散集合的对应关系.纳皮尔的几何模型中则建立了基于连续运动的算术与几何级数的项之间的对应.设有两点沿两平行直线运动，在直线 AZ 上纳皮尔令 A 向 Z 运动，速度正比于到 Z 点的距离，考虑某一小段时间 t，设 AB，BC，CD，…分别为 t 时间内质点所通过的距离，并设在这段时间里速度不变，且取开始时速度(t 很小)，则据条件有

$$\frac{AB}{AZ}=\frac{BC}{BZ}=\frac{CD}{CZ}=\cdots$$

因而 AZ，BZ，CZ，…这些长度就形成一个几何级数.同时，令另一点与 A 同时沿另一直线 $A'L$ 匀速



运动，使得当 AZ 上的点到达 B，C，D，…时，$A'L$ 上的点分别到达 B'，C'，D'，…显然 $A'B'=B'C'=C'D'=\cdots$ 因而 $A'B'$，$A'C'$，$A'D'$，…成等差数列.纳皮尔给出对数的定义如下：设上述两质点在同一时刻分别到达 a、b 两点，则线段 $A'b$ 就定义为 aZ 的对数.纳皮尔取 $AZ=10^7$，其时数为0，则当 $n>10^7$ 时，n 的对数就小于0.用现代符号表示若 $A'b=y$，$y_0=0$，$aZ=x$，$AZ=x_0=r=10^7$，则

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-kx,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=kr,$$

其中 k 是参数，消去 k 有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{r}{x},\ \log_e x=-\frac{y}{r}.$$

纳皮尔利用他的定义，计算了一系列表，其中包括下列值：

$$10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^n\quad(n=0,1,2,3,\cdots,100);$$

$$10^7\left(1-\frac{1}{10^5}\right)^n\quad(n=0,1,2,3,\cdots,50);$$

最后是

$$10^7\left(1-\frac{5}{10^4}\right)^n\left(1-\frac{1}{10^2}\right)^m$$

$$(n=0,1,2,\cdots,20;m=0,1,2,\cdots,68).$$

显然，纳皮尔对数(记为 Nap·log)与自然对数(记为 ln)不同，它们的关系为

$$\mathrm{Nap}\cdot\log x=10^7\ln\frac{10^7}{x}.$$

1624年，布里格斯(Briggs,H.)将纳皮尔的对数改为常用对数.值得一提的是，瑞士数学家比尔吉(Būrgi,J.)曾独立地得到相当于自然对数的概念，略早于纳皮尔，但迟至1620年才发表.

测量酒桶的新立体几何(Nova stereometria doliorum vinariorum)　17世纪西方数学著作.德国天文学家、物理学家、数学家开普勒(Kepler,J.)著，1615年出版.开普勒是微积分早期的先驱者之一，他研究了许多现在用微积分解决的几何问题，得到了一种不够严密、但很有启发性的方法.据说他对体积问题的兴趣，起源于对啤酒商的酒桶体积的怀疑，《测量酒桶的新立体几何》即为此而作.

《测量酒桶的新立体几何》中主要研究求旋转体体积的方法.为此，开普勒引入无穷大和无穷小的概念，并把体积分成许多微小部分，从而建立一种“无限小元素法”，求出了近百种旋转体的体积.例如，对于所谓“规则图形”的体积，即由圆和圆的一部分绕其所在平面上一直线旋转所生成的体积.开普勒首先建立关于圆周率近似值的定理，他与阿基米德(Archimedes)一样，取 $\pi=22/7$.之后，在求圆面积的过程中，他的基本思想是以直代曲，即把圆面积看成是无限多个顶点在圆心、底在圆上的等腰三角形面积之和，这样一来，显然圆面积等于圆周长与半径

的乘积之半.类似地,在求球体体积时,他把球体积看成是顶点在球心、底面在球面上的无穷多个小锥体的体积之和.总之,开普勒采用无穷多个同维无限小元素之和来确定面积和体积.对于环状形体积,开普勒建立了定理:"任一截面为圆或椭圆的环的体积等于下述柱体体积:它的高为圆或椭圆的中心在旋转时形成的圆周长,底为环上的任一截面,即该圆或椭圆."他的证明也用局部以直代曲的方法,即把圆环切成无数多个非常薄的薄片,每个薄片近似地视为一个小的柱体,这样一来用求无限小薄片之和的方法就得到所求证的结果.开普勒还讨论了所谓"苹果形"和"柠檬形"的体积.这两个立体分别用大于半圆和小于半圆的弓形绕其弦所在直线旋转而成.开普勒统称它们为"封闭的环",他得到"一个封闭的环等于以截面圆为底、以环的中心描画的圆周长为高的圆柱体积"等.

开普勒创立的用同维无限小元素求和的积分方法,后经意大利几何学家卡瓦列里(Cavalieri,(F.)B.)发展成为"不可分元素法",从而得到一些更普遍的结果.他们的结果后经托里切利(Torricelli,E.)、沃利斯(Wallis,J.)、帕斯卡(Pascal,B.)和费马(Fermat,P. de)等人的工作而算术化,最终导致微积分学的创立.

不可分量几何学(Geometria indivisibilibus con-tinuorum nova quadam ratione promota) 17世纪西方数学著作.直译为《运用连续体的不可分量以新方式推进的几何学》,意大利数学家卡瓦列里(Cavalieri,(F.)B.)著,于17世纪30年代完成,1635年出版于波伦那.该书是积分学史上的重要文献,其中提出的方法是古希腊的"穷竭法"到牛顿(Newton,I.)、莱布尼茨(Leibniz,G. W.)的微积分的过渡.

《不可分量几何学》共有7卷.在第1卷中,卡瓦列里阐述了他的一些有关平面和立体的假定,提出了一些引理,其中最有趣的是处理平面和立体图形的切线的第一部分,引理3是分析学中的重要定理——中值定理的雏形.在第2卷中,卡瓦列里介绍了他的不可分量方法,其目的是提供一种求面积和体积的方法.他引入了"所有直线"(omnes lineae)的概念,称之为一给定图形的不可分量,并用来作为求积的工具,证明了一些关于不可分量集合的一般定理.为了处理立体图形,在本书第2卷定义2中,卡瓦列里引入了平面的集合的概念.此外,卡瓦列里给出了"所有点"、"所有横坐标"等概念,这是构成他的不可分量方法的基本概念.第2卷命题3、4给出了他的不可分量方法的基本定理,建立了面积和直线集合之间以及体积和平面集合之间的联系,并用θ表示"所有的"(omnes),l、p分别表示直线和平面,F、S表示图形,则卡瓦列里建立了如下关系:

$$F_1 : F_2 = \theta_{F_1}(l) : \theta_{F_2}(l),$$

$$S_1 : S_2 = \theta_{S_1}(p) : \theta_{S_2}(P).$$

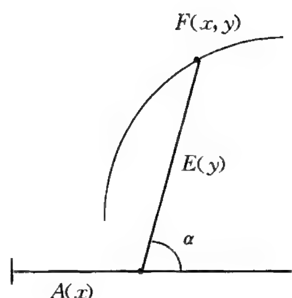
命题4含有一个结果,通常称为"卡瓦列里原理",即如果两平面(或立体)图形具有相等的高,若由平行于底且从它们到底等距的直线(或平面)组成的部分总是有相等的比,则平面(或立体)图形也具有同一比.中国的祖暅曾提出同样的原理:"幂势既同,则积不容异"(另说刘徽也曾提出).在第3卷至第5卷中,卡瓦列里将他的新方法用于获得有关圆锥曲线的求面积、体积问题.如在第3卷的前一部分的33个定理,除了求两椭圆之比外,主要是关于正方形、矩形集合与由椭圆确定的图形之间的关系的计算.这些关系在后一部分的29个原理中被用于各种立体的求积问题.为了求一直线和一阿基米德螺线围成的图形的面积,在第6卷中,卡瓦列里推广了他的"所有的"(omnes)这一概念.在第7卷中,卡瓦列里避开先前的"所有的"这一概念,给出的所谓"卡瓦列里原理"的一种新形式,运用它得到了一些相当于二次多项式积分的新的几何结果.

《不可分量几何学》共700多页,异常难读,但它受到许多17世纪数学家的重视.托里切利(Torri-celli,E.)曾称卡瓦列里开辟了一条求积问题的"皇家之路".今天,该书仍具现实意义,1940年俄译本出版,1966年全文译成意大利语出版.

平面与立体轨迹引论(Ad Locos Planos et soli-dos isagoge) 17世纪西方数学著作.法国数学家费马(Fermat,P. de)著.大约写于1629年,但直到1679年才出版.该著作使费马与笛卡儿(Descartes,R.)分享了解析几何创立者的盛誉.

费马的数学工作继承了韦达(Viete,F.)的传统,但他更进一步试图将代数与几何研究结合起来.《平面与立体轨迹引论》写作的直接动机是试图恢复阿波罗尼奥斯(Apollonius,(P))的《论平面轨迹》的内容.费马认为希腊人的研究尽管处理了数量众多的轨迹,但没有形成一般的理论.这里轨迹的意义沿用希腊人的用法,称直线和圆为平面轨迹,椭圆、抛物线、双曲线等称为立体轨迹.《平面与立体轨迹引论》尽管用希腊几何的传统风格写成,但费马认为阿波罗尼奥斯的所有轨迹都可表示成含有两个未知数的不定代数方程的形式,运用韦达的方程理论对这些方程进行分析,就可以洞悉轨迹的本质与作法.费马写道:"当两个未知量出现于一个最后的方程中时,我们就有一条轨迹,其中一未知量的端点描述出一条直线或曲线.直线是简单的、惟一的;曲线则有无穷多类——圆、抛物线、双曲线、椭圆等."如此,费马建立了方程与曲线之间的对应.费马取一固定直

线为轴，其上一定点为原点，从原点沿轴量出第一个未知量 A 的可变长度，第二个未知量的相应值为 E. 他以此为长度，从第一个未知量的末端开始并与轴成一定角（通常为直角）做出一线段，则第二个未知量的各种不同长度的末端就在 A、E 平面上产生一条曲线. 同笛卡儿一样，费马没有利用坐标系，而是采用具有一移动纵坐标的一条轴，这是坐标几何的肇始. 费马将一般二次方程



$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$$

依据系数的可能取值，分为 7 种不可约情形，表明每一种不可约方程如何定义一条曲线：$Dx+Ey$（直线）、$Cxy=F$（等轴双曲线）、$Ax^2 \pm Cxy=By^2$（直线）、$Ax^2=Ey$（抛物线）、$F-Ax^2=Ay^2$（圆）、$F-Ax^2=By^2$（椭圆）、$F+Ax^2=By^2$（双曲线）. 在每一种情形下，他证明方程包含做出曲线的一切必要数据. 由于费马的目的是想重新写出阿波罗尼奥斯的著作，他保留了希腊数学中一些限定，如齐性原则. 此外，他不使用负坐标，因而做出的曲线是不完整的.

尽管费马与笛卡儿的坐标几何本质上相同，但其表述却迥然相异. 基于曲线的方程，费马集中于曲线的几何作图问题，大量运用了韦达的代数和方程论知识. 相比之下，笛卡儿忽视作图问题，在《几何学》中致力于一种新的更高级的方程论. 为此，他们卷入了一场优先权的争论，而实际上他们所创立坐标几何的功绩都已得到历史的承认.

求极大值与极小值的方法（Methodus ad disquirendam maximam et minimam） 17 世纪西方数学著作. 法国数学家费马（Fermat，P. de）著，写于 1636 年前. 该文记述了费马利用"准等式"求极值的著名方法，是微分学前史上的重要经典文献.

费马的求极值的方法跟他的坐标几何思想一样，也是起源于将韦达（Viete，F.）的代数应用于帕普斯（Pappus，(A)）的著作《数学汇编》中的一个问题的研究. 帕普斯曾尝试将一已知线段分成数份，使部分线段所成矩形相互成最小比. 在对这一问题的代数分析中，费马意识到可以将其与二次方程联系起来. 他认为这意味着方程的常数项只能使方程只有单一的重根的特殊值. 如对于由极值问题导致的二次方程，基于它有两相异根 x、y 的假定，费马得到 $bx-x^2=c$ 和 $by-y^2=c$，因而有 $b=x+y$，$c=xy$. 费马然后考虑了一个重根，即 $x=y$ 的情形，他发现

$$x=\frac{b}{2},\ c=\frac{b^2}{4},$$

如此便求得问题的正确解. 费马认为他的方法是完全普遍的.

在《求极大值与极小值的方法》中，费马将假定的两个相异根记为 A 和 $A+E$（即 x 和 $x+y$），其中 E 表示根之间的差. 例如求表达式 bx^2-x^3 的极大值，费马如下进行：令 $bx^2-x^3=M^3$，由假定

$$b(x+y)^2-(x+y)^3=M^3,$$

因而

$$2bxy+by^2-3x^2y-3xy^2-y^3=0,$$

用 y 除上式得方程

$$2bx+by-3x^2-3xy-y^2=0.$$

这一关系对形如 $bx^2-x^3=M^3$ 的任意方程都成立. 但当 M^3 是极大值时方程有一个重根，即 $x=x+y$ 或 $y=0$，所以

$$2bx-3x^2=0,\ 或\ x=\frac{2}{3}b,\ M^3=\frac{4}{27}b^3.$$

费马的方法适用于任意多项式 $p(x)$. 为了运用韦达的方程理论确定多项式的系数之一与根的关系，他故意假定了两相等根的不等性，当费马使两个根相等时，这一关系就导致了一个极值解. 费马称其令两根相等之前的方程为"准等式".

费马的《求极大值与极小值的方法》有两个重要的应用，第一个是求曲线切线，第二个是确定几何形的重心. 费马实际上是利用了一个无穷小增量，这种方法应以极限理论为基础，但费马并没有严格的极限工具.

1638 年春，费马的求极大、极小方法和求切线法引起了费马与笛卡儿（Descartes，R.）之间一场关于优先权的争论. 但跟坐标几何的情形一样，他们很快便认识到了对方各自的独创性. 1642 年，费马的方法发表后，许多数学家很快便得到了他们各自更一般的方法. 不久，费马关于极大、极小值的方法就被牛顿（Newton，I.）和莱布尼茨（Leibniz，G. W.）的微积分所取代.

几何学（Géométrie） 西方近代数学著作. 法国数学家、哲学家、自然科学家笛卡儿（Descartes，R.）著. 1637 年作为附录发表在笛卡儿的著作《方法论》（Discours de la méthode）中.《几何学》以符号代数学为基础，将代数学应用于几何学，从而建立了一门新的数学分支——解析几何学，在数学史上有着不朽的地位.

作为近代理性主义哲学的创始人，笛卡儿对数学的研究只是他为达到更高目标所做的努力的一部分. 他的目的是要建立一种新的可靠的知识体系，并寻求指导推导和发现科学真理的一般方法论. 他认为数学提供了获得必然结果及有效地证明其结果的

方法，而数学方法便是在一切领域里建立真理的可靠方法.《几何学》便是为了证明他的方法的有效性而写的. 笛卡儿批评了自希腊人以来过于抽象且过多地依赖于图形的倾向，并对当时代数学的晦涩与教条加以指责，主张将代数和几何相结合，便产生了《几何学》一书.

《几何学》共分 3 部分. 第一部分是全篇的基础，主要致力用代数解决几何问题. 他首先指出，几何作图实际上要求对线段做加减乘除，对个别线段取平方根，从而使几何线段的代数成为可能，奠定了新解析几何的基础. 笛卡儿首先考虑了结果是一个惟一的长度的几何作图问题，然后考虑了不确定问题，其结果是以许多长度作为答案的，这些长度的端点充满一条曲线. 他对帕普斯问题的解决隐含了坐标几何的基本思想，之后进一步发展了他的曲线方程的思想，断言曲线的次数与坐标轴的选取无关. 还考虑了用一坐标轴写出两个不同的曲线的方程，联立解出这两个方程来找出这两条曲线的交点，这是用代数解决几何问题方面的一次飞跃.

在《几何学》第二部分中，笛卡儿考察了曲线的分类及其性质，打破了希腊人的分类传统，而用代数方程的直解性区分"几何曲线"与"非几何曲线". 他把复杂的高次曲线也作为"几何"曲线，而把不能用代数方程表示的曲线称为机械曲线. 显然，所谓几何曲线就是代数曲线，而机械曲线就是超越曲线. 这样笛卡儿开辟了全新的曲线研究领域. 之后，他还对几何曲线做了分类.

《几何学》的第三部分又回到了第一部分的问题，解决了一些几何作图问题，更重要的是展开了笛卡儿关于方程的代数理论. 笛卡儿的理论从将每一个方程写成如 $p(x)=0$ 的形式开始，其中 $p(x)$ 是具有实系数的代数多项式. 他叙述并直觉地证明了代数学基本定理，给出了判别方程根的符号的所谓笛卡儿符号法则. 对于 n 次方程，笛卡儿运用方程的基本对称函数消去含有 x^{n-1} 的项，从而开辟了通往三次、四次方程一般解的道路，并导致了关于方程解的一般讨论，推动了代数学发展.

圆锥曲线论稿(Brouillon project d'une atteinte aux événemens des rencontres du cone avec un plan)　西方近代数学著作. 法国数学家、建筑工程师德扎格(Desargues, G.)著. 书名直译为《试图处理圆锥与平面相交情形的文稿》，发表于 1639 年，据说初版只印了 50 份，不久就全部散失了. 直到 1845 年，法国数学家沙勒(Chasles, M.)偶然发现了德扎格的学生拉伊尔(La Hire, P. de)的一份手抄本，发表于 1864 年出版的德扎格著作集中. 从此，《圆锥曲线论稿》被列为近世纯粹几何的经典著作. 1950 年左右，建筑史家莫伊西(Moisy, P.)又在巴黎国立图书馆发现了原版本，由数学史家塔顿(Taton, R.)收入《德扎格数学全集》中.

德扎格是射影几何学的先驱，《圆锥曲线论稿》开创了射影几何学的研究. 德扎格的目的是想给当时技术领域中起重要作用的透视图、石料截面图等以合理的基础，试图明确其几何学原理. 他想用"普遍的方法"和"统一的语言"来研究和表现那些看来不同的东西，如有关圆锥曲线的定理. 在本著作中他以投射和截景作为他的"普遍的方法"，并由此统一处理了几种不同类型的圆锥曲线. 首先他引入了无穷远点和无穷远直线，之后叙述了一个基本定理，现称为德扎格定理. 德扎格分别对于二维和三维的情形给出了该定理的证明. 此外，德扎格得到了射影几何的另一基本结论：交比在投影下的不变性. 他在本书中处理的对合关系，至今仍然是射影几何中的一个重要概念. 他从图形所在平面外一点把整个图形作一投射，并取投射锥的一个截景，得到一个重要而普遍的结论：若作一圆锥曲线的内接四边形，则任一不过顶点的直线与圆锥曲线以及与完全四边形对边相交的四对点有对合关系，这就是著名的德扎格对合定理. 德扎格还引入了调和点组的概念，阐述了极点与极带的理论，证明了关于圆锥曲线的一些定理.

在《圆锥曲线论稿》中，德扎格不仅引入了诸如无穷远元素等新概念，证明了许多新定理，更重要的是他开始以投射和截景作为一种新的证明方法. 通过投射的截景统一处理了几种不同类型的圆锥曲线，从而开辟了一条通向一门新的几何学的道路. 该著作在出版的当时并未受到普遍的重视，它重新被人们认识是在法国数学家蒙日(Monge, G.)及其学生彭赛列(Poncelet, J.-V.)等人复兴了综合几何学之后. 这一方面是因为其所用术语晦涩难解，但更主要的是因为当时解析几何、微积分异军突起，吸引了当时最优秀的数学家的注意. 德扎格的理论后来成为射影几何研究的基础，因而《圆锥曲线论稿》在几何学史上仍然具有重要地位.

圆锥曲线论(Essay pour les coniques)　西方近代数学著作. 法国数学家、物理学家、思想家帕斯卡(Pascal, B.)著，1639—1640 年写成出版，当时发行很少，极少有人知道，旋即失传，直到 1779 年才重新发现. 这是继德扎格(Desargues, G.)的《圆锥曲线论稿》之后第二部重要的射影几何著作.

17 世纪 30 年代末，受德扎格的敦促，帕斯卡开始研究射影几何学问题，很快他便掌握了德扎格的基本思想：无穷远元素的引入；圆锥曲线定义为圆锥的平面截线；将圆锥曲线作为圆的射影进行研究；对合关系等. 1639 年 6 月，16 岁的帕斯卡就做出了他的第一个伟大发现，即现今称为帕斯卡的"神秘六线形"的性质定理，用现代语言叙述，即：若一六边形内

接于一圆锥曲线,则每两条对边相交所得的三点在同一直线上.帕斯卡看到了基于此性质对圆锥曲线进行综合射影研究的可能性,其后便写成《圆锥曲线论》,其中载录了他自己发现的包括上述定理在内的几个典型命题,勾画了他刚构思的一篇关于圆锥曲线的重要论文的概要,因此对上述重要的帕斯卡定理没有给出完善证明.遗憾的是他构思的第二篇关于圆锥曲线的论文终未公开发表.看来他于 1640 年 12 月前就已取得相当进展,他从自己的定理中推导出了阿波罗尼奥斯(Apollonius,(P))的《圆锥曲线论》中的大部分定理.直到 1648 年,帕斯卡才得到关于帕普斯问题的纯粹几何的一般定解.帕斯卡的成功表明在这一领域中射影几何与笛卡儿解析方法具有同样的威力.

1654 年,帕斯卡声称他的论文已近于完成,说整篇著作基于他 16 岁前发明的一个基本命题(即上述帕斯卡定理).他还提到了一些特殊的几何命题,其射影方法可以有效地应用于这些问题:由三个或四个条件确定的圆或球;由五个已知元素(点或切线)确定的圆锥曲线;由直线、圆或圆锥曲线构成的几何轨迹;以及一般射影方法等.莱布尼茨(Leibniz,G. W.)曾看到这篇论文,其内容分为六部分:

1. 圆锥曲线的射影生成.
2. "神秘六线形"的定义和性质——帕斯卡定理及其应用.
3. 极点、极线及中心与直径的射影性质.
4. 与圆锥曲线的经典定义有关的各种性质.
5. 由五种已知元素确定的圆锥曲线的作法.
6. 立体轨迹问题(帕普斯问题).

看来帕斯卡是充分认识到了射影方法的威力.如果在当时它能得到很好的研究,可以想象它对射影几何的发展会有巨大的推动作用.不幸的是,直到 19 世纪,这一学科才重新发展起来.

无穷算术(Arithmetica infinitorum) 西方近代数学著作.英国数学家沃利斯(Wallis,J.)著,1655 年出版于伦敦.17 世纪初期,无穷小问题已经做过很多研究,其中开普勒(Kepler,J.)在他的《测量酒桶的新立体几何》(1615)中摒弃了烦琐的希腊穷竭法,开创出无穷小研究的新时代.之后,卡瓦列里(Cavalieri,(F.)B.)创立不可分量几何学(1635),得到著名的卡瓦列里原理.在《无穷算术》的献辞中,沃利斯对先辈们的工作做了充分的评论,他特别提到卡瓦列里的工作如何激起他对化圆为方问题的兴趣.在沃利斯之前,已有一些几何学家独立求得曲线 $y=x^n$ 下的面积,当指数 n 为正整数时他们的方法是充分的,但当 n 为负数或分数(如双曲线情形)时就出现了困难.在该书中,沃利斯首先通过扩展"连续性原则",极其娴熟地运用归纳法(不同于今天的数学归纳法)将指数扩展到负数和分数,从而推广了许多关于面积的结果(当然这里沃利斯也有失误).下一步沃利斯便转向应用他的方法,求具有更复杂表示的曲线如 $y=(a+x)^2$ 所围的面积,实际上是继续他化圆为方的努力.事实上,他求出了积分

$$\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

的值.不仅如此,他还研究了其推广的积分

$$I(k,n)=\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{k}})^n\mathrm{d}x.$$

他先是列表求出对 k、n 为整数时,$1/I(k,n)$ 的值;之后列出了对

$$k=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\cdots$$

时的值.当 $k=n=1/2$ 时,他求出如下著名的无穷乘积表达式

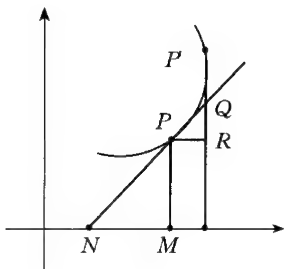
$$\frac{4}{\pi}=\frac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times9\times9\times\cdots}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times10\times10\times\cdots},$$

其中巧妙地应用了插值方法,该方法基于连续性假设.这种对无穷序列、无穷连乘积的大胆使用,使沃利斯成为牛顿(Newton,I.)和莱布尼茨(Leibniz,G. W.)之前,在把分析方法引入微积分方面工作做得最多的人.

《无穷算术》对沃利斯的同时代人和后人产生了很大影响,其重要性不仅在于他所处理的单个问题上,更在于他的方法.他的列表表示函数的思想也是卓越的.《无穷算术》对牛顿的影响是独一无二的,其直接结果是牛顿二项式定理的发现.

几何学讲义(Lectiones geometricae) 西方近代数学著作.英国数学家巴罗(Barrow,I.)著,1670 年出版.该书对微积分的发展产生过重要作用.巴罗是牛顿(Newton,I.)的老师,他最先承认牛顿的天才,并于 1669 年将路卡斯教授席位让给牛顿.牛顿于 1664—1665 年听过巴罗关于本书内容的讲授,并帮助巴罗准备讲义.

《几何学讲义》共有 13 讲.在前 5 讲中他定义了度量一切运动的时间的流动变量.之后,考虑了通过结合运动的点和直线而产生的曲线的性质.在第 6—12 讲中,叙述了他对前人工作的系统推广和他自己的新发现,其中包括笛卡儿(Descartes,R.)、沃利斯(Wallis,J.)、费马(Fermat,P. de)、惠更斯(Huygens,C.)、帕斯卡(Pascal,B.)等人的工作.内容涉及求切线、面积、曲线的长等问题.第 13 讲是与前面没多大关系的内容——关于方程的几何作图法.巴罗的讲义通篇采用古典的几何观点来处理切线问题和求积问题,而不是像沃利斯那样采取分析的方法.例如他把曲线的切线定义为同曲线仅在一点切触的直线.但他给出了通过计算求切线的方法,



并认为这种方法比前人的方法"更有利、更一般"(第 10 讲). 在此过程中,他利用了微分三角形或特征三角形(如图). 他从$\triangle PRQ$ 出发,利用$\triangle PRQ$ 相似于$\triangle NMP$ 的事实,断定切线的斜率$=QR/PR=PM/MN$. 巴罗认为,当弧 PP' 足够小时,就可以把它和 P 点切线上的一段 PQ 等同起来,从而用特征三角形 PRP' 代替三角形 PRQ. 再利用曲线的方程,舍弃掉较小量的高次幂,便求得曲线在 P 处切线的斜率. 实际上,巴罗是把切线看作当增量 PR 趋于零时割线 PP' 的极限位置,并通过忽略"高阶无穷小"的方法来取极限. 更重要的是,他在该书的第 10 讲中给出了表明曲线的切线问题和求积问题之间的互逆关系的一个重要定理. 这是对微积分基本定理的最早认识. 但可惜的是,他只是在古典的几何意义下处理该问题,而没有侧重于新的计算方法和计算程序,而这才是发明微积分的关键. 虽然巴罗被有些学者认为是微积分的发明者,但巴罗本人并没有认识到他的这一"基本定理",能为"以独特计算法为其特征的一门新科学"奠定基础,这被作为说明"发现"与"认识到重要意义"之间的明显区别的一个极好实例. 但无论如何,他的发现为最终创立微积分做出了积极贡献. 巴罗也因此成为微积分前史中的重要人物之一.

运用无穷多项方程的分析学(De analysi per aequationes numero terminorum infinitas) 西方近代数学著作. 英国数学家、物理学家、天文学家、自然哲学家牛顿(Newton,I.)著,写成于 1669 年,但迟至 1711 年才出版.

牛顿与德国数学家莱布尼茨(Leibniz,G. W.)共享创建微积分的盛誉,他将前人发现的关于求曲线的切线、求极大极小值这类问题以及另一类求面积、体积等问题的一些特殊方法和技巧统一为一般的算法,并确定了微分与积分两类运算的互逆关系. 他关于微积分的发现始于 1664 年,1666 年 10 月,他写成一篇手稿记录了自己的发现,后来称为"1666 年 10 月流数短论",这是他关于微积分的最早的论文,但直到新近才发表,其中包含了历史上第一次以明显形式出现的微积分基本定理. 1668 年,梅卡托(Mercator,N.)的《对数技术》出版,其中包括他关于 $\log_a(1+x)$ 的著名级数和牛顿几年前已经得到但未发表的一个重要结果. 关于优先权的考虑促使牛顿于 1669 年初夏写出了《运用无穷多项方程的分析学》,虽然这本小册子直到 1711 年才出版,并且仅仅包括牛顿在 1664—1666 年工作的片断,但由于在朋友中的流传,使当时的一些数学家得以了解牛顿的发现.

《运用无穷多项方程的分析学》首先通过一些未加证明的法则叙述了他(借助于微积分基本定理)计算曲线 $y=f(x)$ 下的面积的一般方法(牛顿认为与其严格地证明,还不如简单地解释). 第一个法则:如果 $y=ax^{\frac{m}{n}}$,则所求面积是

$$\frac{a}{m/n+1}x^{m/n+1}=\frac{na}{m+n}x^{\frac{m+n}{n}}.$$

第二个法则:如果 y 是由具有上述形式的一些项组成的,则所求面积是由其中每一项分别产生的面积组成的. ——这说明逐项积分的合理性. 第三个法则:如果 y 或 y 的任何一项比上述形式复杂(即不是多项式),则必须先化简,即对一般项进行运算,其方式如同算术中的运算,或者解假定成立的方程.

为了通过"解假定成立的方程"计算面积,牛顿举例说明了方程的一种近似解法,即现今所谓的"牛顿法". 用这种方法解多项式方程实际上就是迭代逼近,这种方法也称"牛顿-拉福生方法". 为了解形如 $f(x,y)=0$ 的方程,牛顿将上述方程进行了推广,作为 x 的幂级数求出 y,然后将幂级数逐项积分,计算 $f(x,y)=0$ 下的面积. 通过将上述迭代逼近法用于级数的反演,牛顿第一次得到了 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的幂级数. 此外,牛顿利用这些三角函数的幂级数来计算摆线和割圆曲线下的面积.

流数法与无穷级数(Methodus fluxionum et serierum infinitarum) 西方近代数学著作. 英国数学家、物理学家、天文学家、自然哲学家牛顿(Newton,I.)著,撰于 1671 年. 这是牛顿在数学方面的代表作,其中将 1666 年 10 月的流数短论进行了扩充. 其英译本于 1736 年出版,但原拉丁文本迟至 1779 年才出版. 牛顿生前一直在利用这部著作,其手稿形式便由于一些数学家传阅而广为人知.

《流数法与无穷级数》对于牛顿的流数分析方法提供了比《运用无穷多项方程的分析学》更一般、更好的阐述. 其前一部分包含了后一本书的扩充,并且包括了用于求解代数方程和微分方程的无穷级数法(待定系数法)的详细讨论. 接着,以 20 个正式叙述的问题为标题,相当广泛地收集了牛顿的流数法和级数法的应用实例. "流数法"这一名称反映了该理论的力学背景. 流数被定义为可借运动描述的连续量——流量的变化率. 牛顿表述流数法的基本问题为:已知流量间的关系,求它们的流数的关系,以及逆运算. 在"问题 3——极大值和极小值的确定"中,牛顿给出了下述原理:当一个量取极大或极小值时,它的流数既不增加也不减少,所以求出它的流数,并令它等于零. 这里的意思即,使 $f'(x)=0$ 的点是

$f(x)$的极值点.他列举了能用这种方法求解的9个几何问题,如问题4是作曲线的切线.在问题8中,牛顿正式引入了代换积分法,给出了蔓叶线、摆线和阿基米德螺线的巧妙的求积方法,其中总括了分部积分法和代换积分法.问题12是关于曲线长度的确定,他利用基本的流数法和级数求出了蔓叶线

$$y=\frac{(a-x)^2}{\sqrt{x(a-x)}}$$

的长度和割圆曲线

$$y=x\cot\frac{x}{a}$$

在区间$[0,x]$上弧长的无穷级数展开式.

《流数法与无穷级数》中还包括两个积分表,第一个表的标题是"与直线图形有关的曲线一览表",其中列出了相应的面积能够通过微分或反微分明确算出的一些曲线.第二个表是"与圆锥曲线有关的曲线一览表".牛顿说明如何应用积分表来求面积.在该著作的一个附录(1969年才首次发表)中,牛顿发展了一种曲线的"最初与最终比"的几何理论,该理论后来得到了完善,并载于他以后的著述中.

自然哲学的数学原理(Philosophiae naturalis principia mathematica)　西方近代数学著作.英国数学家、物理学家、天文学家、自然哲学家牛顿(Newton,I.)著,于1687年出版.在科学史上,甚至在整个人类文明的进程中,《自然哲学的数学原理》的出版都是一件特别引人注目的大事件.这是一部划时代的巨著.虽然它是一部研究天体力学的著作,但它在数学史上有着极为重要的地位.这不仅因为它是第一本公开出版的包含牛顿的微积分发明的著作,而且因为《自然哲学的数学原理》中提出的课题和研究方法极大地影响了后世的数学研究.

《自然哲学的数学原理》分为三编.第一编意在从数学观点发展一般动力学内容,是对自由空间(即无阻力的空间)中压力作用下的物体的运动的数学处理.第二编研究物体在阻尼介质中的运动,奠定了流体动力学的理论基础.第三编的标题为"论宇宙系统",其中第一编中的重要结果在该编中的物理学和天文学问题中得到了应用.在该编中牛顿叙述了万有引力定律.在《自然哲学的数学原理》的序言中,牛顿声称自己要"努力把自然现象放在数学的控制之下",其目的是发现并宣告其"一切事物按照测度、数目和重量安排"的准确方式,用数学摹写自然.他认为他提出的自然哲学的原理其实不是哲学的,而是数学的.因而第一编中将物体运动做了系统的处理,而在第二编中的数学兴趣甚至大于物理兴趣.

《自然哲学的数学原理》中的陈述是建立在牛顿自己的数学发现的基础之上的,通常被认为是以希腊几何学风格写成的.从该著作中,人们看到的不是微积分的解析公式,而是几何的比例公式.在试图说明其流数法的早期来源时,牛顿声称他先用他的方法推导出证明,然后将它们重新表述为综合几何的形式.但仔细的考察表明,牛顿这种方法背后的各种概念不是来自经典几何而是来自微积分.从命题到命题,从引理到引理,牛顿总是通过先建立几何条件或相应的比,然后立刻引入一些经过仔细定义的极限过程.这种证明或发现的方式是基于一些关于极限过程的一般原理的.关于极限的论述是在第一编的第一部分的几个引理中给出的.在《自然哲学的数学原理》中,只要涉及微积分的基本概念,牛顿就给出了几种解释.他试图为他的最终比的说法辩护,说明最终比不是最后量的比,而是无限地减少的这些量的比所趋近的极限.而在《自然哲学的数学原理》第二编的第二部分(尤其引理2)中,牛顿又展示了另一种分析方法,在那里牛顿介绍了"瞬"的概念和方法.他定义瞬为变量或不定量的瞬间的增量或减量.牛顿认为这一引理包含了一个一般方法的基础,所以牛顿在本书中事实上给出了新分析学的三种表述,即用无穷小的概念、利用最终比或极限,以及运用流数法.

《自然哲学的数学原理》于1687年出版后,在1713年和1726年分别出了第二版和第三版,其中第三版由拉丁文译成了英文.1931年,中国出版了中译本(郑太朴译《自然哲学的数学原理》,商务印书馆出版,1931年4月初版,1957年5月重印).许多中国学者对之做了细致的研究.

广义算术(Arithmetica universalis)　西方近代数学著作.英国数学家、物理学家、天文学家、自然哲学家牛顿(Newton,I.)著,于1707年出版.该著作是根据作者于1673—1683年间授课的讲义编写而成,载录了牛顿在几何问题的代数解法及方程论方面的一些重要研究结果.英文版本分别于1720年、1728年和1769年数次再版于伦敦,1948年又被译成俄文出版.

牛顿使用了法国数学家笛卡儿(Descartes,R.)的符号,首先说明了使用数字及字母的算术运算,接着对方程及其根的一般性质进行论述.关于方程的演算,他总结了7个规则.他用代数方法所解的61道算术问题,由于其巧妙性及多样性,经常被人引用.如问题50:"一石落井,请根据听到石头击水的声音(的时间)确定井的深度."这里,把抽象的数学问题转化为具体的物理学问题来考虑,充分体现了本书的特点.关于代数方程的一般性质,作者用几何图解,说明了实系数方程的虚根必定成对出现,给出了求实系数多项式方程根的近似值的规则.牛顿注意到,当方程存在虚根时,确定方程正根与负根个数的笛卡儿符号法则不能给出正确的结果,因而在书

中叙述了(但未证明)确定方程正实根和负实根的最多个数的另一种方法，从而能推出复根至少能有多少个. 此外，牛顿给出三、四次方程的解法，以及代数方程的图象解法. 书中还载录了牛顿关于 n 次代数方程根的 m 次幂的和的著名公式.

一种求极大、极小值与切线的新方法(Nova methodus pro maximis et minimis,etc) 西方近代数学著作. 德国数学家、自然科学家、哲学家莱布尼茨(Leibniz,G. W.)著，1684 年发表于《学艺》(Acta Eruditorum)杂志上. 这是莱布尼茨发表的关于微分学的第一篇论文，也是数学史上第一本公开发表的微积分学著作. 莱布尼茨关于微积分的重要发现都发表在《学艺》杂志上，由此使得该杂志名垂青史.

莱布尼茨关于微积分的基本思想，来源于他对序列的和与差的研究. 他的分析的或符号的微积分的重要特征是：无穷小差分(微分)与无穷小求和(积分)的中心作用，以及二者之间的互逆关系；作为切线问题(微分)和求积问题(积分)之间的纽带的特征三角形；通过代换的积分变换. 文中，在引入微分时没有进行许多无穷小考察(这种考察曾是微分概念产生的起因). 给定任意数 dx、dy 的定义是使得比值 dy/dx 等于切线的斜率的数. 这里只是没有给出切线的真正定义. 莱布尼茨认为可以用具有无穷多个角的多边形来代替曲线. 在这篇文章中，莱布尼茨给出了计算幂、积和商的微分的一些法则，但对其来源未做解释. 此外，文中还指出，当纵坐标 v 随 x 增加而增加时，dv 是正的；当 v 减少时，dv 是负的. 他还注意到因为“当 v 既不增加也不减少时，就不会出现这两种情况，这时 v 是平稳的”，所以极值的必要条件是 $dv=0$. 同样，他还说明拐点的必要条件是 $d(dv)=0$. 运用他的极大、极小方法，莱布尼茨解决了一些“曾使其他高明学者百思不得其解”的问题. 他认为“这不过是一种更高超的几何学的开端，它甚至可以用来解决一些最困难的、最奇妙的应用数学问题，如果没有我们的微分学或者类似的方法，这些问题处理起来决不会这样容易”. 在文章的结尾，莱布尼茨解决了法国数学家笛卡儿(Descartes,R.)未能解决的一个问题：求纵坐标为 w 的曲线，使其次切距为常数 $\tau=a$. 对于这样的曲线有

$$\frac{dw}{dx}=\frac{w}{\tau}=\frac{w}{a},$$

即

$$w=a\frac{dw}{dx}.$$

莱布尼茨考虑 x 的值的一个等差数列，其公差为 $dx=b$，这时

$$dw=\frac{b}{a}w,$$

因此对应的纵坐标 w 的序列与其差的序列成正比. 由于这是几何级数特有的性质，所以莱布尼茨断言：“如果 x 值构成算术序列，则 w 值构成几何序列，换句话说，如果 w 是一些数，则 x 是它们的对数，因此，所求的曲线是对数曲线.”

《一种求极大、极小值与切线的新方法》使莱布尼茨与牛顿(Newton,I.)共享独立发明微积分的盛誉，有着不朽的历史意义.

发微算法(Hatubi sanpō) 日本和算著作. 日本数学家关孝和著，1674 年出版. 关孝和是日本传统数学——和算的奠基人，也是关氏学派(关流)的创始人，在日本被尊为算圣. 这是他生前出版过的惟一的一部算书. 他的许多著作只在其学派内部传抄，有《三部书》、《七部书》等. 关孝和去世后，其弟子又编纂出版了《括要算法》(1712)一书.《发微算法》刊行数年后，版模因火灾遗失，初版本现只在日本京都大学保存一本. 由于关孝和的方法很难懂，其弟子建部贤弘出版了《发微算法演段谚解》(4 卷，1685)，在其第 1 卷中完整地收入了这一著作，并对之作了阐释，从而使人们得以了解关氏的工作.

中算家朱世杰的《算学启蒙》对关孝和的数学研究产生了很大影响. 1670 年，第一位掌握了天元术的日本数学家泽口一之利用天元术解决的许多数学问题，编成一部 7 卷本的数学问题集《古今算法记》，在卷末附有 15 个问题，他认为这些问题是不能用天元术解答的. 关孝和首创使用笔算(中国传统数学使用筹算，因而不能方便地处理代数表达式)，解决了这些问题，撰成《发微算法》一书. 关孝和引进傍书法和代数符号，利用笔算列出几个方程式，然后通过消去未知数得到一个高次方程，再用天元术解之. 但在《发微算法》中，得到这一高次方程的中间阶段(即使用笔算的部分)全部省略了，只记录了解高次方程的步骤和答案. 建部贤弘的著作便利了人们对这部书的理解.《发微算法》中没有包括关孝和发现的一些重要定理，这些在当时是保密的. 除了创立演段术，关孝和还使用了行列式，得到数字系数高次方程的近似解法，开创了圆理的研究等. 在他的著作中，关孝和对自己得到的定理做了系统地处理，以方便他的弟子们钻研.

《发微算法》和由关孝和弟子们整理的著作《括要算法》、《七部书》等，对了解关孝和的数学成就，以及和算的发展有重要的意义.

机会论(The Doctrine of Chances) 西方近代数学著作. 法国-英国数学家棣莫弗(De Moivre,A.)著. 其拉丁文本首次发表于英国《皇家学会哲学会刊》(1711)上. 后扩充的英文版本的第一、二、三版分别出版于 1718 年、1738 年和 1756 年. 这是早期概率论的重要著作.

棣莫弗的概率论研究早期受到惠更斯(Huygens,C.)和蒙莫尔(Montmort,P. R. de)的影响,惠更斯的著作《论赌博中的计算》(1657)以及蒙莫尔的有关著作是1711年以前仅有的系统的概率论著作.由于这些著作的启发,棣莫弗陆续获得一些发现,这些重要结果随时收入《机会论》的各版本中.他逐渐得到了二项概率分布的逼近,它作为正态分布,成为其后两个世纪中概率论和统计方面的有效的发现工具.棣莫弗的发现在当时极大地澄清了概率的概念.至少从15世纪以来,人们已经认识到随机事件中稳定频率的存在,但没有人能给出“机会”和稳定频率如何相关的清晰的数学表述.瑞士数学家雅各布第一·伯努利(Bernoulli,Jakob Ⅰ)在《猜度术》的第四部分中给出了第一个回答,他证明了现今所谓弱大数定律.棣莫弗对二项分布的逼近被认为是试图推进伯努利的结果.

在某些试验中,设有利“机会”与不利“机会”的比是 p,在 n 次重复试验中,令 m 是成功的次数.考虑由上下界限定的 p 的一个范围,伯努利证明了 m/n 位于这些界限中的概率随 n 次增大而增大,且当 n 趋于无穷时趋近于1.尽管他能建立收敛的事实,但伯努利无法确定在何种程度上概率收敛.棣莫弗对这一问题的解答载于《机会论》最后一版中,其中表明,在 n 次试验中 m 次成功的概率由 $(a+b)^n$ 的展开式中第 m 项表出,即

$$\binom{n}{m}a^m b^{n-m},$$

其中 a 是已知机会之比,$b=1-a$.通过对 $(1+1)^n$ 的展开的研究,棣莫弗得到了运用所谓斯特林公式对 $n!$ 的逼近,其实是棣莫弗发现了斯特林公式.运用 $n!$ 的近似,棣莫弗得到了相当于现在的正态近似的结果.实际上,这是正态概率积分的首次出现.棣莫弗还得到了泊松逼近的一个特例.

在《机会论》中,棣莫弗还讨论了有关游戏持续时间的问题,给出了关于机会的组合问题的一个更清楚的表述.他还论述了差分方程的应用及使用递归序列对它们求解.棣莫弗关于正态逼近的工作表明,他使用了母函数,这对后来概率论的发展有重大影响.

猜度术(Ars conjectandi) 瑞士数学家、力学家、天文学家雅各布第一·伯努利(Bernoulli,Jakob Ⅰ)著.作者是数学史上著名的数学世家伯努利家族的成员.他对微积分、变分法等多有贡献.所谓“伯努利双纽线”、“伯努利方程”均以他的名字命名.对于对数螺线的欣赏,使他在遗言中留有,要在自己的墓碑上刻上这条曲线,并附以颂词:“纵使变化,依然故我”.他著述甚丰,但最富有创造性、最重要的著作是《猜度术》.

《猜度术》是概率论发展史中的重要经典著作之一,在作者死后于1713年出版.书中载录的伯努利1679—1685年间在概率论方面的研究成果,并作为附录记载了作者在1689—1704年间完成的五篇关于级数的文章.正文分为四部分,第一部分基本上是关于惠更斯(Huygens,C.)的著作《论赌博中的计算》的一个精彩评注.惠更斯的著作是概率论中最早的著作之一,1657年作为斯霍滕(Schooten,F. van)的书《数学练习》的附录出版.伯努利对之做了深入研究.在第二部分中,伯努利基于斯霍滕(1657)、莱布尼茨(Leibniz,G. W.)(1666)、沃利斯(Wallis,J.)(1685)等人的有关工作讨论了组合论问题,主要结果是通过所谓伯努利数的运用,用完全归纳法证明 n 为正整数时的二项式定理.在第三部分中伯努利把排列与组合的理论运用到概率论中,给出24个有关在各种赌博情形中利益预测的例子.第四部分含有作者对概率论的哲学思考:概率作为确定性的量度、必然性与偶然性、把握与数学期望、预前与期后概率,以及根据赌博者的智慧情况决胜的预测等.在这部分中给出了著名的伯努利大数定律:若 p 是发生单独一次事件的概率,q 是该事件不发生的概率,则在 n 次试验中该事件至少出现 m 次的概率等于 $(p+q)^n$ 的展开式中从 p^n 项到包括 $p^m q^{n-m}$ 为止的各项之和.这是当时最重要的概率论结果.伯努利的概率论思想对这门学科其后的发展产生了深远的影响.

正的和反的增量方法(Methodus incrementorum directa et inversa) 西方近代数学著作.英国数学家泰勒(Taylor,B.)著,出版于1715年.其中载录了作者于1712年发现的把函数展开成级数的著名的泰勒公式.该著作表明,泰勒是有限差分演算的奠基者之一,并最先将其用于插值和级数求和.

泰勒的数学成就远不止于泰勒定理的发现,但它是泰勒最著名的学术成果.在《正的和反的增量方法》的定理Ⅲ命题Ⅶ的讨论中,有如下表述:如果 z 变为 $z+n\underset{\cdot}{z}$,则 x 等于

$$x+\frac{n}{1}\underset{\cdot}{x}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\underset{\cdot\cdot}{x}$$

$$+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}\underset{\therefore}{x}+\cdots$$

泰勒用 $\underset{\cdot}{x}$ 等表示增量或有限差,用 $\dot{x}$ 等表示牛顿(Newton,I.)的流数.上述表述对牛顿的《自然哲学的数学原理》第三编引理5的插值分式在符号上作了改进.泰勒是从 x 的差分表中归纳得到这一公式的.其后,泰勒令:

$$v=n\underset{\cdot}{z},\quad \dot{v}=v-\underset{\cdot}{z}=(n-1)\underset{\cdot}{z},$$

$$\ddot{v}=\dot{v}-\underset{\cdot}{z},\cdots$$

得到如下表述:“当 z 增加为 $z+v$,x 便增为

$$x+\underset{\cdot}{x}\frac{v}{1\cdot\dot{z}}+\underset{\cdot\cdot}{x}\frac{v\dot{v}}{1\cdot2\cdot\dot{z}^{2}}$$
$$+\underset{\cdot\cdot\cdot}{x}\frac{v\dot{v}\ddot{v}}{1\cdot2\cdot3\cdot\dot{z}^{3}}+\cdots\text{”}$$

泰勒定理的原始表述用现代符号可写成下面的形式

$$f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1\,!}h+\frac{f''(x)}{2\,!}h^{2}$$
$$+\frac{f'''(x)}{3\,!}h^{3}+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n\,!}h^{n}+\cdots$$

这是在定理Ⅲ的系Ⅱ中给出的,其叙述如下:“对瞬时增量写出与其成比例的流数并使已有的 $\ddot{v},\dot{v},\underset{\cdot}{v},\underset{\cdot\cdot}{v}$ 相等,则当时间均匀变化时,z 变为 $z+v$,因而 x 就变为

$$x+\dot{x}+\frac{v}{1\cdot\dot{z}}+\ddot{x}\frac{v^{2}}{1\cdot2\cdot\dot{z}^{2}}$$
$$+\dddot{x}\frac{v^{3}}{1\cdot2\cdot3\cdot\dot{z}^{3}}+\cdots\text{”}$$

一旦认识到当“时间均匀变化”时 $\dot{z}$ 是常数,而

$$\frac{\dot{x}}{\dot{z}}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z},$$

且 v 是独立变量的增量,上式便成为泰勒级数的现代形式.泰勒没有给出该定理的严格证明.他利用此公式将函数展成级数并用来解微分方程,但没有认真考虑级数的收敛性.泰勒在该书的第二版(1717)中曾经提到其特殊情形,即马克劳林公式.

在《正的和反的增量方法》中,泰勒还讨论了微积分在一系列物理问题中的应用,他得到了微分方程的奇解公式,研究了弦振动问题.他通过求解方程

$$a^{2}\ddot{x}=\dot{s}y\dot{y}\ (\dot{s}=\sqrt{\dot{x}^{2}+\dot{y}^{2}}),$$

寻出了基本频率公式,开弦振动问题研究之先河.

分析学家(The Analyst) 西方近代数学哲学著作.英国主教、哲学家贝克莱(Berkeley,G.)著.早期由于微积分逻辑基础的不严密,特别是在使用无穷小概念上的混乱,所以从一开始就引起人们的怀疑与批评.影响最大的抨击来自贝克莱 1734 年发表的小册子《分析学家》.《分析学家》的副标题为“致一位不信神的数学家”.所谓“不信神的数学家”指曾帮牛顿(Newton,I.)出版《自然科学的哲学原理》的哈雷(Halley,E.).《分析学家》的主要矛头指向牛顿的流数法.同时对德国数学家莱布尼茨(Leibniz,G. W.)的微积分学也竭力非难.尽管贝克莱对微积分的攻击出于宗教动机,但许多批评切中要害,客观上刺激了 18—19 世纪数学家们关于分析基础严格化所进行的巨大努力.下面摘录其主要观点:“流数方法是一把通用的钥匙,当代数学家们借助它来解开几何的、最终也是大自然的奥秘.……然而这方法究竟是否清楚,是否没有矛盾并可加以证明,或者相反,只是一种含糊的、令人反感的和不可靠的方法?我将以最公正的方式来提出质疑.”

“所谓瞬……只是有限量的初生元素.据(牛顿)说在数学中最微小的误差也不可以忽略,据说流数是瞬变量,不能与有限的增量成比例,不论这些增量多么小,流数只能与瞬或初生增量成比例,这时考虑的仅仅是比.……除了流数还有二阶流数,三阶流数,如此等等,以至无穷.我们的感观很难察知并接受极微小的对象,那么来源于感觉的想象就很难形成关于最小时间间隔或由它生成的最小增量的清晰概念,同时也很难理解瞬,或是流量处于初生状态即在它们量初存在和变成有限小量之前的增量概念了.……至于要想象速度的速度,即二阶、三阶、四阶和五阶速度等,全都超出了整个人类理解能力的范围.……所有这些对象都是稍纵即逝.从任何意义上看,二阶或三阶流数都是模糊而不可思议的东西.”

“有些人……考虑增量或减量本身,并称之为差分,认为它们是无限小量.……而要设想这种无限小量的一部分,即此它本身还要无限地小,并且即使将它无限倍也决不会等于最小的有限量,我想这对任何人来说都是极端困难的事情.”

“推导任意次幂的流数的方法如下:设量 x 均匀地流动,欲求 x^{n} 的流数.与 x 通过流动变成 $x+a$ 的同时,幂 x^{n} 变为 $\overline{x+o}|^{n}$(即 $(x+o)^{n}$).使用无穷级数方法有

$$\overline{x+o}|^{n}=x^{n}+nox^{n-1}+\frac{nn-n}{2}x^{n-2}+\&c.$$

而增量

$$o\text{ 与 }nox^{n-1}+\frac{nn-n}{2}oox^{n-2}+\&c$$

之比为

$$1:nx^{n-1}+\frac{nn-n}{2}ox^{n-2}+\&c.$$

现在假设增量消失,它们的最终比将是 $1:nx^{n-1}$.然而这种推理看来是不合理和不能令人信服的.“我所非议的不是您的结论,而是您的逻辑和方法……”

“……这里首先假设了 z 和 x 不相等.没用这个假设将寸步难行;其次又假设 z 与 x 相等.这显然是自相矛盾……因此我们完全有理由认为,一切意欲回避流数与瞬的学说,而在正确的基础上建立高深、精密的几何学的尝试,同样都将被发现是此路不通.……然而这些有限的元素却是借助于流数而获得的,不论你通过有限的元素和比例得到什么结果,它们都将被归功于流数,所以必须首先理解流数.那么什么是流数呢?消逝增量的速度.这些消逝的增量又是什么呢?它们即不是有限量,也不是无限小,又不是零,难道我们不能称它们为消逝量的鬼魂吗?”

流数通论(Treatise of Fluxions) 西方近代数学著作.英国数学家马克劳林(Maclaurin,C.)著,共二卷,1742 年出版.该书被认为是最早为牛顿

(Newton,I.)的流数方法做出逻辑、系统的阐述的著作,其目的是维护牛顿的学说,企图为微积分注入严密性.在1821年,法国数学家柯西(Cauchy,A.-L.)的《分析教程》出版以前,它一直是严格性的典范.

牛顿的"初末比"方法当时曾遭很多人的反对,其中最强烈的谴责来自贝克莱(Berkeley,G.)主教.在《分析学家——致一位不信神的数学家》中,贝克莱猛烈地攻击牛顿的流数法.作为牛顿的热心学生马克劳林以《流数通论》回击贝克莱.在其前言中,马克劳林声明了他的初机,他认为以贝克莱的能力都误解了流数法,因而有必要建立起完善的基础.他写道:"在卷Ⅰ中我们仿效牛顿对流数概念的阐释,认为只要有运动,构想速度是没有困难的……我有意避免尽管方便但有时有争议的几种表述……""有些人不喜欢在几何学中太多使用无穷和无穷小,特别是牛顿.在证明流数法的基础中他避开了它们,而以一种与几何学的严格性更一致的方式建立它."马克劳林效仿牛顿,摒弃了变量是由无穷小元素组成的观点,采用运动学的方法思考问题.他的本领是整体地使用几何,因而他企图根据希腊几何学和阿基米德(Archimedes)的穷竭法建立流数学说,他希望因此避开极限概念.自然,他的努力未能成功.

《流数通论》解决了几何学、静力学以及引力论中的大量问题.他对最速降线和各种等周问题做了卓越的研究,对无穷级数做了细致的探讨,包括对级数收敛的检验.他认为,收敛级数的项必须持续下降,并小于任意给定的小量,"这时,级数开头几项就几乎等于它整个的值了."他给出了无穷级数收敛的积分判别法

$$\sum_n \varphi(n) \text{ 收敛当且仅当} \int_a^{\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x \text{ 有穷},$$

其中 $\varphi(x)$ 在 $a \leqslant x < +\infty$ 有穷,并且是同号的.马克劳林用几何形式给出了这一判别法.《流数通论》中描述了函数的马克劳林展开式,即

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\cdots$$

这是泰勒展开式的特殊情形,马克劳林用待定系数法给出了证明.

寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧(Methodus inveniendi lines curves maximi minimive proprietate gaudentes) 西方近代数学著作.瑞士数学家欧拉(Euler,L.)著,1744年出版于洛桑-日内瓦.该著作是变分学史上的里程碑,它的出版标志着变分法作为一个新的数学分支的诞生.

在《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的技巧》中,欧拉给出了历史上变分法的主要问题的第一个清楚的表述,并创造了变分问题解的一般方法,这是自牛顿(Newton,I.)以来有关变分法问题发展的一个高峰.1696年,约翰第一·伯努利(Bernoulli, Johann Ⅰ)提出了著名的最速降线问题:寻求从一定点到不在它垂直下方的另一点的一条曲线,使得一质点沿该曲线从已知定点下滑所用的时间最短.牛顿、莱布尼茨(Leibniz,G. W.)及伯努利兄弟都给出了正确的解答.这一问题归结为寻求函数 $y(x)$,使

$$J=\int_{x1}^{x2} f(x,y,y')\mathrm{d}x$$

达到极大或极小值.1734年,欧拉推广了最速降线问题,然后着手寻求解决这种问题的更一般方法.他用有限和代替问题中的积分,用差商代替被积函数中的导数,然后变动坐标,并计算积分中的变差.他成功地证明了使 J 取极值的函数必须满足常微分方程

$$f_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_y')=0.$$

这一方程迄今仍然是变分法的基本微分方程.该结果发表在本著作中,并给出了许多应用,包括悬链曲面和可展螺旋面是极小曲面.从1736年至1744年,欧拉改进了他自己的方法,解决了大量问题,这些成果都包含于该著作中.该书的题目表明,欧拉广泛地使用了函数作为平面曲线的几何表述,他引入了函数和变分的概念,并区分了绝对极值和相对极值问题,介绍了后者如何可以化归为前者.欧拉表明变分法问题总可以化归为微分方程的积分.一个半世纪后情况发生了变化,欧拉用来只是获得他的微分方程的直接方法,在寻求变分问题及相应的微分方程的精确或近似解中获得了独立的价值.

几何地论证使本书变得很烦琐,但其中欧拉处理了大量的例子,来证明他的方法的方便和一般性.18世纪50年代中期,欧拉改变了他对变分问题的表述.1766年,他提出了变分法这一名称,一直沿用至今.该书的出版立即给欧拉带来了声誉,他被认为是当时最伟大的数学家.该书也成为经典数学著作之一.

无穷分析引论(Introductio in analysin infinitorum) 西方近代数学著作.瑞士数学家欧拉(Euler,L.)著,1748年出版于洛桑.

欧拉的《无穷分析引论》、《微分学原理》(1755)及《积分学原理》(1768—1770)组成著名的分析学三部曲,是分析学发展中的里程碑.它们是18世纪分析学的缩影,是标准的分析教科书,由于它们包含了自牛顿(Newton,I.)、莱布尼茨(Leibniz,G. W.)以来分析学中大量新的创造成果.直到1821年,柯西(Cauchy,A.-L.)的《分析教程》出版以前,在很长时间里欧拉的分析学著作一直是分析学的最权威的

著作.《无穷分析引论》分两卷,在这部著作中,欧拉第一次突出地强调了函数概念,并试图把它作为整个微积分的基础,也是第一部沟通微积分与初等分析的著作.第一卷共18章,主要致力于运用代数手段和无穷级数与乘积发展的初等函数论.第1章欧拉便给出了一般函数的定义:由一个变量与一些常量通过任何方式组成的解析表达式.在欧拉之前一些特殊的初等函数已得到了很好的研究,约翰第一·伯努利(Bernoulli,Johann Ⅰ)曾经将函数概念公式化.欧拉在此明确地将函数定义为量的解析表达式,并表明数学分析是函数的科学.他写道:函数间的原则区别在于组成这些函数的变量与常量的组合法之不同.他定义了多元函数,区分了代数函数与超越函数、显函数与隐函数等.虽然在弦振动问题的研究中,数学界发生了关于函数概念的争论,但这更促使欧拉去扩展自己的函数概念.可是,18世纪占统治地位的函数概念仍然是"函数是由一个解析表达式给出的".欧拉的函数定义反映了18世纪的状况.第2章中隐含了代数学基本定理:z的一个整函数(指有理系数多项式)其最高次项指数为n,则它含有n个单项式.第4章讨论用无穷级数表达函数.他认为每一个z的函数都可展开成级数$A+BZ+CZ^2+DZ^3+\cdots$第5章论述含有两个或更多个变量的函数.第7章讨论指数与对数函数的级数表示,这里欧拉只考虑了正自变量的对数函数,给出了著名的表达式

$$e^z=\lim_{i\to\infty}\left(1+\frac{z}{i}\right)^i,$$

式中i表示无穷大的数;后来欧拉用i表示$\sqrt{-1}$.第8章研究圆函数,第一次描述了三角函数的解析理论,并给出了棣莫弗公式

$$e^{\pm xi}=\cos x\pm i\sin x$$

的一个推导,但不很严格.第9章的内容突出点是正弦函数的无穷乘积表示,即

$$\sin z=z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

第10章中处理了大量无穷级数的和.第11章给出正弦函数的另一个无穷表达式.第13章讨论了循环级数.第16章是该书的一个高潮,载录了欧拉在1740—1744年间关于分析函数与母函数的发现,其后成为数论研究的有效工具.第18章研究了连分数,收入了欧拉在1737年和1739年的两篇文章给出的连分数的系统理论.第二卷属于解析几何内容,论述了高次平面曲线理论,介绍了平面和空间图形的微分几何.他超越他的同时代人给出了二次曲线理论的代数发展,并用类比方法研究了三次曲线理论.但其主要贡献是第一次彻底研究了二阶曲面的一般方程.

欧拉一反牛顿以来的传统,拒绝把几何学作为微积分的基础,并纯粹形式地研究函数,即从它们的分析表达式来论证,从而开始将微积分从几何中解放出来,将它建立在算术与代数的基础上,为分析学的严格化开辟了正确的道路.欧拉拒绝使用无穷小概念,虽然他使用的级数推理并不严格.此外,在《微分学原理》和《积分学原理》中,载录了欧拉关于常微分方程和偏微分方程的大量新发现.他的分析学三部曲对其后分析学的发展产生了巨大的影响.

代数学引论(Vollständige Anleitung zur Algebra) 西方近代数学著作.瑞士数学家欧拉(Euler,L.)著,德文本出版于1770年,但最先是以俄文本发表于圣彼得堡(第一卷发表在1768年,第二卷发表在1769年).1766年,欧拉接受沙皇叶卡捷琳娜二世的邀请第二次到俄国首都圣彼得堡,不久便因眼疾双目失明(由于工作劳累1735年欧拉便右眼失明).之后,他着手写这部书,系由他口述,仆人笔录而成.本书出版后很快被译成英文、意大利文、法文等多种文字出版,给19世纪以至20世纪的代数学教科书以极大影响.

《代数学引论》由两部分组成.

第一部分内容属于定量分析,其中含4节.第1节是关于简单量的各种计算方法.欧拉首先定义了量:"能够增加或减少的东西就称为量."他举例认为钱数是量,因为它既可以增加又可以减少.同样重量也是量.之后,欧拉从解释加号"+"与减号"−"入手,还给出了简单量的加减乘除四则运算,以及开方、幂、对数等运算,给出了用分数指数表示无理数的方法.第2节介绍了计算复合量的各种方法,同样先给出复合量的加减乘除四则运算,之后介绍了将分数表为无穷级数的方法,给出了无理量的计算方法,并将求根术用于复合量,对指数分别为无理数和负数的情形分别做了讨论.第3节论述了比和比例,分别讨论了算术比、算术比例、几何比以及几何比例的运算,论述了算术级数和几何级数问题,并用之于利息的计算.这里欧拉对于级数的论述是不很严密的,他没有认真对待级数的收敛问题,出现了将等比级数$1+2+4+8+\cdots$的和作为-1的情况.第4节有关代数方法及其解法,欧拉介绍了简单方程,即一次方程的解法,然后对各类二次、三次及四次方程分别探讨了它们的代数解法.对于五次及五次以上的方程,他写道:"在这之前的各种尝试均告失败."这一问题引起欧拉的充分注意.值得一提的是,就在1770年,法国数学家拉格朗日(Lagrange,J.-L.)深入探讨了代数方程根式求解问题,考虑了有理函数当变量发生置换时所取值的个数,成为置换群论的先导.

第二部分内容是关于不定分析的,包含了欧拉

关于丢番图分析的一些发现. 此前欧拉曾经用连分数给出了方程 $x^2-dy^2=1$ (d 是正的非平方整数)的最小整数解的计算方法. 1753 年,欧拉证明了方程 $x^3+y^3=z^3$(其中 x、y、z 均为整数)解的不可能性. 他的证明基于无穷递降法,利用了形如 $a+b\sqrt{-3}$的复数,这在《代数学引论》中做了详尽的描述.

数学史(Histoire des mathématiques) 西方近代数学史专著. 法国数学家、数学史家蒙蒂克拉(Montucla,J. É.)著,两卷本,初版于 1758 年. 后进行了修订扩充,于 1799—1802 年又分为四卷出版(后两卷由拉朗德(Lalande,J. J. le F. de)主持完成). 这是近代西方数学史研究的重要经典著作.

数学史的研究很早就开始了. 在西方,希腊的欧德莫斯(Eudemus,(R))就写过一本算术史和一本几何学史,但除后世作者引述过的片断材料外,都失传了. 公元 5 世纪时,另一位希腊数学家普罗克拉斯(Proclus)对欧几里得(Euclid)《几何原本》第一卷的评注是重要的希腊数学史文献,流传至今. 中世纪,阿拉伯国家的一些传记作品和数学著作中也讲述了一些数学家的生平及有关史料. 此外,在蒙蒂克拉之前曾有两本著作致力于数学史,一本是沃西斯(Vossius,G. I.)的(1650 年),另一本是海布伦纳(Heilbronner,J. C.)的(1742 年),但这些早期的工作仅仅是个开头,内还有许多错误,或只是传说,不成其为正史;沃西斯和海布伦纳的两本著作也只是人名、日期、著作名等材料的堆砌. 蒙蒂克拉熟悉所有这些材料,认为应该有一部关于数学思想发展的综合的历史,于是他担当起这一极为困难、工作量浩繁的任务. 他的丰富的专业知识和对原始著作的把握能力使他取得了成功.

蒙蒂克拉曾于 1754 年发表《圆面积研究的历史》,这为他赢得了声誉,这是最早系统地研究圆周率历史的著作.《数学史》一书对各个世纪数学的发展做了精确的描述,此外也包括了可以应用数学的领域,如天文学、力学、光学、音乐等. 他认为前者是由"纯粹的抽象的东西组成,"后者则是"混合物". 纯粹数学的内容只占了三分之一篇幅. 在 1758 年两卷本中的第一卷,概括了数学的起源,从希腊数学(包括拜占庭时期)写起,直至 17 世纪初的西方数学;第二卷全部着笔于 17 世纪的数学发展史. 第三卷蒙蒂克拉原想写至 18 世纪中叶,但未果,主要是因为材料太浩繁. 在第二版中,内容扩至整个 18 世纪,第三卷为纯粹数学、光学和力学;第四卷为天文学、数学地理学、航海学的发展史等.

在康托尔(Cantor,M. B.)的《数学史讲义》(4 卷,1880—1908)出版之前,蒙蒂克拉的《数学史》是西方惟一的一部权威的数学史著作,并且后者对前者产生过很大影响.《数学史》至今仍有一定的参考价值,特别是它对 17 世纪数学发展的阐述.

分析力学(Mécanique analytique) 西方近代数学力学著作. 法国数学家、力学家、天文学家拉格朗日(Lagrange,J.-L.)著. 这是作者留居柏林期间所作,于 1788 年出版. 该著作出现于牛顿(Newton,I.)的《自然哲学的数学原理》之后 100 年,是此期间最重要的经典力学著作,其中成功地运用了变分原理和分析的方法,建立起了完整和谐的力学体系,显示了分析学的巨大威力. 它标志着拉格朗日是第一个真正的分析学者.

《分析力学》分为两大部分,第一部分为静力学,第二部分为动力学. 在每部分中,都分别处理了流体和刚体的情形. 在每一节的开头都有一段历史综述,成为它的一个特色. 第一部分共有 8 章. 在第 1 章中,介绍了静力学的各种原理,第 5 章是静力学各种问题的解. 第二部分共有 6 章,其中第 1 章给出了动力学的各种原理,第 4 章介绍了动力学问题的微分方程解法. 拉格朗日的目的,是将力学理论和力学中解决问题的艺术化归为一般的公式,其简单推导将产生解决每一个问题所需要的方程. 拉格朗日在该书的前言中写道:"本书的计划是完全新的……在这项工作中找不到图形,我在其中所阐明的方法,既不要求作图,也不要求几何的或力学的推理,而只是一些遵照一致而正规的程序的代数(分析)运算. 喜欢分析的人将高兴地看到力学变为了它的一个新的分支,并将感激我扩大了他的领域."这表明了作者的意图,他彻底摒弃了牛顿的几何方法,使分析方法取得了极大成功. 拉格朗日大量应用了由瑞士数学家欧拉(Euler,L.)、法国数学家达朗贝尔(d'Alembert,J. le R.)以及 18 世纪数学家发展的分析技巧,尤其是拉格朗日本人所发展的变分法. 他从一个统一的观点出发综合了各种不同的力学原理,证明了它们的联系与相互依赖性,使得对它们的有效性与范围的判断成为可能.

《分析力学》出版后,拉格朗日认为必须再出第二版,以便加进新近发展的某些内容. 第二版的第一卷出版于 1811 年,第二卷出版于 1816 年(这两卷 1965 年又出了重印本). 第二版中还加入了拉格朗日对天体力学的卓越贡献.

《分析力学》是拉格朗日最重要的著作. 作为一部经典科学著作,它对物理学和数学的很多分支(如常微分方程)的发展产生了深远影响,甚至在今天仍具有现实意义.

解析函数论(Théorie des fonctions analytiques) 西方近代数学著作. 法国数学家、力学家、天文学家拉格朗日(Lagrange,J.-L.)著,1797 年出

版. 这是第一本完整的、试图重建微积分基础的著作，在分析严格化运动中起了重要作用.

自从牛顿(Newton, I.)和莱布尼茨(Leibniz, G. W.)创立微积分以来，微积分的不严格的基础便屡遭攻击. 拉格朗日认识到，无穷小、极限、初末比等作为分析学的基础是不充分的. 由于拉格朗日曾在巴黎综合工科学校从事分析学的教学，因而使他有条件写出《解析函数论》，为此他最早做了雄心勃勃的尝试. 该书的副标题反映了作者的观点："远离无穷小，或消逝的量，或极限，或流数的任何考虑，而归结为有限量的代数分析."这表明作者的计划是注定不能彻底实现的，也揭示了法国数学家柯西(Cauchy, A.-L.)将分析学化归为代数分析这一企图的来源.

拉格朗日以对此前所有的分析基础的鲜明的批判，开始了他的《解析函数论》的撰写. 这一批判后来成为分析学标准文献的一部分，受到柯西、波尔查诺(Bolzano, B.)等人的重视. 按照拉格朗日的观点，无穷小是不严格的，无穷小分析是通过错误补偿获得正确结果的，因此无穷小不能作为分析学的基础. 他对牛顿的流数论也无法接受，因为其中的数学量似乎是由运动产生的. 显然，数学不应该以这种从物理学中借来的"外来思想"做为基础. 此外，拉格朗日认为牛顿的方法"有很大的不便，当它们(按：指所考虑的量)一旦同时都变为无时，它们的比在我们的头脑里就不再有清楚而确切的想法了". 至于当时存在的极限概念，拉格朗日认为它太模糊、太狭隘，是几何的而非代数的，因而不可靠. 他的目的是将微积分归结为代数，从而给微积分提供古人论证的全部严密性. 他所指的代数乃是无穷级数的代数. 他希望利用这一事实：任何一个函数 $f(x)$ 的附近都能表示成

$$f(x+h)=f(x)+ph+qh^2+rh^3+sh^4+\cdots$$

的形式. 他用一个纯形式的论据判定得到

$$p=f'(x),\ q=\frac{1}{2!}f''(x),\ r=\frac{1}{3!}f'''(x),\cdots$$

因此，

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)+\cdots$$

实际上，拉格朗日没有认真考虑导数的存在性，而级数的收敛问题也被忽视了，因而他的计划未能实现. 但是他对待分析基础的态度、观点，直接影响了柯西和波尔查诺. 波尔查诺在他的《纯粹分析的证明》中，赞扬了拉格朗日将分析学脱离几何和运动的概念而归结为代数的努力. 而当柯西于 1810 年离开巴黎去履行他的工程职务时，所带的四本书中就有《解析函数论》. 柯西和波尔查诺从拉格朗日的著作中学到的不只是技巧，而更重要的是迥异于前人的对分析基础的态度，从而对分析严格化运动，乃至对整个数学的发展做出了重要贡献. 拉格朗日通过他的著作和在巴黎综合工科学校的教学，影响了一大批数学家. 他用幂级数表示函数的处理方法对分析学的发展产生的影响，成为了实变函数论的起点.

几何学基础(Éléments de géométrie)　西方近代数学著作. 法国数学家勒让德(Legendre, A.-M.)著. 1794 年初版于巴黎，1823 年已出版到第 12 版，但内容与初版大致相同. 1845 年由布兰歇(Blanchet, A.-M.)修订新版，至 1876 年出版到第 21 版. 1819 年在美国首次出版英译本，至 1890 年已有多种英译本问世. 1822 年德文译本出版于柏林. 1837 年布加勒斯特出版了罗马尼亚文本. 该书出版后，在几乎一个世纪的时间里，被作为权威的初等几何学教科书，统治了欧洲这一科目在 19 世纪的教学.

《几何学基础》内容的表述效仿古希腊数学家欧几里得(Euclid)，其附录丰富了它的内容，至今仍有意义. 书中没有包括当时法国数学家蒙日(Monge, G.)及其学生在综合几何学方面的各种贡献. 勒让德在 20 多年的时间里研究过平行公设问题.《几何学基础》的各版本中反映了他对这一问题的努力过程，也显示了人们在寻求非欧几何学的过程中所遇到的各种各样的典型困难. 勒让德首先认识到，欧几里得第五公设实际上和"三角形内角和等于两直角"是等价的. 因此他为了"证明"第五公设，试图不用欧氏公设证明"三角形内角和等于两直角"这一事实. 他得到如下两个结论：

1. 直边三角形的三个角之和不能大于两直角，这个结论的证明利用了《几何原本》平行公设之前的所有公设、公理和定理.

2. 如果存在一个三角形，其内角之和等于两直角，则任一三角形的内角之和都等于两直角.

然而这些漂亮的定理对于证明平行公设是无济于事的，因为勒让德未能证明：一个三角形的内角和不能小于两直角. 像牛顿的所有信徒一样，勒让德确信绝对空间和直边三角形的"绝对度量". 他曾经试图利用"同性度量原则"建立三角形内角和定理，自然得到的是一些荒谬的推理.

此外，《几何学基础》还包含了三角学的初步知识，证明了圆周率 π 和 π^2 是无理数. 勒让德还写道："很有可能，数 π 不能包含在代数的无理数中，亦即它不能是其系数全部为有理数的有限项的代数方程的根."这表明他已意识到 π 为超越数这一事实.

画法几何学(Géométrie descriptive)　西方近代数学著作. 法国数学家蒙日(Monge, G.)著，1799 年出版. 本书是画法几何的第一本专著，它的出版标

志着画法几何作为几何学的一个专门分支的诞生.

蒙日对《画法几何学》的构想大约始于1775年前后.由于它在军事技术方面的应用,其内容在当时的法国是保密的,直至1798年禁令解除才得以公开出版.本书是蒙日在1795年于巴黎高等师范学校授课讲义的基础上整理出版的.其后传至其他许多国家.法文原著公开出版后,至1847年共有7个版本.原书共5章,自1820年第4版起,增添了蒙日的学生布里松(Brisson. B.)根据蒙日讲稿整理出的关于阴影和透视的理论.目前,该著作已有德文、英文、意大利文、西班牙文及俄文译本.中文译本出版于1984年,名为《蒙日画法几何学》(廖先庚译,湖南科学技术出版社出版).

《画法几何学》的法文原著,无章节标题,中文译本增添了标题,共分5章.第一章为"画法几何学的目的与方法及基本问题".开篇阐明了画法几何学的两个目的:"第一个目的是在只有长、宽两种尺度(即维)的纸上,为表达一切具有长、宽、高三种尺度的自然物体提供方法."第二个目的是:"为根据准确的图形来了解物体的形状提供方式方法,并从图形推导出物体的形状和相互位置的真相."之后,还介绍了投影法.第二章论述曲面的切平面和法线,给出了根据各种条件做出切平面的方法.第三章论述曲面的交线,阐述了作曲面相贯线投影的一般方法及某些特殊情形.第四章为曲面相贯线作图方法在解题中的应用.第五章讨论了双曲率曲线的曲率和曲面的曲率.

蒙日将《画法几何学》视为纯粹几何和无穷小几何各分支中发现和证明的有力工具,他把那些经过长期探索得到的成规,以及经过反复实践取得的简练的方法汇合在一起,形成了《画法几何学》这部在逻辑上无懈可击的理论体系.它用以阐述新理论的方法,非常简单明晰,堪称典范.坐标几何出现以后,纯粹几何的研究与应用部分地被摒弃了,这一著作的独创性和独辟的新途径重新引起了人们对综合几何学研究的兴趣.蒙日的工作极大地影响了他的学生彭赛列(Poncelet, J.-V.)等人的研究,开辟了通向现代几何学的道路.

天体力学(Traité de mécanique céleste) 西方近代数学力学著作.法国数学家、天文学家拉普拉斯(Laplace, P.-S.)著,共5卷,1799—1825年间出版.在这部著作中,拉普拉斯给出了太阳系力学问题的"完全的"分析解,把牛顿(Newton, I.)以来,达朗贝尔(d'Alembert, J. le R.)、克莱罗(Clairaut, A.-C.)、欧拉(Euler, L.)、拉格朗日(Lagrange, J.-L.)以及拉普拉斯本人取得的成果统一成一个系统的整体,它成为至拉普拉斯为止天文学工作发展的顶峰.该著作使拉普拉斯赢得了"法国的牛顿"的称号.

《天体力学》既包含理论科学,也包含应用科学.前两卷形成一个很大的理论体系,从方法论上看,其目的是将天文学化归为力学中的问题,其中行星运动的要素变成了任意量;从现象学上看,其目的是从引力定律得到一切观测数据.这两卷的第一部分是有关静力学和动力学定律的数学阐述,其中有两点属于拉普拉斯本人的创新:一是在关于力学的一般原理的第5章中,在面积守恒的讨论中引入了它的不变平面的概念;二是在第6章中,关于已知力与速度的关系的任意数学上可能的假设的物体组的运动规律的讨论.第二部分给出了理论天文学所需要的分析知识.第三部分讨论了行星图象,其中最主要的创新乃是椭球体引力理论与子午线的大地测量结果的比较.拉普拉斯发展了测地线的解析几何,导出了适合于地球情形的表达式.第四部分论述了海洋与大气的运动现象.第五部分结束了第二卷,是关于天体的旋转的论述.拉普拉斯拟将前两卷看作一个整体作为第一编,其余三卷为第二编.在第三卷的序言中他写道:"在这本著作的第一编中我们给出了物体平衡与运动的一般原理.这些原理对天体运动的应用,通过几何的(分析的)论证,不必作任何假定就导出万有引力定律,而重力的作用与抛射体运动则是这个定律的特例.然后我们考虑了服从于这个伟大的自然定律的体系,用奇妙的分析得到了它们的运动和图形的一般表达式,以及覆盖在它们表面上的流体振动的一般表达式.从这些表达式我们推断出大家知道的潮汐现象、纬度的变化与地球表面的引力、岁差、月球引力作用以及土星环的形状与转动……我们还推导出了行星运动的主要方程."他说第二编的主要目的是改进天文表的精度.第三卷全部被第六部分中的行星理论和第七部分中的月球理论占据.第四卷主要论述行星的卫星,其中的第八部分几乎全部致力木星的卫星的讨论.在第九部分中,拉普拉斯发展了从第二部分中提出的一般运动方程计算彗星摄动的公式.第十部分的小标题为"有关世界体系的各种论点",包含了大量新材料,反映了拉普拉斯兴趣的转移.在结束第四卷的时候,他的兴趣转向有关物理学的问题,所以说前四卷是《天体力学》的主体.

《天体力学》应用了大量深奥的数学知识,但拉普拉斯从不耐心地解释他是如何得出其结果的.美国数学家、天文学家鲍迪奇(Bowditch, N.)曾将五卷中的前四卷译成英文出版.

概率的分析理论(Théorie analytique des probabilités) 西方近代数学著作.法国数学家、天文学家拉普拉斯(Laplace, P.-S.)著,1812年出版,1814年出第二版.其序言是一篇题为"关于概率的哲学"的论文,表明了作者关于概率的哲学观,他认

为世界的未来完全是由它的过去决定的，而且只要掌握了世界在任一给定时刻的状态的数学信息，就能预知未来. 本书集古典概率论之大成，同时为概率论的近代发展提供了方法，奠定了基础.

《概率的分析理论》是在拉普拉斯于 1810—1811 年写的几篇论文的基础上写成的，其中的两篇分析论文最独创的部分，是得到了决定观测序列的中值的最小二乘法的中心极限定理.《概率的分析理论》由两部分组成. 第一部分的小标题为“母函数的计算”，致力于母函数计算的数学方法及其一般数学理论，试图以母函数理论作为概率论的基础. 第二部分小标题为“概率的一般理论”，这里拉普拉斯从分析转向概率论本身，提供了具体概率问题的解答. 他把机遇理论中的各种类型的问题做了统一处理. 第 1 章给出了概率论的一般原理. 他以概率论作为人类智力局限所需要的一个知识分支这一著名特征开始，在叙述了概率本身的定义及独立事件的乘法规则之后，给出了他的关于原因的概率的定理作为第三个基本原理. 之后，他以不对称的钱币为例，考虑了被错误地认为相等的概率的影响. 最后他区分了数学期望与心理期望. 第 2 章考察了由已知概率的简单事件构成的复合事件的概率，如从袋中抽球问题. 第 3 章处理极限，虽然其叙述不如 1810 年的论文清晰，但给出了各种各样的例子. 他以普通的二项式问题开始讨论，显示了他对随机过程有所认识. 第 4 章处理误差的概率. 他先是说明了如何确定误差和的概率的界限，然后得到了正负误差不相等的概率分布，最后处理了误差的统计预测. 第 5 章讨论概率在现象本身及其原因的研究中的应用. 第 6 章属于统计推断问题. 第 7—10 章均很简短，讨论了寿命预测、年金率保险、心理期望等问题. 第 11 章是第二版时加上去的，其中利用了贝叶斯分析. 1820 年，拉普拉斯又将该书整理补充出版了第三版，其内容基本固定了下来，现收在拉普拉斯的全集中.

算术研究(Disquisitiones arithmeticae)　西方近代数学著作. 德国数学家、物理学家、天文学家高斯(Gauss，C. F.)著，1801 年出版. 该著作开创了数论研究的新纪元，决定了其后数论研究的方向. 高斯把记号标准化，把要研究的问题和解决问题的方法进行了分类，并引进了新的方法，系统处理并推广了现有的定理. 该书用拉丁文写成. 1863 年，狄利克雷(Dirichlet，P. G. L.)撰写了一本《数论讲义》对之作了明晰的阐释，使高斯的思想得到广泛传播.

《算术研究》有法文(1807)、德文(1889 初版，1965 重版)、俄文(1959)、英文(1966)等多种译本. 直到高斯在数论(高等算术)方面做出决定性的贡献之前，这个学科还只是一些孤立结果的集合，虽然这些结果常常是光辉的.《算术研究》共有七节. 高斯一开始便试图统一这门学科. 在序言中他写道：“我偶然发现了整数论中的真理. 我不仅认为那真理本身优美，而且因为其他漂亮的诸性质，皆可与其相关地来考虑，所以我就想法探究其原理，努力给出严格的证明. ”他在第一节中引进了同余的记号，并在此后系统地应用了它. 虽然欧拉(Euler，L.)、拉格朗日(Lagrange，J. - L.)及勒让德(Legendre，A. - M.)等人已经引进同余的概念，但高斯第一个对之作了系统的处理. 接着在第二节中研究了一次同余式理论，给出了拉格朗日建立的多项式同余式的基本定理的证明. 在第三节中高斯处理了幂的同余式，他用同余式理论给出了费马小定理的一个证明. 第四节研究二次剩余，在证明了一些关于二次同余式的定理之后，他运用二次剩余的概念给出了二次互反律的第一个严格证明. 二次互反律是 18 世纪数论中最富独创性的发现，欧拉和勒让德都曾试图给出证明，但都不完善. 高斯把二次互反律誉为算术中的宝石，后来又给出了它的好几个证明. 第五节致力于型的理论，对之做了系统化并扩展了它. 他从拉格朗日的工作中抽象出了型的等价的概念，在给出了这一定义之后，还证明了一系列有关定理. 接着他研究了型的复合，其后转向三元二次型的处理. 型的理论后来成为 19 世纪数论的重要课题. 第六节是上述问题的种种应用. 第七节中讨论了分圆方程 $x^p-1=0$(p 是素数)，其结果对代数求解一般的 n 次方程具有重要意义，对正 p 边形的几何作图问题也具有同样的重要性.

《算术研究》不仅是数论方面的划时代著作，而且也是历史上最优秀的数学著作之一.

关于曲面的一般研究(Disquisitiones generales circa superficies curves)　西方近代数学著作. 德国数学家、物理学家、天文学家高斯(Gauss，C. F.)著，1828 年出版于格丁根. 该著作开创了曲面内蕴几何学，是微分几何发展史上的里程碑. 其思想后来被德国数学家黎曼(Riemann，(G. F.)B.)等人所发展，对几何学发展产生了深远的影响.

《关于曲面的一般研究》用拉丁文写成，后有法文(1852，1859)、德文(1884，1889)、俄文(1895)、匈牙利文(1897)、英文(1902)等多种译本.

高斯对微分几何的研究，始于他在大地测量方面的工作，早在 1796 年，他就研究过测量问题，从 1816 年开始的大量实际物理测量和理论思考导致了《关于曲面的一般研究》的诞生. 1822 年，高斯曾以关于曲面保形变换的一般解的论文，获哥本哈根科学院奖，进而他试图“展开其他一些新观点并发展一些新定理”. 在《关于曲面的一般研究》中，高斯沿用瑞士数学家欧拉(Euler，L.)的方法用两个参数 u 和 v 将曲方程表示为

$$x = x(u,v),\quad y = y(u,v),\quad z = z(u,v),$$

并以此展开对曲面的系统研究.这样产生的表达式中将含有 15 个元素,即 x、y、z 关于 u、v 的一阶、二阶偏微分系数,但这便于向另一种表达式转换.如果用这种方法表达曲面的性质,则任意曲面上的基本量弧长元素(在 (x,y,z) 坐标中,是 $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$)便可写成

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

其中 E、F、G 为 u、v 的函数.曲面上两条曲线的夹角是另一个基本量.设 θ 是两个方向(一个由 $du : dv$ 决定,另一个由 $du' : dv'$ 决定)之间的夹角,高斯证明了如下事实,即

$$\cos\theta = \frac{Edudu' + F(dudv' + du'dv) + Gdvdv'}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\ \sqrt{Edu'^2 + 2Fdu'dv' + Gdv'^2}}.$$

接着高斯研究了曲面的曲率.他得到了曲面的(总)曲率 K 的表达式为

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

并证明它就是欧拉早提出过的在 (x,y,z) 处的两个主曲率之乘积.之后,高斯做出一个重要的断定,即曲面的几何性质仅由 ds^2 的表达式中的 E、F 和 G 决定,u、v 的这些函数便是事情的全部.为此高斯得到了所谓高斯特征方程,证明曲面的曲率 K 是依赖于 E、F、G 的.

在《关于曲面的一般研究》中,高斯还研究了另一个极其重要的课题,即寻找曲面上的测地线(高斯使用了"最短线"的名称,"测地线"这一名词是刘维尔(Liouville,J.)于 1850 年引进的,取自大地测量学).他证明了约翰第一·伯努利(Bernoulli,Johann Ⅰ)提出的一个定理:测地线的主法线垂直于曲面.此外,高斯还证明了一条关于曲率的著名定理.设 K 是一个曲面的可变曲率,

$$\iint_A K dA$$

是该曲率在面积 A 上的积分,则对于一个由测地线构成的三角形来说

$$\iint_A K dA$$

(即三角形的总曲率)等于三角形的三个角之和与两直角的差.

高斯关于微分几何的工作意义深远,他证明了曲面的几何可以集中在曲面本身进行研究,表明曲面本身可以看成的一个空间,因为它的性质由 ds^2 确定.这是具有决定意义的结论,因为这意味着至少在曲面上有非欧几何,甚至同一张曲面又可以有不同的几何.高斯工作中蕴含的这些重要思想,后来由卓越的几何大师黎曼继承和发展,并成为爱因斯坦广义相对论的数学基础.

纯粹分析的证明(Rein analytischer Beweis)

西方近代数学著作.捷克数学家、哲学家波尔查诺(Bolzano,B.)著,1817 年出版于布拉格.该书是分析严格化过程中的一个里程碑,其中波尔查诺首次给出了对分析基础的正确处理方法.

19 世纪初,数学家主要关心两个重要问题,即欧几里得平行公设的地位和给数学分析提供严密的基础问题.波尔查诺对此均有建树.当然,他并不是惟一的一个,也不是第一个关心数学分析基础的人,但他在此问题上超过了他以前的所有数学家,尽管他们可能比波尔查诺有更丰富的技巧.在《纯粹分析的证明》中,波尔查诺致力于如下重要定理的证明:对两个连续函数 f 和 φ,若 $f(\alpha) < \varphi(\alpha)$,且 $f(\beta) > \varphi(\beta)$,则在 α 和 β 之间存在一个 x,使 $f(x) = \varphi(x)$.他首先注意到以前的证明都或多或少地依赖于几何直观,这是他极力想摆脱的.这一点表明他在分析基础严格化方面采取了正确的道路.波尔查诺认为该定理的严格证明需要预先给出连续函数的可靠定义.他在文中的确给出了一个这样的定义,这是第一个不牵涉无穷小的、关于函数连续性的定义,因而极为重要,该定义至今仍被采用.在他以后的著作《函数论》第一卷中,他把该定义更精确地表述如下:若取 $\triangle x$ 足够小时,如果 $F(x + \triangle x) - F(x)$ 的绝对值小于任一给定的分数 $1/N$,且当 $\triangle x$ 取更小的值时,仍然如此,则函数 $F(x)$ 称为是(在 x 处)连续的.波尔查诺并且区分了左、右连续.在定理的证明中他利用了一个引理,即建立了有界实数集的最小上界的存在性:如果某一性质 M 不能适用于一变量 x 的所有值,但小于某一量 u 的所有 x 都具有性质 M,则存在一量 U,它是所有这样的量 u 的最大值.这在后来被证明是实数理论的基石.波尔查诺对这个引理的证明的实质是,把有界区间分成两部分,而选取包含集合的无穷多个元素的那一部分,然后重复这一手续,直到他得到给定实数集的最小上界为止.德国数学家外尔斯特拉斯(Weierstrass,K.(T. W.))在 19 世纪 60 年代应用波尔查诺的方法证明了外尔斯特拉斯-波尔查诺定理.

尽管上述两定理已经显示了《纯粹分析的证明》的重要内容,它还包含有另一同等重要的定理,这被称为柯西收敛条件.波尔查诺证明了:如果取 n 充分大时,序列 $F_1(x), F_2(x), \cdots, F_n(x), \cdots, F_{n+r}(x), \cdots$ 的第 n 项 $F_n(x)$ 和其后很远的一项 $F_{n+r}(x)$ 之差小于任一已知量,则存在惟一的定值,该序列逼近于它——要多逼近有多逼近.该定理的证明是不完善的,而且也只能如此.因为其完善证明需要实数的准确定义,这在当时波尔查诺是不具备的,完善的实数理论直到 19 世纪下半叶才建立起来.

《纯粹分析的证明》是走向分析严格化的极为重

要的一步，但可惜的是这项工作被忽视达半个世纪之久，直到 19 世纪下半叶人们才充分认识到它的重要性.

分析教程(Cours d'analyse de l'école royale polytechnique) 西方近现代数学著作. 法国数学家柯西(Cauchy, A.-L.)著，1821 年出版于巴黎，是作者为巴黎综合工科学校所写. 该书是严格微积分的奠基之作.《分析教程》与作者的其他几种分析基础方面的著作《无穷小分析教程概论》(1823)、《微积分讲义》(1829)等，对分析学以至整个数学产生了深远的影响.

柯西之前曾有很多人考虑过分析的严格性问题，但第一个成功的处理，是由捷克数学家波尔查诺(Bolzano, B.)在《纯粹分析的证明》(1817)中给出的，但他的著作被忽视达几十年之久. 在当时流行的观点仍然是：对实数为真的命题对复数也真；对有限量为真的对无穷小也真；对收敛级数为真的对发散级数也真. 柯西拒绝这种所谓"代数通则"，开始认真地对待分析学中的每一个基本概念. 他运用代数工具将先前所有依赖于几何学直观的概念定义在严格的基础上，从而为整个分析学的严格化开辟了一条正确的道路.

《分析教程》共分 12 章，书后有 9 个附注. 第 1 章介绍实函数；第 2 章讲述无穷小量及函数的连续性概念；第 3 章介绍对称函数、交错函数及齐次函数；第 4、5 两章为整函数与连续函数的确定；第 6 章为收敛与发散级数；第 7 章为虚数的表示；第 8 章为变量与复函数；第 9—11 章为收敛与发散的复数级数、有理分数的分解；第 12 章为循环级数. 附注内容有：关于正、负量的理论(附注 1)、方程的数值解(附注 3)、无穷乘积(附注 9)等. 在本书的导言中柯西表明了他试图给分析学以严密性的意图，之后便从定义变量、函数开始论述："人们把依次取许多互不相同的值的量称为变量. ""当变量之间这样联系起来的时候，即给定了这些变量中的一个值，便可以决定所有其他变量的值时，人们通常想象这些量是用其中的一个来表达的，这时这个量就称为自变量，而由这个自变量表示的其他量，就称为这个自变量的函数. "由此又给出了极限和连续的概念："当同一个变量依次所取的值无限地趋近于一个定值，最终使它们与该定值之差要多小就多小，这个定值就称为所有其他值的极限. ""$f(x)$是变量 x 的一个函数，x 界于给定的两限之间，若对于两限之间的每一个 x 值，差$f(x+\alpha)-f(x)$的(绝对)值依 α 无限地变小，则称$f(x)$是连续函数. 换句话说，函数 $f(x)$对界于给定界限之间的 x 是连续的，若变量的无穷小增量总导致函数自身的一个无穷小增量. "这里柯西将无穷小量定义为以零为极限的变量，从而澄清了自德国数学家莱布尼茨(Leibniz, G. W.)以来对无穷小概念的模糊认识. 同样，柯西将导数定义为一个比值的极限，并强调把积分定义为和的极限，来代替把积分看作是微分法的逆，这是历史上第一个关于定积分的恰当定义.

此外，柯西在《分析教程》中对级数的收敛性做了深刻的研究，这是关于级数收敛性的第一个具有广泛意义的论述. 他写道："令 $S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}$是级数前 n 项的和，n 是自然数，若对于不断增加的 n 的值，和 S_n 无限趋近于某一极限 S，则级数称为收敛的，这个极限值称为该级数的和. 反之，如果 n 无限增大时 S_n 不趋于一个固定的极限，则该级数就称为发散的，且级数没有和. "之后，他给出了柯西收敛判别准则，即序列$\{S_n\}$收敛于一个极限 S，当且仅当 $S_{n+r}-S_n$ 的绝对值对于一切 r 和充分大的 n 都小于任何给定的量.

当然，柯西的著作若用现代标准来衡量，其严密性是不够的. 例如他使用的"无限趋近、""要多小有多小"等术语并未完全脱离直观. 令

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x),$$

柯西认为，若级数收敛，$u_n(x)$都连续，则 $F(x)$也连续，他忽视了一致连续的要求. 此外，当时实数理论也还没有完善. 但柯西的著作鼓舞了许多人在分析严格化方面的努力，《分析教程》为微积分所奠定的严密基础推动了整个分析学的发展. 挪威数学家阿贝尔(Abel, N. H.)在柯西工作的基础上提出了一致收敛的概念，并在信中高度赞扬了柯西的工作，他称柯西为"当今懂得应该怎样对待数学的人". 阿贝尔极为欣赏《分析教程》，认为"每一个在数学研究中喜欢严密性的人都应该读这本杰出的著作".《分析教程》是 19 世纪数学严格化的典范，1828 年被译成德文出版.

关于定积分理论的报告(Mémoire sur la théorie des intégrales définies) 西方近现代数学著作. 法国数学家柯西(Cauchy, A.-L.)著. 1814 年在巴黎科学院宣读，1827 年出版，柯西在出版时增加了两个注解，加进了这期间该理论的新发展. 该报告开创了复变函数论的研究，在复变函数论的历史上具有重大意义.

柯西对复变函数论的研究是他最重要的工作之一，这篇报告是他在复函数论方面的第一篇重要论文. 1825 年，柯西写了另一篇重要论文"关于积分限为虚数的定积分的报告"(1874 年发表). 这被认为是他最重要的工作，但是柯西本人一直没有认识到它的重要价值. 直到 1851 年他还从未提到过它，而多次提到的仍是"关于定积分理论的报告"，可见在柯西自己的心中是极为欣赏 1814 年的这篇报告的.

在柯西之前，瑞士数学家欧拉(Euler,L.)就曾经研究过特殊的复函数，法国数学家达朗贝尔(d'Alembert,J. le R.)也发展了所谓柯西-黎曼方程.但即使在19世纪初复数也未获一致认可.当时在复函数方面最鼓舞人心的冒险行动是欧拉和拉普拉斯(Laplace,P.-S.)关于将积分路径从实数域扩展到复数域，从而得到定积分新公式的粗略的设想.尽管高斯(Gauss,C. F.)看来已知道大部分关于复函数的基本事实，但当时他没有发表这方面的任何文章.柯西在"关于定积分理论的报告"的序言中说，他的工作受到了欧拉和拉普拉斯的影响.他处理了在流体力学研究中出现的二重积分的积分换序问题.他把复函数表示为两个变量的实函数对.由于勒让德(Legendre,A.-M.)的批评，在1825年送去发表时，柯西在脚注中恢复了复观点，尽管他还未承认复积分路径.

柯西在"关于定积分理论的报告"中处理的问题在今天看来似乎也有些奇怪.他考虑了复变量 $z=x+\mathrm{i}y$ 的可微函数 $f=u+\mathrm{i}v$，利用柯西-黎曼积分方程之一，得到矩形 $x_0\leqslant x\leqslant x_1, y_0\leqslant y\leqslant y_1$ 上的二重积分

$$\iint u_x \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint v_y \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

通过该积分的演算，他得到如下基本等式

$$\int_{y_0}^{y_1}(u(x_1,y)-u(x_0,y))\mathrm{d}y$$
$$=\int_{x_0}^{x_1}(u(x,y)-u(x,y_0))\mathrm{d}x.$$

利用另一个柯西-黎曼方程他得到第二个等式，综合三者，得出

$$\mathrm{i}\int_{y_0}^{y_1}(f(x_1,y)-f(x_0,y))\mathrm{d}y$$
$$=\int_{x_0}^{x_1}(f(x,y_1)-f(x,y_0))\mathrm{d}x,$$

即沿矩形回路的柯西积分定理.证明中假定了函数的正则性.当然以后柯西又发展了他的理论，但即使在1814年的报告中，柯西积分定理也被证明是强有力的工具.许多新旧定积分可以用此方法得到验证.今天看来使用二重积分的方法有点奇怪，但在当时必定是极自然的.事实上，高斯在他的关于代数基本定理的第二个证明(1816)中也同样使用了二重积分.的确，1814年的这篇报告中没有明显指出复函数论怎样被包括在内，但1825年的报告中他朝现今所谓柯西积分定理前进了一大步.他定义了复域中任意路径上的定积分，并通过变分指出在 $f(z)$ 的正则区域中这样的积分只依赖于路径的端点.后来他定义了留数概念，得到一些重要定理.所有这些研究都始于1814年的报告.从1821年后，差不多25年中，柯西单独一人发展了复函数理论，他的一系列工作奠定了这门学科的基础.

热的分析理论(Théorie analytique de la chaleur) 西方近现代数学著作.法国数学家、物理学家傅里叶(Fourier,J.-B.-J.)著，1822年出版.在本书中作者用数学公式将基本物理原理表述得极为清晰和详尽，开创了数学物理研究的新篇章，是数学应用于物理学的一个里程碑，对数学和理论物理学的发展都有深远影响.

《热的分析理论》的主要部分是作者在1807年底向巴黎科学院递交的一篇关于热传导问题的论文，其中傅里叶研究了热在均匀的、各向同性的介质中的传导问题，解决了特殊热传导问题.他从探讨固体内部的温度变化规律入手，首先推导出热传导方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=K\frac{\partial v}{\partial t}.$$

为解上述方程，傅里叶发现解析函数可以表示为三角级数，因而他认为任意周期函数 $f(x)$ 都可表示为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}(a_i\cos ix+b_i\sin ix)$$
$$(-\pi<x<\pi),$$

但他从未给出严格证明.在科学院的论文审查委员会的成员中，拉普拉斯(Laplace,P.-S.)、蒙日(Monge,G.)等都很欣赏傅里叶的工作，但拉格朗日(Lagrange,J.-L.)却强烈反对.因为傅里叶为了表述某些物体中的初始温度分布使用了傅里叶级数，而拉格朗日在研究弦振动问题时对三角级数是持贬低态度的.但科学院于1810年确定将热传导问题作为悬赏课题，次年傅里叶向科学院呈递了重新修改过的论文，其中包括对在无穷介质中热传导的新分析.在这些情形中，傅里叶级数的周期性不适合表达初始条件，因而傅里叶以傅里叶积分定理取代之，他写成

$$\pi f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{d}t\int_0^{\infty}\cos q(x-t)\mathrm{d}q$$

的形式.该论文获得此项奖金，但因缺乏"严格性与一般性"受到批评.此后于1822年他首次将该文编入《热的分析理论》发表.傅里叶的工作超出了牛顿(Newton,I.)《自然哲学的数学原理》限定的力学范围，第一次将物理问题表述为线性偏微分方程中边值问题.此外，他给出的解方程的强有力的数学工具(如用积分解各种微分方程的方法)导致了一系列后续工作，有力地推动了19世纪偏微分方程的发展.他的工作还使人们不得不重新认识函数、连续等基本数学概念.他的理论成为傅里叶分析的起源.1878年出版了《热的分析理论》的英译本，它的法文第二版收入1888年出版的《傅里叶全集》的第一卷中.

论图形的射影性质(Traité des propriétés pro-

jectives des figures) 西方近现代数学著作. 法国数学家、力学家彭赛列(Poncelet, J. - V.)著, 1822年出版. 这是第一本完全致力于射影几何学的著作. 彭赛列充分认识到射影几何学是具有独特方法和新目标的数学分支, 从而在该著作中对这学科第一次做了系统处理. 它标志着现代射影几何学的开始.

彭赛列曾在俄国人的监狱中不借助参考材料, 重新回忆推导了从蒙日(Monge, G.)等人那里学来的纯粹与解析几何知识. 之后便开始创造出新的结果, 这些发现奠定了他关于射影几何学工作的基础. 1820 年, 他向巴黎科学院递交了题目为"论圆锥曲线的射影性质"的论文, 其中包括了他的新几何学思想. 彭赛列想以圆锥曲线为例, 表明几何学的语言和概念可以通过系统地使用无穷远元素和虚元素而得到推广. 该论文成为 1822 年出版的《论图形的射影性质》中的一部分. 在该书中, 彭赛列研究了几何图形在投射与截影下保持不变的性质, 即图形的射影性质, 取得了丰富的成果, 奠定了现代射影几何学的基础. 他像德扎格(Desargues, G.)、帕斯卡(Pascal, B.)等人一样采用了中心投影, 即从一个点投影, 并把它提高成为研究几何问题的一种方法. 在他的工作中, 有三个主导性观念, 第一个主导性观念是透射的图形. 两个图形是透射的, 如果一个图形能从另一个图形经过一次投射与截影或一串投射与截影得出. 第二个主导性观念就是连续性原理. 在该书中他写道: "如果一个图形从另一个图形经过连续的变化得出, 而且后者与前者同样地一般, 那么马上可以断定, 第一个图形的任何性质, 第二个图形也具有. "对此他在本书中做了大胆地应用, 证明了许多定理, 并用它来讨论虚图形. 至于这一原理的真实性, 彭赛列承认能够从代数上证明, 但他坚持认为这并无必要. 他的第三个核心观念是关于圆锥曲线的极点和极线的概念. 彭赛列在研究圆锥曲线的配极过程中已充分确定了对偶原理, 并认为配极关系是这一原理成立的主要原因. 彭赛列的功绩以往是被低估了, 他的著作所显示的射影几何和度量几何的区别, 预示了现代结构概念的出现.

《论图形的射影性质》于 1865—1866 年由彭赛列本人出版了第二版, 含两卷, 其中第一卷是该书第一版的重印, 第二卷收集了作者于 1822 年后的几何学论文.

高于四次的一般方程的代数求解之不可能性的证明(D'emonstration de L'impolli - bilitè ole la rèsolution algèbrique ales èquation génèrales qui passent la quatrieme degre) 西方近现代数学著作. 挪威数学家阿贝尔(Abel, N. H.)著, 发表于著名的《克雷尔杂志》(即《纯粹与应用数学杂志》)创刊号上(1826).

求解多项式方程一直是数学家不懈研究的古老课题. 用代数方法求解一般的三次和四次方程由意大利数学家塔尔塔利亚(Tartaglia, N.)、卡尔达诺(Cardano, G.)、费拉里(Ferrari, L.)等人解决后, 人们便致力于用代数方法求解四次以上的方程. 对此许多大数学家做出了努力, 其中包括德国数学家莱布尼茨(Leibniz, G. W.)、瑞士数学家欧拉(Euler, L.)、法国数学家拉格朗日(Lagrange, J. - L.)等人. 拉格朗日的工作尤为深入, 他的方法对求解一般的二次、三次和四次方程都卓有成效, 但他试图用这种方法去解五次方程时, 便发现工作是如此艰难, 最终不得不放弃了. 后来拉格朗日得出结论说, 用代数运算求解高于四次的一般方程看来是不可能的. 他判断说, 或者是这个问题超越了人的智力范围, 或者是根的表达式的性质必定不同于当时所知道的一切. 德国数学家高斯(Gauss, C. F.)对二项方程 $x^n-1=0$的研究, 对代数求解一般的 n 次方程的问题也具有重要意义. 阿贝尔早在中学时代就对此问题产生了浓厚的兴趣, 他读了拉格朗日和高斯的著作, 并试图按照高斯对二项方程的处理方法研究高次方程的可解性. 开始, 他认为自己已经解决了用根式解一般的五次方程的问题, 但构造例子时, 他认识到了自己方法的错误. 几年之后, 他重新捡起这一问题, 这次采取了相反的观点, 成功地解决了悬了几个世纪之久的难题, 证明了一般的五次或更高次方程的解是不能用根式表示的. 阿贝尔认识到该结果的重要性, 决定自费将其印刷出版. 为节省开支, 1824 年, 他将其结果压缩成只有六页的短文印刷出来, 此即《论代数方程, 其中证明了一般五次方程的不可解性》. 为扩大影响, 该文用法文写成, 但遗憾的是并未在外国数学家(其中包括高斯)中产生什么影响, 其艰涩难读影响了人们的迅速理解.

1826 年, 当时在柏林的阿贝尔, 协助克雷尔(Crelle, A. L.)创建了著名的《纯粹与应用数学杂志》, 首卷中刊载了阿贝尔的七篇论文, 其中包括《高于四次的一般方程的代数求解之不可能性的证明》一文, 这是 1824 年文章的扩充. 这里阿贝尔给出了必要的代数背景, 包括代数域扩张的讨论. 全文共分四节, 第一节讨论了代数函数的一般形式; 第二节讨论了已知方程满足的代数函数的一般形式; 第三节对置换做了探讨; 第四节给出了五次方程的一般解的不可能性的证明, 从而立即得出高于五次的一般方程的代数求解之不可能. 证明中他利用了著名的定理: 可用根式求解的方程的根能以这样的形式给出: 出现在根的表达式中的每个根式都可表成方程的根和某些单位根的有理函数. 这一结果现在通常称为阿贝尔-鲁菲尼定理, 但当时他并不知道鲁菲尼(Ruffini, P.)的结果.

阿贝尔的这一著名工作，结束了人们用代数解一般的高次方程的徒劳的努力，也引出了新的问题.因为某些特殊的方程还是可以用根式求解的，因而阿贝尔又着手探讨可用根式求解的方程的根本特征.由于阿贝尔过早的去世，这一任务由法国数学家伽罗瓦(Galois，E.)出色地完成了，这是 19 世纪数学史上最出色的，也是最富于革命性的工作之一.

数学分析在电磁理论中的应用(An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism) 西方近现代数学著作.英国数学家格林(Green，G.)著，1828 年通过格林的朋友赞助在诺丁汉市私人出版.这是位势论的经典文献.由于格林自学成材，基本上处于与学术界隔绝的的环境中，所以他的这一重要著作没有立即引起重视.第一次只印刷了不足 100 本，很快便难以找到了.1841 年，汤姆森(Thomson，W. 即 Kelvin 勋爵)在一篇文章的参考文献中见到作者引用格林的这一著作，从而引起了他的重视，但直到 1845 年他才见到这部著作.汤姆森认识到这一著作的巨大价值，于 1850—1854 年在《纯粹与应用数学杂志》上重新发表了这部著作，并加了导言，之后产生了很大影响.通过汤姆森、麦克斯韦(Maxwell，J. C.)等人，由格林发展的位势的一般数学理论导致了支承 20 世纪工业的电磁数学理论.位势论业已发展成为数学的一个独立分支.1928 年，爱因斯坦(Einstein，A.)曾致电诺丁汉市，祝贺《数学分析在电磁理论中的应用》出版 100 周年，他赞扬格林的工作走在了其他数学家(包括高斯(Gauss，C. F.))的前头.

格林在《数学分析在电磁理论中的应用》的前言中，为他的资料来源有限而抱憾.的确，他只引用了泊松(Poisson，S.-D.)、拉普拉斯(Laplace，P.-S.)、傅里叶(Fourier，J.-B.-J.)、柯西(Cauchy，A.-L.)等少数几位数学家的工作.一开始他便强调了位势函数的中心地位，此前拉普拉斯和泊松等人已经用到过位势函数，但“位势”这一名称是格林首先引入的.之后，他发展了位势函数的一般性质，并将它应用于电磁学.格林从位势方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0\ (\text{简记为 }\triangle v=0)$$

开始，证明了位势论中极为重要的下述定理：设 U 与 V 是 x、y、z 的任意两个连续函数，它们的导数在任一物体的任何点上有限，则(用现代的记号)

$$\iiint U\triangle V\mathrm{d}v+\iint U\frac{\partial V}{\partial n}\mathrm{d}\sigma=\iiint V\triangle U\mathrm{d}v+\iint V\frac{\partial U}{\partial n}\mathrm{d}\sigma,$$

式中，n 是物体表面指向内部的法向量，$\mathrm{d}\sigma$ 是曲面元.之后，他引入了所谓格林函数的概念.如今格林函数已成为偏微分方程的一个基本概念，并被日益广泛地应用于现代物理学的若干领域.

格林的工作孕育了以汤姆森、麦克斯韦为代表的剑桥数学物理学派，他是分析学引入英国后第一个沿欧洲大陆上的工作方向前进的英国大数学家，作的著作——《数学分析在电磁理论中的应用》已成为近代位势论的经典文献之一.

椭圆函数论新基础(Fundamenta nova theorize functionum ellipticarum) 西方近现代数学著作.德国数学家雅可比(Jacobi，C. G. J.)著，1829 年出版.雅可比与阿贝尔(Abel，N. H.)共享发现椭圆函数的盛誉，该著作是雅可比研究工作的总结，是椭圆函数论的重要经典著作.

椭圆函数论是 19 世纪数学家兴趣的中心点.在雅可比和阿贝尔之前，高斯(Gauss，C. F.)、欧拉(Euler，L.)、拉格朗日(Lagrange，J.-L.)、勒让德(Legendre，A.-M.)等人曾经取得椭圆函数论中的若干关键性结果，但他们只考虑椭圆积分.雅可比和阿贝尔差不多同时有了从椭圆积分的反函数入手进行研究这一重要思想，从而开辟了通往今天椭圆函数论的道路.雅可比的思想的发展主要体现在该著作中.本书由两部分组成，第一部分主要处理椭圆函数的变换.雅可比以第一类一般椭圆积分为起点，通过结合两种变换得到了第一类椭圆积分的乘积这一漂亮结果.之后，雅可比将反函数 $\varphi=amu$ 引入椭圆积分

$$U(\varphi,k)=\int_0^{\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

中，这样 $x=\sin\varphi=\sin amu$.进一步引入

$$\cos amu=am(k-u)\ \left(k=u\left[\frac{\pi}{2},k\right]\right),$$

$$\triangle amu=\sqrt{1-k^2\sin^2 amu}$$

(这些在今天分别表示为 snu、cnu 和 dnu)，建立了这些函数间的关系.此外，雅可比将虚数引入椭圆函数论，利用代换 $\sin\varphi=\mathrm{i}\tan\Psi$，建立了关系

$$\sin am(\mathrm{i}u,k)=\mathrm{i}\tan am(u,k'),$$

模 k、k' 满足 $k^2+k'^2=1$.这样他得到了椭圆函数的双周期性、零值、无穷值及在半周期上值的变化等结果.在第一部分的最后，雅可比发展了被所有变换模满足的三阶微分方程.

《椭圆函数论新基础》的第二部分处理椭圆函数的表示，致力于将椭圆函数展开成各种无穷乘积和级数.他给出的椭圆函数 $\sin amu$、$\cos amu$、$\triangle amu$ 的第一个表示是以无穷乘积的商的形式.引入函数

$$Z(u)=\frac{F'E(\varphi)-E'F(\varphi)}{F'}\ (\varphi=amu)$$

之后，他处理第二类积分.第三类积分被化为第一类

和第二类积分.函数

$$H(u)=H(0)\cdot\exp\left(\int_0^u z(u)\mathrm{d}u\right),$$

在他的椭圆函数中起了重要的作用.第二部分另外的内容是将 $H(u)$ 这样的函数表示为无穷乘积和傅里叶级数,从而得到一些卓越的公式.最后,雅可比以椭圆函数论在数论中的应用的讨论结束全书.雅可比对椭圆函数论的探讨,后来成为这一课题本身发展所遵循的模式.

代数通论(Treatise on Algebra) 西方近现代数学著作.英国数学家皮科克(Peacock,G.)著,1830 年初版,1842—1845 年出版了两卷本的修订版.在该书中,皮科克试图给负数和复数以坚实的逻辑基础,首创以演绎方式建立代数学,对于抽象代数概念的演进起了重要的推动作用.

1800 年左右,数学家们自由地使用各类实数以至复数,但是并没有这些数的精确定义,也没有关于数的运算的合理性的任何逻辑检验,因而对于利用文字或符号表达式进行运算的正确性尚不能建立.皮科克最先考虑了这一问题.为了说明用文字表达式进行运算的正确性,这些表达式要能代表负数、无理数和复数,他将代数领域划分为算术代数和符号代数,前者符号表示正整数,所以有可靠的基础,在这里仅允许正整数的运算;符号代数采用算术代数的规则,取消限于正整数的限制.在算术代数中推出的全部结果与符号代数中的结果都一样.算术代数中的表达式在形式上是普遍的,在值上是特殊的,而符号代数中的表达式在取值上和形式上都是普遍的.例如在算术代数中,$a^m a^n=a^{m+n}$,当 m 和 n 是正整数时成立,而在符号代数中它对一切 m 和 n 都成立.皮科克的论证被称为型的永恒性原理.关于符号代数,皮科克认为:

1. 符号在取值和表示上都是无限制的.
2. 无论是什么符号,任何情况下都能进行运算.
3. 符号组合的法则与算术代数的法则普遍适合.

皮科克相信从这些原则出发,能够推出等价的型的永恒性原理,并试图利用它证明复数运算的合理性.事实上,他的结论是武断的.在本书第二版中,皮科克引进了正式的代数科学.他认为代数和几何一样,是演绎的科学,其步骤必须依据法则条文的一个完全的陈述,这些法则条文支配着其中用到的运算.

皮科克的型的永恒性原理是从所采用的公理推出来的,因而尽管他的观点具有局限性(例如按照他的原则,非交换代数就是不可能的),但他的这种处理方式为代数中更抽象思想的发展铺平了道路,尤其影响了布尔(Boole,G.)关于逻辑代数的思想,所以说皮科克所做的以上研究是迈向抽象代数的重要一步.

论方程的根式可解性条件(Mémoire sur les contitions de résolubilité des équations par radicaux) 西方现代数学著作.法国数学家伽罗瓦(Galois,E.)著,作者死后由刘维尔(Liouville,J.)修订整理发表在《纯粹与应用数学杂志》(1846)上.在这篇文章中,伽罗瓦继续了挪威数学家阿贝尔(Abel,N.H.)的工作,借助于群的理论对代数方程的可解性问题给出了明确的解答,解决了这一从 18 世纪以来就吸引了众多数学家注意的重要课题,从而为近世代数奠定了基础.

伽罗瓦的科学生涯遭遇坎坷,他的思想极其深刻且早熟,他的同时代人没有一个理解他.早在中学时代他便着手方程理论的研究,开始他曾认为自己解决了一般的五次的方程,但认识到错误后开始重新研究,终于借助于群论彻底解决了这一问题.1829 年 5 月,他写了关于代数方程的解的论文,经由柯西(Cauchy,A.-L.)呈交给法国科学院,但柯西未能遵照科学院的委托及时审阅该文.1830 年 2 月末,伽罗瓦又呈送了该文的修改稿,希望得到科学院的数学奖,但论文的审稿人傅里叶(Fourier,J.-B.-J.)不久便去世了,文章也被遗失.伽罗瓦的几度失望影响了他的世界观.1831 年 1 月 27 日,应泊松(Poisson,S.-D.)的要求,伽罗瓦对前面的论又做了修改,草成此文,再一次地提交给科学院,但又未得到泊松的公正评价.一个重要原因是泊松未能深刻理解此论文.不久,伽罗瓦便决斗而死,在决斗前夜,他预感到自己的命运,匆匆写下了一份关于他的研究的简单说明,托付给他的朋友谢瓦利埃(Chevalier,A.).这份遗书实际上是写给高斯(Gauss,C.F.)与雅可比(Jacobi,C.G.J.)的.伽罗瓦死后,谢瓦利埃将此信发表,这可以说是数学史上最富悲剧性的作品.

《论方程的根式可解性条件》是伽罗瓦最重要的著作,在他的遗书中被放在首要位置.在这篇论文中,伽罗瓦继续了拉格朗日(Lagrange,J.-L.)、高斯、阿贝尔等先辈们的工作,但却具有了完全独到的突破,他不但彻底解决了根式求解代数方程的问题,而且发展了一整套关于群和域的理论.在现代数学中,他的工作被称之为伽罗瓦理论.他认为每个方程对应于一个代数数域,这些代数数域介于由该方程的根产生的域和该方程的系数决定的域中间,而且不同的域对应于不同的群.方程的全部根产生的域,后来被称为伽罗瓦域,这个域对应一个群,即由方程根的置换构成的群,称为伽罗瓦群.伽罗瓦域的子域和伽罗瓦群的子群之间是一一对应的.伽罗瓦指出,一个不可约的代数方程是根式可解的,当且仅当它

的群是可解的，即含有具有某些性质的一组正规子群的合成序列.尽管这一一般原则事实上并没有使一个方程的实际求解更简单，但它确实提出了发现关于低于五次的一般方程、二项方程以及某些其他特殊类型的方程的可解性的所有已知结果的手段，而且借此几乎可立即证明高于四次的一般方程用根式是不可解的，因为它的群是不可解的.伽罗瓦意识到这一研究已经超出了代数方程的根式可解性问题，认为可用来解决更一般的无理数的分类问题.他虽然没有抽象的群或域的名词，但确实使用了群和域的概念，因而伽罗瓦被认为是近世代数的创始人. 19 世纪后半叶以后，伽罗瓦的工作不仅在数学方面，而且在其他科学领域也产生了广泛的影响.

绝对空间的科学(Scientiam spatii absolute…)西方现代数学著作.匈牙利数学家波尔约(Bolyai, J.)著，作为其父波尔约(Bolyai, F.)的一本书的一个附录首次发表于 1832 年.这篇仅有 26 页的文章是非欧几何学史上的经典著作，它确立了波尔约, J.作为非欧几何的独立发现者在数学史上的地位.

波尔约, J.的父亲波尔约, F.曾致力于研究欧几里得第五公设多年.早熟的波尔约, J.从父亲那里继承了对平行线问题的兴趣.但 1820 年，他父亲就劝告他不要试图去证明“过直线外一点，只能作一条该直线的平行线”这一公设.波尔约, F.认为“这个无底洞会吞没一千个像牛顿(Newton, I.)这样的巨人”.但同年波尔约, J.已开始沿着最终导致他发现非欧几何的方向思考了. 1823 年，经过证明欧氏公设的徒劳之后，他假设可以不用平行公设而将几何学构造出来，并取得成功.此时他便发现了公式

$$\tan\frac{\pi(x)}{2}=e^{-\frac{x}{k}}\ (k\text{ 为常数}).$$

1823 年 11 月 3 日，在他给父亲的信中，波尔约, J.兴高采烈地写道：“从无之中我创造了一个全新的世界.”1825 年 2 月，他给父亲看了一份手稿，内容关于绝对空间的理论，即在这样的空间中，在一平面上经过一点 P 和不过 P 的直线 L，存在一束过 P 但不与 L 相交的直线，当线束减为一条直线时，空间满足欧氏公理.波尔约, F.不能接受这样的几何，但还是决定把手稿送给自己的老朋友高斯(Gauss, C. F.)审阅.第一封信(1831. 6. 20)没有回音，但高斯回复了第二封信(1832. 1. 16).在这封著名的信中高斯写道：“现在谈谈你儿子的著作.当我说‘我不能夸奖它’时，你可能会惊讶.但我别无可说，因为夸奖他就等于夸耀我自己.这篇文章的整个内容，你儿子采取的方式，所得到的结果，几乎处处与我的思考相同.这种冥思断断续续用了我 30 年到 35 年的时间.事实上我极为震惊……”这封信给波尔约, J.以极大打击，他感到受了欺骗.但高斯的话是真实的，因为高斯本人也独立地发现了非欧几何.无论如何，波尔约, J.还是同意让父亲发表他的手稿，这就是《绝对空间的科学》.该文共有 43 小节，其中给出了波尔约, J.得到的关于非欧几何的最重要的结果，可简述如下：

1. 平行线的定义及其独立于欧氏公设的性质.
2. 关于无穷半径的圆与球，无穷半径的球上的几何与通常的平面几何是一致的.
3. 球面三角独立于欧氏公设，公式的直接证明.
4. 非欧几何中的平面三角学，应用于计算面积的体积.
5. 可用初等方法解决的问题，化圆为方，关于第五公设是错误的假设.

众所周知，俄国数学家罗巴切夫斯基(Лобачевский, Н. И.)独立地发现了非欧几何，但他和波尔约, J.的工作也有区别.罗氏给出了虚几何学特别是在其分析方面的一个完善的发展，而波尔约, J.更深入地探讨了几何定理对于欧氏公设的独立性或依赖性问题，并且罗氏主要是在欧氏公设的否命题的基础上想构造一个几何学体系，而波尔约, J.则揭示了独立于它的通常几何学中的命题和作图法.波尔约, J.直接表明他的命题是绝对正确的.

波尔约, J.的著作当时并未引起大的反响，事实上它在很长的时间里被遗忘，后来，直到贝尔特拉米(Beltrami, E.)于 1868 年和克莱因(Klein, (C.)F.)于 1871 年进行研究之后才得到公认.该文 1867 年被译为法文，1868 年译成意大利文，英译本于 1896 年出版.

几何图形相互依赖性的系统发展(Systematische Entwicklung der Abhägigeit geometrischen Gestalten von einander) 西方现代数学著作.德国数学家施泰纳(Steiner, J.)著，出版于 1832 年.作者是 19 世纪中期纯粹几何学派的代表人物，他以改革几何学为已任，偏爱综合方法，其几何研究的目的是要发现简单原理，从而可以自然导出许多表面上看来互不相关的定理.这部著作是施泰纳的主要著作，其目的是运用射影的概念从简单的几何结构(如点、线、线束、面、面束)出发，建造出更复杂的结构.其结果并不特别新颖，但方法是新的.

在《几何图形相互依赖性的系统发展》的前言中施泰纳写道：“本书试图发现(几何学的)有机组织(Organismus)，通过它，最不相同的空间现象就可以相互联系起来.一些有限的非常简单的基本关系合起来就构成一个框架；运用此框架，余下的定理就可以毫不费力地逻辑地发展起来.通过适当采纳少量基本关系，人们就成为整个领域的大师……这里主要的事情既不是综合方法也不是分析方法，而是图形的相互依赖性，以及它们的性质由简单到复杂

的过渡方式的发现．这种关联与过渡是几何学中余下的一切单个命题的真正来源．”本书原拟包括五部分，但1832年只出版了第一部分，余下的其他一些内容发表在施泰纳的遗著《综合几何学讲义》(1867)中．施泰纳运用射影方法定义了圆锥曲线，这种方法现已成为标准的方法．他将圆锥曲线定义为两个射影相关的线束的所有各对应线的交点的集合．这里两线束的所谓射影相关是指它们都与第三线束是透视相关．如此施泰纳用较简单的形、线束构造出了圆锥曲线或二次曲线．施泰纳充分认识到了他的方法的重要性，虽然牛顿(Newton，I.)等人已知道这一基本定义的度量表述，但施泰纳首先将其作为了射影几何中的一个基本命题．他使之成为圆锥曲线论的射影处理的基础．利用射影对应做为它的定义的基础，施泰纳用类似的方式构造出了直纹二次曲面、单叶双曲面和双曲抛物面．在证明中他采用交比作为基本工具，然而他不采用虚元素，也不使用带负号的量．施泰纳一开始就使用了对偶原理，在平面对称几何学的定理中，他把点和直线相互对换，定理仍然成立．在立体射影几何学的定理中，把点和平面相互对换，而直线不变，定理也成立．施泰纳把圆锥曲线的定义对偶化，得到一种新结构，称为线曲线．他把作为点的轨迹的通常的曲线称为点曲线，点曲线的诸切线是一线曲线，在圆锥曲线的情形就构成对偶曲线．利用他的点圆锥曲线的对偶概念，可以把许多定理对偶化．虽然施泰纳没在建立对偶原理的逻辑基础，但他通过把图形分类和注重对偶命题而系统地发展了射影几何学．此外，他还系统地研究了二次曲线和二次曲面．

具有完善的平行线理论的新几何学原理(Новые начала геометрии с полной теорией параллельных) 西方现代数学著作．俄国数学家罗巴切夫斯基(Лобачевский，Н. И.)著，1835—1838年间发表于喀山大学的科学文集中．

罗巴切夫斯基是非欧几何的创始人之一，他独立地得到新几何学的基本原理，并最早发表出来．早在1823年他就写过一本《几何学》，但直到1909年罗氏去世半个世纪之后才第一次发表，其中的部分内容已溶入本篇中．1826年2月23日，他在喀山大学物理数学系的学术会议上宣读了题为“几何原理简述”的论文，这是他的新几何学的首次披露．他关于新几何学公开发表的第一篇文章是“论几何学基础”，发表于1829—1830年的喀山大学杂志上(中译文见《数学史译文集续集》，上海科技出版社，1985)．之后，他又多次表述了新几何学．除本篇外，1835年他又完成“虚几何学”，并自己译成法文在克雷尔(Crelle，A. L.)的杂志上发表．1840年，他在柏林出版德文著作《平行线理论的几何研究》，这是他新几何学的最好表述，曾受到德国数学家高斯(Gauss，C. F.)的赞扬(“作者本着真正几何学家的精神以大师之手处理了这一问题”——高斯语)．他最后的著作是《泛几何学》，1855—1856年间在喀山出版．

罗巴切夫斯基创立的新理论称为罗氏几何，它起源于对欧几里得(Euclid)《几何原本》中平行公设的研究．罗巴切夫斯基独辟蹊径，认识到平行公设的独立性，认为有可能采取一个与此矛盾的命题，并以一组新公理推导出结论，这就是新几何学的出发点．在《具有完善的平行线理论的新几何学原理》的绪论中，他表述了这一观点．在前六章中，他致力于基本概念的定义和基本定理的证明．他定义了什么是直线；证明了两直线相交只有一个交点；同一直线的两垂线不相交等．在第七章中他毅然放弃了欧氏平行公设，规定已给一直线l和l外一点P，通过P的所有直线关于l分成两类，一类与l相交，另一类则不相交，这两类之间的边界线是平行于l的直线，“通过P有一条以上与l平行的直线”便作为公设(第93节)．通过此公设以及《几何原本》中的平行公设以外的命题，便逐渐得出了他的新理论．他定义过P平行于l的直线和由P向l引的垂线之夹角为“平行角”．设由P引向l的垂线长为x，平行角为$\pi(x)$，他证明了

$$\tan\frac{\pi(x)}{2}=a^{-x}\ (a>1,\text{常数}).$$

之后，定义了“界线”和“界面”．由此展开三角法，导出了他的几何中平面三角形边与角的公式，并说明当三角形的边很小时，就可以得出普通的三角学公式．这意味着欧氏几何学是新几何学的极限情形．

客观地讲，《具有完善的平行线理论的新几何学原理》有它的局限性，如对作为理论的根基的公理的分析不够明确．但新几何学的影响是巨大的，非欧几何的创立从根本上改变了人们的几何学观念，导致了对几何基础的深入研究，并深刻地影响了人们的数学真理观，是一次深刻的数学思想的革命，并且对物理学观念的变革发生了重大影响．《具有完善的平行线理论的新几何原理》于1897年被译成英文，1899年译为德文．

线性扩张论(Die lineale Ausdehnungslehre) 西方现代数学著作．德国数学家、语言学家格拉斯曼(Grassmann，H. G.)著，1844年出版第一卷．早在1832年格拉斯曼就开始研究一种新的几何分析，用它可以简化拉普拉斯(Laplace，P.-S.)的《天体力学》中的数学表述．尽管当时只是为了解决有关的潮汐问题他才使用了新方法，但他已认识到了自己的创造的重要意义．1843年秋，他完成了这本重要著作的第一卷手稿，命名为《线性扩张论》，1844年以《扩张量的科学或扩张论》为题出版．可惜由于叙述

的抽象及夹杂有神秘的教义，其重要性未被同时代人所理解，故该书一直被专家们所忽视。格拉斯曼原打算续写第二卷，但后来改为重写该书。1862 年，他出版了该书的修订本，题为《扩张论》。不幸的是，新版本的表述并不比原版本好。格拉斯曼不满自己的不成功，经常离开数学研究而去钻研语言学，并成为了著名的梵语学家。1877 年，他整理了 1844 年版的新版本准备发表，次年他去世后出版。

《线性扩张论》是格拉斯曼最重要的创造，它介于解析几何与综合几何之间，是关于几何分析的课题。它的基本原理之一就是有向线段的加法。莱布尼茨(Leibniz, G. W.)、默比乌斯(Möbius, A. F.)、哈密顿(Hamilton, W. R.)都曾进行过研究。格拉斯曼的理论的代数实体是扩张的量，其实是一种有 n 个分量的超复数。用现代术语表述，它们组成 R 上的一个 n 维向量空间，其基向量为 $e_1, e_2, \cdots, e_n$。为了发现一个合适的基本域 S_n^1 中两个量的乘积，格拉斯曼在 S_n^1 上添加一个$(n/2)$维的向量空间，它具有基 $\boldsymbol{e}_{ij}$ $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$。他引进了两类乘法，即内积和外积。对外积有

$$[\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j] = -[\boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_i] = \boldsymbol{e}_{ij} \quad (1 \leqslant i < j \leqslant n),$$

$$[\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_i] = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

因而对于任意 $r(1 \leqslant r \leqslant n)$，格拉斯曼建立了具有基 $\boldsymbol{e}_{i1}, \boldsymbol{e}_{i2}, \cdots, \boldsymbol{e}_{ir}(1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant n)$的秩为 r 的量的域 $S^r(n/1)$。通过运用公式

$$[\boldsymbol{e}_{j1} \cdots \boldsymbol{e}_{jr}] = \begin{cases} \boldsymbol{e}_{i1} \cdots \boldsymbol{e}_{ir} & (j_1 \cdots j_r) \cdots \text{是} (i_1 \cdots i_r) \text{的偶置换}; \\ -\boldsymbol{e}_{i1} \cdots \boldsymbol{e}_{ir} & (j_1 \cdots j_r) \cdots \text{是} (i_1 \cdots i_r) \text{的奇置换}; \\ 0 & j_v \text{不全相异}. \end{cases}$$

人们立刻可以计算 S_n^1 的任意量的外积。通过化为基本单位和运用结合律和乘法分配律，并添加任意秩的量，就得到(用现代术语)S_n^1 上的所谓格拉斯曼代数。对于内积，他假定 $\boldsymbol{e}_i | \boldsymbol{e}_i = 1, \boldsymbol{e}_i | \boldsymbol{e}_j = 0 (i \neq j)$。除此之外，他发展了一种乘法，他称之为“代数乘法”，它遵守 $\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_i (i, j = 1, \cdots, n)$这一法则，这导致今天所谓的多项式环。这里格拉斯曼主要是在几何中，特别是 n 维几何(当时 n 维几何尚处于萌芽状态)中得到他的扩张论的思想的。

格拉斯曼的扩张论及其一般和综合，其意义远远超出了其时代。当时在几何学中数学家们仍习惯了所谓“真实”的三维空间思维，并未看到在虚构的 n 维空间中考虑“扩张的量”的必要。格拉斯曼不仅考虑了任意维的流形，而且也引入了看来是人为的乘积和各种元素。他的思想有助于引导数学家们进入张量理论，是现代线性代数、矩量、向量等诸领域的先驱工作。格拉斯曼去世后，扩张论产生了广泛的影响。他的重要工作导致了三个重要方向的发展：

1. 空间的几何概念的扩展.

2. 影响了向量分析的诞生.

3. 它预示了近世代数的发展.

位置几何学(Geometrie der Lage)　西方现代数学著作。德国数学家冯·施陶特(von Staudt, K. G. C.)著，1847 年出版。冯·施陶特的“位置几何学”，即射影几何。在该书中，冯·施陶特不依赖度量概念建立起射影几何学体系，指出射影几何比欧氏几何更为基本，从而使射影几何学建立在更严格的基础之上。

19 世纪初的几十年中，射影几何研究得到复兴，并蓬勃发展起来，彭赛列(Poncelet, J.-V.)、施泰纳(Steiner, J.)、沙勒(Chasles, M.)等人都为此做出了贡献。但是从射影几何的最早研究者德扎格(Desargues, G.)到沙勒，都在射影几何里使用了距离概念，谁也未能严格地坚持射影几何的观点。冯·施陶特的著作第一个采用了完全严格的方法。

在《位置几何学》的前言中，他明确表示了脱离度量概念而建立位置几何学的愿望。他的方案称为“投的代数”，实质上是在射影的基础上引进一种类似距离的概念。他在直线上任选三个点，给它们指定符号分别为 0，1，∞。然后用一种几何作图法——“投”，给直线上的任意一点配上一个符号，从而给01∞线上的点配上了“有理坐标”。要把无理数配给线上的点就必须引进连续性公理，冯·施陶特未能很好地处理这一点。他并未用距离给这些点指定坐标，他的坐标虽只是通常的数记号，却只是充当点的有系统性的识别符号，所以对这种“数”的运算不能使用普通算术法则，而必须用几何作图来定义。此后，冯·施陶特定义了四个点的交比概念。他不依赖于距离和迭合的概念就得到了建立射影几何的基本工具。自然，冯·施陶特并未将射影几何建立在现代意义上的完善的公理系统之上，他从欧氏几何体系中采用了与距离、角度等无关的一些东西，利用了平行公设，因而必须引入无穷远点，这是冯·施陶特建立的射影几何体系的一个缺点，因为平行性不是射影不变的。

《位置几何学》出版后，冯·施陶特继续发展了他的思想。在其后发表的《位置的几何学论集》(1856—1860)中，冯·施陶特利用实几何学的概念，引入了一维、二维和三维的复射影空间。他对综合几何学做出了重要贡献。

形式逻辑(Formal Logic)　西方现代数学著作。英国数学家德·摩根(De Morgan, A.)著，1847 年出版。这是在改造亚里士多德逻辑方面迈出的富有成效的一步，德·摩根从而被认为是逻辑代数的创始人之一。

亚里士多德(Aristotle)的逻辑在 2000 多年中一直是理性思维最重要的工具，但其不完备也是明显的，当涉及到定量时便尤其显得不充分。德·摩根

举了这样一个例子：在一群人中，大部分人有外套，大部分人有背心，所以有些人既有外套也有背心．这是一个真言判断，但用任何通常采用的亚氏符号体系都无法证明．其实，在德・摩根之前，法国数学家笛卡儿（Descartes，R.）和德国数学家莱布尼茨（Leibniz，G. W.）等人就想发展亚里士多德的逻辑，但未有多少实质性进展．德・摩根在《形式逻辑》一书中采用一种较为有效的方法，目的是修正和改进亚氏体系．他把上述例子的关系以定量的形式给出，如果有 m 个 M，而有 a 个 M 是 A，并有 b 个 M 是 B，那么至少有 $(a+b-m)$ 个 A 是 B．他的思想的要点即词项可以是定量的，从而可以引进更多正确的三段论式．德・摩根给出了一套符号来表示简单命题，用大写字母 X、Y、Z 来表示具有某些性质的东西，而用小写字母 x、y、z 表示不具有这些性质的东西，如

A　每一个 X 是 Y，表为 $X)Y$

E　没有 X 是 Y，表为 $X.Y$

I　某些 X 是 Y，表为 XY

O　某些 X 不是 Y，表为 $X:Y$

其中符号 A、E、I、O 有它们通常的亚氏意义．然后，他设计出法则来建立实用逻辑推理，这些结果写成形式

$$X)Y+Y)Z=X)Z$$

$$Y:X+Y)Z=Z:X$$

$$X)Y+Z)Y=XZ$$

这些符号后来被布尔（Boole，G.）的更代数化的符号所取代，但它帮助德・摩根建立了一些运用通常的法则得不到的推理．用布尔代数的符号，以下两个等式

$$\neg(A\wedge B)=(\neg A)\vee(\neg B)$$

$$\neg(A\vee B)=(\neg A)\wedge(\neg B)$$

现今仍称为德・摩根律．德・摩根的工作突破了古典的主谓词逻辑的局限性，对布尔的工作产生了影响．在与《形式逻辑》一书同年出版的布尔的著作《逻辑的数学分析》中，布尔声明他曾受到德・摩根工作的启发．德・摩根还第一个发展了关系逻辑，他的工作对数理逻辑的发展产生了深刻影响．他突破了古典的主谓词逻辑的局限性．

单复变函数的一般理论基础（Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Grösse）　西方现代数学著作．德国数学家黎曼（Riemann，(G. F.)B.）写于1851年的博士论文，是复变函数论的经典文献．论文给出了单值解析函数的黎曼定义，创立了黎曼面的概念，使之成为处理多值函数的有力方法，为19世纪后期复变函数论的发展开辟了道路．

1850年左右，复分析方面的发展告一段落，迅速发展起来的椭圆函数的双周期性还未得到很好的理解，超椭圆积分产生了很多麻烦，一般代数函数的积分仍然是个谜．在黎曼之前，法国数学家柯西（Cauchy，A.-L.）于19世纪前半叶为复变函数理论奠定了基础，他定义了复变函数的积分，证明了柯西积分定理，得到了一系列重要结论．但有一点柯西并未触及，就是黎曼面的概念．黎曼以他深邃的洞察力，在对多值函数的探讨中提出了关键的黎曼面概念．例如对多值函数 $W^2=Z$，为了将其两个值集 $\sqrt{Z}$ 和 $-\sqrt{Z}$ 分开．黎曼给每一分支引进一个 Z 值平面．他还附带在每一平面上引入一个点对应于 $Z=\infty$．这些 Z 值平面就称为黎曼面．显然，如果 Z 值在黎曼面上变动，W 就成为 Z 的一个单值函数，从而利用黎曼面完成了多值函数的单值化．对于复杂的多值函数，黎曼面更为复杂．一个 n 值函数需要一个 n 叶黎曼面，并且必须引进连结每两个支点的分支切割．三维空间里无法准确表示黎曼面．黎曼面完成了对多值函数的单值化，使得关于单值函数的定理可以推广到多值函数．黎曼明确地将黎曼面上的复变函数理解为该曲面的一个保角映射．为了理解这种映射的整体多价性，他拓扑地分析了黎曼面：一曲面 T 称为“单连通”的，如果每一横剖都将其分为部分；如果通过 m 次横剖使它成为单连通曲面 T'，则称其为 $(m+1)$ 次连通的．借助格林定理，黎曼证明了单连通曲面上连续可微的复变函数的积分是单叶的．

《单复变函数的一般理论基础》的分析工具是狄利克雷原理，他利用它证明了黎曼映射定理：每一个单连通域 T（有边界）可以通过一复可微函数（保角映射）一对一地映射到一个圆内．该定理是复变函数几何理论的基础，根据它，对于单连通域内的解析函数常常可以化归到单位圆内研究．

黎曼的《单复变函数的一般理论基础》蕴涵的丰富思想成为后世数学家许多创造工作的源泉．今天关于黎曼面的研究不仅是单复变函数论的基本问题之一，而且与众多的现代数学分支，如多复变函数论、复流形、代数几何、代数数论、自守函数等都有着紧密的联系．该文已收入《黎曼数学全集・补遗》（1902）中．

关于用三角级数表示函数的可能性（Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe）　西方现代数学著作．德国数学家黎曼（Riemann，(G. F.)B.）著．这是1854年黎曼为取得格丁根大学讲师资格而写的论文，发表于1868年．该论文对傅里叶级数的研究做出了重要贡献．

法国数学家傅里叶（Fourier，J.-B.-J.）在其著

作《热的分析理论》中表明，很广一类函数可以用三角级数表示，但未解决找出函数具有收敛的傅里叶级数的确切条件的问题. 德国数学家狄利克雷(Dirichlet，P. G. L.)在一篇论文“关于三角级数的收敛性”(1829)中给出了表示一个已知函数 $f(x)$ 的傅里叶级数是收敛的，且收敛到 $f(x)$ 的第一组充分条件. 黎曼论文的目的是要找出函数 $f(x)$ 必须满足的充分必要条件，使在区间 $[-\pi,\pi]$ 中的一点 x 处 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛到 $f(x)$. 他曾经证明了一个基本定理：如果 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上有界且可积，则傅里叶系数

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x,$$

当 n 趋于无穷时趋于零. 定理还表明，有界可积的 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 中的一点 x 处的收敛性只依赖于 $f(x)$ 在该点领域中的特性，但是 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛到它自身的必要而又充分的条件仍未找到. 为此，黎曼开辟了一条新的研究路线，他研究三角级数，但不需要根据上述分式来确定傅里叶系数. 他从级数

$$\sum_1^{\infty}a_n\sin nx+\frac{b_0}{2}+\sum_1^{\infty}b_n\cos nx$$

出发，并定义

$$A_0=\frac{b_0}{2},\ A_n(x)=a_n\sin nx+b_n\cos nx.$$

于是上述级数，便是

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(x),$$

当然 $f(x)$ 只对使级数收敛的 x 值有意义. 用 Ω 表示级数本身，Ω 的项对一切 x 或某个 x 可以趋于零. 黎曼分别讨论了这两种情形. 如果 a_n 和 b_n 趋于零，则 Ω 的项对一切 x 趋于零. 令 $F(x)$ 是函数

$$F(x)=C+C'x+A_0\frac{x_2}{2}-A_1-\frac{A_2}{4}$$

$$-\cdots-\frac{A_n}{n^2}\cdots,$$

它是连续对 Ω 逐项积分两次得到的. 黎曼证明了 $F(x)$ 对一切 x 收敛而且关于 x 连续，此外，还证明了 $F(x)$ 的一系列定理. 这些定理转而导致使一个形如

$$\sum_1^{\infty}a_n\sin nx+\frac{b_0}{2}+\sum_1^{\infty}b_n\cos nx$$

的级数收敛到一个周期为 2π 的给定函数的必要充分条件，然后他给出了上述三角级数在 x 的一个特殊值处收敛的充分必要条件. 其次他考虑了另一种情形，即 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 依赖于 x 的情形，并给出了在 x 的特定值处级数 Ω 收敛的条件和判别准则. 值得一提的是黎曼在此文中，还最先示例表明了函数的连续性与可微性的区别.

关于几何基础的假设(Über die Hypothesen，welche der Geometrie zu Grunde liegen)　西方现代数学著作. 德国数学家黎曼(Riemann，(G. F.)B.)著. 这是作者于 1854 年 6 月 10 日在格丁根大学为取得讲师资格所作的演说. 这次演说是数学史上最精彩的场面之一，事后高斯(Gauss，C. F.)对黎曼的深刻思想做了高度评价. 该文于 1868 年发表，已成为重要的数学经典文献. 它奠定了黎曼几何学的基础，是 19 世纪最重要的数学创造之一.

黎曼被人们称为几何哲学家，他的几何学研究追随了高斯. 高斯在他 1827 年的重要著作《关于曲面的一般研究》中，开创了曲面内蕴几何学的研究. 他的兴趣影响了黎曼，但黎曼提出的空间的几何并不只是高斯的微分几何的推广，他重新考虑了研究空间的整个途径. 在哲学上他受到心理学家赫巴特(Herbart，J. F)的影响，认为一个先验的空间(如果存在)应该是拓扑的而不是度量的. 他对任一空间发展了一种内蕴几何，认为拓扑抽象的 n 维空间是 n 维流形，给出了现代微分流形的原始形式. 在局部微分中，即当两点的对应坐标相差无穷小时，他假定距离的平方是正定三次型

$$\mathrm{d}s^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}g_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j,$$

其中 g_{ij} 是坐标 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数，$g_{ij}=g_{ji}$，这是欧氏距离公式

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x_1^2+\mathrm{d}x_2^2+\cdots+\mathrm{d}x_n^2$$

的推广. 如此他就提出了黎曼度量的概念，这样得到的结构如今称为黎曼空间，它具有最短线，称为测地线. 黎曼认识到距离只是加到流形上的一个结构，因此在同一流形上可以有众多的黎曼度量，从而摆脱了经典微分几何曲面论中局限于诱导度量的束缚. 这是一个杰出的贡献. 在该演说中提出的另一个重要概念就是流形的曲率的概念. 注意从欧氏空间中 $\mathrm{d}s^2$ 展示的高次诱导就可以定义 n 维黎曼空间曲率，这一曲率张量的定义是该就职演说的要旨. 而消逝的曲率张量就局部地刻画了欧氏空间，欧氏空间是在每一点、每一平面方向有相同曲率的空间的特殊情形，其曲率常数可以是正的(如在球面上)，也可以是负的(如在非欧几何中). 黎曼关于流形的曲率的概念是高斯关于曲面的总曲率概念的推广. 对于流形是一个曲面的情形，黎曼的曲率恰是高斯的总曲率.

黎曼在完成了他的 n 维几何的一般研究，并说明如何引进这曲率之后，进而考虑了特定的流形，对常曲率空间进行了研究. 他还区分了空间的无界性和无限性. 在文章的结尾他指出，物理空间是一种特

殊的流形，关于它的几何不能只是从流形的一般概念推出来. 把物理空间同其他三维流形区别开来的那些性质只能从经验得到. 特别，欧氏几何的公理可能只是物理空间的近似写照. 他相信天文学将判定哪种几何适合于物理空间.

黎曼的演说几乎不包含公式，其方法极为先进，但人们对他的思想的接受是缓慢的. 后来，黎曼空间成为张量分析的重要来源，许多人都扩展了这一思想. 在 19 世纪，黎曼空间被认为是抽象的数学理论，当时作为空间的哲学没有产生什么影响，但在他的演说中有更深刻的智慧. 广义相对论漂亮地证实了黎曼的工作. 在黎曼的论文所发展的数学工具中，爱因斯坦(Einstein，A.)发现后嵌入了他的物理思想的框架. 从那以来，黎曼几何学得到了蓬勃发展. 今天，对于它的研究已经从局部发展到整体，产生了许多深刻的结果，在其他数学分支和现代物理学中起着重要的作用.

四元数讲义(Lectures on Quaternions)　西方现代数学著作. 英国数学家、物理学家哈密顿(Hamilton，W. R.)著，1853 年出版. 哈密顿是四元数的发现者，他在这方面的工作主要总结在该书及他去世后，于 1866 年出版的《四元数基础》中.

关于四元数的发现，哈密顿自己有一段描述："1843 年 10 月 16 日，当我和哈密顿夫人步行去都柏林途中经过勃洛翰桥时，它们来到了人间，或者说降生了，发育成熟了. 这就是说，此时此地我感到思想的电路接通了，而从中落下的火花就是 i，j，k 之间的基本方程."这看似偶然，其实是作者长期思考的结果，至少在此前 15 年，哈密顿就开始研究这一问题了. 早在 1828 年，哈密顿就抱怨代数基础的不稳定，当时有人提出了复数平面表示法，使平面上的点跟复数建立了一一对应关系. 这促使哈密顿思考如下的问题：是否可能发现超复数与三维空间有关. 这样的超复数如果能找到，它将是空间的自然的代数表示. 为此他进行了不懈地努力. 他先是写出了三维复数 $x+\mathrm{i}y+\mathrm{j}z$ ($\mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=-1$) 称为三元组，其模为 $x^2+y^2+z^2$；复数的模是该复数与它的共轭复数的乘积，而模法则表明两复数模的乘积等于乘积的模. 虽然对上述三元组来说两个这种模的乘积可以表示为平方和的形式，但它是四个平方数的和，而不是三个平方数的和. 这一事实可能给哈密顿以启发，可能存在四数组在三元组不成功的地方奏效. 他试验了 $a+\mathrm{i}b+\mathrm{j}c+\mathrm{k}d$ 形式的超复数，看是否满足模法则，结果是满意的，只是需牺牲交换律. 于是立刻就有四元数的乘法律：

$$\mathrm{ij}=\mathrm{k}=-\mathrm{ji},$$
$$\mathrm{jk}=\mathrm{i}=-\mathrm{kj},$$
$$\mathrm{ki}=\mathrm{j}=-\mathrm{ik},$$
$$\mathrm{i}^2=\mathrm{j}^2=\mathrm{k}^2=\mathrm{ijk}=-1.$$

在哈密顿看来，四元数比空间的任何坐标表示都更基本，因为四元数运算独立于任何坐标系. 但四元数并没有像哈密顿希望的那样在物理学中得到广泛应用，物理学家们继续使用方便的笛卡儿坐标系. 但对于代数来说这无疑是一个革命性的发现，它促使了代数观念的转变. 一旦数学家们体会到可以构造一个有意义的、有用的"数"系，它可以不具有实数和复数的交换性，那他们就觉得可以较为自由地考虑甚至可能更偏离实数和复数的通常性质的构造. 因而四元数成为其他非交换代数成长的温床，甚至对矩阵和向量分析的发展都有相当的影响.

哈密顿的《四元数讲义》篇幅冗长，新造许多名词，更有大段的哲学议论，异常难读. 关于四元数的第一本可读性较强的著作是泰特(Tait，P. G.)的《四元数导论》(1867).

思维法则的研究(An Investigation into the Laws of Thought, on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probability)　西方现代数学著作. 英国数学家、逻辑学家布尔(Boole，G.)著，1854 年出版. 作者是符号逻辑代数的创始人之一，本书是他在逻辑学方面的主要著作.

1847 年，布尔出版了《逻辑的数学分析》一书，该书源于英国数学家德·摩根(De Morgan，A.)与苏格兰哲学家哈密顿(Hamilton，W. R.)之间关于数学和逻辑的关系的一场论争. 哈密顿认为没有数学家能够对逻辑学做出任何贡献. 布尔在《逻辑的数学分析》的前言中声明，逻辑与形而上学无关，而应与数学联姻. 他试图用此著作将逻辑学像几何学一样建造在可接受的公理基础之上，他坚信符号化会有利于逻辑学的严密，因而他试图把概念和命题符号化，将演绎推理翻译为代数运算. 这标志着现代意义上的符号逻辑的开始，也标志着从莱布尼茨(Leibniz，G. W.)和德·摩根以来，在试图将逻辑代数化的方向上迈出了关键的一步.

《逻辑的数学分析》行文仓促，多有疏误，几年后出版的《思维法则的研究》不仅是对上述著作的扩展，而且开始将他的符号逻辑应用于概率论. 布尔的方法是着重于类的逻辑的分析，他认为自己创造了一个新的数学分支，即一种类似于实代数但并不与之一致的代数. 对这种代数的逻辑运算来说选择符号的函数的概念是基本的. 如果 $f(x)$ 是含 x 的代数符号，则它必表示论域的子集，因而必须由来自 x 和 $\bar{x}$ 的元素构成，这样 $f(x)=Ax+\overline{Bx}$. 此处系数 A 和 B 由 x 的值取 0 和 1 确定，因有

$$f(x)=f(1)x+f(0)(1-x).$$

这一方法用于含有两个选择符号的 $f(x,y)$ 表示，即

$$f(x,y)=f(1,1)xy+f(1,0)x(1-y)$$

$+f(0,1)(1-x)y+f(0,0)(1-x)(1-y)$.

更一般的表示也可以写出来.这样可用选择符号表示的逻辑问题就可化为便于解决的标准形式.在本书的2—15章,布尔试图把符号代数用于逻辑运演.用布尔自己的话说,本书要研究推理赖以进行的人类心智的运演的基本规律,用符号语言将其表示出来,在此基础上建立起逻辑科学,构造出它的方法,并使该方法本身成为概率的数学理论应用的一般方法的基础.在《思维法则的研究》第16—21章中布尔开始将其符号代数应用于概率计算.如果$P(X)=x$、$P(Y)=y$分别是事件X、Y的概率,而事件X与Y相互独立,则$P(X且Y)=xy$;如果X与Y互斥,则$P(X和Y)=x+y$.布尔的清晰准确的符号使他能够纠正早期概率论著作中的某些失误.

"布尔代数"这一名称标志着布尔的卓越贡献.所谓类的布尔代数主要源于《思维法则的研究》这一经典著作.它对所有数学分支的影响正日益扩大.今天,布尔代数的推广在拓扑学、射影几何学、抽象代数的结构理论、泛函分析及一般遍历理论中都有着重要地位和作用.布尔的理论在信息的储存与加工方面也有广泛应用,对计算机科学的发展产生了影响.

数论讲义(Vorlesungen über Zahlentheorie) 西方现代数学著作.德国数学家狄利克雷(Dirichlet,P. G. L.)著,1863年由作者的学生和朋友戴德金(Dedekind,(J. W.)R.)整理出版.这是继高斯(Gauss,C. F.)的《算术研究》之后数论史上的又一经典著作.

《数论讲义》是研究高斯的《算术研究》的结果.《算术研究》开创了数论发展的新纪元,它不仅是现代数论的开端,而且完全确定了这一课题后来的发展方向,但它极为深奥难解,以致在出版后的25年里还少有人真正读懂它.狄利克雷对《算术研究》进行了持续不懈的研读,它伴随了狄利克雷一生.库默尔(Kummer,E. E.)曾说该书不是在狄利克雷的书架上,而是经常摆在他的书桌上.狄利克雷成为第一个彻底理解并阐释它的人,并进而获得独到的更深的结果.

《数论讲义》一书记录了狄利克雷本人在数论方面的重要贡献.狄利克雷是解析数论的创始人,他于1837年证明了每个算术序列$\{a+nb\}$(a、b互素)含有无穷多个素数,其中使用了现今所谓狄利克雷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-z} \quad (a_n、z 为复数).$$

这是解析数论的第一个重要结果,标志着解析数论的正式诞生.虽然此前欧拉(Euler,L.)曾在数论研究中使用了分析,雅可比(Jacobi,C. G. J.)用椭圆函数得到了同余论和型理论中的一些结果,但欧拉只使用了很少一点分析,而雅可比的数论结果则是他的分析研究的偶然的副产品.1839—1840年,狄利克雷又得到了确定二次型类数的公式.1842年,他继续研究有理系数的二次型,试图给出当因子分解惟一时的代数数的系统理论,其中含有所谓狄利克雷抽屉原理.显然他已注意到代数数域中惟一因子分解的不成立.《数论讲义》分为五部分,共110小节.第一部分处理了数的可除性,第二部分研究数的同余问题,第三部分是关于二次剩余问题,第四部分给出了二次型理论,第五部分研究了类数的确定问题.

《数论讲义》一书出版后多次再版,不仅使高斯的思想得到广泛传播,而且对其后数论的发展产生了深远影响.在以后的版本中,戴德金加入了一些附录,其中包含了他自己对代数数论研究的结果,这些附录被认为是理想论产生的最重要的源泉,而理想论已成为今天代数数论的核心内容.

置换与代数方程(Traité des substitutions et des équations algébriques) 西方现代数学著作.法国数学家若尔当(Jordan,M. E. C.)著,1870年出版于巴黎.作者是19世纪著名数学家,在分析学中他对严格性的要求比他同时代大多数数学家都更严,其《分析教程》(1887)是19世纪后期分析学的标准读本,产生了广泛影响.但他在代数方面的成就更为引人注目,他是第一个为伽罗瓦理论增色的人,是当时无可争辩的群论大师.

《置换与代数方程》出版后的30年间,一直被认为是群论的权威著作,他的工作吸引了克莱因(Klein,(C.)F.)和李(Lie,M. S.)成为了他的学生.当若尔当开始他的数学研究生涯时,伽罗瓦(Galois,E.)的深刻思想与结果仍很少为人理解.1860年前,克罗内克(Kronecker,L.)差不多是惟一一个认识到其巨大威力并成功地将该思想用于他的代数研究中去的第一流数学家.若尔当则是第一个沿着伽罗瓦的方向系统发展有限群论及其应用的人,在他最先的成果中,主要的有合成列的概念及著名的若尔当-赫尔德定理的第一部分.他证明了任意合成列中相继群的指数组的不变性,他也是第一个研究一般线性群及有限素域上的经典群的人.他努力将其结果应用于大量问题,特别是他能确定以某些著名几何构形的参数为根的方程的伽罗瓦群的结构.此外,他还研究了有限可解群.关于有限可解群的彻底分类是极为困难的,大概若尔当认识到了这点,他总是满足于制定一种算法以自动产生出给定阶数n的可解群.若尔当的思想产生了很多重要的新概念,例如最小正规子群等概念.1870年,若尔当将所有这些结果集中于他的《置换与代数方程》一书中,其

中他第一次将置换群与伽罗瓦的方程论联系起来.所谓置换群是指置换的这样一个集合,该集合对乘积运算是封闭的.在这本书中,若尔当对置换群建立了同构与同态的概念.《置换与代数方程》出版后,若尔当继续群论研究,其中最重要的成果当属群论中的一系列有限性定理.

《置换与代数方程》在19世纪后期代数学的发展中产生了重要作用,而至今仍具有现实意义.1957年出版了该书的重印本.

连续性与无理数(Stetigkeit und irrationale Zahlen) 西方现代数学著作.德国数学家戴德金(Dedekind,(J. W.)R.)著,发表于1872年.该文的发表使戴德金与康托尔(Cantor,G.(F. P.))、外尔斯特拉斯(Weierstrass,K.(T. W.))一起成为现代实数理论的奠基人.他们的工作是柯西(Cauchy,A.-L.)等人在这方面工作的继续.该文中的所谓"戴德金分割"成为今天分析基础中处理无理数的基本方法之一.

早在1858年,戴德金在苏黎世开设的微积分基础的讲课中,就注意到算术缺少真正严格科学的基础.同年10月24日他成功地得到了一个关于连续的纯算术定义,并得到无理数概念的一种精确表述.14年后,他发表了当时思考的结果,便是《连续性与无理数》一文.该篇由序言及7小节组成.戴德金通过序理论,运用"分割"产生无理数,从而将实数追溯到了有理数.第四节是文章的核心,其中,他把有理数全体分为A、A'两组,把使A中各数都小于A'中的各数的分组称为一个分割(A,A'),分割的交界处有时是有理数(称之为有理数产生的分割),有时就不是有理数.这样有理数全体就是有空隙的、非连续的.但如果把直线分成两部分时,就不会出现这种情形,因为直线上的分割总是以直线上的一点为分界点.戴德金是把直线的这一性质作为直线的连续性公理而确认的.换句话说,他把实数看成了是有序的连续统.因此,他重新定义了无理数.他写道:"现在,当有一分割(A,A')不是由有理数产生时,对每一种这样的情形,我们就产生了一个新的无理数α,我们认为α是完全由这一分割决定的.我们将说该数α对应于这一分割,或它产生了这一分割."如此就把由有理数作成的分割(A,A')所得到的每一个数称为实数.之后,他证明了这样得到的实数具有和直线相同的连续性,并且给出了四则运算法则.最后他据此提出了构筑微积分学基础的方向.

戴德金的方法已成为处理实数系统的一种经典方法,有时他也被称为是现代的欧多克索斯(Eudoxus,(C)),因为欧多克索斯曾提出一种比例论来处理无理数,但戴德金关于所有分割以及产生它们的实数都存在的公设是不能在欧几里得(Euclid)或欧多克索斯那里发现的,因而仅凭欧氏原理是不能建立完善的实数理论的.但另一方面,通过戴德金的无理数理论就能得到连续域的完善模型.

对于近代几何学研究的比较评述(Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen) 西方现代数学著作.德国数学家克莱因(Klein,(C.)F.)于1872年就任埃尔朗根大学教授时,在埃尔朗根大学评议会及哲学院开学典礼上所作的就职演说.后来这次演说中陈述的重要观点以"埃尔朗根纲领"之称闻名于世.

作为那个时代领头的数学家之一,克莱因对许多数学分支做出了卓越的贡献,包括应用数学和数学物理.他在几何学中最重要的成就在于奠定非欧几何的射影基础和提出埃尔朗根纲领.在这篇文章中,克莱因认为"几何学尽管本质上是一个整体,可是由于最近期间所取得的飞速发展,却被分割成许多几乎是相互之间没有联系的分科,其中每一分科几乎都是独立地继续发展着".于是"公开发表旨在建立几何学的这样一种内在联系的各种考虑就显得更加必要了".因而克莱因对几何学提出了一种新的综合观点.他认为,目前所知的每一种几何都是基于某种群,都由某变换群所刻画,而每一种几何的任务乃是在于建立变换群的不变量.这样,通过扩张或限制群,人们就从一种几何过渡到另一种几何.例如欧氏几何即是度量群的不变量的研究,而射影几何则是研究射影群的不变量的.如此,变换群的分类就给出了相应的几何学的分类.全文共分十节,在第一、二两节中叙述了基本思想,第三节以后则具体地叙述了射影变换群、点变换群、接触变换群等.克莱因区分了射影群、仿射群、等仿射群或主群.在某些情形,后一个群是前面一个的子群,带有它们的不变量的射影几何、仿射几何、等仿射几何属于这些群.克莱因还设想对一一对应连续变换下具有连续逆变换的不变量进行研究,在这类变换下不变量的研究是拓扑学的课题,而拓扑学是已知的具有最一般群的几何.无疑地,这在当时是一种大胆的设想.

埃尔朗根纲领的思想方法,支配了其后50年间的几何学研究,它把几何学化为统一的形式,深化了人们对几何学的认识.但是早在此纲领提出之前就已经存在着的黎曼几何学和黎曼空间的扩张等诸多空间都不包含在其中.此外,嘉当(Cartan,É.)的联络几何也显示了埃尔朗根纲领的局限性.但无论如何,埃尔朗根纲领的提出对近代几何学是具有深远的历史意义的.中译文载于《数学史译文集》(上海科技出版社,1981)中.

论变换群(Ueber Gruppen von Transformationen) 西方现代数学著作.挪威数学家李(Lie,M. S.)所著论文,发表于1874年.李的主要贡献在

李群和李代数方面. 1870 年,他从求解微分方程入手,依靠微分几何和射影几何建立起一种变换,将空间直线簇和球面一一对应. 不久他发现,这种对应是连续的,能将微分方程的解表示出来并加以分类. 由此他引入了一般的连续变换群概念,证明了一系列定理来完善和发展他的理论.《论变换群》是李在这个方面发表的第一篇论述,它标志着连续变换群的一般理论开始建立.

《论变换群》的原文刊于 Nachrichten König. Ges, der Wiss. Göttingen, 22(1874). 文中首先给出变换集是 r 参数集的条件:它能够表示成

$x'_i=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n;\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$,其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 表示原来的变量,$x'_1,x_2,\cdots,x'_n$ 表示新的变量,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是参数. 李总假设变量为连续变量,且此变换集中任两变换的合成仍为此变换集中之变换. 之后李引进两个变换群等价的概念. 在此基础上李讨论了当时已得到的确定所有(连续)变换群的问题.

在一个变量的情形,李首先讨论了单参数群 $x'=f(x,\alpha)$的存在问题. 通过适当选取参数 α 便得到一个无穷小变换,连续无限次迭代这个无穷小变换便生成整个群,可以表示为 $x'=x+\alpha$. 对于单变量 2 参数群 $x'=f(x,\alpha_1,\alpha_2)$,李用类似于单参数群的方法引进两个无穷小变换,并考虑二阶无穷小,最终证明在单变量空间上作用的 2 参数群也只有一种类型,即线性变换 $x'=\gamma x+\delta$ (其中 γ 与 δ 为参数). 它由平移变换和相似变换组合而成. 之后,李类似地讨论单变量 3 参数群,证明它可以用所有分式线性变换 $x'=\alpha x+\beta/\gamma x+\beta$ 构成的群来表示. 当参数增加至 4 时,李证明了单变量 4 参数群不存在,因此可得如下简单结论:“单变量变换群只能不超过 3 个参数,它等价于所有线性变换构成的群,或者它的子群”.

在两个变量的情形,李指出不能考虑点变换而必须考虑切触变换及在切触变换下的无穷小变换. 李证明了两个变量的切触变换群的不变量或者为二阶微分方程,或者至少为三阶微分方程. 在前一种情形,通过适当的切触变换,能将使二阶微分方程不变的所有变换构成的群变为点变换群,之后则出现三种可能:

1. 类似于保角变换,最简单的例子是将和两个生成元素不交的双曲面仍变为自身的那些空间直射变换,或使两点不变的平面直射变换.

2. 只将一个单参数曲线簇保持不变,则存在无穷多个不同类型(能计数).

3. 不能使任何单参数曲线簇保持不变,此时变换群表成由平面直射变换构成的 8 参数群,或其 6 参数子群,或 5 参数子群(没有 7 参数子群).

后一情形可通过圆映入圆的变换来实现,这些变换的全体组成 10 参数群,它可变为空间中直射变换群,它们将线性复形映为线性复形.

在超过两个变量的情形,李用足够大维数的空间的直射变换构成的群来构造所有类型的例子. 李还指出了他的这些研究对其他数学分支,如几何、力学,特别是对微分方程理论的重要性.

继《论变换群》之后,李终其一生都在研究连续群. 在其学生的协助下,李完成了关于变换群的综合性著作《变换群理论》(3 卷,1888—1893 年). 连续群现称“李群”,它与伽罗瓦置换群、高斯(Gauss, C. F.)等人在数论研究中引进的变换群一起成为抽象群论的重要来源.

概念语言(Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens) 西方现代数学著作. 德国数学家、逻辑学家弗雷格(Frege, (F. L.)G.)著,1879 年初版于哈雷(Halley, E.). 弗雷格是逻辑主义的创始人之一,终生致力于用逻辑为算术奠定严格的基础.

弗雷格试图给出数的一个满意的定义,并给算术以严格的基础. 为此,他发现普通语言无能为力,为了克服这一困难,他写出了《概念语言》一书,试图提供一种完善、充足地分析与表述数学证明的有效工具. 这一工具逐步发展为现代数理逻辑,而弗雷格则成为数理逻辑的创始人之一. 所谓“概念语言”是一种表意语言,用它进行推理最易于发现隐含的前提和有漏洞的步骤. 弗雷格认为算术定理是可由纯逻辑规律出发证明的. 为了保证推理过程的绝对严格性,他特地创设了这种符号语言,意欲作为纯粹思维的公式语言. 弗雷格的分析与布尔(Boole, G.)或佩亚诺(Peano, G.)的有着本质的不同,他们的工作并未将数学证明形式化,而只是使之更易于表达概念的逻辑结构.

弗雷格在《概念语言》中创造了许多特殊符号,其中“├─”为断定符号,“├─”A 表示“A 是一个事实”,“┬”为条件符号,“$┬^A_B$”表示“B 蕴含 A”. 弗雷格用小竖杠表示否定,他表明其他命题联结词“和”与“或”可用否定与蕴含表示. 事实上,他是在一些公理的基础上发展了命题逻辑,其中一些公理在现代逻辑表示中保留了下来. 他进而依靠自己引入的函数的一般概念建立了量词理论. 他用 $\Phi(A)$表示一个函项(论项多于一个时用 $\Psi(A,B)$),├$\overset{a}{\smile}$─ 普遍性表为 $\Phi(a)$,意为不管论项如何选择,$\Phi(a)$是一个事实. 存 ├┬$\overset{a}{\smile}$┬ 在性表示为 $\Lambda(a)$. 这样他就构造了一种基本自足的逻辑演算,即一阶谓词演算. 应该看到,弗雷格没有提出完备性与相容性问题. 他将他的概念语言应用于一般序列理论,在《概念语言》第三部分中定义了先承关系,并将数学归纳法建立于其上. 这一关系后来被戴德金(Dedekind, (J. W.)R.)

非正式的引入数学，罗素(Russell，B. A. W.)和怀特海(Whitehead，A. N.)在《数学原理》中正式地引入了这一关系.

弗雷格虽然没有全面开展从逻辑推出数学的研究，但他明确提出了数学可以化归为逻辑的思想，从而成为逻辑主义的创始人之一，他的工作对数理逻辑的发展产生了很大影响.

微分方程所定义的积分曲线(Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle) 西方现代数学著作. 法国数学家、数学物理学家、天体力学家庞加莱(Poincaré，(J.-)H.)著，发表于1881—1886年间，是同一标题下的四篇论文，它开创了微分方程定性理论的研究.

庞加莱的目的是通过考察微分方程本身而对微分方程解的稳定性问题做出解答. 他要寻求解答的问题，用他自己的话说是："(由微分方程的不同解所确定的)动点，是否描出一条闭曲线？它是否永远逗留在平面某一部分的内部？换句话说，并且用天文学的话来说，我们要问轨道是稳定的还是不稳定的？"庞加莱从一般的方程

$$\frac{dx}{Z}=\frac{dy}{Y}$$

出发，其中Z、Y是x、y的任意多项式，其系数是实数. 他要对方程的所有解做出定性描述，这一问题与解析几何中根据曲线的方程探讨其一般形状类似，但其困难则无法比拟. 为了把握积分曲线的无穷多分支，他将(x,y)平面从一球心投射到球面上. 如此首次在紧流形上处理一向量域的积分曲线，其出发点是考察满足条件$Z=Y=0$的方程的奇点. 他将这些点分为"结点"、"鞍点"、"焦点"、"中心"四类. 为了考察积分曲线的形状，庞加莱引入了"横截弧"的基本概念. 函数$F(x,y)$($F(x,y)=C$对某些C值是横截的)也起了重要作用. 经典微分方程的例子使人们相信"一般"积分曲线将由一个方程$\Phi(x,y)=C$(其中Φ是解析的，常数C可取任意值)给出，庞加莱表明这种情形只是"例外"，即奇点中无结点和焦点时. 一般情况下没有中心，只有有限的结点、鞍点或焦点. 有这样一些闭积分曲线，其他的或者与这些闭曲线两奇点切触，或是渐近的. 最后他表明他的方法如何可在明显情形中确定将球剖分成不包含闭积分曲线的区域. 前面两篇论文是全新的，在许多新结果中，庞加莱提出了无切触环和极限环这样的闭曲线. 在该系列的第三篇论文中，庞加莱研究了高次方程和具有形状$F(x,y,y')=0$(其中F是x,y,y'的多项式)的方程的更一般情形. 通过考虑曲面$F(x,y,z)=0$，他阐明该问题是在一紧代数曲面S上确定一向量域的积分曲线的特例. 这使他立刻引入S的亏格作为问题的基本不变量，他发现了如下关系

$$N+F-C=2-2p,$$

其中N、F和C分别是结点、焦点和鞍点数目. 接着他表明他此前关于球的结果可以部分地推广到一般情形. 然后对S是环面($p=1$)的情形做了细致地、漂亮地研究，它们可能无奇点；这样便出现了积分曲线的"遍历假设"，他未能证明该假设在一般情形下成立，后人证明了这点. 在第四篇论文中开创了高阶方程的定性理论，或者说开创了二维以上的流形上的积分曲线的研究，他通过引入奇点的克罗内克指标推广了关于二维情形下的奇点关系式.《微分方程所定义的积分曲线》中的四篇文章均收入《庞加莱全集》(1916—1954)第1卷中.

这种全新的微分方程定性理论出于创造者之手，并在创造者本人手中几乎立刻臻于完善，这在数学史中是很少有的例子之一.

天体力学新方法(Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste) 西方现代数学著作. 法国数学家、数学物理学家、天体力学家庞加莱(Poincaré，(J.-)H.)著，三卷本巨著. 第一卷出版于1892年，第二卷出版于1894年，第三卷出版于1899年. 这是庞加莱最著名的著作，其中载录了作者在天体力学方面的无数新结果，给出了著名的天文学中三体问题的更普遍的理论和新的研究方法. 它不仅是自拉格朗日(Lagrange，J.-L.)以来天体力学工作的顶峰之作，而且成为后世天体力学家和数学家工作的丰富的源泉，对数学与天文学的发展都产生了巨大的影响.

在这里要列数这本巨著中的新结果是不可能的. 1885年以后，庞加莱在微分方程方面的论文大部分都与天体力学，特别是三体问题有关. 在近百篇论文中，他得到了无数的新结果和新技巧，所有这些都融进了《天体力学新方法》和《天文学讲义》中. 1885年瑞典国王奥斯卡二世对数学家提出n体问题作为大奖题目，庞加莱以"论三体问题和动力学方程"(1890)的长篇论文获奖. 其中他考虑了微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=X_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,\mu)\ (i=1,2,\cdots,n).$$

他用参数μ的幂展开X_i，并假定这方程组对$\mu=0$有一个已知的以T为周期的周期解

$$x_i=\Phi_i(t)\ (i=1,2,\cdots,n).$$

他试图寻找方程组当$\mu=0$时归化为$\Phi_i(t)$的周期解. 他首先推广了柯西(Cauchy，A.-L.)关于常微分方程组的解的较早的工作，然后庞加莱证明了他所要寻找的周期解的存在性，并寻找当其中两个物体的质量相对于第三个的质量很小时(太阳系中即如此情形)三体问题的周期解. 经过假定两小质量物

体围绕太阳在同一平面上的两个同心圆上运动后，便得到这样的解. 如果假定 $\mu=0$ 时的轨道是椭圆，并且它们的周期是可公度的，便可以得到其他的解. 利用这些解，并用他对方程组所建立的理论，庞加莱便得到其他的周期解. 他证明了有无穷多个初始位置和初始速度，使得三星体相互间的距离是时间的周期函数. 庞加莱对足够小的 μ 证明了殆周期解的存在性，他发现了周期解的渐近解，这共有两类：在第一类中，当 t 趋于 $-\infty$ 或 $+\infty$ 时，解渐近地趋于周期解；第二类解由二重渐近解组成，也即当 t 趋于 $-\infty$ 和 $+\infty$ 时，这种解趋于一周期解，这种二重渐近解有无穷多个. 为了获得这些结果，庞加莱第一个发明了必需的一般工具：变分方程，特征指数以及积分不变量. 所有这些都总结在《天体力学新方法》中. 通过他的工作，庞加莱对天体力学进行了严格的处理，开创了动力系统稳定性的研究，证明了著名"庞加莱回归定理"，极大地推进了天体力学的发展.

《天体力学新方法》第一卷共 7 章，主要处理周期解(第 3 章)、一致积分的不存在性(第 5 章)及渐近解(第 7 章)；第二卷共 19 章，讨论了纽科姆(Newcomb，S.)等人的方法，批判了摄动论，指出摄动论超出某种范围便不收敛了；第三卷共 12 章，详细讨论了积分不变量、二阶方程的周期解及二重渐近解等问题.

位置分析(Analysis situs)　西方现代数学著作. 法国数学家、数学物理学家、天体力学家庞加莱(Poincaré，(J.-)H.)著，它是由 6 篇文章组成的一个系列. 第一篇基本论文发表在 1895 年，接着是在 1904 年陆续发表在几种期刊上的 5 篇文章对前论文的补充. 这是庞加莱在组合拓扑方面最重要的工作，其中创立了用剖分研究流形的方法，为组合拓扑学的发展奠定了基础. 直到 1933 年代数拓扑的发展，都完全基于庞加莱在这些著作中发展的思想和技巧.

"位置分析"这一名称来自德国数学家莱布尼茨(Leibniz，G. W.). 瑞士数学家欧拉(Euler，L.)关于凸多面体的顶点数、棱数和面数的关系公式，以及对哥尼斯堡七桥问题的解决都涉及到了图形的组合性质，其后默比乌斯(Möbius，A. F.)及贝蒂(Betti，E.)等人对这一领域都做出了贡献. 到 19 世纪末，组合拓扑中发展得颇为完善的惟一领域是闭曲面理论. 最先系统地、一般地探讨几何图形的组合理论的人是庞加莱，他奠定了组合拓扑学这门学科的基础. 连续性是庞加莱的数学工作的主旋律，每当他遇到分析中的问题时，他几乎立刻便研究当条件连续地变化时所发生的情形. 1901 年，他写道："我遇到的每一个问题都把我引向位置分析."他对微分方程定性理论的贡献基本上是拓扑工作. 他对于组合拓扑的贡献是由下述问题激发出来的：当 x、y、z 都是复数时，确定代表函数 $f(x,y,z)=0$ 的四维"曲面"的结构. 在 1895 年的基本论文中，他试图通过 n 维图形的解析表示来建立 n 维图形的理论. 其后转向了流形的即黎曼曲面的推广的纯几何理论. 庞加莱最后所采用的方法出现在他的第一个补充文章(1899)中. 他研究流形所使用的是弯曲的胞腔或图形的小块，人们今天所谓的单纯同调的方法完全是庞加莱的创造：流形的三角剖分概念、单纯复形概念、重心重分概念、对偶复形、复形的关联系数矩阵以及从它对贝蒂数的计算等. 借助于这些工具，庞加莱发现了多面体的欧拉定理的推广(现称为欧拉-庞加莱公式)，以及著名的关于流形的同调的对偶定理. 在 1899 年的第一篇补充文章里，庞加莱引进了挠系的概念. 在 1895 年的论文中，他定义了流形的基本群(也称为庞加莱群或第一同伦群，它在今天的拓扑学中起着相当重要的作用)，并且给出了它与第一贝蒂数的关系. 在最后一篇补充文章中，他给出了一个例子：两个流形有相同的同调，但有不同的基本群. 此外，他还给出了一个颇加限制的猜测，即每一个单连通的、闭的、能定向的三维流形同胚于三维球. 这个著名的猜测曾经被推广成：每一个单连通的、闭的 n 维流形，如果具有 n 维球的贝蒂数和挠系数，它就同胚于 n 维球. 这些猜测还没有得到完全证明. 另一个著名猜测称庞加莱的主猜想，即如果 T_1、T_2 是同一个三维流形的单纯的(不必是平直的)剖分，则 T_2 与 T_1 有同构的重分. 这一猜想对低于三维的有限的单纯复形是成立的，但对于不低于五维的流形错误. 庞加莱不仅提出并解决了许多重要问题，创造了许多新概念和新方法，而且留下了多个未解决的问题，它们至今仍然有力地影响着这门学科的发展.

《位置分析》这一系列论文都已收入《庞加莱全集》(1916—1954)第 6 卷中.

函数论论文集(Abhandlungen aus der Funktionenlehre)　西方现代数学著作. 德国数学家外尔斯特拉斯(Weierstrass，K.(T. W.))著，出版于 1886 年. 这是作者从已公开发表的论文中选出 7 篇而成的"自选集". 这些论文对当时的数学发展都产生过重要影响，是数学史上的重要文献.

第一篇为"一阶解析函数论"，首次发表于《柏林皇家科学院文集》(1876)中. 该文研究了解析函数的"正则区域"，对函数的失去正则性的点，即"奇点"的研究占有重要地位. 外尔斯特拉斯把函数的奇点分为"真性奇点"和"非真性奇点"，分别探讨了它们的特性. 他给出的"外尔斯特拉斯定理"具有重要的意义. 后来经过法国数学家皮卡(Picard，(C.-)É.)的严格化，形成 20 世纪函数论的一个分支，现在虽然形式不同，但属于此范畴的研究仍在继续发展着. 在

第二篇中外尔斯特拉斯将米塔-列夫勒(Mittag-Leffler,(M.)G.)所建立的一个定理,修改为容易应用的形式.今天教科书中的所谓“米塔-列夫勒定理”便是由外尔斯特拉斯改写过的形式.第三篇和第四篇是“关于函数数论”,它们分别发表于1880年和1881年,其中导入了“一致收敛”的概念,研究了能够表示为幂级数的函数在收敛圆内部、外部以及圆周上的性状.此外,在论文的末尾,他提出了关于函数的连续性与可微性的重要区别,给出了在某一区间上连续,但处处不可微的函数类的例子

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x),$$

其中,$0<a<1, ab>1+3\pi/2$,b是奇数.这给当时的数学界以极大的震动.第五篇和第六篇是关于多元函数的研究.第五篇是首次以论文的形式发表,它是阿贝尔积分研究的基础,其中的所谓“预备定理”至关重要.第六篇发表于1876年,研究了多元周期函数.最后第七篇研究了作为无穷乘积的函数.

外尔斯特拉斯的函数论研究,他的严格批判精神是数学中的重要遗产,使函数论获得了长足的进步,对现代数学产生了深远的影响.20世纪著名的数学家外尔(Weyl,(C. H.)H.)将外尔斯特拉斯的函数论和黎曼(Riemann,(G. F.)B.)的函数论进行了综合,开创了新的函数论研究的道路.

算术原理新方法(Arithmetices principia, nova methodo exposita)　西方现代数学著作.意大利数学家、逻辑学家佩亚诺(Peano,G.)著,1889年出版.书中给出了自然数公理体系,使用了许多符号,对符号逻辑和数学基础研究产生了重要影响.

19世纪后期,人们对数系的逻辑基础的普遍关心最终促使人们采取步骤来构造整数的基础,并确立整数的性质.虽然在从事整数理论工作的人们中有少数人(如克罗内克(Kronecker,L.))认为像自然数这样基本的东西已不可能再加以逻辑分析了.戴德金(Dedekind,(J. W.)R.)在其著作《数的性质与意义》中最先给出了一套整数理论,但他的处理过于复杂,不够清晰,因而未能引起足够重视.对于整数的处理,最能适合19世纪后期的公理化倾向的,是用一组公理来引进整数的方法.佩亚诺在其著作《算术原理新方法》中首先完成了这件工作.佩亚诺的创造独立于戴德金,他的第一篇逻辑方面的文章是关于演绎逻辑演算的,刊于1888年的《基于格拉斯曼的线性扩张论的几何演算》一书中,其中他综合与改进了布尔(Boole,G.)等人的工作.在1889年的《算术原理新方法》中,佩亚诺不仅改进了他自己的逻辑符号体系,而且利用他的新方法去获得数学中的重要新结果,他的新符号使推理简明清晰,如“$\in$”表示属于,“$\supset$”表示包含,“N”表示自然数系,“$a+$”表示后继于a的下一个自然数.这些符号如今已被广为采用,成为标准的逻辑语言.佩亚诺从不经定义的“类”、“后继者”、“属于”等概念出发,给出了自然数系的一组公理如下:

1. 1是自然数.
2. 每一个自然数都有一个后继者.
3. a、b是自然数,若a、b的后继者相等,则a与b相等.
4. 1不是任何自然数的后继者.
5. 若自然数组成的类S含有1,又若当S含有任一数时,它一定含有其后继者,则S就含有全部自然数.

佩亚诺采取了关于相等的自反、对称和传递公理,他用如下的叙述来定义加法:对于每一对自然数a与b,有惟一的$a+b$存在,使

$$a+1=a+,$$
$$a+(b+)=(a+b)+.$$

其乘法定义如下:对于每一对自然数a与b,有惟一的积$a\cdot b$存在,使

$$a\cdot 1=a,$$
$$a\cdot(b+)=a\cdot b+a.$$

之后,他便建立了人们熟知的自然数的所有的性质.从自然数出发,人们不难定义整数、有理数,以至实数、复数,于是数系的严格的逻辑基础便建立了起来.在数学的历史发展进程中,佩亚诺的工作起了重要的作用.

1895—1908年,佩亚诺出版了一部公式集,运用他创设的符号,叙述并证明了4200多个数学公式和定理,但其工作的目的并非要将数学建立在逻辑基础上.对于他来说,逻辑只是数学的仆人.佩亚诺的工作给罗素(Russell,B. A. W.)以很大的影响.

连分式研究(Recherches sur ler fractions continues)　西方现代数学著作.荷兰数学家斯蒂尔杰斯(Stieltjes,T.(J.))著,发表于1894—1895年.该著作第一次将连分式作为复解析函数论的一部分做了一般处理,是连分式解析理论的开端.沿此方向导致了对希尔伯特空间理论的研究.斯蒂尔杰斯在这篇文章中研究了收敛性问题,以及定积分与发散级数的关系,对不连续函数和发散级数给予了重视.就在这篇著作中第一次出现了后来以他的名字命名的斯蒂尔杰斯积分.斯蒂尔杰斯研究了连分式

$$\frac{1}{a_1z+}\ \frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3z}\ \frac{1}{a_4+}\ \frac{1}{a_5z+}\cdots$$
$$\frac{1}{a_{2n}+}\ \frac{1}{a_{2n+1}z+}\cdots, \qquad (1)$$

其中a_i是正实数,而z是复变量.连分式(1)的收敛与发散根据逼近序列$P_n(z)/Q_n(z)$的敛散性定义,其中每一逼近只考虑连分式(1)的前n项得到的有

理函数.斯蒂尔杰斯证明了

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{C_{k-1}}{z^k} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\partial_{n,k-1}}{z^k}, \quad (2)$$

其中$\{C_k: k=1,2,\cdots,n\}$只依赖于(1)式而与 n 无关.公式(2)导致了依 z 的降幂将(1)式展开的定义

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{C_{k-1}}{C^k}, \quad (3)$$

这里 C_k 是正实数,且

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} < \frac{C_{n+2}}{C_{n+1}}. \quad (4)$$

当上述比的序列无界时,(3)式对一切 z 发散,若(4)式有界,则存在一 $\lambda>0$,使(3)式对一切满足 $|z|>\lambda$ 的 z 收敛.之后他证明了后一种情况下,如果多项式 $Q_n(-z)$ 的根依大小排列,若最大的是 $x_{n,k}$,则

$$\lim_{n\to\infty} x_{n,k} = \lambda.$$

他表明对一切有正实部的 z,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = F_1(z), \quad (5)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = F(z). \quad (6)$$

对于 z 为实数($=x$),$F(x)$ 和 $F_1(x)$ 是实数,且 $F_1(x)\geqslant F(x)$,等号在右半平面(包括正实轴)成立当且仅当级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

发散.$F(z)$和 $F_1(z)$在右半平面是解析的.总之,斯蒂尔杰斯证明(1)是收敛的充要条件是

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

是发散的,否则连分式便是摆动的.余下的问题是将此结果推至左半平面上的 z(除了负实轴上的某些点).斯蒂尔杰斯证明了极限

$$\lim_{n\to\infty} P_{2n}(z) = p(z),\ \lim_{n\to\infty} P_{2n+1}(z) = p_1(z);$$

$$\lim_{n\to\infty} Q_{2n}(z) = q(z),\ \lim_{n\to\infty} Q_{2n+1}(z) = q_1(z),$$

都存在,且 p、q、p_1、q_1 都解析,并有

$$p_1(z)q(z) - p(z)q_1(z) = 1.$$

之后,他建立了 $F_1(z)$和 $F(z)$在切开的平面上的解析性.对于 $F_1(z)$和 $F(z)$的性质的进一步研究使斯蒂尔杰斯遇到了他所谓的矩量问题:即求得一个质量分布,其矩是已知的.正是为了解决矩量问题,他引进了斯蒂尔杰斯积分.首先他考虑了一定义于正实轴上的递增的实值函数 φ,讨论了其单侧极限;其后他假定 φ 是一个阶梯函数($\varphi(0)=0$),定义了积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}\varphi(x) \quad (7)$$

是

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})]$$

当 $\max(x_{i+1}-x_i)\to 0$ 时的极限,其中 $a=x_0<x_1<\cdots<x_i<\cdots<x_n=b, x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$.之后,他建立了积分(7)式的分部积分公式及许多积分性质,从而解决了矩量问题.他还提出并解决了反问题,得到类似于(1)式的一个连分式.

斯蒂尔杰斯的《连分式研究》是这一分支学科中的一个里程碑,他提出的积分概念发展了黎曼(Riemann,(G. F.)B.)的积分思想,如今已成为数学中的一种常用积分,在物理学中也有着广泛的应用.

关于超限数理论的基础(Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre) 西方现代数学著作.德国数学家康托尔(Cantor,G. (F. P.))著,分两部分先后发表于 1895 年和 1897 年的《数学年刊》上,后收入康托尔的全集中.

康托尔是集合论的创始人.他关于无穷集合的工作起源于三角级数的研究,1873 年 11 月在给戴德金的信中他提出了实数集合是否可数的问题,同年 12 月 7 日在给戴德金的信中他声称自己成功地证明了实数集合是不可数的.这一天可认为是集合论的诞生之日.1874 年,他发表了关于集合论的第一篇论文"关于全体实代数数的一个性质",证明了代数数全体是可数的,从而容易地证明了不可数多个超越数.这是惊人的创举.之后,发表的一系列文章中,他发展了自己的理论.他用一一对应作为基本准则,提出了"势"的概念来区分无穷集合的大小.在证明了存在相同的势和不同的势的集合(从而区分出了无穷之间的差别)之后,他继续研究集合的势这一概念,并引进了基数与序数的理论.在一般集合论发展中认识到"每一个集合总存在势更高的集合"是根本重要性的一步,康托尔最先就是通过他的序数的理论来证实这一点的.从 1879 年到 1884 年,在他发表的几篇具有同一标题"关于无穷的线性点集"的文章中,康托尔发展了他的这一理论.由于康托尔关于无穷集合的一系列重要工作未被当时的一些杰出的数学家所接受,再加上他长期研究工作的疲劳,康托尔一度陷入精神崩溃.他从 1884 年停止了数学研究工作,但 1887 年他又重新回到数学上来.从那时起直至他去世,他一共只发表了三篇数学论文,《关于超限数理论的基础》是三篇中的最后一篇.

《关于超限数理论的基础》在超限数理论的历史上具有决定性的意义.在这篇纲领性的重要著作中,康托尔重新奠定了他的超限基数与超限序数理论的基础.全文共分 20 节,第 1 节便是"势"或"基数"的概念.文章一开始,康托尔便给出了他关于"集合"的著名定义,他称"集合 M"为确定的个别东西 m 的全体.这些东西属于我们的直觉或思维,称为 M 的元素,运用符号表示,即 $M=\{m\}$.之后,他定义了"势"或"基数"的概念,康托尔写道:"我们用 M 的'势'或

'基数'称由我们的能动思维从 M 的各元素 m 的性质和其顺序中抽象出来的一般概念."并用 $\overline{\overline{M}}$ 表示该双重抽象的结果,即 M 的基数或势.虽然现代数学中已不再使用康托尔关于基数或序数的定义,但其后的一切发展无不源于康托尔的理论范畴.第 2 节中康托尔讨论了势的大小,他断定对任意两基数 a、b,必有或者 $a=b$,或者 $a<b$,或者 $a>b$ 成立.由此得到重要结论:"对两集合 M、N,如果 M 等于 N 的一部分 N_1,而 N 等于 M 的一部分 M_1,则 M 与 N 相等."(施罗德(Schröder,F. W. K. E.)(1896)和伯恩施坦(Bernstein. F.)(1899)在没有"两基数之间上述三种数量关系必有其一成立"的前提下都独立地证明了该结论).第 3、4 节中分别给出了势的相加与相乘,势的指数的概念.第 5 节讨论了有限基数.第 6 节介绍了最小的超限基数 $\aleph_0$.第 7 节到 11 节讨论了序型.在第 7 节中给出了序型的定义,讨论了全序集的序型.他把序型理解为从集合 M 的元素 m 中只抽取其性质而保留其顺序得到的一般概念.之后,在第 8 节中给出了序型的加法与乘法.第 10 节讨论了含于超限有序集中的基本序列.第 11 节研究了由介于 0 与 1 之间的一切实数以其自然顺序构成的线型连续统 Z 的序型 Q.前 11 节构成文章的第一部分.文章的第二部分讨论了序数.在第 12 节中给出了良序集的定义之后,第 13 节讨论了良序集的"节"(Abschnitt).第 14 节研究了良序集的序数.从第 15 节至 20 节主要研究了第二数类 $Z(\aleph_0)$ 的一些性质,包括第二数类的数(15 节)、第二数类域中的势(18 节)、第二数类的数的范式(19 节)、第二数类的 ϵ 数(20 节)等.在第 16 节中证明了第二数类的势等于第二个最大的超限基数 $\aleph_1$.

康托尔在该文中发展的超限数理论并不完善,还留下了许多工作,后来得到很大发展,试图完善它的努力促使了数学基础这一学科的成长.他提出的问题甚至比解决的问题更重要,他的理论不仅对数学的意义是巨大的,而且对哲学也产生了深刻的影响,其重要性不久便由于它在分析学和测度论、拓扑学等方面的重要应用而被一些卓越的数学家所认识.今天集合论已成为现代数学的基础.该文的法文译本出版于 1899 年,1915 年又出版了英译本.

几何基础(Grundlagen der Geometrie)　西方现代数学著作.德国数学家希尔伯特(Hilbert,D.)著,1899 年初版.该书以严格的公理化方法重新阐述了欧几里得几何学,为 20 世纪数学的公理化开辟了新道路,是数学史上具有划时代意义的著作.

希尔伯特在《几何基础》中首先给出了一些不定义概念——点、线、平面、在……之间、对点重合、角的重合等,并以此为基础着手建立几何学理论体系,这与欧几里得(Euclid)有着显著的区别.然后希尔伯特列举了欧氏几何的公理系统,他的公理不是希腊几何学中的"第一原理",而只不过是为了保证几何学的无矛盾性而采取的条件.他用这些公理证明了欧氏几何的一些基本定理,其目的不仅是把众多既知事实予以组织和整理,而是把以公理为基础的几何学的结构本身作为问题.为此他提出了公理系统的"相容性"和"独立性".

《几何基础》第一版于 1899 年出版后,受到各国学术界的重视,有多种译本出版,在希尔伯特的著作中它赢得了最多的读者.原书亦多次修订再版,希尔伯特在世时已出到第七版,至 1977 年已出到第十二版.虽然新版本都有增删,不断完善,但其基本内容则无大的变动.正文共有七章.希尔伯特在导言中声明本书的目的是"重新尝试着替几何建立一个完备的、而又尽可能简单的公理系统;要根据这个系统推证最重要的几何定理,同时还要使我们的推证能明显地表示出各类公理的含义和个别公理推论的含义."为此他在第一章中提出五组公理.第一组为关联公理,共 8 条,其中规定了最基本的概念"属于".第二组公理为顺序公理,共 4 条,展开了"介于"这一概念.第三组即合同公理,共 5 条,其目的是写出合同关系的这样一些性质,它们要足以纯逻辑地推导出涉及合同关系的全部定理,其中前 3 条是关于线段的合同的,第 4 条是关于角的合同的,第 5 条则用来确定线段的合同和角的合同之间的关系.第四组只包含惟一的一条平行公理,即欧几里得公理.第五组为连续公理,共 2 条.第二章论述了公理的相容性和相互独立性.第三章、第四章分别为比例论和平面中的面积论,属于非阿基米德(Archimedes)的度量几何学.第三章的目的在于引入线段相比的概念,特别在于建立非阿基米德几何里的相似形理论,在第四章里则建立了非阿基米德的面积理论.第五、六两章分别讲述德扎格定理和帕斯卡定理,属于非阿基米德射影几何.第五章里首先要解决的问题是:在非阿基米德的射影几何里引进坐标系以至一般地引进解析几何的方法,以便在平面上建立解析几何.第六章对上一章的问题做了进一步的探讨,证明了没有阿基米德公理,要证明帕斯卡定理是不可能的.第七章介绍根据第Ⅰ—Ⅳ组公理的几何作图,属于非阿基米德的作图理论.

《几何基础》一书有中译本(江泽涵、朱鼎勋译,科学出版社出版,1987,第二版,系根据德文第十二版译出).

数学问题(Mathmatische Probleme)　德国数学家希尔伯特(Hilbert,D.)于 1900 年在巴黎第二届国际数学家大会上所作的著名演讲.其中阐述了数学问题在数学发展中的重要意义、数学问题产生的源泉、对数学问题解答的一般要求及解决数学问

题的方法，反映了希尔伯特对数学问题的深刻认识. 尤为重要的是他根据19世纪数学发展的状况提出了23个当时尚未解决的重要的数学问题，展现了20世纪数学的曙光. 20世纪的数学发展证明，这些问题涉及现代数学的许多重要领域，成为20世纪数学家兴趣的中心. 数学家们经常通过检验当时希尔伯特问题的解决程度来衡量他们所取得的进步，它对20世纪数学的发展产生了深远影响. 23个数学问题分列如下：

1. 康托尔(Cantor，G.(F.P.))连续统基数问题. 1963年获得解决. 科恩(Cohen，P.J.)证明：连续统假设的真伪在策梅洛-弗伦克尔公理系统内无法判明. 希尔伯特提到的良序问题由策梅洛(Zermelo，E.F.F.)完成.

2. 算术公理的相容性. 希尔伯特的设想后来发展为系统的"希尔伯特计划"("元数学"或"证明论")，但1931年哥德尔(Gödel，K.)的不完备性定理指出了用元数学证明算术公理相容性之不可能.

3. 只根据合同公理证明两个等高等底的四面体体积之相等是不可能的. 希尔伯特的学生德恩(Dehn，M.W.)1900年便给出了该问题的证明.

4. 直线作为两点间最短距离的问题. 该问题太笼统. 许多数学家在构造和探讨各种特殊度量几何方面有很大进展，但问题并未完全解决.

5. 拓扑群成为李群的条件. 1952年解决. 格利森(Gleason，A.M.)、蒙哥马利(Montgomery，D.)、齐平(Zippin，L.)等人给出了肯定解答.

6. 物理公理的数学处理. 公理化物理学的一般意义不明确. 在量子力学等学科，公理化方法已取得很大成功. 希尔伯特首先提到的概率论的公理化已由柯尔莫哥洛夫(Колмогоров，А.Н.)1933年完成.

7. 某些数的无理性与超越性. 从西格尔(Siegel，C.L. 1921)、盖尔丰德(Гельфонд，А.О.)到贝克(Baker，A. 1966—1969)这类问题得到成功的处理.

8. 素数问题. 黎曼猜想仍未解决. 哥德巴赫猜想亦未最后解决，目前最好的结果属于陈景润(1966).

9. 任意数域中最一般的互反律之证明. 已由高木贞治(1921)和阿廷(Artin，E.)1927年解决.

10. 丢番图方程可解性的判别. 1969年马季亚谢维奇(Матиясевич，Ю.В.)证明希尔伯特所期望的一般算法是不存在的.

11. 系数为任意代数数的二次型. 哈塞(Hasse，H. 1929)和西格尔(Siegel，C.L. 1936，1951)获得了重要结果.

12. 阿贝尔域上的克罗内克定理推广到任意代数有理域. 这方面已做了很多工作，但问题远未解决.

13. 不可能用仅有两个变数的函数解一般的七次方程. 要求连续函数情形已由阿诺尔德(Arnold，V.I. 1957)解决，解析情形仍未解决.

14. 证明某类完全函数系的有限性. 1958年永田雅宜给出了否定解答.

15. 舒伯特(Schubert，H.C.H.)计数演算的严格基础已由范·德·瓦尔登(Van der Waerden，B.L. 1938—1940)和韦伊(Weil，A. 1950)建立，但舒伯特演算的合理性仍未解决.

16. 代数曲线与曲面的拓扑. 结果仍然很零散.

17. 正定形式的平方表示. 已由阿廷(Artin，E.)于1926年解决.

18. 由全等多面体构造空间. 比伯巴赫(Bieberbach，L.)和哈约什(Hajos，G. 1941)等解决了问题的一部分.

19. 正则变分问题的解是否一定解析. 已取得一些特殊结果.

20. 一般边值问题.

21. 具有给定单值群的线性微分方程的存在性. 已由希尔伯特本人(1905)解决.

22. 解析关系的单值比. 一个变数的情形由克贝(Koebe，P. 1907)解决.

23. 变分法的进一步发展. 希尔伯特本人和许多其他数学家对变分法的发展做出了重要贡献.

(参见本卷《数学名题与猜想》中的"希尔伯特数学问题").

外国数学学派

伊奥尼亚学派(Ionian school)　亦称米利都(Miletus，小亚细亚西南角海岸，伊奥尼亚最繁荣的城市)学派. 数学史专门术语. 指古希腊伊奥尼亚(Ionia，位于小亚细亚西岸)地区形成的学派，约创立于公元前7—6世纪，以泰勒斯(Thales，(M))为代表.

伊奥尼亚学派否认神是世界的创造者，认为水是万物之基，崇尚自然规律，并对数学的一些基本定理做了科学论证. 泰勒斯游访埃及时，曾利用相似三角形原理测量了金字塔的高度，并准确地预报过公元前585年5月28日的日食. 他在数学发展史上开始了命题的证明，如圆的直径等分圆周；等腰三角形两底角相等；两直线相交，对顶角相等；相似三角形各边成比例；直角彼此相等；对半圆的圆周角为直角等. 相传的泰勒斯定理为：两个三角形两角与一边对应相等，则这两个三角形全等.

伊奥尼亚学派还得出任何自然数是若干个"1"之和的算术基本定义，并积极应用他们的理论到实际测量中，为数学的发展奠定了基础. 伊奥尼亚学派的主要成员还有安纳西曼德(Anaximander)、安纳

西门尼斯(Anaximenes of Miletus)、安纳萨戈拉斯(Anaxagoras)等.他们中的有些人对后来的毕达哥拉斯学派产生了很大的影响.

毕达哥拉斯学派(Pythagorean school) 数学史专门术语.指古希腊哲学家、数学家、天文学家、音乐理论家毕达哥拉斯(Pythagoras)于公元前520年左右创立的一个学派.它集宗教、政治、学术为一体,组织严密,有共同的哲学信仰和政治理论,严格的训练和较高的学术水平.毕达哥拉斯曾从师于伊奥尼亚学派的安纳西曼德(Anaximander),接受过埃及、巴比伦等地流传下来的天文、数学知识.创立学派后,他一直很重视数学,并企图用数来解释一切.该学派不仅认为万物都包含数,而且说万物都是数,宣称上帝用数来统治宇宙,这是区别于其他学派的主要特点.

毕达哥拉斯学派对数做过深入的研究,并得到很多结果.他们注意到数与音乐和谐之间的关系,根据"简单整数比"的原理,创造了一套音乐理论;也注意到数与图形的关系,得到"形数"的一些基本性质,如三角数1,3,6,…,平方数1,4,9,16,…,五角数1,5,12,22,…,六角数1,6,15,28,…该学派的卓越贡献之一是发现了完全数(即一个数等于除它本身以外的全部因子之和,如6,28等),通过公式

$$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1,$$

能够推出完全数的基本性质:如果 2^n-1 是素数,那么 $2^{n-1}\cdot(2^n-1)$ 是完全数.与此有关的,还发现了亲和数(即一对数中,一个数除它本身外的所有因子之和等于另一个数,而另一个数除它本身外的所有因子之和又等于这个数),指出284和220是一对亲和数,并以此象征友谊.他们还得到直角三角形两直角边与斜边之间的关系式,西方称之为毕达哥拉斯定理.进一步发现用三个整数表示直角三角形边长的一种公式,即不定方程 $x^2+y^2=z^2$ 的一组解:

$$2n+1,\ 2n^2+2n,\ 2n^2+2n+1.$$

毕达哥拉斯学派最大的贡献是不可通约量和无理量的发现.这一发现突破了所有的数只是自然数和分数的传统观念,对数学的发展起了重要的推动作用.他们在几何方面还发现了五种正多面体,将其与构成自然界的一些基本元素相对应,并作为数学问题来研究.另外,该学派在天文学方面有不少独特的见解,其中有些是正确的(如天体形状等).毕达哥拉斯及其门徒在逻辑证明方面做了重大推进,其工作构成欧几里得公理化体系的前驱.

希帕索斯(Hippasus,(M))、菲洛劳斯(Philolaos,(C))、阿尔希塔斯(Archytas,(T))等人是毕达哥拉斯学派的著名学者.该学派所取得的成果在当时是最先进的,然而他们对新成果有秘而不宣的纪律,因此,没有立刻在广大群众中产生应有的影响.后来由于政事动乱,门徒散失,约至公元前4世纪中叶逐渐消亡.

诡辩学派(Sophist school) 亦称智人学派.数学史专门术语.指古希腊公元前5世纪到公元前4世纪存在的学派,活动于雅典一带.学派成员经常出入群众集会场所,发表应时演说,并以教授修辞学、雄辩术、文法、逻辑、数学、天文等知识为职业.其数学研究的中心是所谓几何作图三大问题:

1. 三等分任意角.

2. 二倍立方——求作一立方体,使其体积为一已知立方体体积的二倍.

3. 化圆为方——求作一正方形,使其面积等于一已知圆的面积.

作图的难处是只许使用没有刻度的直尺和圆规两种工具.后来证明三大问题都是不可能解决的,但对这些问题的研究却发展起许多新的数学分支,如圆锥曲线,三、四次代数曲线及"割圆曲线"等."割圆曲线"是由该学派成员希皮亚斯(Hippias,(E))创设的,目的是用它来三等分任意角.另一主要学者安蒂丰(Antiphon)在研究化圆为方问题时提出一种"穷竭法",即通过将圆内接正多边形边数不断加倍的方法使多边形与圆相合,成为阿基米德割圆术的先导和近代极限理论的雏形.诡辩学派的著名学者,还有普罗塔哥拉斯(Protagoras)、哥尔基亚(Gorgias)等.他们在哲学上和文学上对希腊文化的影响一直到公元2世纪以后.

智人学派(Sophist school) 即"诡辩学派".

埃利亚学派(Eleatic school) 数学史专门术语.指古希腊埃利亚(Elea,意大利半岛的南端)地区形成的学派,以巴门尼德斯(Parmenides)、芝诺(Zeno,(E))等人为代表.他们认为世界的本源是"存在",一切存在必然为"一",并且是静止的,没有与存在对立或矛盾的事物.芝诺第一次企图揭露运动的矛盾,提出了四个著名的悖论:

1. 二分说.一个物体想从甲地到乙地,首先要通过道路的中点;但要通过中点,必须通过一半的中点等.结论是此物体根本不能开始运动,因为它被道路的无限分割阻碍着.

2. 阿基里斯追龟说.阿基里斯(古希腊神话中善跑的英雄)到达乌龟出发点时,乌龟已向前爬了一段;当他追到新的出发点时,乌龟又向前爬了一段等.结论是动得最快的东西赶不上动得最慢的东西.

3. 飞箭静止说.飞动的箭在任何一个确定的时刻必占据一个确定的位置,因此在这一瞬间它就静止在这个位置上,结论是箭不能处于运动状态.

4. 运动场问题.两组物体以相同的速度沿跑道相向运动,一段时间后两组物体间的距离是其中一组与原来静止不动的物体间的距离的一倍;若要使

两组物体间的距离等于后者，则只需要一半时间就够了，结论是一段时间和它的一半相等.

这些悖论对学术界震动很大，引起哲学、物理学、数学许多基本问题的讨论，对离散与连续，有限与无限、时间与空间等概念的发展起了重要的推动作用.

原子论学派(Atomic theory school)　数学史专门术语. 指古希腊公元前 5 世纪到公元前 4 世纪产生的学派，以德谟克利特(Democritus)和他的老师留基伯(Leuci - ppus)为代表.

原子论学派认为物质是均匀的，同质的；包含许多个不可分的小粒子，这些小粒子(指原子)永远处于运动状态之中，它们通过冲撞和重新组合而形成各种化合物. 德谟克利特将原子观点应用于数学，认为线段、面积和立体是由有限个不可再分的原子构成的，计算体积就等于将这些原子集合起来. 他计算了圆锥或棱锥体的体积，第一个得出锥体体积是等底等高的柱体体积的 1/3. 原子论方法得到同时代和后继学者的赞赏，安蒂丰(Antiphon)在求圆面积时发展了这种思想. 阿基米德(Archimedes)用严密的理论使其精确化. 16 世纪的开普勒(Kepler，J.)在求圆面积时采用的方法，仍有原子论方法的遗风.

雅典学派(Attic school)　数学史专门术语. 指古希腊雅典城建立的学派，盛行于公元前 5 世纪至公元前 4 世纪. 主要人员及其思想集中在柏拉图学园和亚里士多德吕园两个学术团体内，因此常被分别称为柏拉图学派和亚里士多德学派.

柏拉图(Plato)是雅典的大哲学家，曾师事于苏格拉底，颇受老师逻辑思想的影响. 他于公元前 387 年左右在雅典成立学园，授课时大力提倡几何学研究和逻辑证明，传说学园门口写着“不懂几何者不得入内”. 他坚持准确的定义，清楚的假设和严密的推理，促进了数学的科学化，并培养了许多数学家. 其中有梅内克缪斯(Menaechmus，第一个系统研究圆锥曲线)、狄诺斯特拉托斯(Dinostratus，用割圆曲线化圆为方)、泰特托斯(Theaetetus)、欧多克索斯(Eudoxus，(C))与亚里士多德(Aristotle)等. 欧多克索斯一度为柏拉图的学生，是最早介绍球面天文和描述星座的希腊科学家. 他在数学中创立了比例论和穷竭法，深入研究了“中末比”问题，最早得到“阿基米德公理”，证明了近代极限理论上的某些命题，还区分了分析法与综合法，其理论对欧几里得(Euclid)《几何原本》的完成很有帮助. 他在基齐库斯(Cyzicus，今属土耳其)建立起自己的纯几何学派，常被称为欧多克索斯学派.

亚里士多德(Aristotle)与柏拉图相处 20 年之久，后因哲学观点不同而分开，约于公元前 335 年成立自己的学派，在雅典的吕园内授课，因此该学派也常称为吕园学派. 亚里士多德是形式逻辑的奠基人，讨论过数学的基本原理，给出了点、线、面的定义. 该学派中的欧德莫斯(Eudemus，(R))写过算术、几何和天文学方面的历史，是较早的科学史家.

雅典学派在哲学上有许多贡献，其理念论和逻辑学等思想影响西方达数千年之久.

柏拉图学派(Platonic school)　见“雅典学派”.

亚里士多德学派(Aristotlian school)　见“雅典学派”.

亚历山大里亚学派(Alexanderian school)　数学史专门术语. 指古希腊在埃及亚历山大里亚城(Alexander)建立的学派. 分前期(公元前 4 世纪—前 146)和后期(前 146—公元 641)，前期以欧几里得(Euclid)、阿基米德(Archimedes)、阿波罗尼奥斯(Apollonius，(P))、埃拉托斯特尼(Eratosthenes)等人为代表，后期以海伦(Heron，(A.))、门纳劳斯(Menelaus，(A))、托勒密(Ptolemy)、丢番图(Diophantus)、帕普斯(Pappus，(A))和许帕提娅(Hypatia)等人为代表.

亚历山大里亚学派的特点是使几何脱离哲学而独立，从用实验和观察的经验科学过渡为演绎的科学，并使数学高度抽象化，将希腊数学推至全盛时期. 该学派在几何、三角和代数方面都有突出成就. 公元前 7 世纪以后，希腊几何学集中了丰富的材料，欧几里得《几何原本》在这方面做了综合性整理工作，成为用公理法建立演绎数学体系的最早典范. 欧几里得约在公元前 300 年到亚历山大讲学，他的工作为亚历山大里亚学派和整个希腊数学的发展打下了坚实的基础. 阿基米德早年在亚历山大学习，后来仍与那里的学者保持着密切联系. 他的表面积和体积求法、螺线研究、重心测量、大数记法等贡献已成为各分支的重要成果. 阿波罗尼奥斯就学于亚历山大，后来在那里教学. 他的《圆锥曲线论》将圆锥曲线的性质网罗殆尽，对希腊数学的发展和繁荣起了重要作用. 在三角学方面. 托勒密的《天文集》和门纳劳斯的《球面论》成为亚历山大里亚学派的代表作，分别对平面三角学和球面三角学做了总结和探讨. 在代数学的创立过程中，丢番图的《算术》独树一帜，它使代数完全脱离几何的形式，并尝试了符号代数的研究. 亚历山大后期的其他学者对前期的工作做了许多整理注释和增添修补工作，还在测量学、球面几何学等方面做出贡献. 公元 390 年后，亚历山大图书馆被焚，公元 415 年许帕提娅被害，标志着亚历山大数学的衰落. 公元 641 年亚历山大城被阿拉伯人攻陷，亚历山大里亚学派告终.

格丁根学派(Gottingen school)　数学史专门术语. 指德国 19 世纪 20 年代到 20 世纪 20 年代存在的学派. 由高斯(Gauss，C. F.)创始，黎曼(Rie-

mann,(G. F.)B.)、克莱因(Klein,(C.)F.)、希尔伯特(Hilbert,D.)、诺特(Noether,(A.)E.)等人发展致盛,贯穿于德国的整个科学兴隆时期,在世界数学史中长期占主导地位.

格丁根学派强调数学的统一性,重视纯粹数学和应用数学,将数学理论与近代工程技术紧密结合起来.高斯早年就学于格丁根,后来在那里担任天文台台长(1807)和天文学教授(1807).他的《算术研究》(1801)和《曲面的一般研究》(1828)分别成为数论和微分几何的奠基作.黎曼曾在格丁根大学读书,1851年获该校博士学位,后任该校教授.他是复变函数论的创始人之一,他给出的黎曼积分、黎曼曲面、黎曼几何分别对积分理论、拓扑学和几何学的发展起了重要的推动作用.克莱因1886年受聘于格丁根大学,为该学派的组织健全、人员汇集和理论发展做了大量工作,他组织了许多讨论班,造成相互密切合作、民主自由的学术气氛.他在《新的几何研究成果的比较分析》(1872)中提出的"埃尔朗根纲领",成为数学统一性的代表作,对该学派后继数学家的工作很有影响.希尔伯特1895年应召到格丁根,先后在代数数论、几何基础、分析学、理论物理和数学基础等方面做出巨大贡献.他越来越注意数学与物理等学科的联系,并用新的统一观点促进了20世纪数学的进展.诺特1916年到格丁根后创立了抽象代数学.她主持的有关讨论班取得大量研究成果,培养了许多近现代数学家,并影响到法、苏、美、英等国的数学发展.格丁根学派人数众多、学科齐全,且代代相接,长期保持着高度创造力.20世纪30年代,纳粹执政后日渐衰退,但其影响至今犹存.

柏林学派(Berlin school)　数学史专门术语.指19世纪下半叶到20世纪初德国柏林兴起的数学学派.以外尔斯特拉斯(Weierstrass,K. (T. W.))、弗罗贝尼乌斯(Frobenius,F. G.)、基灵(Killing,W. K. J.)等人为代表.

柏林学派主要从事数学分析、符号代数和几何基础方面的研究.外尔斯特拉斯1856年受聘到柏林大学执教,他在数学分析的严密化方面做出了重要贡献,给出连续、一致收敛等基本概念及其一系列应用,还在椭圆函数、行列式、线性代数、变分法等领域取得许多成就,成为该学派的带头人.弗罗贝尼乌斯和基灵1867年进入柏林大学学习,在外尔斯特拉斯指导下获博士学位.弗罗贝尼乌斯继承了外尔斯特拉斯有关初等因子的理论,独立引入符号矩阵代数,创造了型的符号代数.基灵则对外尔斯特拉斯有关几何基础的演讲感兴趣,在这一方面他做出了独特的研究计划,创立了李代数的结构理论和环与代数的结构理论.

柏林学派不限于共同的研究方向,但指导研究工作的哲学观点却较为一致,其工作对后来数学的发展有着很大影响.

彼得堡学派(Petersburgic school)　数学史专门术语.指俄国圣彼得堡城(苏联时期为列宁格勒)19世纪下半叶到20世纪初兴起的学派.以切比雪夫(Чебышев,П. Л.)、马尔可夫(Марков,А. А.)、李亚普诺夫(Ляпунов,А. М.)等人为代表.

彼得堡学派的主要特征是数学理论与实际应用紧密地相结合,在应用数学中做出了较大贡献.切比雪夫是该学派的创始人,一生发表了70多篇论文,内容涉及数论、概率论、函数逼进论、机械原理和积分学等.他自1847年起一直在圣彼得堡大学任教,培养出大批的优秀学生,逐渐形成了自己的学派.马尔可夫早年在圣彼得堡大学受教于切比雪夫,后在该校任教授.他著的《差分学》和《概率论》已成为经典著作,其中的马尔可夫过程已发展成概率论的一个新分支.李亚普诺夫也是切比雪夫的学生,他在概率论中取得了中心极限定理的简洁证明,还对运动稳定性理论提出许多解决的新方法,这一方向的发展成为以后苏联数学的一大特点.

彼得堡学派是俄国(苏联)最早的数学学派,它的人员和思想对苏联近代数学的发展产生过巨大影响.20世纪中,圣彼得堡(列宁格勒)又出现了坎托罗维奇(Канторович,Л. В.)等现代数学家,他们在继承和发展彼得堡学派的理论及传统方面做出了新的贡献.

意大利代数几何学派(Italian school of algebraic geometry)　数学史专门术语.指19世纪60年代兴起于意大利的学派.奠基人是布廖斯基(Brioschi,F.)、贝蒂(Betti,E.)和克雷莫纳(Cremona,A. L. G. G.).

19世纪50年代,意大利数学家开始了与欧洲数学的广泛交流,使意大利摆脱了闭塞落后的局面.1863年,波伦亚大学的数学教授克雷莫纳给出平面曲线一般变换理论的阐述,此后又发展了任意维射影空间的射影平面与有理平面的双有理变换理论,被称为克雷莫纳变换.他的一系列工作成为意大利代数几何研究的起点,并激发了许多数学家的研究,例如贝尔蒂尼(Bertini,E.)将克雷莫纳变换用于曲线和曲面的简化奇点研究,并于1877年给出射影平面所有对合变换的分类;韦罗内塞(Veronese,G.)研究曲线或曲面映射到多维射影空间时的克雷莫纳变换等.

19世纪90年代后,意大利第二代代数几何学家成长起来,其中塞格雷(Segre,C.)于1894年扩展应用了曲线族中曲线在一条曲线上截得点的线性系的思想,启示后人发现许多新的双有理不变性质.卡斯泰尔诺沃(Castelnuovo,G.)与恩里克斯(En-

riques,F.)在19世纪末开始合作,以线性系为中心概念进行研究,利用克雷莫纳变换奠定了代数曲面中曲线的线性系理论,并对曲面分类理论也进行了深刻的研究.塞维里(Severi,F.)师从塞格雷,完善了代数曲面双有理不变量理论,并推广到任意维代数族上.他还建立了代数几何中的基础理论,为代数曲面上零维闭链理论打下了基础.

意大利代数几何学派的工作在性质上属于古典代数几何,形成了自己的风格和研究主题,代表了代数几何发展中的几何倾向,对意大利数学的全面发展有深远影响.

法国函数论学派(Franch school of function) 数学史专门术语.指19世纪末兴起于法国巴黎高等师范学校的学派.以阿达马(Hadamard,J.(-S.))、波莱尔(Borel,(F.-É.-J.-)É.)、贝尔(Baire,R. L.)、勒贝格(Lebesgue,H. L.)等人为代表.

法国数学在18世纪末到19世纪30年代曾有辉煌时期,在分析、几何和数学物理方面取得巨大成就.19世纪末法国数学重新崛起,阿达马在函数论领域做了开创性工作,被称为该学派的精神领袖.他在20世纪初开办的数学讨论班吸引和培养了一批优秀数学家.波莱尔1897年任巴黎高等师范学校讲师,他的《函数论教程》(1898)阐述了测度理论,并给出了覆盖定理的一个新证明.他创始编辑的“函数论著作丛书”(后称为“波莱尔丛书”)(1898—1952)先后共出版约50本,其中包含了将集合论用于实变函数论和复变函数论的新思想.贝尔于1899年研究了连续函数的极限函数的特殊问题,即任意集的点态不连续问题,并发展了半连续概念,此后,他集中研究非连续函数,成为实变函数论的开拓者之一.勒贝格1897年毕业于巴黎高等师范学校,两年后开始发表有关函数分类的文章,1902年在博士论文《积分、长度与面积》中详细阐述了勒贝格积分概念,成为现代积分论的开端.后又在《积分与原函数的探索》中证明了有界函数黎曼可积的充分必要条件是不连续点构成一个零测度集,完全解决了黎曼可积性问题,其工作为实变函数论打下坚实的基础.

法国函数论学派在20世纪初吸引了世界各地的学生前来学习,对这一时期世界函数论的发展起了推动作用.第一次世界大战使法国科学研究遭受重大损失,标志着函数论学派的衰落.战后的法国数学逐渐转向应用领域和公理化方法.

直觉主义学派(Intuitionist school) 数学史专门术语.指20世纪初关于数学基础争论中建立起来的一个学派.德国的克罗内克(Kronecker,L.)和法国的庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)是早期直觉主义者,认为数学在直观上应该是清楚的,可以构造的,因而反对逻辑主义学说.荷兰的布劳威尔(Brouwer,L. E. J.)系统总结了这些思想,成为该学派的主要代表人物.他把数学思维理解成一种构造性的程序,认为数学必须受到基本的数学直觉的限制,主张数学讨论的本原对象是理智的构造,对涉及无穷的问题有一套自己的判断标准,其代表作是《论数学基础》(1907)等.该学派的支持者还有德国的外尔(Weyl,(C. H.)H.)等.

直觉主义学派曾对许多古老的数学和逻辑学原理提出异议,并提出不承认排中律,不用反证法,因而受到批评.但他们强调构造性的思想为大多数人赞赏,成为许多数学理论的出发点.

逻辑主义学派(Logistic school) 数学史专门术语.指20世纪初关于数学基础争论中建立起来的一个学派,以德国的弗雷格(Frege,(F. L.)G.)、英国的罗素(Russell,B. A. W.)和怀特海(Whitehead,A. N.)等人为代表.

逻辑主义学派主张数学实际上是逻辑学,认为全部数学都能从逻辑学中推导出来,而不用任何特有的数学概念(如数、集合等).弗雷格是符号逻辑的创始人之一,在数学中引入逻辑函数概念,并写过《概念演算》等专著.罗素于1903年曾提出有关数学基础的“罗素悖论”,产生了重大影响.他与怀特海都是哲学家兼数学家,共同发展了弗雷格的思想,提出“类型论”,引进等价类等概念,以完全形式的符号实现了逻辑的彻底公理化,揭示了数学与逻辑之间的关系.其代表作《数学原理》(3卷,1906—1910)已成为逻辑主义学派的经典文献.逻辑主义思想因条理繁琐空洞而遭受批评,但它对数理逻辑的建立有重要贡献,对当今计算机的研制和人工智能的研究也有重大的现实意义.

形式主义学派(Formalist school) 数学史专门术语.指20世纪初关于数学基础争论中建立起来的一个学派,以德国的希尔伯特(Hilbert,D.)、(瑞士)伯奈斯(Bernays,P. I.)等人为代表.

形式主义学派认为所有数学都能被归结为处理公式的法则,而不用考虑公式的意义,主张数学思维的基本对象是数学符号本身,而不是它们表示的意义,强调数学的真实性必须且只须建立在它公理系的无矛盾性上,而这公理系又只须形式地描述出不加定义的对象间的所具有的关系.希尔伯特在1899年写的《几何基础》中就提出这一观点,1904年重申了有关的几个论题,到20世纪20年代又发表了几篇重要论文.后来与学生伯奈斯合写了《数学基础》(2卷,1934—1939)一书,成为该学派的经典著作.伯奈斯继续在这一问题上做了许多工作,出版了《公理集合论》等专著.希尔伯特的计划因哥德尔不完全性定理的证明而受挫,但他为此创造的“元数学”已成为数学基础理论中的一个重要分支.

普林斯顿学派(Princeton school)　数学史专门术语.指20世纪初兴起于美国普林斯顿,并一直延续到20世纪50年代的学派,以范因(Fine,H. B.)、维布伦(Veblen,O.)、外尔(Weyl,(C. H.) H.)、莫尔斯(Morse,H. M.)等人为代表.

美国数学在19世纪后期逐渐与欧洲数学接轨.范因就是在当时的世界数学中心德国获得博士学位的,他自1885年起一直在普林斯顿工作,曾任普林斯顿大学数学系主任(1904—1928)、教师会主席、科学系主任、代理校长等职,1911—1912年任美国数学会主席.他以讲课、编写教科书和科学组织、管理等方面的工作为普林斯顿数学的发展做出了重要贡献.维布伦1905年到普林斯顿大学任教,在几何基础、射影几何、组合拓扑等领域做出了成果.1922年后,他与艾森哈特(Eisenhart,L. P.)一起引入路线(path)概念作为空间的基本结构元素,深入研究了这种路线几何学的流形,后又对微分流形和微分几何的公理化进行了深入研究,并注重微分几何与相对论、电磁学、动力学和量子理论相结合.他的《射影几何》(1910,1918)、《位置分析》(1922)都已成为经典著作.1933年,普林斯顿高等研究院成立,聘请了一批世界著名的数学家,创办了《数学年刊》,开设了数学讨论班.外尔开设连续群、不变量及"当前文献"课与讨论班;莫尔斯开设大范围分析课及讨论班.此外,亚历山大里亚(Alexander,J. W.)和莱夫谢茨(Lefschetz,S.)开设拓扑课及联合讨论班,诺伊曼(Neumann,C. G.)开设算子理论课等.

普林斯顿学派既在传统优势的微分几何与拓扑学中引进新的工具,又开拓数学物理等新领域.该学派以优势学科带动其他学科全面发展,以数学理论研究推动科学应用,并广泛开展国际交流与合作,为现代数学的发展提供了成功模式.

莫斯科学派(Moscow school)　数学史专门术语.指苏联20世纪初在莫斯科创立并不断得到发展的学派.常又细分为两个专业侧重不同的学派:函数论学派和拓扑学派.前者由叶戈洛夫(Егоров,Д. Ф.)和卢津(Лузин,Н. Н.)创始,柯尔莫哥洛夫(Колмогоров,А. Н.)等人发扬光大;后者以亚历山德罗夫(Александров,А. Д.)、乌雷松(Урысон,П. С.)、庞特里亚金(Понтрягин,Л. С.)等人为代表.

莫斯科学派还包括其他学科的一大批数学家,直接代表了苏联近现代数学发展的水平.卢津是叶戈洛夫的学生,曾到法国和德国学习过,后在莫斯科大学主持实变函数论讲座.他曾证明可测函数的构造等定理,写过颇有影响的实变函数论教科书.柯尔莫哥洛夫在函数论方面做了大量工作,并应用实变函数论和测度论将概率论建立在严格的数学基础上.亚历山德罗夫和乌雷松都是卢津的学生,早年从事函数论研究,后都转向拓扑学,成为20世纪该学科的先驱.乌雷松开创了维数理论的研究,为发展一般拓扑学做出了杰出贡献.庞特里亚金是参加亚历山德罗夫组织的拓扑学讨论班的成员之一,他写了几本重要的拓扑学专著,还在应用数学领域取得较大成就.

莫斯科学派将函数论作为工具,在拓扑学、微分方程、概率论等几个方面都获得长足发展,其中有较著名数学成果的还有索伯列夫(Соболев,С. Л.)的现代微分方程理论、辛钦(Хинчин,А. Я.)的概率论研究、盖尔范德(Гельфанд,И. М.)的泛函分析与代数成就等.近年来莫斯科数学界仍然新人辈出,在他们中诺维科夫(Новиков,С. П.)和马尔库利斯(Маррулис,Г. А.)分别荣获1970年和1978年度菲尔兹奖.

函数论学派(School of theory of functions)　见"莫斯科学派".

拓扑学派(School of topology)　见"莫斯科学派".

剑桥分析学派(Combridge school of analysis)　数学史专门术语.指20世纪上半叶以英国剑桥大学为中心兴起的学派,以哈代(Hardy,G. H.)和李特尔伍德(Littlewood,J. E.)为代表.

剑桥大学自牛顿时代以来一直是英国的数学中心,数学在其教学体制中占有重要地位.1837年,《剑桥数学杂志》创刊,为年轻数学家提供了发表研究成果的园地.19世纪下半叶,凯莱(Cayley,A.)、福赛思(Forsyth,A. R.)、霍布森(Hobson,E. W.)等人的工作成为剑桥分析研究的先驱.哈代1900年毕业于剑桥大学三一学院,后留校执教.他的《纯粹数学教程》(1908)为学生提供了一本严格的初等分析教程,产生了较大影响.李特尔伍德1910年成为哈代的同事,1912年开始与哈代联名发表论文,35年中合作论文近百篇,内容涉及丢番图逼近、数的加性和积性理论、黎曼 ζ 函数、不等式、积分、三角级数等分析的广泛领域.1913年,哈代又发现了印度数学家拉马努金(Ramanujan,S. A),他与拉马努金在素数分布、加性数论、广义超几何级数、椭圆函数、发散级数等方面也有成功的合作.这一期间,哈代和李特尔伍德的教学激发了许多学生对分析学产生兴趣.到20世纪30年代,他们两人共同主持的联合讨论班培养了遍及世界各地的学生,也为许多到剑桥访问的数学家提供了学习良机,其中的杨(Young,L. C.)、托德(Todd,J.)、华罗庚、乌拉姆(Ulam,S. M.)等人,后来都成为了著名的数学家.

剑桥分析学派将严密化的分析及积分方程、测度等工具用于数论、函数论研究,发展起圆法等重要的分析方法,解决了一大批数学问题.这种将纯粹数

学与应用数学互相补充、共同发展的风格扩大到分析学的研究领域，促进了数学各分支的协调发展.

波兰学派(Poland school) 数学史专门术语.指波兰在两次世界大战间兴起的学派.一般又依据地点细分为华沙学派和利沃夫(Lvov，后属苏联)学派.华沙学派的形成以1920年创刊的《数学基础》杂志为标志；利沃夫学派则以1929年创刊的《数学研究》杂志为代表.两个学派的成员分别在这两份杂志上发表了一系列文章，在数学界产生了重要影响，这两份杂志也因此成为了国际上重要的数学杂志.谢尔品斯基(Sierpiński，W.)、亚尼谢夫斯基(Janiszewski，Z.)、马祖尔克维奇(Mazurkiewicz，S.)是波兰学派的创始人.他们都在华沙大学工作过，一起创办了《数学基础》，并分别在集合论和拓扑学领域做出了贡献.他们还非常注意科学团体的组织建设，以学派刊物为中心，吸引并培养了一大批优秀的数学家.巴拿赫(Banach，S.)、施坦豪斯(Steinhaus，E.)、库拉托夫斯基(Kuratowski，K.)、乌拉姆(Ulam，S. M.)等人是利沃夫学派的代表人物，他们先后学习或执教于利沃夫技术大学，主要是对泛函分析学科的创立和发展做出了贡献.该学派常在一个“苏格兰咖啡馆”中聚会，提出和讨论数学问题，其中有许多问题影响到20世纪后半叶的数学发展.

波兰学派的成员还遍及克拉克夫和波兹南.该学派对波兰数学会及其他科学机构的组建起了促进作用.第二次世界大战时因纳粹的占领，波兰学派随之衰退，战后数度复兴，长期绵延.

华沙学派(Warsaw school) 见“波兰学派”.

利沃夫学派(Lvov school) 见“波兰学派”.

布尔巴基学派(Bourbarian school) 数学史专门术语.指20世纪30年代出现于法国的数学学派.由一群青年数学家组成，借用尼古拉·布尔巴基为集体的笔名，发表数学论文和有关数学基础问题的专著.他们在广泛深入地研究现代数学本质的基础上，提出用数学结构的观点对各数学分支进行统一处理，并为此撰写了巨著《数学原理》.该书自1939年开始出版以来，已先后出版了近40卷，并陆续被译成英、日、俄等多国文字.同时，还发表了500多篇文章，综述当代数学各个领域的重大成果，对现代数学的发展产生了很大影响.

第一次世界大战以后，法国数学界因战争的摧残，出现了青黄不接的局面.老一辈数学家对当代数学所知甚少，年轻大学生的求知欲得不到满足.于是，1934年冬，一些高等师范学校毕业的年轻数学家自发地组织起来，约定1935年7月在巴黎召开第一次布尔巴基大会，并计划编写《数学原理》.这些人包括韦伊(Weil，A.)、迪厄多内(Dieudonné，J.)、嘉当(Cartan，H.)、谢瓦莱(Chevalley，C.)、德尔萨特(Delsarte，J. F.)等.他们成了布尔巴基学派的第一批主要成员.该组织每年举行数次讨论班式的聚会，探讨数学发展动向，运用公理化方法研究整个数学的基础和本质.会议没有任何程序，参加者可自由地踊跃发言，并往往争得面红耳赤，直到取得一致意见才罢休.学派中的每个成员都要求必须具备较高的数学造诣和独立解决问题的能力，且对自己研究的课题怀有强烈的兴趣.他们治学态度严谨，对一部著作要经过反复修改，直到大家基本满意了才付印.因此，一本书从动笔到正式出版平均要8—10年.学派中还有个不成文的规定：凡年满50岁者必须退出，其目的是为了保持组织的青春活力.学派的老一代有许多成为了国际著名的数学家，较年轻的也有不少是优秀的数学家，如施瓦尔茨(Schwartz，L.)、塞尔(Serre，J. P.)、格罗腾迪克(Grothendieck，A.)等，他们都分别获得过国际数学家大会颁发的菲尔兹奖.

《数学原理》是布尔巴基学派的主要著作，其博大精深常为后人称道.书中坚持严格的公理化原则，并使用新颖独特的名词术语(其中大部分后来被广泛接受)，其理论体系以“分析的基本结构”为基础，内容包括集合论、代数学、一般拓扑学、实变函数论、拓扑向量空间、积分论.此外，还有李群与李代数、交换代数、谱理论、微分流形与解析流形等分册.书中强调数学是一门统一的结构性科学，它的基本结构有三种：代数结构、序结构和拓扑结构.数学中的不同分支都是其组成部分.这种观点对于丰富人们对数学的认识，推动数学的发展有重要意义，同时对世界各国的数学教育也产生了较大影响.

外国数学家

阿默士(Ahmes，约公元前1700—前1100年期间) 古埃及僧侣、数学家.生平不详.其著作《知暗黑物》为世界最古老的算学书之一(通常称为莱因德纸草书，长550厘米，宽33厘米，原本藏于伦敦博物馆).该书记载着埃及大金字塔时代的一些数学问题.全书分三章：一章是算术；一章是几何；一章是杂题.共有85个题目.可能是当时一种实用计算手册.这些问题都有一定的实际背景，其中有求未知量问题的解法，相当于今天的一元一次方程，但是用纯算术的方法求解.分数运算相当复杂.有些还涉及到算术数列和几何数列、求三角形、梯形和圆的面积、解比例问题等.

索　伦(Solon，约公元前639—前559) 希腊天文学家、数学家.生于希腊的萨拉米斯(Salamis)，卒于罗马.公元前594年成为雅典的最高执政官.他曾航行到过埃及、塞浦路斯、吕底亚等地.公元前

594 年将闰月引入雅典的历法，制定了法典. 另外，索伦对天文学也颇有研究.

泰勒斯(Thales of Miletus，约公元前 625—前 547) 希腊数学家、自然哲学家、天文学家. 生于伊奥尼亚的米利都. 父亲艾克萨米斯(Examyes)是卡里亚人，母亲克利奥布林(Cleobuline)有腓尼基的血统. 泰勒斯早年经商，曾游历埃及、巴比伦等地，很快学到那里的数学和天文知识. 以后从事政治和工程活动，并研究数学与天文学，晚年转向哲学. 他具有很高声誉，被尊为"希腊七贤之首". 泰勒斯在数学方面的突出贡献是引入命题证明的思想. 主要命题有：

1. 圆直径将圆平分.
2. 两直线相交，对顶角相等.
3. 等腰三角形两底角相等.
4. 有两角夹一边相等的两三角形全等.
5. 对半圆的圆周角是直角.

上述命题看起来很简单，但泰勒斯不满足于知其然，还要穷究所以然. 证明命题是希腊几何学的基本精神，它标志人们对事物的认识有了质的飞跃. 故泰勒斯被称为几何学的先驱. 另外，他在埃及时，曾利用日影及比例关系算出金字塔的高，这也是他的一项光辉业绩.

泰勒斯是公认的希腊哲学鼻祖，创立了伊奥尼亚学派. 他赞成从自然界中寻求真理，否定神是世界的创造者；认为处处有生命和运动，并以水作为万物之本. 他还以预测日食而永垂青史. 当时米底与吕底亚交战，五年未见胜负. 泰勒斯用预知的日食作警告，扬言上天反对战争，后果然应验，双方停战和好. 多数学者认为这次日食发生在公元前 585 年 5 月 28 日下午 3 时，大概是据巴比伦发现的沙罗周期推得的. 泰勒斯在物理学方面也有一定贡献，其中琥珀与皮毛摩擦产生静电，就是他首先发现的.

安纳西曼德(Anaximander，约公元前 610—前 546) 希腊天文学家、自然哲学家. 生于米利都(Miletus)，他曾用一种很像日晷的记时器来测量时间和天象，用它发现了分至点和黄赤交角，但很不精确. 他还采用直角投影绘制了地图，写了一本关于解释地球和居栖动物当时情况的书，解释了月亮运行的变化规律，指出世界的中心——地球是扁平圆柱状的. 他认为动物起源于无生命物质，人类起源于鱼类，并指出了世界和宇宙的无穷性，由此发展了宇宙学. 安纳西曼德认为上述宇宙中发生的不同现象，是受一种非人为的自然的内在规律的支配，这是他对人类思想的一个伟大历史贡献.

安纳西门尼斯(Anaximenex of Miletus，约公元前 585—前 525) 希腊哲学家. 生于米利都，是米利都学派的代表人物. 安纳西门尼斯在宇宙和天文学方面有着独特贡献. 他认为物质形成的根源是无穷的，空气是形成物质的原始材料. 他解释了物质互变的方法：凝聚和稀疏作用. 空气凝聚时变成水、土和石头，稀疏时变为火. 他还相信空气是由微小的、分离的微粒组成，由空气构成的五彩缤纷的世界，处在不停地循环运动变化中，大量的空气、水、天体，通过空气的凝聚和稀疏形成；地球被空气包围着；日、月食和月相(反射太阳的光)的形成与天体的运动有关等. 同时，他认为天体是绕地球转动的，它们不能被看见的原因是因为离地球太远了.

毕达哥拉斯(Pythagoras，约公元前 560—前 480) 希腊数学家、哲学家、天文学家、音乐理论家. 生于萨摩斯岛(Samos，小亚细亚西岸)，卒于梅塔蓬图姆(Metapontum，今意大利半岛南部塔兰托附近). 早年在锡罗斯岛(Syros，在爱琴海中)向费雷西底(Pherecydes)学习，又曾师事伊奥尼亚学派的安纳西曼德(Anaximander)；以后游历埃及、巴比伦等地(一说到过更远的印度)，接受古代流传下来的天文、数学知识. 回到家乡后，开始讲学，但未见成效. 公元前 520 年左右，为摆脱波利克拉底(Polycrates)的暴政，和母亲及惟一的一个门徒离开萨摩斯岛，移居西西里岛，最后定居克罗托内(Crotone). 在那里不分男女，广收门徒，建立了一个宗教、政治、学术合一的团体——毕达哥拉斯学派. 这个学派组织严密，带有浓厚的宗教色彩，每个成员长期接受考核和训练，遵守清规戒律，宣誓永不泄露该学派的秘密，在学术上要达到一定水平. 学派的成员有共同的哲学思想和政治思想，要求人们自制、节欲、纯洁、服从，其影响很大，直到公元前 4 世纪中叶才灭亡. 时间达两个世纪之久，是继伊奥尼亚学派后，古希腊第二个重要的学派.

毕达哥拉斯本人没有留下什么著作，而学派内部的发明创造又是秘而不宣的，外人鲜知其详，直到后来组织分散，保密的教条被放弃，此学派的著作才得以被公开讲述；再经过后来学者的详细研究，他的思想才逐渐为人所知. 毕达哥拉斯学派不仅认为万物包含数，而且认为万物都是数，宣称上帝用数统治着整个宇宙. 他们研究数的目的不是为了实际应用，而是想通过揭露数的奥秘来探索宇宙的永恒真理. 他们注意到数与音乐、几何图形、天体运动的和谐关系，把整个学习课程分成了四个部分：

1. 数的绝对理论——算术.
2. 数的应用——音乐.
3. 静止的量——几何.
4. 运动的量——天文.

以上四部分合起来称为"四道"，或"四艺"，一直沿用到中世纪.

毕达哥拉斯发现，若两弦紧张的程度(张力)相同，长度为简单整数比时，奏出来就是和谐悦耳的声

音.根据这个原理,创造了一套音乐理论.该学派给出了这样的定义:若一个数等于除它本身以外的全部因子之和,这个数叫完全数.若有两个数,其中每个数的因子(除本身外)之和等于另一数的因子(除本身外)之和,则此两数叫亲和数.毕达哥拉斯很注意形数结合,他把数排成各种图形,称为三角数、四角数等形数.一般认为勾股定理是毕达哥拉斯发现的.现在有充分证据表明,巴比伦在汉穆拉比时代已知此定理.很可能毕氏重新发现此定理,或找到证明的方法.他还发现一种整数勾股数公式:

$$2n+1,\ 2n^2+2n,\ 2n^2+2n+1.$$

此学派在几何方面发现了五种正多面体:四面体、六面体、八面体、十二面体和二十面体,并证明了正多面体仅限于这五种.无理量的发现也归功于此学派,传说是希帕索斯(Hippasus,(M))发现的.据说希帕索斯因泄露了这一发现而被逐出该学派,另一说被投入大海淹死.无理量的发现引起数学的第一次危机,导致以后数域的扩展,为数学的发展做出了不朽的贡献.

安纳萨戈拉斯(Anaxagoras,约公元前 500—前 428) 希腊哲学家、数学家、天文学家.生于吕底亚(Lydia)的克拉左美尼(Clazomenae),卒于密细亚(Mysia)的兰普萨库斯(Lampsacus),双亲十分富有.他大约 20 岁时来到雅典,从事教学和研究,在那里居住达 30 年,后来成为伊奥尼亚学派后期的成员,德谟克利特(Democritus)的老师.他以不敬神的罪名锒铛入狱,后移居兰普萨库斯,建立起自己的学派.

安纳萨戈拉斯惟一的一篇学术著作是《论自然》,主要阐述哲学思想,提出了著名的"种子说"和"奴斯说"."种子说"主要是论述任何物质都是由数量无限多的某种"种子"构成.由于"种子"的千差万别,从而形成了形形色色的事物."奴斯说"是为了解释宇宙起源而提出的.他认为构成宇宙的万物种子是静止的,推动种子的结合和分离的东西就是"奴斯".安纳萨戈拉斯的"种子说"和"奴斯说"成为哲学上二元论的先导,影响深远.除此之外,安纳萨戈拉斯在数学和天文学方面也颇有研究.他引入了无穷小和无穷大的概念,是从理论上进行化圆为方研究的第一人,他还研究过透视法.在天文学方面,他是第一个认识到月球本身不发光而是接受太阳光的人,并据此解释了月食和日食现象.他还认为天体是由太空的旋转运动而形成,不依赖于数学规律的运动.

西拉克斯(Scylax of Caryanda,约活跃于公元前 500 年前后) 希腊数学家、地理学家.生于卡里亚(Caria,今属土耳其)哈利卡纳苏斯(Halicamasus)附近的卡里安达(Caryanda).西拉克斯奉大流士(Darius)之命探险印度河,航行入海后,向西穿过印度洋驶入红海,对地中海和其他相邻海域及沿岸进行了勘测,并将自己的成果著述成书.

芝诺(埃利亚的)(Zeno of Elea,约公元前 490—前 425) 希腊数学家、哲学家.生于卢卡尼亚(Lucania)的埃利亚(Elea),是埃利亚学派的代表人物,巴门尼德斯(Parmenides)的学生和朋友.在哲学上被誉为辩证法的创始人.

芝诺的著作久已失传,后人只能通过批评他的亚里士多德(Aristotle)的著作及其注释者的著作来了解其重要贡献.他针对当时关于连续性、无限性、运动性等朴素概念,提出了 45 个各不相同的悖论,其中有 9 个流传至今,而关于运动性的悖论最为著名,它们给学术界以极大的震动,余波至今未息.这 4 个悖论是:

1. 二分说.一物从甲地到乙地,永远不能到达.因要想从甲到乙,首先要通过路径的一半,但要通过这一半,必须通过一半的一半,这样直至无穷,物体根本不能前进一步.

2. 阿基里斯(荷马史诗《伊里亚特》中的善跑英雄)追龟说.阿基里斯追乌龟,永远追不上.因当他在追乌龟的出发点时,乌龟向前爬行了一段,他再追完这一段,乌龟又向前爬行了一段,这样永远重复下去,总也追不上.

3. 飞箭静止说.因飞箭在每一瞬间总停留在一个确定的位置上,因此它是不动的,这说明运动是静止之和.

4. 运动场问题.芝诺论证了时间和它的一半相等.

关于芝诺悖论对古代希腊数学发展的重要性,历来意见不一.一种认为,芝诺和巴门尼德哲学的关系并不如古代传说中所肯定的那样密切,相比之下,因毕达哥拉斯学派发现不可公度量而出现的一些问题,对于芝诺具有更加深刻的影响.另一种则想把芝诺说成是对古代数学的发展方向起决定影响的人物.他们试图证明,毕达哥拉斯学派曾假定存在无限小的基本线段,想以此来克服因发现不可公度量而引起的困难.芝诺所反对的正是这种处理无穷小的不准确做法,从而迫使下一代的毕达哥拉斯学派的数学家去探求更好、更准确的基础.不管怎样,围绕芝诺悖论的争论至今没有休止,人们无须担心他的名字会从数学史上一笔勾销,正如美国数学家贝尔(Bell,E.T.)所说,芝诺毕竟曾"以非数学的语言,记录下了最早同连续性和无限性格斗的人们所遭遇到的困难".芝诺的最大功绩在于把动与静、无限与有限、连续与离散的关系惹人注意地摆了出来,并进行了辩证的考察.

安蒂丰(Antiphon,约公元前 480—前 411) 希

腊数学家、哲学家、宇宙学家.有关安蒂丰的生平历来争论不一,至今没有确切的定论,只知他在雅典从事学术活动,是智人学派的代表人物.

安蒂丰在数学方面的突出成就是用穷竭法讨论化圆为方问题.据辛普利体斯(Simplicius)记载:安蒂丰先作圆内接正四边形,将其边数加倍,得到圆内接正八边形,依次类推,直到正多边形的边长小到恰与它们所在的圆周部分重合,就可以完成化圆为方问题.另一学者瑟米斯蒂厄斯(Themistius)的记载稍有不同,他认为安蒂丰是从圆内接正三角形开始的,然后连数依次加倍,最后与圆周重合.该方法的前提条件是注意正多边形都可化为正方形.这可用毕达哥拉斯(Pythagoras)发现的面积贴合法来完成.一般认为,安蒂丰是发现穷竭法的鼻祖,经过欧多克索斯(Eudoxus,(C))的修补和扩充,建立了完善的穷竭法原理,即"对于任意两不等量,若从较大量中减去大于其半的量,再从所余量中减去大于其半的量,重复这一过程,则所余之量必小于原来较小的量".事实上,穷竭法已包含近代极限论思想的雏形,故安蒂丰也被认为是近代极限论的先驱.安蒂丰才艺双全,著作颇丰,流传下来的将近 15 部,主要有:《四部曲》、《论真理》、《论和谐》、《政治家》、《梦的解释》、《避痛术》等.在宇宙学方面,曾研究过宇宙的物理结构和天体性质.

希帕索斯(Hippasus of Metapontum,约公元前 470 年前后)　希腊数学家.生于梅塔蓬图姆(Metapontum,今意大利半岛南部塔兰托(Taranto)附近),是毕达哥拉斯学派的成员.毕达哥拉斯(Pythagoras)去世后,他不顾学派的禁令,敢于接受新观点、新思想,并向他的学生传授.主要数学成就是建立了外接于正二十面体的球的作法,详细地研究了调和平均值理论等.因为他违反了该学派的教规,于是他被逐出了这个学派,有一说他被投入大海淹死了,还有一说是因船出事而丧生.关于其中的原因,至少有三种传说:

1.政治问题,他违反教规,参与了反贵族的民主运动.

2.自夸发现了正十二面体或不可通量.

3.泄露了秘密.

伊诺皮迪斯(Oenopides of Chios,约公元前 465 年前后)　希腊天文学家、数学家.生于希俄斯岛.生平不详.他是第一个发现黄赤交角的学者,也是首先用图形表示行星运动的人.在数学方面,他发现了两个著名命题:

1.由给定直线外一点作该直线的垂线(编入《几何原本》卷 I 第 12 命题).

2.求作一角等于已知角(编入《几何原本》卷 I 第 23 命题).

此事的重要性不在于垂线和角的作出,而是在尺规限制的条件下从理论上来解决的.在此之前,作图是不限工具的.他在解决此两个命题时,首先明确提出只准用尺规这两种工具.这是希腊几何尺规作图的最早倡导者,对后世产生了深远的影响,他还强调定理与问题的区别.此外,他对数学方法论也有特殊的研究.

西奥多罗斯(昔兰尼的)(Theodorus of Cyrene,约公元前 465—前 399)　希腊数学家.生于北非的昔兰尼,卒于同地.他是毕达哥拉斯学派的成员,哲学家柏拉图(Plato)和数学家泰特托斯(Theaetetus)的数学老师.曾学习过几何学、天文学、和声学、算术.与大哲学家苏格拉底(Sokrates)交往甚密.

西奥多罗斯对数学的主要贡献是对无理量的早期理论的发展.他是继毕达哥拉斯学派发现无理量 $\sqrt{2}$ 后,首次证明了从 $\sqrt{3}$ 到 $\sqrt{17}$($\sqrt{9}$、$\sqrt{16}$ 除外)是非有理数,并声称发现了一个能解释所有平方根的理论公式.至于这个公式是什么,没有流传下来,后人对此做过种种推测,有的认为是用最大公度法,有的认为是用勾股定理等.

德谟克利特(Democritus,约公元前 460—前 370)　希腊哲学家、数学家.生于色雷斯的阿夫季拉(Abdera),是原子论学派的创始人之一,但经历不详.据载,他写了 60 多部著作,但绝大多数已散失,只有 300 多句断语被保存下来,只能从他的学生伊壁鸠鲁(Epicurus)及其他人的著作中了解他的学说.他游历甚广,到过埃及,曾求教于许多饱学之士.在他的著作中有关于几何、数、连续的直线和立体的论述,提出了著名的原子论学说.

德谟克利特所说的"原子"是不可再分的,它是由无空隙的、坚固的物质组成,原子有大小和形状的不同,但在本质上是一样的.他将原子论应用于数学,认为线、面、体分别由有限个原子组成,计算立体的体积就等于将构成该立体的有限个原子的体积加起来.他还用此法第一个得出圆锥或棱锥体积是等底同高的圆柱或棱柱体体积的 1/3.他把圆锥看作由一系列不可再分的薄片组成,并分别讨论了这些薄片中相邻两片相等与不等的情形.他的原子论观点为后来的积分思想提供了一定的理论基础.

希波克拉底(Hippocrates of Chios,公元前 5 世纪下半叶)　希腊数学家、天文学学.其生平仅有零星记载:他生于希俄斯岛,原以经商为生,不幸被海盗抢劫一空,财产丧失殆尽.于是到雅典作控告,在那里耽搁很长时间,此间常去学校听课,掌握了很多数学知识,后来从事数学研究.数学史家唐内里(Tannery,J.)推测,希波克拉底在家乡时就已学习了数学,到雅典后就从事讲课了,因其出生地离毕达

哥拉斯(Pythagoras)的家乡不远,当时那里学术兴盛,很可能受毕达哥拉斯思想的影响.

希波克拉底在数学方面以几何见长,化月牙为方是最重要的贡献之一.他把此问题分为月牙形的外部圆周等于、大于、小于半圆长三种情况讨论.他首先将月牙形化为与之面积相等的用直线表示的图形,继而化为正方形.他还将月牙形和圆一起化为正方形,并认为通过此方法就可以解决化圆为方问题.事实上,他只是解决了化月牙形为方的特殊情况,一般情形未加解决,且也未解决化圆为方问题.希波克拉底对倍立方问题也做出了贡献.他是第一个将此问题化为求两个已知线段中的两个比例中项问题.设 a、b 为已知线段,x、y 是两比例中项,则 $a:x=x:y=y:b$,可得 $x^2=ay$,$y^2=bx$,那么 $x^4=a^2y^2=a^2bx$,若 $b=2a$,$x^3=2a^3$.此方法叫分析方法.希波克拉底是较早在几何上使用分析方法的数学家.他还是第一个汇编有关几何原理著作的学者,《几何原本》中的许多原理都含在他的几何原理著作中,在天文学方面,希波克拉底论述了彗星和星系方面的内容,解释了彗星尾巴形成的原因.

布里松(Bryson of Heraclea,约公元前 450 年前后)　希腊数学家.生平不详.亚里士多德(Aristotle)和柏拉图(Plato)的著作中多次提到他,是诡辩学派的成员.在数学方面的重要贡献是用边数不断增加的外切多边形求圆的面积,与传统的内接法相得益彰,大大丰富了穷竭法的思想.此外,他还研究过化圆为方问题,但却遭到了亚里士多德的严厉批评.

柏拉图(Plato,公元前 427—前 347)　希腊哲学家、学者.生于雅典,卒于雅典.柏拉图出身显贵世家,幼年丧父,后母亲改嫁,继父皮里兰佩(Pyrilamps)是杰出政治家柏里克利(Pericles)的助手,对柏拉图影响很大.柏拉图自幼就受到良好的教育,曾师事著名哲学家苏格拉底(Sokrates),深受其逻辑思想的影响,被柏拉图称为“人世间最有智慧的人”.苏格拉底去世后,柏拉图离开雅典,退避欧几里得的家乡麦加拉.因当地的麦加拉学派善长好辩,柏拉图对此不感兴趣.于是他开始了长途游历,先后去过埃及、昔勒尼(Cyrene)、西西里等地.同毕达哥拉斯学派有过交往.公元前 387 年,他在雅典的东北角创办了一个学园,并亲自任教.公元前 366 年和公元前 362 年,柏拉图两次受邀到叙拉古给国王授课.在他创办学园之后的 40 年里,他绝大部分时间在雅典度过,其大部分著作也都是此时完成的.柏拉图逝世于公元前 347 年,享年 80 岁.传说他是在参加一位朋友的结婚宴会时,忽感身体不适,退到屋子一角平静地辞世的.

柏拉图主要是一个大哲学家,但在数学、教育学、天文学等方面也很有造诣.他一生著述颇丰,按照柏拉图的客观唯心主义观点,物质世界之上还有一个超经验的理念世界.理念世界是第一性的,物质世界是由理念派生出来的.数学观念包含在理念世界之中,地位较低,但却高于物质世界.整个物质世界是依照数学原则来设计的,仅仅研究非数学的自然科学是没有价值的.因所涉及的物质对象迟早是要腐朽的,只有永恒不变的数学规律才是物质世界的精髓.数学又是物质世界通向理念世界的必经之路,受到数学训练的心灵才有可能去认识永恒的理念.所以,为了达到理性世界,必须研究数学,最重要的是凭理性的推求而不应该考虑物质世界如何.柏拉图是将数学置于一个较高地位,并强调其重要性的人.他在其学园门口写着:“不懂几何者不得入内!”他讨论了立方倍积等问题,主张几何作图应仅限于尺规,认为若用其他的机械工具,就难以达到训练抽象思维的目的.柏拉图及其学派最伟大的成就之一,便是提出了分析的证明方法,将其提炼到普遍适用的合乎理性的形式,引入了术语“分析”和“综合”.他还最早论证了归纳法和反证法,这些方法在数学研究中都获得了广泛的应用.在前人工作的基础上,柏拉图对几何中所采用的逻辑方法做出了重要改进,给几何的概念、公理以更明确的阐述.欧几里得(Euclid)的许多定义和公理都归功于柏拉图学派.亚里士多德(Arigtotle)说柏拉图最先引入了公理:等量减等量其差相等.几何学被奠基于逻辑的基础之上,同柏拉图及其学派的努力是分不开的.柏拉图推动了关于立体几何的发展,在他之前,该课题长期被希腊数学所忽视.他的学派研究了棱柱、棱锥、圆柱和圆锥等.证明了立体几何学中的许多定理.柏拉图被称为“数学家的生产者”,古代希腊许多著名的数学家,如欧多克索斯(Eudoxus,(C))、亚里士多德、门奈赫莫斯(Menaechmus)、狄诺斯特拉托斯(Dinostratus)、欧几里得等,或为柏拉图学派的成员,或接受过该学派的教育.

泰特托斯(Theaetetus,公元前 417—前 369)　希腊数学家.生于雅典,卒于雅典.曾师事昔兰尼的西奥罗斯(Theodorus of Cyrene),后为柏拉图学园的成员,苏格拉底(Sokrates)的忠实信徒.有一段时期,他在赫拉克利(Heraclea)教书.他可能是在雅典和科林斯的战争中失去生命的.

泰特托斯虽然没有著作流传下来,但他对希腊数学的影响却很大.主要表现在三个方面:

1. 详细地讨论了无理数的理论.他把所有的数分为两类:一类是正方形数(分成两个相同因子的乘积),并规定命名了一些新的数学概念.他引入的中项与几何平均有关,二项与算术平均有关,还对两项之差引入了相应的名称,且与调和平均有关.所有这

些内容都包含在《几何原本》第Ⅹ卷的注释中.欧几里得的这部分内容深受泰特托斯的影响,其中有很大部分内容应归功于泰特托斯.

2.泰特托斯可能是第一个给出所有五种正多面体——正四方面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体的作图理论的人.他还阐述了怎样将其内接于一个球体,这些内容被收入《几何原本》的第ⅩⅢ卷中.

3.他可能发展了一般比例理论的研究,可应用于不可公度量和可公度量.后来这一理论被欧多克索斯(Eudoxus,(C))进一步完善发展,收录到《几何原本》的第Ⅴ卷中.

菲洛劳斯(Philolaos of Croton,约公元前 400 年前后) 希腊哲学家、数学家、天文学家.生于意大利南部的克罗托内,与苏格拉底(Sokrates)是同时代人,是阿尔希塔斯(Archytas,(T))的学生.因为政治动乱,菲洛劳斯离开了梅塔蓬图姆(Metapontum)前往卢卡尼亚(Lucania),后来又到了底比斯(Thebes).菲洛劳斯是毕达哥拉斯学派晚期的成员.此学派内部的发明创造是秘而不传的,后来组织分散,保密的禁令被抛弃,才逐渐公开其教义著作,菲洛劳斯是第一个发表此类著作的人.他清楚地辨析了分别在脑、心、肚脐中的感觉、肉体、营养机能的区别;指出地球不是宇宙的中心,而中心火才是宇宙的中心,且地球、固定星、太阳、月球、五大行星及"对地星"(与地球对称的星)都绕着中心火(不是太阳)旋转.

欧多克索斯(Eudoxus of Cnidus,约公元前 400—前 347) 希腊数学家、天文学家、地理学家.生于尼多斯的一个世代行医家庭,卒于尼多斯.早年就读于著名的尼多斯医科学校,毕业后成为医生赛奥梅顿(Theomedon)的助手,在此期间去过意大利和西西里,向阿尔希塔斯(Archytas,(T))学习几何.约公元前 368 年,他作为医生在雅典住了两个月,在那里聆听了柏拉图(Plato)等大师的演讲,增强了研究数学、天文学和哲学的兴趣.约公元前 365 年,他去埃及访问,在那里旅居约 15 个月,精心研究天文学理论.回到小亚细亚后,他在基齐库斯创办了一所学校,从事讲学和著述.在公元前 360 年至前 350 年间,他再度去雅典,和柏拉图学派建立了亲密联系,在此期间他可能成为了柏拉图学派的成员.后来尼多斯发生政治变革,建立了民主政权.欧多克索斯应邀回国,为尼多斯人起草了法典,获得了很高荣誉,此后便定居下来,继续从事教学和著述,直至逝世.

欧多克索斯是希腊最卓著的学者之一,仅次于阿基米德(Archimedes).他在数学方面的最大贡献是创立了关于比例的新理论,成为《几何原本》卷Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ卷的主要内容.毕氏学派的比例论只用于可公度量,对不可公度也适用的应归功于欧多克索斯.他首先引入"量"的概念,将"量"与"数"区分开.这里的"量"指连续量,如长度、面积等,"数"是离散数,仅限有理数.其次,他改变了比的定义:若一个量加大若干倍之后就可以大于另一个量,则说这两个量有一个比.该公理通常称阿基米德公理.欧多克索斯的比例论为不可公度提供了逻辑基础,推动了数论和几何学的发展,也为 19 世纪不可公度理论的进一步发展提供了思想基础.他对数学的第二贡献是建立了严谨的穷竭法,因此被尊为微积分学的先驱.此外,欧多克索斯还研究了黄金分割和倍立方等问题.在解倍立方时,据说是用一种机械解出,但遭到了主张用尺规作图的柏拉图的反对.天文学方面,他把球面几何用于天文,提出以地球为球心的同心球理论,给出木星、土星、火星、水星和金星的会合周期.他的天文学理论在古中世纪的欧洲产生了很大影响.地理学方面,他曾写过《地球巡礼》,详细介绍了亚、欧、非各地区的地理环境,并有政治、历史、人种等方面的描述.欧多克索斯多才多艺,他还在医学、法律、哲学等方面深有造诣,可惜没有著作流传下来.

希皮亚斯(Hippias of Elis,约公元前 400 年前后) 希腊哲学家、数学家.生于伯罗奔尼撒(Peloponnesus)西北部的埃利斯(Elis)城.与柏拉图(Plato)是同时代人,是诡辩学派晚期的主要人物.常出使国外,从事著述和讲学,以斯巴达、雅典、西西里为最多,他对这些地方的学术思想影响极大.希皮亚斯博学多才,涉猎广泛,在修辞学、政治、诗歌、音乐、绘画、雕塑、天文,尤其是哲学、数学方面皆有成就.他有极强的记忆力,据说能把别人一连串刚说过的 50 个人名一字不差地重说一遍.他活得很长,达到了 99 岁的高龄.希皮亚新一生著述甚丰,但都已失传.在数学方面,他以发现割圆曲线最为著名,此曲线有时也称狄诺斯特拉托斯曲线,因为它也被狄氏研究过.这条曲线的直角坐标方程是:

$$y=x\operatorname{tg}\frac{\pi y}{2a},$$

极坐标方程为

$$\pi\rho\sin\varphi=2a\varphi\ (a\ 为一正方形边长).$$

希皮亚斯利用此曲线解决了几何三大难题中的三等分任意角问题,还有可能利用此曲线解决了化圆为方问题.据说他还曾撰写过几何学史,若情况属实的话,将比欧德莫斯(Eudemus,(R))早约 75 年,那他是历史上第一位数学史家、科学史家.

克森诺克拉底(Xenocrates of Chalcedon,公元前 396 或 395—前 314 或 313) 希腊哲学家、数学家.生于比提尼亚(Bithynia,今属土耳其)的卡尔西登(Chalcedon,今卡德柯伊),卒于雅典,是柏拉图

(Plato)的学生.在公元前 378 年至前 373 年间,加入柏拉图学园.柏拉图去世后,其侄儿当选为该学园的领袖,也于公元前 340 或 339 年去世.此后,克森诺克拉底被选为该学园的领导人,直至他去世.

克森诺克拉底写过关于哲学、几何、算术、占星术,以及几何史等方面的著作,但均已失传.他对数的神秘观念受毕达哥拉斯学派的影响,而其哲学思想则跟随柏拉图.他不主张以张的方式来发展哲学,而是维持柏拉图哲学理论的原样.他试图寻求阐述柏拉图的思想方法,但没有成功.因为柏拉图不赞成把自己的思想用语言表达出来,他认为这样容易误导.克森诺克拉底与柏拉图都不是二元论的支持者,他尽力与传统哲学的二元论作斗争.此外,他还对本体论、物理学、伦理学、认识论规定了等级.这对于后来的新柏拉图主义的发展产生了不可估量的影响.

亚里士多德(Aristotle,公元前 384—前 322) 希腊哲学家、科学家.生于哈尔基季斯(Chalcidice)的斯塔基尔(Stagira),卒于哈尔基斯(Chalcis).其父是亚历山大里(Alexander,J. W.)祖父的私人医生,但亚里士多德似乎受家庭气氛的熏陶不深,对医学很不感兴趣.他早年父母就双亡.公元前 367 年进入柏拉图学园,成为柏拉图(Plato)的学生,后来两人还成了亲密好友.公元前 347 年,柏拉图去世,他离开了柏拉图学园,可能是因为不满当时领导人的哲学发展观点而出走的.公元前 343 年,他受聘为亚历山大(Alexander,J. W.)的老师.公元前 335 年,他又回到雅典,自己创办了一个学派——逍遥学派.在这里他从事教学和研究工作达 12 年.但在他的学生亚历山大死后,他受到亚历山大反对派的强烈攻击,处境十分艰难,于是避居哈尔基斯,次年去世.

亚里士多德是历史上最有影响的思想家之一,在长达几百年的时间里,其学说的威力长盛不衰.他对数学是比较重视的,曾研究过数学的本质,探讨过定义、公理、公设的含义及其区别;考察了点、线、连续性、无穷大等诸多概念.他讲定义只不过是定个名,但定义必须用先存在于所定义事物的某种东西来表示.他批评了“点是没有部分的那种东西”的定义,认为“那种东西”含义模糊.但是,他承认未经定义的名词是需要的,因为在一系列的定义里总得有个开头.他给出过一些严谨简明的定义,如“点、线、面分别是线、面、体的分界,且有三维的是体”等.证明过若干个重要的几何学定理,如“多边形的外角之和等于四直角”;“在包围所给定面积的所有平面中,以圆的周长为最小”;给出了《几何原本》中部分定理的新证法;讨论了立方体、球体、圆锥体、圆柱体、螺线等几何体的性质.

亚里士多德对物理学也十分感兴趣,并注意数学对物理学的应用.这对数学的发展无疑起了积极的推动作用.他所创立的逻辑学对西方文化的演进影响很大,其内容较多涉及数学、逻辑学的基本原理——矛盾律和排中律便是数学间接证法的核心.在物理天文学、气象学、心理学、生理学、宇宙学等方面也有很多重要成就.他的著作很多,主要有:《范畴学》、《分析前篇》、《分析后篇》、《物理学》、《气象学》、《形而上学》、《政治学》等.

勒俄达马斯(Leodamas of Thasos,约公元前 380 年前后) 希腊数学家.生于萨索斯岛,活跃于雅典,与柏拉图(Plato)是同时代人,曾在柏拉图学园学习过很长时间.据载,柏拉图曾把分析法(也称知识第一原理)传授给他,他用此方法发现了许多几何学的定理,为柏拉图的数学分析法与哲学分析法的发展开辟了道路.他的成就因载于普罗克洛斯(Proclus)的几何学史而得以流传.

西马里达斯(Thymaridas,公元前 4 世纪上半叶) 希腊数学家.经历不详.他可能生活在家庭由富到穷的环境中,于是他被送到帕罗斯岛(Paros)去挣钱,后来成为毕达哥拉斯学派的早期成员.他是一个典型的数的理论家.他把单位定义为“极限量”,叫一个素数是直线的,通过研究素数,发现了著名的数的理论“开花”法则,这对解某种含 n 个未知量的联立方程组非常有用.此法则被希思解释如下:设有 n 个未知量 $x, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$,列 n 个方程:

$$
\begin{aligned}
&x + x_1 + \cdots + x_{n-1} = S,\\
&x + x_1 = a_1,\\
&x + x_2 = a_2,\\
&\vdots\\
&x + x_{n-1} = a_{n-1},
\end{aligned}
$$

所以,$x = \dfrac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) - S}{n-2}$.

勒 俄(Leo 或 Leon,公元前 4 世纪上半叶) 希腊数学家.生于雅典.经历不详.有关事迹来自普罗克洛斯(Proclus)的一篇几何学历史概要.据载,他是柏拉图学园较小的数学家.他最早开始研究定义学说,阐述过几何问题的特殊性及其可解条件,为欧几里得(Euclid)的《几何原本》提供了许多原始材料.

阿尔希塔斯(Arhytas of Tarentum,约公元前 375 年前后) 希腊数学家、哲学家、物理学家.生于塔林敦(Tarentum,今意大利的塔兰托(Taranto)).早年师事毕达哥拉斯学派的菲洛劳斯(Philolas,(C)),后来成为该学派的重要成员,曾一度是柏拉图(Plato)的老师.他在政治上也是一位重要人物,当了七年的军事首领,据说任职期间从未有过败绩.他是在亚得里亚海的一次船只事故中不幸遇难的.

阿尔希塔斯著述颇丰,但流传下来的很少.在数学方面的贡献主要有:用三维空间的立体模型解决

了倍立方问题，并发明了作图器械；深入研究并讨论了算术平均、几何平均和调和平均理论，对比例理论提出一个很重要的性质：差数为 1 的两数之间没有几何平均值. 阿尔希塔斯十分重视科学基础与各门科学间的关系. 他认为，计算术是最基本的科学，并比几何学更能清楚地显示事物变化的结果. 他还证明了许多平面几何定理，发现了一种表示勾股数的方法，即设 m 为偶数，则

$$m,\ \left(\frac{m}{2}\right)^2-1,\ \left(\frac{m}{2}\right)^2+1$$

构成一组勾股数. 阿尔希塔斯应用他的平均值方法在音乐理论方面也硕果累累，被托勒密(Ptolemy)称为毕达哥拉斯学派最重要的音乐理论家. 他还通过观察详述了有关声音的物理学原理，制造了一只用木头做的会飞的鸽子. 他对于宇宙无限论也有过详细的叙述.

阿里斯托赛诺斯(Aristoxenus，生于公元前375—前 360 年间) 希腊音乐理论家. 生于塔伦特姆(Tarentum)城，卒于雅典(?). 在曼丁尼亚曾学过一段音乐，后到雅典成为亚里士多德(Aristotle)的得意门生. 其著作大都散失，只有三本书的《泛音原理》流传下来. 他把音调平分两部分，认为八音度有六个音调组成；音高标准是线性的；音阶是一条连续直线，可被任意等分，所有这些都可以通过算术式子表示出来. 他在音程计算方面另辟蹊径，摒弃了毕达哥拉斯学派所用的比率方法，为泛音理论的发展做出了重要的贡献. 据载，他还写过人物传记、教育和政治理论方面的著作，以及杂集和各式各样的备忘录. 对毕达哥拉斯(Pythagoras)的著作也做过深入的研究，可惜这方面的著作均已散失.

赛奥法拉斯托斯(Theophrastus，约公元前371—前 286) 希腊哲学家、自然科学家、历史学家. 生于莱斯布斯岛(Leobos)，是柏拉图(Plato)和亚里士多德(Aristotle)的学生，经历不详. 他是继亚里士多德以后该学派的领导人. 著有《几何学史》、《天文学史》、《算术史》等著作，但均已遗失.

卡利普斯(Callippus of Cyzicus，约公元前 370年前后) 希腊数学家、天文学家. 生于基齐库斯(Cyzicus，在今土耳其境内)，卒于亚历山大. 晚年长期居住在雅典，是欧多克索斯(Eudoxus，(C))的学生，行星理论的继承者，和亚里士多德学派及柏拉图学派有密切的联系. 卡利普斯的学术成就十分辉煌，曾继续他的老师欧多克索斯的关于行星运动的工作，精确地测定出季节的长度，建立起使阴阳历相协调的 76 年周期学说，后来也称为“卡利普斯周期”. 该理论在天文观测中有广泛的应用，其影响达好几个世纪.

菲利波斯(Philippos of Opos 或 Mendel，活跃于公元前 360 年前后) 希腊数学家、天文学家. 生平不详. 只知他是大哲学家柏拉图(Plato)的学生. 研究并写出了许多有关多角数和天文学方面的著作，但均已失传. 他还校订过柏拉图的某些著作，解释了彩虹是通过光的折射作用而引起的这一物理现象.

修迪奥斯(Theudius of Magnesia，约公元前 4 世纪) 希腊数学家. 从普罗克洛斯(Proclus)对《几何原本》的评注中得知，他是柏拉图学派的成员，与亚里士多德(Aristotle)是同时代人，对数学和哲学比较偏好，曾著有《原理》一书. 书中有关初等几何的若干命题曾被亚里士多德加以引用.

阿里斯泰奥斯(Aristaeus，生于大约公元前350—前 330) 希腊数学家. 生平不详. 与欧几里得(Euclid)是同时代人，没有著作流传下来. 据帕普斯(Pappus，(A))记载，曾撰写过《立体轨迹论》(5卷)、《圆锥曲线原理》(5 卷)、《关于五种正方体的比较》等著作. 阿里斯泰奥斯在几何学方面的贡献比较突出，对欧几里得和阿波罗尼奥斯(Apollonius，(P))都产生过巨大影响. 他试图通过用轨迹法讨论圆锥曲线问题，并引入了“锐角圆锥曲线”、“直角圆锥曲线”、“钝角圆锥曲线”等术语，对圆锥曲线的发展做出了重大贡献.

狄诺斯特拉托斯(Dinostratus，约公元前 4 世纪中期) 希腊数学家. 生于雅典，卒于雅典. 与门奈赫莫斯(Menaechmus)是亲兄弟，可能是柏拉图学派的成员，对几何的诸多领域都有很深的造诣，其著作均已散失. 惟一流传下来的成果是用著名的希皮亚斯割圆曲线解决化圆为方的问题. 帕普斯(Pappus，(A))描述了割圆曲线的形成过程：AQB 是单位圆的一个象限弧，$OACB$(OB 在 y 轴上)是单位正方形. 设半径 OQ 从 OB 位置匀速转动到 OA 位置，而线段 EF 从 BC 匀速平行移动到 OA 位置，两者同时出发，最后同时在 OA 重合，在重合前 OQ 与 EF 的交点 $P(x,y)$ 的轨迹叫割圆曲线. 此曲线的直角坐标方程为

$$x=\frac{y}{\tan\frac{\pi}{2}y}.$$

令 $y\to 0$ 可求得曲线与 x 轴交点的横坐标 $x_0(OM)=2/\pi$. 通过比例关系 $\overset{\frown}{BQA}:OB=OB:OM$，得圆周长为 2π. 圆的面积可用一定理得出，即圆的面积等于底为圆的周长，高为圆的半径的直角三角形的面积. 此定理后来被阿基米德(Archimedes)所证明. 根据此定理，把直角三角形化为正方形，从而完成化圆为方问题. 如果狄诺斯特拉托斯是用帕普斯的叙述方式证明化圆为方问题的话，他则是希腊第一个用间接法证明此问题的数学家.

门奈赫莫斯(Menaechmus,约公元前4世纪中期) 希腊数学家.生平不详.据普罗克洛斯(Proclus)记载,主要活跃于雅典和基齐库斯(Cyzicus),是柏拉图(Plato)的朋友,欧多克索斯(Eudoxus,(C))的学生,为亚历山大(Alexander,J.W.)国王当过数学教师.曾撰写过柏拉图《共和图》的注释和其他哲学著作.对自己发现的圆锥曲线写过专著,可惜均已散失.

门奈赫莫斯一生的业绩主要有两项:一是发现了圆锥曲线.他是根据垂直于母线的平面去截圆锥面来发现圆锥曲线的.他把圆锥曲线分为三类:当圆锥顶角为直角时,曲线为抛物线;顶角为锐角时是椭圆;顶角为钝角时是双曲线的一支.他还发现了双曲线的渐近线,并对这些曲线的性质做了系统阐述,形成了最早的圆锥曲线理论.另一项重要成就是用圆锥曲线解倍立方问题.事实上发现圆锥曲线也是由倍立方问题引起的,其实质就相当于把倍立方问题化为解形如现在的 $x^2=ay$, $y^2=2ax$, $xy=2a^2$ 等类型的方程.此外,他对数的换算和几何图形的化简也做过深入的研究,为欧几里得(Euclid)的《几何原本》提供了大量原始素材.

欧德莫斯(Eudemus of Rhodes,约公元前4世纪下半叶) 希腊哲学家、科学史家.生于罗德岛,是亚里士多德(Aristotle)的得意门生,曾与赛奥法斯托斯(Theophrastus)一起竞选亚里士多德学派的领袖,但遭失败.于是,他自己创建了一个独立的学派——罗德岛学派.他继承了亚里士多德的逻辑思想,写了逻辑分析法和范畴方面的著作,以及《论推理》,可惜均已散失.欧德莫斯在哲学方面的另一项成就就是他与别人把亚里士多德的所有著作收集起来,编成了一本亚里士多德全集.这对于亚里士多德思想的传播起了很大作用.

欧德莫斯是历史上有资料可查的第一位科学史家,编写了算术史、几何史和天文学史方面的著作,但除了后世著作中引述的片断文字外,均已遗失.算术史第一卷主要讨论了音程数的相互关系.几何学史至少两卷,很像备忘录,其中希波克拉底(Hippocrates,(C))的球面三角形的割圆曲线就是在介绍希腊数学史中发现的,《几何原本》中的许多命题也在此详述过.天文学史也至少两卷,后人通过这部著作发现了许多天文学方面的重要成果.

斯皮尤西波斯(Speusippus,活跃于公元前347—前339年前后) 希腊数学家、自然哲学家.生卒不详.他是柏拉图(Plato)的外甥,曾随柏拉图游历过叙拉古,于公元前349年至公元前339年期间,继承柏拉图成为了柏拉图学派的领袖.他根据动植物的形状对它们进行分类.在数学方面,他深入研究过毕达哥拉斯(Pythagoras)的数论和比例论.

欧几里得(Euclid,约公元前330—前275) 希腊数学家.关于欧几里得的生平,现知之甚少.据普罗克洛斯(Proclus)在其《概要》中记载,欧几里得是托勒密一世(Ptolemy,S.I)时代的人,早年求学于雅典,深知柏拉图(Plato)的学说,后来可能成为了这个学派的成员.公元前300年左右,受托勒密王邀请,到亚历山大讲学.有一次,托勒密王问欧几里得,几何有无捷径可走,欧几里得答道:"几何无王者之道".还有一学生才开始学习第一个命题就问,学了几何学之后将得到些什么,欧几里得说:"给他三个钱币,因为他想在学习中获得实利".这充分反映了欧几里得的治学思想:学习要循序渐进,刻苦钻研,不赞成投机取巧的作风,也反对狭隘实用观点.

欧几里得在数学方面以其所著的《几何原本》闻名于世.德·摩根(De Morgan,A.)曾说,除了《圣经》,再没有任何一种书像《几何原本》这样拥有如此多的读者,被译成如此多的语言.从1482年到19世纪末,《几何原本》的各种版本竟用各种语言出版达千版以上.在此之前,其手抄本统领几何学已达1800年之久.欧几里得的影响如此之深,以至他的名字在20世纪以前一直是"几何学"的同义词.《几何原本》是一部划时代的巨著,其伟大的历史意义在于它是用公理化方法建立起演绎体系的最早典范,对整个数学的发展产生了深远的影响.全书共13卷.卷Ⅰ首先给出定义、公设和公理,其中第五平行公设为历代的数学家所争论,最后导致了非欧几何的产生,然后是48个命题.卷Ⅱ讨论面积变换,用几何语言叙述代数等式.卷Ⅲ是关于圆、弦、切线及与圆有关的图形性质.卷Ⅳ包括圆内接与外切三角形、正方形的研究,圆内接正多边形的作图.卷Ⅴ是比例论.卷Ⅵ讨论将比例论用于相似形.卷Ⅶ和卷Ⅸ是数论.卷Ⅷ讨论了连比例.卷Ⅹ为不可通约量理论.卷Ⅺ是立体几何.卷Ⅻ是穷竭法的应用.卷ⅩⅢ讨论了中末比的性质及五种球内接正多面体的作图法.后人又补上了两卷.一般认为卷ⅩⅣ出自许普西克勒斯(Hypsicles,(A))之手,卷ⅩⅤ为6世纪初叙利亚的大马士革乌斯(Damascius of Damacus)所著.《几何原本》的原稿已丢失,现存的是公元4世纪末赛翁(Theon,(A))的修订本,还有18世纪在梵蒂冈图书馆发现的希腊文手抄本.较流行的英译本是希思翻译注释的"The Thirteen Books of Euclid's Elements".中国的最早译本是1607年利玛窦(Ricci,M.)、徐光启合译的前6卷及1857年伟烈亚力(Wylie,A.)、李善兰合译的后9卷.元朝亦有译本,但已失传.

欧几里得还有其他好几种著作,《已知数》内容和《几何原本》卷Ⅰ至卷Ⅵ的相仿.《图形的分割》主要是作直线将已知图形分为相等的及成比例的部分

或分成满足某种条件的图形.《现象》是一本几何天文学著作.《光学》是希腊文的第一本透视学.除此之外,还有《纠错集》、《推论集》、《曲顶轨迹》等著作,可惜均已失传.

阿拉托斯(Aratus,公元前 315—前 239)　希腊数学家、哲学家和诗人.生于索利(Soli),卒于马其顿,是世界上最早用诗歌形式叙述科学内容的人.他以诗歌的形式写了一系列论文和著作,其中最为著名的是关于天文学和气象学方面的著作《现象》,它被翻译成许多国家文字的版本,传遍世界各地,对后世的天文和气象的发展产生了不可低估的影响.直到中世纪,许多天文和气象方面的知识还取材于这部著作.

阿利斯塔克(Aristarchus of Samos,约公元前 310—前 230)　希腊数学家、天文学家.生于萨摩斯岛,紧邻米利都——泰勒斯(Thales,(M))的故乡,是亚里士多德学派的第三位领袖.他曾在亚历山大学习,以后又在那里讲学,是西方最早提出日心说理论的学者.流传下来的惟一著作是《论太阳与月亮的大小与距离》.书中给出了太阳与地球相对大小的评价,提出了日心说.他认为,地球是同时绕着其轴和黄道转动的.当月球处于上弦和下弦时,日(S)、地(E)、月(M)三者构成一直角三角形 SME,$\angle SME$ 是直角,只要确定了日、月的角$\angle SEM$,便能算出二者到达地球的比值.他取$\angle SEM=87°$(一直角减去它的1/30),算得日地距与月地距的比在 18∶1 与 20∶1 之间.虽然这一数值比实际比值 390∶1 相差很大,但基本原理是正确的.阿利斯塔斯在他著作开头还引用了六个假设,在此条件下,证明了三个命题.这些假设与命题都是关于地球、月球与太阳方面的.他还是第一个用几何方法计算较小角度的正弦之人.他给出了一个著名的三角不等式,用现代符号表示是:

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}>\frac{\alpha}{\beta}>\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\quad(\alpha、\beta\text{ 为锐角,且 }\alpha>\beta).$$

奥托利科斯(Autolycus of Pitane,约公元前 300 年前后)　希腊天文学家、几何学家.生于比台恩,曾以教书为业,是欧多克索斯(Eudoxus,(C))的继承人.有两部著作流传下来:一部是《运动中的天体》,主要讨论了天体可看作绕着通过两极的轴旋动.书中有很多球面几何学的定理,且有诸多插图.命题按逻辑次序排列,每个命题先作一般叙述,且有附图,最后给出证明,故此书的知识比较抽象.另一部是《星球的起落》,由当时的两本天文书合集而成,内容主要有:天体在每昼夜间完成一次公转;星星在白天看不见是由于太阳光的强烈照射等.他的著作非常流行,后来被译成拉丁文、阿拉伯文和希伯来文等多种文字流传各地.

阿基米德(Archimedes,公元前 287—前 212)　希腊数学家、力学家、天文学家.生于西西里岛的叙拉古,卒于叙拉古.父亲菲迪亚斯(Phidias)是天文学家.阿基米德是当时叙拉古统治者海厄罗王(Hiero)的亲戚,和王子吉伦(Geolon)是亲密好友.早年在亚历山大跟随欧几里得(Euclid)学习,以后仍保持着密切联系,因此他算是亚历山大学派的成员.后人对阿基米德给予了极高的评价.数学史家贝尔(Bell,E. T.)说:"任何一张列出有史以来三个最伟大的数学家名单中,必定包括阿基米德,另外两个通常是高斯和牛顿."普林尼(Pliny)称阿基米德是"数学之神".

阿基米德的生平没有详细记载,但关于他的许多故事却广为流传.据说他确立了力学的杠杆定律后,曾发出豪言壮语:"给我一个立足点,我就可以移动地球!"还有一次,叙拉古的海厄罗王征金匠造一项纯金皇冠,但怀疑里面掺有银子,便请阿基米德鉴定.一次,当他进入浴盆洗澡时,水漫溢到盆外,身体顿觉减轻,于是悟出了著名的阿基米德原理.在第二次布匿战争时,罗马大军围攻了叙拉古,阿基米德制造了起重机抓起敌人的船只,摔得粉碎;他还发明了奇妙的机器,射出大石块、火球;制造出一个巨大的火镜反射日光火烧了敌船.总之,他竭尽全力,给敌人以沉重打击,但最后终因粮食耗尽和奸细出卖,城池陷落,阿基米德不幸死于罗马士兵之手.据说在他被杀时,还聚精会神地作几何图形,研究正在解决的问题.

阿基米德的著作颇多,流传下来的就不下 10 种,主要有:《论球与圆柱》是他的得意杰作,包含了许多重大成就.他从定义和公理出发,推出球和圆柱面积、体积等 50 多个命题;用几何方法解决了相当于三次方程 $x^2(a-x)=b^2c$ 求解的问题.《圆的度量》主要计算圆内接与外切 96 边形的周长,求得圆周率为

$$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}.$$

《劈锥曲面与旋转椭圆体》研究了几种圆锥曲线的旋转体,以及这些立体被平面截取部分的体积.《论螺线》是利用一组内接和一组外切的扇形,确定了阿基米德螺线($r=a\theta$)第一圈与始线所包围的面积是 $\pi(2\pi a)^2/3$.《抛物线求积》是确定抛物线与任一弦所围弓形的面积.《平面图形的重心》是从几个基本假设出发,用严格的几何方法论证力学的原理,求出若干个平面图形的重心.《数沙者》则设计了一种可以表示任何大数目的方法.《论浮体》讨论了物体的浮力及旋转抛物体在流体中的稳定性.阿基米德还提出一个"群牛问题",含 8 个未知数,最后归结为一个二次不定方程:$x^2-4729494y^2=1$.求得最小解牛的

总数为 7.766×10^{206544}，位数超过 20 万！当时阿基米德未必能解出. 除此之外，还有一篇很重要的著作，就是在 1906 年发现的《阿基米德方法》一书. 主要讲用力学原理发现问题的方法. 他把一块面积或体积分成许多小的长条或薄片，然后用已知面积或体积去平衡这些"元素"，找到重心和支点，所求的面积或体积就可以用杠杆定律计算出来，最后再用归谬法来证明. 他用这种方法取得了许多成果. 他的这种方法已具有近代积分论的思想. 然而，他没有说明这种"元素"是有限还是无限的，没有摆脱对几何的依赖，更没有使用极限方法. 尽管如此，他的思想仍具有划时代的意义，被誉为是近代积分学的先驱.

阿基米德还有许多发明创造，如制造了天球仪和天象仪两座天文仪器，还发明了一种螺旋水泵. 在人类历史上没有一个古代科学家像阿基米德那样，将熟练的计算技巧和严格的证明融为一体；将抽象的理论和工程技术的应用紧密结合起来.

埃拉托塞尼(Eratosthenes，约公元前 276—前 195)　希腊数学家、地理学家. 生于昔兰尼，卒于亚历山大. 早年在雅典学习，当时雅典学派林立，人物荟萃，百家争鸣. 埃拉托塞尼博采众长，向各个学派学习，先后师事逍遥学派的阿里斯顿(Ariston of Chios)、柏拉图学派的阿塞西劳斯(Arcesilaus)及阿佩莱斯(Apelles)、大儒派的彼翁(Bion)等. 他涉猎广泛，博学多才，赢得了"五项全能"的雅号. 他是阿基米德(Archimedes)的挚友，对阿基米德的《方法》一书给出了严格证明. "群牛问题"也是通过他交给亚历山大学者的. 约公元前 245 年，埃拉托塞尼接受国王托勒密三世(Ptolemy，Ⅲ)的邀请，从雅典来到亚历山大，担任王子菲洛佩特的老师. 若干年后，当选为亚历山大图书馆馆长，直到去世. 晚年因患眼疾，双目失明，竟无法忍受不能读书的痛苦，绝食而死，享年逾 80 岁.

埃拉托塞尼著作很多，主要有《地理学》、《地球的测量》、《倍立方问题》、《柏拉图》、《论平均值》等，但大都已散失，只有零星的片断幸存下来，其成就只能从他人著作中获知. 他的最重要的成就是测地球的周长. 依据原理是：选择两个在同一条子午线上的点(至少经度大致相同)，估计两点纬度差，算出此差是子午线的几分之几，再测得两地的实际距离，就可算出整个子午圈的长度. 在具体的测算中，他选择了赛伊尼和亚历山大两地点. 经计算，纬度差是整个圆周的 1/50，两地实际距离为 5000 希腊里，故过南北极的地球周长为 250000 希腊里. 埃拉托塞尼的另一项主要发现是寻找素数的方法——"筛法"(Sieve)，记载在尼科马霍斯(Nicomachus，(G))的《算术入门》第 13 章中. 要在自然数中从小到大找素数. 先从 3 开始，将奇数列出来，3 是第一个奇素数，将 3 后面所有 3 的倍数 9，15…划去；3 后面第一个未被划去的是 5，将 5 后面所有 5 的倍数 15，25，35，40…划去，依次类推，直到最后一个数. 这样未被划去的就是素数. 埃拉托塞尼还对倍立方问题做过一定的研究，并制造出一种器械作图方法. 他还记载了两则倍立方问题起源的故事. 在天文学方面，他估计过月地距、日地距，但数值出入较大. 他还测出黄赤交角的二倍是圆周的 11/83. 他的《地理学》是把地理置于合理的数学基础上的最早尝试.

阿波罗尼奥斯(Apollonius of perga，约公元前 262—前 190)　希腊数学家、天文学家. 生于佩尔格(Perga). 年轻时到过亚历山大求学，后来又去帕加马(Pergamum)王国. 当时阿塔罗斯一世(Attalus Ⅰ Soter)为国王，他既崇尚武功又注重文化建设，阿波罗尼奥斯的《圆锥曲线论》后 5 卷就是呈递给他的，前 3 卷寄给了一位名叫欧德莫斯(Eudemus，(R))的朋友.

阿波罗尼奥斯的主要数学成就是建立了完善的圆锥曲线论. 他在总结前人成果的基础上，加上自己的独特创造，撰写成了一部划时代的经典巨著——《圆锥曲线论》，它代表了希腊几何的最高水平. 因此，阿波罗尼奥斯和欧几里得(Euclid)、阿基米德(Archimedes)一起被合称为亚历山大前期的三大数学家. 全书共 8 卷. 卷Ⅰ列出了三种截线的一般定义和主要性质. 从前用直角三角形绕直角边的回转定义圆锥，只得到正圆锥. 阿波罗尼奥斯另辟途径，证明三种圆锥曲线都可由一对圆锥体截得，并引入了抛物线、双曲线、椭圆的名称. 卷Ⅱ主要讨论双曲线的渐近线及一些作图题. 卷Ⅲ论述了由弦、渐近线、切线等构成三角形、矩形、正方形的相等和相似及椭圆和双曲线的焦点问题. 卷Ⅳ讨论圆锥曲线的极点与极线的调和性质、圆锥曲线交点个数，并证明了两圆锥曲线相交至多有 4 个交点. 卷Ⅴ研究了极大、极小值问题，探讨从某一点到圆锥曲线的最大和最小距离. 卷Ⅵ讲全等和相似的圆锥曲线、圆锥曲线弓形及一些作图题. 卷Ⅶ是关于共轭直径的论述. 卷Ⅷ已失传，有可能是卷Ⅶ内容的继续. 据帕普斯(Pappus，(A))记载，阿波罗尼奥斯还撰有《论接触》、《平面轨迹》、《截取线段成比例》、《截取面积等于已知面积》、《倾斜》等著作. 他还做过圆周率的计算，但结果已失传. 可能还设计过一种以"万"为基础的记数法. 在天文学方面，他推算过月球到地球的距离，证明了求简单本轮系统中行星留点的法则，考虑了几何对天文学的应用.

珀尔修斯(Perseus，约公元前 3 世纪)　希腊数学家. 经历不详. 从普罗克洛斯(Proclus)的著作中得知：珀尔修斯曾撰写过关于圆环面方面的著作. 该几何体是由一圆周(轴与圆在同一平面内)绕轴旋转

而成的.但普洛克洛斯说该几何体是由一圆周绕着一点(不是圆心)旋转而成.前者比后者说法更为精确.圆环面根据轴与圆相切、相交、相离的位置不同可分为三种不同形状的圆环面,从而用一平面去截圆球面,可得到圆环面截线.珀尔修斯发现了三种类型的圆环面截线.

尼科米迪斯(Nicomedes,约公元前 250 年前后) 希腊数学家.有关尼科米迪斯的生平可从下述事实推断,他曾批评埃拉托塞尼(Eratosthenes)解决倍立方问题的方法不实用,也不是几何方法;而阿波罗尼奥斯(Apollonius,(P))指出某一种曲线和蚌线属同一类型,故此可断定尼科米迪斯生存年代介入二人之间,约公元前 3 世纪中期.他的主要数学著作是《论蚌线》,可惜已失传.现只能从帕普斯(Pappus,(A))、欧托基奥斯(Eutocius (A))、普罗克洛斯(Proclus)等人的著作中知其内容.尼科米迪斯定义了这样一种曲线:设 $OY \perp OX$,直线 $EF \parallel OX$,与 OX 的距离为 a,过 O 任作直线 OAP 交 EF 于 A,在此直线上取 P、P' 点,使 $AP=AP'=b$(定值),则点 P 与 P' 的轨迹为蚌线,O 为极点,EF 为准线,b 为模.曲线分上、下两支,上支称为上蚌线,下支称为下蚌线.此曲线的直角坐标方程为

$$(x^2+y^2)(y-a)^2=b^2y^2;$$

极坐标方程为

$$\rho=\frac{a}{\sin\varphi}\pm b.$$

蚌线的形状,取决于 a、b 的大小,据 $b>a$,$b=a$,$b<a$ 不同的条件,得到不同形状的蚌线.为了形象地说明蚌线的形成过程,尼科米迪斯还创造了蚌线的机械作图器,结构简单,形象直观.从尼科米迪斯批评埃拉托塞尼的原因可看出,尼科米迪斯研究蚌线是为了实际应用.他以此为工具解决了几何三大问题中的三等分任意角及倍立方问题.在尼科米迪斯以后千年时间内,对蚌线的研究无多大进展.直到 16 世纪后期,帕普斯和欧托基奥斯的著作重新引起关注,才再次引发了对蚌线的研究.

科　农(Conon of Samos,约公元前 245 年前后) 希腊数学家、天文学家、气象学家.生于萨摩斯岛,活跃于亚历山大,是意大利和西西里的主要天文和气象观测家.后来得到国王托勒密三世(Ptolemy,Ⅲ)的赏识,被请到宫中得到重用,以善辨后发星座而著称.它是为纪念托勒密三世的妻子而命名的.科农与阿基米德(Archimedes)、阿波罗尼奥斯(Apollonius,(P))有着紧密联系.阿基米德喜欢把他的一些未加证明的命题给科农看,阿波罗尼奥斯的学术研究深受过科农的影响.在数学方面,科农主要讨论了两圆锥曲线及一条圆锥曲线和一个圆的交点个数问题.阐明了阿基米德的关于螺线的理论,另外还创造了一套描绘天象和季节的 17 个符号;研究了埃及人保持的日食记录,揭开了星星的升落、消失,太阳光强度减弱的秘密等.

多西修斯(Dositheus,公元前 3 世纪下半叶) 希腊数学家、天文学家.生活于亚历山大,是萨摩斯岛科农(Conon,(S.))的学生或朋友,与阿基米德(Archimedes)关系甚密,并将阿基米德的著作传送给亚历山大的学者.阿基米德的《抛物线图形求积法》、《论球与圆柱》、《劈锥曲面与回转椭圆体》等著作,他都详细研究过.在天文学方面,多西修斯对历法和天气预报都有深入研究,他的优秀成果多次被盖米诺斯(Geminus)和托勒密(Ptolemy)引用.

狄俄尼索多罗(Dionysodorus,约公元前 3 世纪—前 2 世纪) 希腊数学家.经历不详.主要数学成就是利用抛物线与双曲线的相交关系解决了阿基米德(Archimedes)在用平面按比例截球体时得到的三次方程.用现代术语表示为

$$h^3-3rh^2+\frac{4n}{m+n}=0$$

(h 表示截得球体的一部分的高,$m:n$ 是截得两部分体积比,r 表示球半径).若令 $x=2r-h$,就可得到狄俄尼索多罗形式的三次方程:

$$4r^2:x^2=(3r-x):\frac{n}{m+n}r.$$

所用的抛物线与双曲线方程分别是:

$$y^2=\frac{n}{m+n}r(3r-x)\text{ 和 }xy=\frac{n}{m+n}2r^2.$$

他还给出环形圆纹曲面的体积公式,用现代语言表示为:$v=2\pi a\cdot\pi r^2$(r 为圆半径,a 是圆心到环形圆纹曲面轴的距离),这就是著名的古尔丁定理(或帕普斯定理)的最早实例.此外,他还发明了一种锥形日晷仪.

希帕霍斯(Hipparchus,约公元前 180—前 125?) 希腊天文学家、数学家.生于小亚细亚的比提尼亚(Bithynia)的尼西亚(Nicaea).长期居住在罗得岛(Rhpdes)从事天文观测.他的主要贡献是发现了"岁差"(岁差是春分点在黄道上每年约逆行 50″ 的现象),并绘制出一张包含有 850 个恒星的星图表.在制作图表时,他很可能已采用经纬度来表示星的位置,并具有了初步的坐标制思想.由于天文研究的需要,他对球面上的角度和距离进行过计算,制作了一个和现今三角函数表相似的"弦表",就是在固定的圆内,不同圆心角所对应的弦长(等于现在圆心角一半的正弦线的两倍)的表.他在制作这个表时,采用了巴比伦的 60 进制.他还发明了正交射影法,利用无穷远处射来的"光线"把球体投射到一个平面上.运用这种方法,便可以把地球表面的一部分画在平面上.希帕霍斯的研究成果大量被托勒密(Ptole-

my)的《天文学大成》所引用，对三角学的发展产生了深远的影响.

芝诺多罗斯(Zenodorus，公元前2世纪早期) 希腊数学家.生于雅典，主要从事几何作图，以研究等周问题而闻名.所谓等周图形就是具有相同周长但有不同面积的平面图形和具有相同的表面积但有不同体积的立体图形组成.这些大都已散失，只能从帕普斯(Pappus，(A))的著作《汇编》、赛翁(Theon，(A))评注托勒密(Ptolemy)的《天文学大成》及无名作者的《天文学大成简介》中窥视出他的主要贡献.在等周问题上，芝诺多罗斯有14个命题.第一个就是：周长相同的正多边形中，边数越多，面积越大.最后的命题是：表面积相等的所有立体体积中，以球的体积为最大，但未给出证明.除此之外，还有下列命题：圆面积大于同周长的任意正多边形的面积；同底三角形中，等腰三角形的面积比任何同周长的三角形的面积都大；给定两个相似直角三角形，两斜边上的正方形面积之和等于四直角边上的四个正方形面积之和；周长相等的n边形中，以正n边形的面积为最大；异底的两相似等腰三角形面积之和大于任何与它们周长之和相同的同底不相似两等腰三角形面积之和；正五面体小于具有同表面积的球的体积.上述命题，芝诺多罗斯都没有给出详尽的证明.直到1884年，德国数学家施瓦兹(Schwarz，H.A.)才完成了这些命题的详细证明.

许普西克勒斯(Hypsicles of Alexandria，公元前2世纪上半叶) 希腊数学家、天文学家.其生平知道甚少，据载，大约公元前175年左右活跃于亚历山大.有很多资料表明，欧几里得(Euclid)的《几何原本》第XIV卷出自他的手，第XV卷中有部分也是他撰写的.内有关于正多面体的7个命题，特别是论证了球内接正12面体和内接20面体的一些关系.从丢番图(Diophantus)引用他的著作可推知，他还研究过多角数、算术级数等，很有可能还写过关于数的著作.

许普西克勒斯在天文学方面的著作是《论星的升起》.书中证明了若干个算术级数命题，并讨论了黄道十二宫的分布，实际上已涉及到三角学方面的知识.他把黄道圈分为360份等弧，并使用60进制，这是希腊和巴比伦在天文学方面有一定关系的明显例证.

狄俄克利斯(Diocles，公元前2世纪) 希腊数学家、物理学家.生平不详.他是在盖米诺斯(Geminus)前与阿基米德(Archimedes)后的学者.欧托基奥斯(Eutocius (A))在对阿基米德的《论球与圆柱》作评注时，保存了狄俄克利斯的著作《论取火镜》中的两段残篇.取火镜是指球面镜、旋转抛物面形和椭圆面形的凹面镜.此书主要解决了圆锥曲线论的三个问题：

1.用蔓叶线来解决等比中项问题，这是狄俄克利斯的独立发明，用此法可解决倍立方问题.

2.用双曲线与椭圆相交分割已知球成一定的比例.

3.证明了抛物线的焦点性质，利用焦点与准线的关系做出已知焦距的抛物镜.

芝诺(西顿的)(Zeno of Sidon，约公元前150—前70) 希腊哲学家、数学家、逻辑学家.生于西顿，卒于雅典.他是一位多产作家，研究过逻辑学、古代原子论学说、两性的生理差异、伦理学、历法、诡辩术、诗歌和数学等，可惜大部分著作失传.在数学方面，曾为《几何原本》作过注释，并从逻辑上批评了欧几里得(Euclid)的一些定理.例如，他认为《几何原本》的第一个命题应在“两条直线没有多于一个的公共点”这样公理条件下才成立；他还批驳了《几何原本》的第四公理.在哲学方面，他认为人的知识来源于实践，通过对认识的有反例的事物进行归纳而获得，并以自己命名的“根据相似性转变”理论作依据，这实际上就是现在的归纳法.

波西佐尼奥斯(Poseidonius 或 Posidonios，约公元前135—前51) 希腊哲学家、数学家、天文学家.生于叙利亚的阿帕梅亚(Apameia).长期在罗得(Rodhos)工作，晚年又到了罗马.主要研究天文、地理和任私人教师，还曾致力于测量地球周长的工作.虽然测得的数据远不如埃拉托塞尼(Eratosthenes)的准确，但却广泛地为古代地理学家所引用.他顺利地完成了测定地球到月球、地球到太阳的距离的工作，并得到当时最好的数值.波西佐尼奥斯还是试图证明欧几里得(Euclid)的《几何原本》第五公设的首批学者之一.他曾改进平行线理论，定义“共面的处处等距离的直线叫平行线”.

西奥多修斯(比提尼亚的)(Theodosius of Bithynia，公元前2世纪下半叶) 希腊数学家、天文学家.生于比提尼亚，与希帕霍斯(Hipparchus)是同时代的人.他的儿子后来也成为著名的数学家.

西奥多修斯一生著述颇丰，其中有《球面学》一书.内容是关于球面几何学方面的，是古希腊天文学的一个分支，而不属于几何的范畴.其材料大部分取自于欧多克索斯(Eudoxus，(C))的著作，其中证明了一个比较著名的球面三角公式：

$$\tan a=\sin b\tan A\ (C\text{为直角}).$$

除此之外，西奥多修斯还有两部著作流传下来.一部是《论住宅》，主要讨论了地球自转而产生的现象，尤其是天体的哪部分对不同地带的居民都能看见作了详尽的论述.另一部是《论昼夜》，研究了每天太阳经过的黄道弧，其根本目的是确定满足某些特定情况的最佳条件.上述三部著作均收集在帕普斯(Pap-

pus,(A))的《小天文学》中,公元9世纪末被译成阿拉伯文.《球面学》12世纪又被译成拉丁文.西奥多修斯还对《阿基米德的方法》作过评注,写过《论房屋的绘制》、《怀疑论的牧师会》等著作.据罗马工程师维特鲁维厄斯(Vitruvius,P. M.)介绍,西奥多修斯还发明了一种于任何地区都适用的日晷仪.

盖米诺斯(Geminus,约公元前70年前后) 希腊数学家、天文学家.生平不详.只知他主要在罗得岛活动.主要著作有《天文学引论》和《数学原理》等,其中《天文学引论》是一本基础性天文学手册,共18章,内容主要阐述天文方面的知识.如第三章重点阐述星宿;第四、五章讨论天体的运行轨道等.《数学原理》主要解决了数学的分类及分类的哲学规律,明确指出了"假设"与"定理"、"公设"与"公理"等概念的根本区别,并对数学的各个分支及点、线、面、体、角等定义做了详尽的叙述.在这本著作中含有一些对欧几里得公设的评述,尤其是第五公设即平行公设,盖米诺斯相信他已经发现了一个证明方法.

索西琴尼(Sosigenes,活跃于公元前46年前后) 希腊天文学家、数学家.生平不详.公元前46年被儒略·凯撒(Caesar,G. J.)请到罗马去修改历法.著作有《旋转球》,现仅部分残存.另外还有三篇关于天文计算方面的评论,其中包含水星绕太阳旋转的思想.

海 伦(Heron of Alexandrial,约公元62年前后) 希腊数学家、物理学家、机械发明家.生平不详.后人争议很大.但多数学者认为,他在公元62年前后活跃于亚历山大.

海伦一生著述颇丰,《度量论》是他的数学代表作.全书共分3卷,卷Ⅰ主要讨论平面图形的面积,给出了较为著名的一般三角形的面积公式——海伦公式:

$$A=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)},$$

其中a、b、c为三角形的三边长,S为三角形的半周长.实际上,这个公式早已为阿基米德(Archimedes)所得到,13世纪时中国的秦九韶也独立地给出了一个与之等价的公式.海伦在应用此公式时,出现了求无理根的问题,他明确地应用近似公式:

$$\sqrt{A}=\frac{1}{2}\left(a+\frac{A}{a}\right)\ (a\text{ 为 }\sqrt{A}\text{ 的第一个近似值}).$$

此外,他还考查了正多边形面积的计算法($3\leqslant n\leqslant 12$).卷Ⅱ讨论了立体图形体积,给出了拟柱体的体积公式:

$$V=\left[\frac{1}{4}(a+a')(b+b')+\frac{1}{12}(a-a')(b-b')\right]h$$

(a'、b'、a、b分别为上、下底的长与宽,h为高).卷Ⅲ讨论将图形分割成已知比,基本上来自阿基米德的工作.海伦的另一部著作《测量仪器》也很出名.该书描述了一种测量工具,类似于现代的经纬仪,用作测量和天文观测,可解决许多可望而不可及的距离和面积问题.此外,《气体力学》、《自动机建造技术》、《武器制造法》、《定义》、《几何》、《测量》、《测体积学》等也都是海伦留下的主要著作.

海伦多才多艺,善于博采众长,在著作中大量引用前人的成果,在论证中不讲究传统的严密性,而是大胆地使用近似公式,特别注重数学的实际应用,被尊为应用数学家.海伦还是一个发明家,他发明了很多机械,最为著名的就是所谓气转球,被称为人类历史上第一台蒸汽机.另外还有虹吸管、灭火器、水风琴、水钟等.

尼科马霍斯(Nicomachus of Gerasa,约公元100年前后) 希腊数学家、声学家.生平不详.据他本人和卢西恩(Lucian,约公元120—180)的著作推断,于公元100年左右活跃于杰拉萨(Gerasa),虽晚于毕达哥拉斯(Pythagoras)好几百年,但在哲学思想和数的理论方面继承了该学派的衣钵,并企图恢复毕达哥拉斯精神,故被称为新毕达哥拉斯学派.

尼科马霍斯的著作只有两部完整地流传下来,一部是《算术入门》,另一部是《和声手册》,其中《算术入门》是他的代表作,这是一本真正摆脱几何形式的算术.它开辟了希腊数学的新途径,影响达千年之久.此后算术代替几何,在亚历山大成为人们瞩目的中心.《算术入门》分上、下两卷,上卷23章,下卷29章.上卷前6章阐述了算术在哲学上的重要性,在思想上继承了毕达哥拉斯观点,指出只有通过数学才能认识宇宙的奥秘.第7章后讨论数的分类,先将数分为偶数、奇数,再将偶数分为偶偶数(2^n)、偶奇数($2(2n+1)$)和奇偶数($2^{n+1}(2n+1)$);奇数分为素数与非合数、次素数与合数、本身是次素数与合数但与别的数互素.第13章用文字叙述埃拉托塞尼(Eratosthenes)的"素数筛法"及欧几里得(Euclid)的"辗转相除"求最大公约数的方法.第14章至16章讨论了完全数.第17章至23章是比较数的大小.第19章还给出与现在一样的乘法表,不过不是九九表而是十十表(1—10各数乘1—10各数).第23章还给出上述数的一些性质.下卷前几章阐述有各种比的数的一些性质.第6章论述多角数,指出构成方法及性质.第13章将平面多角数推广为立体多角数.毕达哥拉斯研究多角数是结合图形来说的,而尼科马霍斯则完全脱离了几何图形,只借用了几何名称,实际此问题可归入高阶等差数列的范畴.第21章后研究几何级数、算术级数、调和级数的种种性质.第28章将上述三种级数推广.他的另一部著作《和声手册》,主要阐述了毕达哥拉斯和阿里斯托赛

诺斯学派的音乐理论. 第 1 章是引言,第 2 章至第 4 章讲音调,第 5 章论述音阶,第 10 章讨论调节音的原则,第 11 章将一韵扩充为二韵的全音阶,最后一章重述了音调、音程、半音阶、等音等. 他的《算术神学》保存下了大部分,主要阐述数的神秘性质. 此外,他还有可能有音乐、几何、人物传记等方面的著作,某些摘要尚残存,但大部分已散失.

门纳劳斯(Menelaus of Alexandria,约公元 100 年前后) 希腊数学家、天文学家. 有关门纳劳斯的生平知道甚少. 据托勒密(Ptolemy)的《天文学大成》和他人记载:门纳劳斯在公元 100 年前后活跃于亚历山大和罗马. 阿拉伯学者伊本纳迪姆的《数学家名录》中列出了门纳劳斯的著作:《球面命题篇》、《不同物体的重量及分布知识》、《几何原理》、《三角形篇》. 还有一些阿拉伯学者推测门纳劳斯编过星表,而帕普斯(Pappus,(A))说他写了一部关于黄道十二宫降落的著作,可惜这些著作均已散失,流传下来的只有阿拉伯译本的《球面学》,此书是门纳劳斯的杰作,由此他也被誉为"三角学的奠基者",而且是第一个使三角学脱离天文学成为独立学科的人.《球面学》共分 3 卷. 卷 Ⅰ 主要是比较球面与平面三角形的异同,力图使之平行于《几何原本》,建立相应的球面三角形命题. 卷 Ⅱ 建立对天文学有用的命题,一般不超出西奥多修斯(Theodosius,(B))的《球面学》的内容,有些在原来基础上加以推广. 卷 Ⅲ 是这本书的主要部分,重点是对球面三角学的阐述,其中最为著名的是球面的门纳劳斯定理. 现今在平面几何及射影几何中有平面的"门纳劳斯"定理:设 X、Y、Z 分别是 $\triangle ABC$ 三条边 BC、CA、AB 或其延长线上的点,则此三点共线的充分必要条件是

$$\frac{XB}{XC}\cdot\frac{YC}{YA}\cdot\frac{ZA}{ZB}=1.$$

此命题并非门纳劳斯所创造,只因不知其出自何处,才称为门纳劳斯定理. 门纳劳斯把平面上的此定理推广到球面上:设 X、Y、Z 分别是球面三角形 $\triangle ABC$ 三条边 BC、CA、AB 或其延长线上的点,则此三点共大圆的充分要必条件是

$$\frac{\sin XB}{\sin XC}\cdot\frac{\sin YC}{\sin YA}\cdot\frac{\sin ZA}{\sin ZB}=1.$$

此公式是用现代符号来表达的,而当时还没有三角函数,只有希帕霍斯(Hipparchus)的弦表,即不同圆心角所对弦长的表. 他用弦长表示此公式,实质上与正弦相同. 门纳劳斯还从这个公式出发推出一些有用的新定理,对三角学的发展有重要的意义.

托勒密(Ptolemy,约公元 100—公元 170) 希腊天文学家、数学家. 长期居住在亚历山大,曾在这里进行了大量的天文观测,加上继承前贤特别是依巴谷(Hipparchus)的成就,加以整理发挥,写成了著名之作《天文学大成》.

《天文学大成》原名《数学论集》,共 13 卷,是亚历山大学派或整个古代天文学知识的总结. 其基本理论是地球中心说. 书中包含系统的三角学理论,是后来西方三角学的一个重要来源. 书中采用了 60 进制,把圆周分成 360°,又将半径分为 60 等份,每一小份又分为 60 小份,每一小份再分为更小的份,依此类推. 托勒密给出了从 0°～90°间隔 0.25°的正弦函数表,他取半径为 60 个单位,取半径的 1/60 作为长度单位,如 60°的弦长是 60(60 个单位长和半径相等). 他还引入了著名的托勒密定理(实际出自依巴谷之手):圆内接四边形对角线的乘积等于两组对边乘积之和. 托勒密利用圆内接正五边形和圆内接正十边形推导出了 36°和 72°的边长,又依据托勒密定理推导出其他角度的弦长. 实际上,还可从此定理推出正弦、余弦的和差公式及一系列三角恒等式. 如托勒密已知道与公式

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,$$
$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y,$$
$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y,$$
$$\sin^2(x/2)=(1-\cos x)/2$$

有等价关系的公式. 托勒密还别出心裁地依据不等式

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}<\frac{\alpha}{\beta}\ \left(\frac{\pi}{2}>\alpha>\beta\right)$$

来作内插计算,得到了 π 的近似值

$$\frac{337}{120}\doteq 3.141\ 67\cdots,$$

首次提出所谓三直角轴的概念.

托勒密是地心说天文理论的创始人. 他认为,地球是宇宙的中心,是静止不动的,日月星辰绕着地球运行. 在地理学方面,他制造了星盘和角距测量仪,发明了绘制地图的锥面投影法,标出了地球上 8000 多个地方的经纬度的具体数值. 托勒密还有其他方面的著作,如《球平面》、《地理学》、《光学》、《和声》等.

赛翁(士麦那的)(Theon of Smyrna,公元 2 世纪早期) 希腊数学家、天文学家. 生平不详. 著有一本手册,书中引证了较早的数理天文方面的材料,阐述了算术、几何、测体积术、音乐和天文学方面的相互联系,其中几何与测体积术论述比较粗略. 关于宇宙的和谐,赛翁有详细的论述,但不含在此手册中,可能过早地丢失了. 赛翁在此手册的算术部分中,主要讨论了以毕达哥拉斯方式形成的各种各样的数,如素数、几何数、级数等. 给出了一定理:一个平方数或一个平方数减 1,可被 3 或 4 或二者整除. 在音乐部分中,赛翁把音乐分成三种类型:乐器、用数字表示的音程和宇宙的和谐,常带有浓厚的数字神秘主

义色彩.他声称自己并没有发现任何音乐规律,其主要目的是为发扬前辈们的优秀成果而写的.在天文学方面,他主要论述了地球是一个球体,是宇宙的中心;山脉与地球相比是微不足道的,对于各种行星的运行、静止、逆行也做了很好的解释.他还提出了天体在不正圆轨道上运行和本轮假说,并指出了它们的等价性.赛翁从两极和黄道带中心开始来研究水星与金星的会合、凌日、掩星、食与中心轴,并取得了显著的成就.赛翁除撰写了这本手册外,还评注过柏拉图(Plato)的《共和国》一书,可惜已失传.

马利纳斯(Marinus of Tyre,活跃于公元 2 世纪) 希腊地理学家、数学家.生平不详.他是数理地理学的奠基人.他用经度和纬度确定地理位置,建立了本初子午线,后被托勒密(Ptolemy)所采用.

丢番图(Diophantus of Alexandria,活跃于公元 250 年前后) 希腊数学家.生平不详.据他本人和他人的著作推断:公元 250 年前后活跃于亚历山大.另一本《希腊诗文选》也记载了他生平的一首脍炙人口的诗:"丢番图的一生,幼年占 1/6,青少年占 1/12,又过了 1/7 才结婚,5 年后得子,子先父 4 年而卒,仅为父寿之半."由此推知,他终年 84 岁.

丢番图的代表作是《算术》.全书共 13 卷,现仅存 10 卷,其中 6 卷是希腊文,4 卷是阿拉伯文,以问题集的形式收录了 290 个题目.此书的最大特点是使问题的求解完全脱离了几何形式,在希腊数学中独树一帜,对后来的阿拉伯数学、文艺复兴时意大利的数学,乃至整个欧洲数学都产生了巨大影响,也为包括韦达、费马、高斯在内的许多著名数学家提供了创作源泉.但《算术》的最大缺点是解题方法五花八门,没有一定法则和一般性解法,以至数学史家汉克尔(Hankel,H.)这样评论道:"近代数学家研究了丢番图的 100 个题后,去解第 101 个题时,仍然感到困难".《算术》的内容主要讲数的理论,大部分可归入代数范围,突出贡献有:

1. 建立了不定方程理论.丢番图从具体问题出发,导出多种类型的不定方程,并列出解法.虽然在丢番图以前已有人探讨过不定方程,但他是第一个系统研究这一理论的数学家.他已脱离实际问题的羁绊,创造出高达 6 阶和多达 10 个未知数的不定方程和不定方程组;给出了二元一次不定方程的一般解;求得了形如 $2mn, m^2-n^2, m^2+n^2$ 的一类勾股数表达式;在解 $Ax^2+c=y^2, Bx+c=y^2$ 等类型方程时,应用了十分高明的技巧,识别了此类方程的实根、有理根和正根;在解方程时,应用了消元法、降阶法、倒推法和极限法等一般方法,被称为不定分析的创始人,后来把求整系数的不定方程(组)的整数解的方程称之为"丢番图方程".不过他的理论缺乏一般性,直到 7 世纪才有印度数学家不断将其趋于完善.

2. 丢番图是符号代数的先驱.他是第一位在代数中采用一套符号的数学家.符号的引入是数学史上的一件大事,它是代数的主要特征,能使运算大为简捷.虽然这些符号与现代的相差甚远,但为代数学的发展指明了方向.

3.《算术》中的部分题解构成了数论的前身.他知道 $8n+7$ 不能表示两个数平方和;n 不是奇数时,$2n+1$ 可以表示为两个数平方和等.丢番图还有另外三部著作:《多角数》、《推论集》、《分数算法》.《多角数》仅留残篇,内容冗长难懂,其中给出了一个重要公式:

$$P_a^n = \frac{[(a-2)(2n-1)+2]^2-(a-4)^2}{8(a-2)},$$

a 为多边形角顶数.用 P 与 a 作为已知数求 n,推导过程不得而知.《推论集》是一部数论习题集;《分数算法》规定分数的表示法及运算法则,可惜已散失.

丢番图是希腊文化衰退时期,除帕普斯(Pappus,(A))外惟一的伟大数学家,其成就远远超过了同时代的水平.15、16 世纪,他的著作译本广泛地流传于欧洲,人们才逐渐认识到他在代数学上的巨大贡献,因此被称之为"代数学之父".

伊安布利霍斯(Iamblichus,约公元 250—约公元 330) 希腊数学家.生于希腊的哈尔基斯(Chalcis),是安纳托留斯(Anatolius of Alexandria)和波菲里乌斯(Porphyrius)的学生.著有 9 部关于毕达哥拉斯学派的书,其主要内容如下:

1. 毕达哥拉斯(Pythagoras)的生平.

2. 毕达哥拉斯的哲学思想.

3. 一般的数学哲学.

4. 尼科马霍斯(Nicomachus,(G))的《算术引论》.

5. 至 7. 分别是应用于物理学、光学、神学的算术科学.

8. 毕达哥拉斯的几何学.

9. 毕达哥拉斯学派的音乐.

前 4 部至今尚存,有多种现代版本.值得一提的是他的关于尼科马霍斯的评注是一项精细的工作,提出了一个很饶有兴趣的命题:将三个整数 $3n$、$3n-1$、$3n-2$ 之和的各位数相加,再将所得和的各位数字相加,依此类推,最后的结果是 6.

安纳托留斯(Anatolius of Alexandria,活跃于公元 269 年前后) 希腊数学家、哲学家.生于亚历山大,卒于劳迪克亚(Laodicea,今土耳其),是亚里士多德学派的领袖.约公元 280 年,被任命为劳迪克亚的主教,直到去世.他曾学过算术、几何、天文学与修辞学,并常把天文学知识用于宗教,其中对复活节时在黄道带的太阳和月亮的位置做了精辟的论述.

安纳托留斯的主要数学著作是《算术导引》. 书中对前10个自然数做了详细的讨论. 他对于数的本质的解释是神秘而又奇特的. 譬如，他说4是“公正的”，因为对于正方体来说，若一边长等于4个单位长度，则它的面积就等于周长数（4×4=16=4+4+4+4）；如果一边长小于4个单位长度，则它的面积就小于周长数；如果一边长大于4个单位长度，则面积就大于周长数. 除此之外，安纳托留斯还对亚里士多德（Aristotle）的数学专用术语、数学名称，以及数学在哲学上的重要地位和一些方法也做了清晰的解释.

斯波拉斯（Sporus of Nicaea，公元3世纪下半叶） 希腊数学家. 经历不详. 据史料记载，他可能是帕普斯（Pappus，(A)）的老师或学生. 曾撰写过一本数学专著，后被欧托基奥斯（Eutocius (A)）详加注释. 书中主要论述了化圆为方和倍立方两大几何问题，注意到此问题不能用尺规做出，并给出了问题的近似解法. 他还论述了极圈、太阳大小、彗星等问题. 在天文学方面，他曾对阿拉托斯（Aratus）的名著《现象》详加评论.

帕普斯（Pappus of Alexandria，约公元300—约公元350） 希腊数学家、评注家、天文学家、地理学家. 出生于亚历山大，是亚历山大晚期的数学家.

帕普斯一生著述颇丰，但多已散失，其中惟一流传下来的也是最有价值的是《数学汇编》. 它在历史上占有特殊的地位，书中不仅有许多发明创造，更重要的是整理了前人的大量工作，保存下来了大批史料. 它和普罗克洛斯（Proclus）的《普罗克略斯概要》是研究希腊数学史的两大原始文献.《数学汇编》原有8卷，卷Ⅰ和卷Ⅱ部分已散失，可能是论述阿波罗尼奥斯（Apollonius，(P)）的大数记法的，相当于以“万”为底的乘幂表示法. 卷Ⅲ分4节，第1节讲几何的平面问题（用尺规解决）、立体问题（用圆锥曲线解决）、线性问题（用较复杂的曲线解决，如螺线、蚌线、蔓叶线等）. 第2节讨论等差中项、等比中项、调和中项等中项问题. 第3节是一系列命题，取自艾里西诺斯（Erycinus）的《悖论集》. 第4节论述如何作球的五种内接正多面体. 卷Ⅳ第1节是勾股定理的推广及若干个圆相切问题. 第2节是“皮匠刀”（Shoemaker's knife）问题. 所谓“皮匠刀”是三个半圆所包围的部分，两个小半圆相切，又同时内切于大半圆. 此卷的其余部分是解决一些特殊曲线（如阿基米德螺线、尼科米迪斯蚌线等）及如何用这些曲线解决“三大问题”. 卷Ⅴ是“等周问题”. 主要介绍和补充芝诺多罗斯（Zenodorus）的工作和阿基米德（Archimedes）的《论球与圆柱》的一些命题，对各种表面积相等的立体体积进行详细地比较. 另外，还记述了阿基米德发现的13种半正多面体，论证了5种正面体若有相同的表面积，面数越多，体积就越大. 卷Ⅵ主要讲述了天文学. 卷Ⅶ是最重要部分. 除保存大量已散失的著作外，更可贵的是那富有启发性的思想对后来的数学发展有深刻的影响. 还有一项贡献是提出了古尔丁定理：封闭的平面图形围绕同一平面内且不与之相交的轴回转，所产生的体积等于这图形的面积乘以图形重心所描画出的圆周的长. 卷Ⅷ主要是力学，给出重心定义、讨论了齿轮、螺钉杠杆和滑轮等. 帕普斯的另一著作《分析集锦》已失传. 在《数学汇编》卷Ⅶ中记载了部分内容. 他还写过关于地理、音乐、流体静力学等方面的著作.

帕普斯博学多才，广泛收集、总结、补充和评述了几乎整个希腊的学术工作.

赛翁（亚历山大的）（Theon of Alexandria，约公元390年前后） 希腊数学家、天文学家. 有关他的生平资料很少，只知他生活于狄奥多西一世（Theodosius Ⅰ，公元379—395在位）时代，是亚历山大博物馆的成员，在这里主要从事教学工作. 他的著作几乎都是为教学目的而撰写的，或是评注或是编辑当时的数学和天文学经典，以备学生使用. 最为著名的是他编辑的欧几里得（Euclid）的《几何原本》. 他的编辑方法不是恢复原著的本来面目，而是以适合学生使用的形式重编原著. 后来的拉丁文和阿拉伯文的《几何原本》就是根据它译出的，足见其影响之大. 赛翁还编辑了欧几里得的《已知数》和《光学》两部著作，其中《已知数》与原著出入不大，为较优秀的学生使用，而《光学》与原著有显著差异. 赛翁对天文学家托勒密（Ptolemy）的《天文学大成》和《天文手册》的评注也十分出名. 对后者的评注分“详评本”和“简评本”两种，其内容相当丰富. 但主要是注释而未加任何评论. 据诺伊格鲍尔（Neugebauer，O）考证，赛翁还撰写过一部关于小星盘的著作，对古代黄道运动知识的传播可能起了一定的推动作用.

许帕提娅（Hypatia，约公元370—415） 希腊女数学家、哲学家. 生活于亚历山大城，是著名学者亚历山大的赛翁（Theon，(A)）的女儿，数学史上第一位著名的女数学家，新柏拉图学派的领袖. 许帕提娅早年随父学习，成年后帮助父亲评注托勒密（Ptolemy）的《天文学大成》，她很可能还协助其父编辑了欧几里得（Euclid）的《几何原本》. 据古代一本词典记载，许帕提娅还评注了丢番图（Diophantus）的《算术》和阿波罗尼奥斯（Apollonius，(P)）的《圆锥曲线》等名著，可惜均已失传. 她还研究了星盘和水钟的制造问题. 约公元400年左右，许帕提娅成为新柏拉图主义学派的领袖，以口才、美丽、谦逊和非凡的才智吸引了大批学生，由于她的学术声望很高，甚至有的基督教徒也拜她为师. 但是，早期的基督教徒在很大程度上都把科学视为异端邪说，把传播希

腊传统文化的人视为异教徒.约公元391年,罗马皇帝狄奥多西一世(Theodosius Ⅰ)下令拆毁希腊神庙,亚历山大的赛拉庇斯(Sarapis)神庙被毁,藏书尽散,庙宇改为了修道院.

许帕蒂娅崇尚自由,以其丰富的学识和脍炙人口的讲学继续宣传她的哲学,加上她与该市主教的政敌奥雷斯特斯(Orestes)市长交往甚密,公元415年,她被信奉基督教的一群暴徒野蛮杀害.她的去世标志着希腊文明的衰落,许多著名学士从此离开亚历山大,奔向异国他乡.

普罗克洛斯(Proclus,公元410—485) 希腊哲学家、天文学家、数学家、数学史家.生于拜占庭,卒于雅典.父亲帕特里索斯(Patricius)在拜占庭宫廷中任要职,家庭条件比较优越,这为他的成长打下了良好基础.普罗克洛斯早年在桑索斯(Xanthus)受教育,随后到亚历山大学习拉丁文与修辞.在此期间,他曾到拜占庭去访问,据说受到"神"的启示,决心献身哲学.回到亚历山大后,跟随奥林皮奥多罗(Olyplodorus)等学习亚里士多德学说及数学.但这些并未使他满足,在他20岁前又回到雅典,在柏拉图学园继续深造,并且一直留在那里,最后成为了该学园的领导人和导师.他是新柏拉图主义哲学运动的最后一位代表人物,终生未婚,自奉节俭,常将其财富救济朋友.

普罗克洛斯一生著述甚多,数学上最主要贡献是写出了《欧几里得〈几何原本〉卷Ⅰ注释》,版本和译本很多,标准本是弗里德莱因(Friedlein,G.)的校订本.书中指出了数学与哲学的关系及在哲学上的应用,这是最早的数学哲学文献.尤为重要的是,书中有一篇几何学发展简史,现称《普罗克洛斯概要》(Proclus's summary),列出了大量参考文献,现多数已失传,是后世研究希腊数学史的原始材料之一.普罗克洛斯注释书颇多,有柏拉图(Plato)的《巴门尼德》、《蒂迈欧》、《阿基比阿德》、《共和国》;托勒密(Ptolemy)的天文学;亚里士多德(Aristotle)的物理学等.在天文学方面,他写过《天文学家的假设》,详释托勒密的体系.此外还有《球面学》及占星术,在中世纪,他的哲学思想比学术思想影响更大.

大马士革乌斯(Damascius of Damacus,公元458—?) 希腊数学家.生于458年,大约在510年至529年间为柏拉图学园的主持人.于529年离开希腊.533年在波斯避难.著有对希波克拉底(Hippocrates,(C))格言的评论;还可能是欧几里得(Euclid)的《几何原本》第15卷的作者.

阿耶波多第一(Āryabhata Ⅰ,公元476—约550) 印度天文学家、数学家.生于恒河南岸的拘苏摩补罗(Kusumapura)附近.他是印度有史料可查的最早的天文学家和数学家.

阿耶波多第一的工作在三角学史上有重要意义.他取半径等于3438,用同一单位度量半径和圆周,孕育了最早的弧度制思想.他以半弦代替希腊人的全弦,接近现代的正弦的概念,他还掌握计算平方根和求算术级数和的法则,给出了二次方程和一次不定方程的解法,并用连分数方法求一次不定方程的通解,他还计算出圆周率的值为

$$\frac{62832}{20000}=3.1416.$$

主要著作有《阿耶波多历算书》.印度第一颗人造卫星名为"阿耶波多号",就是纪念他的.另一位活跃于11世纪前后的天文学家阿耶波多第二(Aryabhata Ⅱ),其名字中的"第二"是为了和这一位相区别的,一般如不注明,常指"第一"而言.

博伊西斯(Boethius,Anicius Manlius Severinus,约公元480—约524) 罗马数学家、神学家、哲学家.生于罗马,卒于帕维亚附近.他是中世纪著名的学者和翻译家,曾翻译过亚里士多德(Aristotle)的著作.他把自然科学分为算术、几何、音乐和天文四部分,称为"四艺"(Quadrivium).根据希腊材料选编了这方面的初等读物.由于希腊数学传到中世纪的寥寥无几,所以他的著作在西欧被普遍采用.他的《几何学》以欧几里得(Euclid)的《几何原本》的前三卷为主要内容,而《算术原理》大体上是尼科马霍斯(Nicomachus,(G))所著《算术入门》的译本,这些都成了几个世纪的权威著作.

博伊西斯是中世纪经院哲学的奠基者之一.他的名著《哲学的慰藉》长期用作僧侣学校的读本.此外,他在逻辑学、神学和音乐理论方面也有许多著述.

瓦拉哈米希拉(Varāhamihira,Mihira,约公元505—587) 印度数学家、天文学家.生于乌贾因(Ujjain).他把古代印度学者的著作汇编并注释成书,名为《五大历算全书汇编》.该书得到了妥善保存,其中最重要的是《太阳的知识》,书中的数学内容,除了简单的三角关系外,还包括半角的正弦公式.从这一文献看出,"零"的概念早在公元5世纪就已经出现并使用了.书的主要内容是占星术和天文学,包括为确定星位所必要的计算.同时,他还指出"地球是一球状物体".这部著作达到了当时数学和天文学的最高水平.他很欣赏希腊人的成就,鼓励印度人要学习希腊著作.

婆罗摩笈多(Brahmagupta,约公元598—660) 印度数学家、天文学家.生平不详.他是印度中部印多尔(Indore)之北乌贾因(Ujjain)地方的人.乌贾因是当时的天文学中心,观象台的所在地.

婆罗摩笈多对代数学有很大推进,在几何学及三角法方面,研究颇深.他在30岁(628年)的时候,

就写成《婆罗摩修正体系》，包括《算术讲义》和《不定方程讲义》等专章，其中有两篇流传至今. 该书论及整数、分数、数列、比例、平面及立体的质量、影子计算（三角学的雏形，由日晷的应用而引起）等方面的知识. 婆罗摩笈多大量地将代数用于天文学.《婆罗摩修正体系》所载问题亦偏重于天文方面. 他还给出了负数的运算法则及其表示（用小点或小圈记在数字上以表负数），并得到二次方程 $x^2+px-q=0$ 的一个根的公式

$$x=\frac{\sqrt{p^2+4q}-p}{2}.$$

而初等几何学上"圆之内接四边形的两对角线，若互为垂线，则其对角线之交点，向一边作垂线，其反向延长线必平分其对边"的定理，亦为婆氏所发现. 他还求出了线性不定方程 $ax+by=c$（a、b、c 为整数）的整数解.

辛普利休斯（Simplicios，公元 6 世纪） 希腊自然哲学家、数学家. 早年在亚历山大和雅典的柏拉图学园学习，是新柏拉图学派的成员，曾注释过亚里士多德（Aristotle）的《论天空》、《物理》等书. 对欧几里得（Euclid）的《几何原本》第一卷也作过注释. 他还抄录并论述了欧德莫斯（Eudemus，(R)）后来失传的《几何学史》中的一些材料，也包括安蒂丰（Anriphon）试图解决化圆为方问题的长篇论述和希波克拉底（Hippocrates，(C)）对月牙形的求积工作及阿尔希塔斯（Archytas，(T)）关于倍立方体问题的片断文字，他的这些工作保存了古代数学的宝贵资料. 他尽力将柏拉图学派、斯多葛学派（The stoic）及亚里士多德学派融为一体，解释了由于各个天体之间的相互吸引，才保证了它们各自相对稳定的状态.

比　德（Beda，Venerabilis，约公元 672—735） 英国学者. 生于英格兰韦蒙斯（Wearmouth），卒于贾罗（Jarrow）. 曾任诺森伯兰郡（Northumberland）的教士. 他的一生主要在韦蒙斯及贾罗的修道院度过，在那里讲授数学、文法、修辞、音乐、天文、古典语言等. 在欧洲文艺复兴初期，他被尊为"英国文化之父". 他把一切可资利用的古代学术资料尽可能地搜集起来，为古代学术流传到中世纪做出了贡献. 他完整地叙述了手指计数方法及其在各种计算中的应用. 例如，他准确地确定了复活节的时间，这一问题曾引起教会的激烈争论. 著作有《论指示语》，这是人们研究古代手指计算法或符号法的源泉. 此外，还著有《盎格鲁民族基督教会的历史》等.

阿纳尼亚（Анания，ширакаци，公元 7 世纪中叶） 亚美尼亚（Армения）哲学家、数学家、天文学家和地理学家. 生平不详. 他曾到各国旅游、学习，返回祖国后献身于科学和教育事业. 他撰写了许多算术著作和习题课本. 书中包含以表格形式显式的计算技巧，运用了算术和几何级数，出现了直到 9×10^{10} 这样大的数字的计算. 习题课本收集了大量引人入胜的习题，除了纯粹的算术题以外，还牵涉到地球的形状、月蚀和日蚀、运用零的问题、多边形数、日历的计算等. 阿纳尼亚及其学生的工作对亚美尼亚等地的学术界有相当大的影响. 现今俄国的埃里温（Еревен）还保存着阿纳尼亚的部分著作.

阿尔昆（Alcuin or Albinus，约公元 736—804） 英国学者. 生于约克（York）郡，是一位僧侣. 他曾被法兰克王国的查理大帝（Charlemagme）请到宫廷中，委以帝国的教育改组事宜. 他劝导查理大帝在宫廷中设置学校，可以认为这就是巴黎大学的前身. 他亲自编写数学课本，在学校里授课. 他写的许多初等数学教科书在中世纪广泛流传.

阿尔昆对科学的贡献还在于，他坚决反对当时占优势的认为"世俗学术与教会的学说不相调和"的观点. 在他的思想影响下，当时法国和德国创办了一系列初等学校，为在中世纪普及数学教育做出了重要贡献.

花拉子米（al - Khowārizmī，Mohammed ibn Mūsā，约公元 783—850） 阿拉伯数学家、天文学家. 生于花拉子模（Khowârizm），卒于巴格达. 拜火教徒的后裔，早年在家乡接受初等教育后到中亚细亚古城默夫（Merv）继续深造，不久成为远近闻名的科学家. 813 年，受聘到巴格达的《智慧馆》工作，直至去世. 在巴格达工作期间，花拉子米创作了许多重要的、举世闻名的科学著作，包括数学、天文学、地理、历史等许多领域.

在数学方面，花拉子米编写了两部传世之作. 一部是写于 820 年的《代数学》，它的阿拉伯文书名直译应为《还原与对消的科学》. 一般认为现在西文中"代数学"一词"algebra"是由"还原"（al - jabr）演变而来.《代数学》用十分简单的例题系统地讲述了解一次、二次方程的一般原理. 花拉子米把解方程求未知数称为求根，一直流传至今. 他用文字叙述的解法相当于给出一元二次方程的求根公式，并采用类似于现在解方程的移项与合并同类项两种变形，指出现在称之为根的判别式的几何证明.《代数学》在 12 世纪被译为拉丁文传到欧洲，它对欧洲数学的发展产生了巨大影响，它作为标准的数学课本使用了几个世纪，花拉子米也被冠以"代数学之父"的称号. 花拉子米的另一部数学著作是《印度的计算术》，这部著作的真本没有流传下来，数学史家根据几份不完整的拉丁文手稿复原了它的内容. 这本书是第一部用阿拉伯语言在伊斯兰国家介绍印度数码和记数法的著作. 它首先讲述如何用 9 个数码和零号记数，即十进位制记数法，然后介绍如何用印度数码进行各种算术运算. 每种运算的法则都用例子解释得清清

楚楚，并给出验算的法则.《印度的计算术》问世后，印度数码和十进位值制记数法开始在阿拉伯国家普及.这部著作传到欧洲后，对欧洲数学产生了显著的影响，印度-阿拉伯数码也由此而传入欧洲.在欧洲中世纪，花拉子米的名字已成为新算术的代名词.

花拉子米在天文学方面也做出了重要贡献.他在实测的基础上，编写了一部《天文表》，阐明了印度人的方法，对托勒密(Ptolemy)的理论做了补充，还编造了一个正弦表.他的著作还有《地球景象书》、《历史书》等.

利　奥(Leo the Mathematician，约公元790—869年前后)　东罗马数学家、天文学家.生于君士坦丁堡，卒于君士坦丁堡.利奥自修了几何、天文学和神学.约在830年到教堂授课，840年任塞萨洛尼基(Thessaloniki)大主教，855年主管哲学学校.他的主要贡献在于科学文献的整理、翻译和编纂，出版了许多希腊数学著作，为拜占庭文化的复兴做出了较大贡献.

塔比伊本库拉(Thābit ibn Qurra，约公元826(或836)—901)　阿拉伯数学家、天文学家、物理学家、医学家、哲学家.生于美索不达米亚的哈兰(Harrān，现属土耳其)，卒于巴格达，是萨比(Sabian)教派的成员，后来成为伊拉克萨比教派的领袖.青年时在巴格达从事科学研究，在数学、天文学方面很有成就，晚年曾任哈利发(哈利发是伊斯兰教主首领的统称，并非特指那个人)的近臣.

塔比伊本库拉的数学著作为积分学、球面三角学、解析几何、非欧几何等学科的发展产生过影响.他用代数方法解三次方程，又作出了相应的几何解释；他发现了一种求亲和数(若甲数为乙数除它本身外所有因子的和，乙数亦为甲数除它本身外所有因子的和，则甲、乙两整数称为亲和数)的法则.他还研究了正弦和正弦定理，考虑了幻方，为中国以外最早讨论幻方的人.塔比伊本库拉精通希腊语和阿拉伯语，翻译了不少古希腊数学家的著作，特别是阿基米德(Archimedes)的著作；撰写过一些关于欧几里得(Euclid)的《几何原本》和托勒密(Ptolemy)《天文集》的评注.在他的天文学著作中，试图改造托勒密天文学理论，论述了日晷、太阳的不规则视运动、月球的视运动以及新月的可见性，解释了岁差等天文现象.他还是中世纪东方著名的内科医生，撰写了关于盖仑(Galen)(古希腊名医)的著作和大量医药论文，讨论了血液循环、胚胎学，以及各种疾病的治疗及药物等.

艾布卡米勒(Abū Kāmil，约公元850—约930)　阿拉伯数学家.生平不详.他是伊斯兰文化全盛时期著名的学者，在算术、代数和实用几何方面都有很大贡献.他有多种著作保存下来，最重要的几种是《计算技术珍本》、《五边形和十边形》和《代数书》等.《计算技术珍本》中论述了某些不定方程的解法，还出现了与中国古算书中"百鸡问题"相似的题目.《五边形和十边形》中包含代数和几何两个方面的内容，讨论了4次方程和具有无理系数的混合型二次方程.《代数书》是艾布卡米勒最著名的一部著作，其中系统地讨论了二次方程的解法，并以几何方式加以证明；建立了一批代数运算法则.这部著作在理论和应用上都比花拉子米(al-Khowārizmī)的《代数学》有明显进步.艾布卡米勒的工作对传播花拉子米的代数学有积极作用，并对后世的凯拉吉(Al-Karaji)、斐波那契(Fibonacci，L.)产生过重大影响.

巴塔尼(al-Battāni，约公元858—929)　阿拉伯数学家、天文学家.生于土耳其的巴塔(Batan)城(位于美索不达米亚平原)，并由此得名.一生大部分时间是在幼发拉底河左岸的拉卡城度过的，卒于基斯堡(Qasr al-Jiss，今巴勒斯坦境内).巴塔尼从事天文观测达40年之久(878—918年).他测得地球远日点的运动，改进了回归年的长度值，还测定了较精密的黄赤交角值.后来，大科学家哥白尼(Kopernik，M.)在《天体运行论》中还多次引用他的实验数据.巴塔尼所著的《星的科学》一书，以及他所编制的日、月运行表和星表，在东方和欧洲都很有名.现在常用的"正弦"(sine)一词，亦来源于《星的科学》的拉丁文译本.

巴塔尼对数学的主要贡献在三角学方面.他研究了太阳照射在竖直和水平标杆上所形成的"直阳影"和"反阴影"，产生了正切与余切的原始概念，并且编制出0°到90°的间隔为1°的余切表.他对球面三角法亦有研究，并发现了重要的球面三角余弦定律

$$\cos A = \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos A.$$

巴塔尼深知托勒密(Ptolemy)的天文学，曾注释过托勒密的巨著《天文学大成》.他采用半弦代替托勒密的全弦，使得三角学方法前进了一大步.这种作法显然是受印度人的影响.他还常用代数方法代替希腊人的几何方法来解决各种问题.

法拉比(al-Fârâbi，Abū Nasr Muhammad，公元870—950)　中世纪数学家、哲学家.国籍不详.生于突厥斯坦的法腊勃(Fârâb in Turkestan)，卒于大马士革(Damascus).活跃于巴格达、大马士革和其他文化中心城市.法拉比是百科全书式的学者，他对三角学和几何学的贡献在数学史上具有重要意义.其著作十分注意论证方法和对数学基本概念的正确叙述.此外，他还为欧几里得(Euclid)的著作写过评注书.

施里德哈勒(Śrīdhara，约公元9世纪)　印度

数学家. 生平不详. 他以撰写两本算术论著和一本失传的代数论著而出名:《计算概要》由 300 余行长诗组成,包括命数法、测量术、计算法则等问题;《度量及计算》给出了度量定义、四则运算、平方与平方根、立方与三次方根、分数、比例的运算及许多问题的解法. 书中有关"零"的叙述是印度数学文献中最清楚和最确切的记载. 此外,在书中使用了$\sqrt{10}$代替圆周率 π 进行运算.

班努·穆萨(Banū Mūsā,约公元 9 世纪) 阿拉伯数学家、天文学家. 班努·穆萨是三兄弟的总名,原意是"穆萨的儿子",指的是穆罕默德(Muhammad)、艾哈迈德(Ahmad ibn Yūsuf)和哈桑(al - Hasan)三兄弟. 他们先后生于伊拉克的巴格达,并相继卒于巴格达. 其父穆萨(Mūsā)年轻时曾为盗贼,后改邪归正,钻研学问,成为著名的几何学家. 在他的指导下,三兄弟从小就掌握了较多的数理天文知识,并选入当时的最高学府——智慧宫中攻读.

三兄弟对阿拉伯科学的发展有很重要的贡献. 除了指导巴格达天文台的工作外,还组织人力大量收集、翻译和研究希腊人的手稿,并著有《关于平面和球面图形的度量书》. 书中以论证希腊人求面积和体积的法则为目的,给出这些法则的应用,并用新的方法解决了一些希腊数学的经典问题.

马哈维拉(Mahāvira,约公元 9 世纪) 印度数学家. 生平不详. 其名"Mahāvira"的梵文原意为"伟大的英雄",故旧译名为"大雄",活跃于南印度的迈索尔. 马哈维拉著有《计算精华》,其内容十分丰富,包括算术、代数,以及面积和体积的计算、级数求和等内容. 他曾给出零和负数的运算性质,用单设法解决了大量的代数和几何问题,建立了以算术级数各项平方、立方,以及以算术级数前 n 项和为通项的级数求和公式. 他还以 $\sqrt{10}$代替 π 进行计算. 他的著作反映了当时印度数学的水平.

乌格利迪西(al - Vqlidisi,活跃于公元 952—953 年前后) 阿拉伯数学家. 生平不详. 他曾在大马士革工作. 952—953 年,他发表了一部重要的阿拉伯算术著作. 除介绍了印度数码、位值制原理和各种计算方法外,还探讨了十进小数,给出了相应的符号. 这部著作代表了阿拉伯算术的最先进的水平. 还指出印度算术依赖于沙土算盘,比较了印度算术和通行的手指算术的优劣,对数学史研究有较大价值.

阿布·瓦法(Abul - Wefa,公元 940—998) 阿拉伯数学家、天文学家. 生于霍腊桑,卒于巴格达. 他对三角函数颇有研究,曾编制了每隔 10′的正弦表,并精确到了小数点后 9 位. 后又编制了正切和余切表. 他研究了日晷的阴影三角形,首次引入正割和余割的概念. 还证明了斜三角形的正弦定理,运用了正切定理解球面三角形. 编撰有三角学、算术、几何学和实用天文学各方面的著作,如《几何作图》、《算术应用》书等.

热尔贝(Gerbert,Pope Sylvester Ⅱ,公元 945—1003) 法国数学家. 生于阿基坦(Aquitaine),卒于意大利罗马. 在西班牙上过学,970 年到罗马,教了 10 多年数学,写过一些有关初等算术和几何学等方面的著作. 999 年当选为罗马教皇,改称西尔维斯特二世(Pope Sylvester Ⅱ),从此大力提倡学习数学,使算术、几何和占星术等学科受到普遍重视,对罗马及整个欧洲的学术发展起了重要的推动作用. 他本人的突出成就有:较早地在欧洲引入印度-阿拉伯数码(只是不使用零号);制造出一种教学用的算盘;扩建了教会和寺院学校,将"四艺"(包括几何与算术)正式列入课程等.

伊本尤努斯(Ibn Yūnus,公元 950—1009) 阿拉伯天文学家、数学家. 生于埃及,是阿布·瓦法(Abul - Wefa)的学生. 中世纪伊斯兰最杰出的天文学家之一. 主要数学贡献在三角函数的计算方面,他改进了托勒密(Ptolemy)计算 1°正弦值的方法,制作了每隔 1′的正弦表和正切表. 编撰了有关平面三角学和球面三角学的著作,解决了球面三角学中的若干难题,并首先提出引进辅助角的方法解三角形. 他的一些计算结果在开罗一直使用到 19 世纪. 他还是占星学家和诗人,其部分诗稿广为流传.

伊本·海塞姆(Ibn al - Haytham,公元 965—1040?) 阿拉伯物理学家、天文学家、数学家. 生于现伊拉克的巴士拉(Basra),卒于开罗. 经历不详. 据传他曾对哈利发夸口说能制造控制尼罗河水泛滥的机械,后发现脱离实际,为逃避惩罚他装疯卖傻直至哈利发去世. 他撰写有 100 多种关于天文学、数学、光学、哲学和医学方面的著作,以《光学》一书最为杰出. 书中提出了与光反射相关的所谓"海塞姆问题",在数学上导致去解一个四次方程,他利用一双曲线和一圆相交的方法求出其解. 还利用古希腊的穷竭法计算出有限抛物线绕其极轴旋转所得立体之体积,并给出有关体积问题的某些命题.

凯拉吉(Al - Karaji,约公元 970—1029) 阿拉伯数学家. 生于卡拉吉(Karaji),并以卡尔希(al - Karkhi)之名著称. 经历不详. 他是 11 世纪活跃于巴格达的著名学者,以两部数学著作闻名于世. 一部是写于 1010 年内容极其丰富的代数著作《发赫里》,这本书的书名是为了纪念他的恩主发赫里(Fakhr al - Mulk)——一位有远见的执政者而命名的. 在这部著作中,大量引用了丢番图(Diophantus)的《算术》的内容. 除了系统的二次方程理论,还研究了形如 $ax^{2n}+bx^n+c=0$ 的高次方程,并给出开任意次方根的方法. 在代数运算方面也有许多新内容,如给出了

关系式：

$$\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{16},\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{128};$$

还证明了下列求和公式：

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2};$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2.$$

凯拉吉的另一部著作是《算术全书》，这是一部很有实用价值的算术著作.

古　希(al-Qūhī，约公元 970—1000 年前后) 阿拉伯数学家、天文学家. 生于北伊朗的古希(Kuhi)，公元 970—1000 年在巴格达天文台工作. 古希的主要贡献在几何学方面，他曾深入研究了古希腊的数学遗产，为欧几里得(Euclid)的《几何原本》和阿基米德(Archimedes)的《球和圆柱体》等经典著作做过注释；证明了阿基米德建立的极值定理，提出并解决了一些立体的作图问题，为此给出了某些三次方程的作图法，即用圆锥曲线相交的方法求解；他计算抛物弓形旋转体的方法实质上相当于无穷小方法. 此外，还提出"二次曲线规"这种作图工具，介绍了如何用来作直线、圆和二次曲线.

吉　里(Алъ-Джили，Кушияр ибн-Лабан，约公元 971—1029) 阿拉伯数学家. 生于伊朗北部城市吉梁(Гилян). 经历不详. 他的主要著作有《印度计算法则》. 书中阐述了十进位值制记数法、整数和分数的算术(偶尔也论及小数). 介绍了 9 个印度数码和零号，以及运用它们进行加、减、乘、除和开方等运算的法则，包括进行验算用的弃九法. 他提出的开平方法和近代的方法是相同的. 事实上，这种方法在中国很早就出现了.

比鲁尼(al-Bīrūnī 或 Bērūnī，Abū Rayhān，公元 973—约 1050) 阿拉伯数学家、天文学家. 生于花拉子模城郊比伦(Birūn)，卒于甘孜那(Ghazna，今属阿富汗境内). 他是伊斯兰最富创造性的学者之一，对哲学、历史和自然科学的许多方面都有贡献，以数学和天文学的成就最大. 曾在哈利发马蒙二世(al-Ma'mūm，Ⅱ)所建立的科学院工作，后来长期旅居印度. 精通梵文，研究了印度数学和天文学，为沟通印度和阿拉伯国家之间的文化起过重要作用. 主要著作有《古代诸国年表》、《马苏蒂天文典》和《占星学基础》等，其中《马苏蒂天文典》是一部天文学百科全书，内容包括三角学、天文学、计时学和数理地理学. 它由 11 卷组成，第 3 卷讲述三角学，比较系统地论述了平面三角学和球面三角学. 他还研究了三等分角的问题，利用内嵌法和类似的技巧给出了三等分角的 12 种方法.

阿维森纳(Avicenna，公元 980—1037) 亦称伊本·西纳(Ibn Sinā). 阿拉伯哲学家、自然科学家、医生. 生于布哈拉(Bukhara)附近的阿福沙纳(Afshana)，卒于哈马丹(Hamadan)，在花拉子模和伊朗工作. 他的著作达 200 多种，最著名的有《哲学、科学大全》，在当时是高水平的百科全书；另一部巨著是《医典》，直到 17 世纪西方国家还视为医学经典，至今仍有参考价值. 在他的著作中，包含大量的几何、天文、算术和音乐理论方面的内容. 有关几何学的章节讨论了平面几何和立体几何的基础，可以认为是对欧几里得(Euclid)的《几何原本》的评注. 在对定义、公设、公理、定理的次序安排和对定理及问题的证明方法方面，都具有独创性，他还曾试图证明第五公设.

赫尔曼(Hermann the Lame，1013—1054) 德国天文学家、数学家. 生于阿尔茨豪森(Altshausen)，卒于阿尔茨豪森，早年在修道院学校学习，1043 年成为赖谢瑙的修道士. 由于他幼时患病，脚部留有残疾，因此又称为跛脚的赫尔曼. 他通晓阿拉伯天文学，是在大翻译运动以前向西方各国引进阿拉伯天文技术的重要人物. 他著有关于星盘的书. 在数学方面，曾研究如何使用当时的算盘进行四则运算. 他还提出过一种复杂的数学游戏，其原理基于初等数论，涉及算术比及三种级数的知识.

奥马·海亚姆(al-Khayyami (Omar Khayyami)，1048？—1131？) 阿拉伯哲学家、数学家、天文学家、诗人. 生于霍拉桑(Khurasan)的尼沙普尔(Nishāpūr)，卒于尼沙普尔. 早年在家乡曾接受广泛的科学和哲学的教育，之后去撒马尔罕，在那里完成了他的重要数学论著. 后来塞尔柱王朝的苏丹请他去做为修改历法所需的天文观测. 他们共同创立了哲拉里历，这种历法 5000 年才有一天误差，比格里历还要精确. 奥马·海亚姆精通哲学、数学、天文学、法学、历史学和药学，并且还是一位伟大的诗人，他的《四行诗集》在 19 世纪后被译成多种文字，流传甚广.

在数学方面，奥马·海亚姆对算术、代数和几何等学科都有重要贡献. 他评注了欧几里得(Euclid)的著作，所著的《对欧几里得几何原本中困难公设的注释》流传至今，一直影响到以后的东方数学. 他最著名的数学著作是《代数问题的证明》，在这部著作中，他明确地把代数学定义为解方程的科学，这个定义一直保持到 19 世纪末. 这部著作系统地论述了代数方程理论，给出一种解三次方程的几何方法，即用两种圆锥曲线求解，这种方法可以认为是笛卡儿解析几何学的先驱工作. 此外，他的著作还有《算术问题》、《智慧的天平》等.

婆什迦罗(Bhāskara，1114—1185？) 印度数学家、天文学家. 生于印度南部的比杜尔(Biddur)，长

期工作在乌贾因．曾任过印度莫吉安州天文学院的院长，恒河小王国的第六任继承者．著有天文、算术、代数、度量等方面的书籍，其中以《丽罗娃提》（Lilāvati，原意是"美丽"，据传是他女儿的名字．）最为著名．该书中采用缩写文字和一些记号来表示未知数和运算符号，许多代数问题常用歌谣给出，例如：

素馨花开香扑鼻，
诱得蜜蜂来采蜜．
熙熙攘攘不知数，
一群飞入花丛中．
试问此群数有几？
全体之半平方根，
另有两只在一起．
总数的九分之八，
徘徊在外做游戏．

这是一个无理方程

$$\sqrt{\frac{x}{2}}+2=\frac{x}{9},$$

它的答案是 $x=72$．他的另一名著是《根的计算》．这是一本代数书，书中全面地讨论了负数，把负数称为"负债"或"损失"，并在数码上加一小点来表示，如 $\dot{3}$ 表示 -3．他还正确地叙述了负数的运算法则："正数、负数的平方，常为正数；正数的平方根有两个，一正一负；负数无平方根，因为它不是一个平方数．"该书对一元二次方程的讨论比较详尽，大大超过了希腊的丢番图（Diophantus）．他承认一元二次方程有两个根，但将负根舍了．例如，指出 $x=50$，-5 都是 $x^2-45x=250$ 的根，但他却说："本例的第二个值不适宜，故弃去．因为人们不赞成负根"．婆什迦罗的主要著作分别于 1816 年、1817 年在孟买、伦敦等地译成英文本．婆什迦罗和其他印度数学家广泛地使用了无理数，在运算中与有理数做了相同处理，打破了无理数与有理数之间的界限．这是印度数学家的一大贡献．此外，他还给出了公式

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2$$

的证明．

杰拉德（Gerard of Cremona，约 1114—1187）　意大利学者、翻译家．生于克雷莫那，卒于西班牙托莱多（Toledo），长期在西班牙编译局工作，是 12 世纪著名的翻译家．他把大量数学、天文学、炼金术和医学等方面的阿拉伯文手稿译为拉丁文．他主要的数学译作有奥马·海亚姆（Omar Khayyami）的代数著作、托勒密（Ptolemy）的《天文集》、阿波罗尼奥斯（Apollonius，(P)）的《圆锥曲线论》、欧几里得（Euclid）的《几何原本》、《三兄弟的几何书》，以及门纳劳斯（Menelaus，(A)）等人的著作．

阿德拉德（巴思的）（Adelard of Bath，约 1116—1142 年前后）　英国数学家、天文学家．生于巴思（Bath），早年学于托莱多（Toledo）、图尔（Tours）等地，后成为修道士．他游历很广，曾到过西西里和巴勒斯坦等地．他很早就接触到阿拉伯文化，并对此极感兴趣．为能自由活动于阿拉伯人控制的地区，他乔装成伊斯兰教信徒，以便获取图书资料．

阿德拉德是最早把阿拉伯文献译成拉丁文的著名翻译家之一．他翻译了阿拉伯文的《几何原本》，质量较高，在西欧颇为流行．还翻译过花拉子米（al-Khowārizmī）、塔比伊本库拉（Thābit ibn Qurra）等人的著作，为希腊和阿拉伯数学在欧洲传播做出了贡献．阿德拉德本人还撰写有数学和哲学著作，书中讨论了算术、几何、音乐和天文等，并对印度-阿拉伯数码作了介绍．

内莫拉里乌斯（Nemorarius，Jordanus Saxo，？—1236）　德国数学家、力学家．生平不详．曾任巴黎大学教授．1222—1237 年任多明我会会长．

内莫拉里乌斯编写过代数书、几何书各一本和一系列的算术书，其中《算法证明》和《算术证明》（10 卷）两部书效仿了博伊西斯（Boethius，A. M. S.）和尼科马霍斯（Nicomachus，(G)）的写法．在《算术》中，他使用字母代替了数字，并力求用演绎方法来处理问题．他区别了具有各种性质的数（素数、完全数、多角数等），并证明了 $n(n+1)$ 既非平方数也非立方数．书中还叙述了有关比例、乘幂和级数等问题．他的代数书《论已知数》提出了许多代数规则，还收集了大量的一次方程和二次方程的应用题．在《论三角形》中，他给出了几个有关相似三角形性质的命题和求圆面积的方法．此外，他还写过一本论及球的各种性质的著作，第一次给出了球极投影的一般证明．他的主要贡献在于更广泛、更系统地使用字母来表示未知数和已知数，从而向代数符号系统的现代化迈出了重要的一步．但是他并未引进一般算术运算符号，仅只是对加法提出了简单表示法．

斐波那契（Fibonacci，Leonardo，约 1170—1250）　意大利数学家．生于比萨（Pisa）的一个商人家庭，早年曾随父在北非的部计（今阿尔及尔东部的小港贝贾亚）受过教育．由于商业事务，多次游历过埃及、叙利亚、希腊、西西里和布罗温斯等地．他四处拜师，获得了丰富的数学知识．曾被神圣的罗马帝国国王腓德烈第二（Frederick，Ⅱ）召进宫中，和宫廷学者——巴勒摩（西西里岛北岸）的约翰（John of P.）进行比赛，约翰出的几个难题均被斐波那契解出了．于是，他很快成为了欧洲数学界的中心人物．

《算法之书》是斐波那契的主要著作，共 15 章．1202 年完成，1228 年又补充修订出版．书中注意了阿拉伯数和零的运用，开始使用分数记号，对代数问

题和代数方法作了完整的介绍，还给出了求平方根和立方根的方法，求商品价格的二重法则，比例分配及确定金属样品的方法，特别是修订本中载有关于兔子繁殖的问题，导出了著名的“斐波那契数列”. 1220 年，他完成了纯几何著作《实用几何》一书，他是欧洲第一个开始应用代数解几何题目的人. 1225 年，他又写成《平方数》书. 斐波那契在《平方数》书和《开花》(Flos，意指代数学是数学中的花朵)等书中，着重讨论了方程，特别是不定方程的解法问题. 例如，他给出了三次方程 $x^3+2x^2+10x=20$ 的一个近似解法，其中，$x=1°22'7''42'''33^{\text{IV}}4^{\text{V}}40^{\text{VI}}$(60 进制)，相当于 $x=1.36880810785$(这是惟一的实根，另外两个是虚根)，准确数字达 10 位之多. 只可惜没有说明解法与步骤，但这种方程式的解法，中国的王孝通在 600 年前已经给出.

在欧洲数学史上，斐波那契第一个给出了并不是每个数都可以用希腊式的尺规作图法作出来的例子. 他利用自己的拉丁文著作，把东方各国和古希腊的数学成就介绍给了欧洲读者，促进了欧洲数学的复兴，成为中世纪欧洲最伟大的数学家.

格罗塞特斯特(Grossetest，Robert，1175—1253)　英国哲学家. 生于萨福克郡(Suffolk)斯特拉德布鲁克(Stradbroke). 早年曾到巴黎留学，回国后到牛津大学深造，并在那里任教，后来成为牛津大学校长及方济各会教区长(1224)，1235—1253 年任林肯的主教.

格罗塞特斯特是牛津大学哲学学习的主要倡导者，他提出了数学原子论的观点，认为人们应该首先从实践产生一般数学原理，然后利用数学的演绎推理来证明它，最后根据实践来检验这种推理. 他还认为，数学应该是所有自然科学的基础，是最精确、最标准的一门学科，自然界的运动总是以数学上的最佳可能的方式进行. 他的主要研究方向是数学在物理学和天文学中的应用，他的研究工作推动了光学的发展. 他根据光被透镜折射的知识，研究了透镜的组合，改进了解释彩虹的理论. 他的著作有《几何实践》和《欧几里得光学》等.

贾比·伊本·艾夫拉赫(Jābir ibn Aflah al-Ishbili，约 12 世纪前半叶)　阿拉伯天文学家、数学家. 西班牙塞维利亚(Seville)人. 生平不详. 他深入研究了托勒密(Ptolemy)的《天文集》，对托勒密的某些天文学观点进行了批判，并改进了其中的一些三角学理论，用球面三角形的正弦定理推出了球面直角三角形其他定理，还发现了球面三角形边角关系的定理，后来以他的名字命名. 他总结自己的工作，著有《天文学订正》(9 卷)，这部著作的主要价值在三角学方面，它使三角学开始脱离天文学而独立，促进了后世欧洲三角学的发展.

哈济尼(ал-Хазини Абу-л-фахт Абу ар-Рахман ал-Мансур，约 12 世纪)　阿拉伯学者. 生于墨瓦(Мерва)，经历不详. 他是奥马·海亚姆(Omar Khayyami)的学生. 以编著《智慧的力量》一书而闻名于世. 这部著作已保存下来，1941 年于海德堡印刷出版. 书中包括了当时的静力学的全部内容. 他利用数学方法解决了一系列的力学问题，特别指出了要测量从 1 到 1093 个单位砝码重的所有物体只需用重量为 1，3，9，27，81，243，729 个单位的 7 种砝码就足够了. 这个问题的特殊情形在意大利数学家斐波那契(Fibonacci，L.)的《算法之书》中也曾提出过.

罗伯特(Robert of Chester，约 12 世纪)　英国数学家、翻译家. 生平不详. 原籍切斯特(今利物浦附近). 1141—1147 年活跃于西班牙，任潘普洛纳(Pamplona)的副主教，曾到意大利和希腊等地游历. 1143 年，他第一次把《古兰经》译成拉丁文. 在数学方面，以翻译花拉子米(al-Khowārizmī)的代数著作而闻名于世. 他的工作对阿拉伯数学在欧洲的传播起了积极作用. 在他的译文中出现了术语“Sinus”(正弦)，他还制作了一些天文表.

艾伯塔斯(Albertus，Magnus Saint，约 1200—1280)　亦称 Albert the Great. 德国学者，生于巴伐利亚的劳温根(Lauingen)，卒于科隆. 早年在帕多瓦求学，后来被委任为多明我会(天主教)的神父，1260 年成为雷根斯堡的主教. 曾在博洛尼亚、斯特拉斯堡、弗赖堡、科隆、巴黎等地教书或传教.

艾伯塔斯精通数学、哲学、物理、天文，被人们称为“万能博士”. 他在解释亚里士多德(Aristotle)的学说方面卓有成绩，强调两个知识来源：基督教的信仰，柏拉图(Plato)与亚里士多德的理性真理. 他把古希腊和阿拉伯的科学引入中世纪的学校，对中世纪自然科学的发展起过一定的推动作用. 他重视数学的应用，写了许多数学及其应用的论文.

纳西尔丁(Nasir ad-Din，al-Tūsi，1201—1274)　阿拉伯天文学家、数学家. 生于波斯的图斯(Tūs)，卒于巴格达附近的卡济迈因(Kadhimain). 早年在图斯学习，后到内沙布尔深造. 蒙古人占领中亚后，他受到蒙古统治者的重用.

纳西尔丁是一位很全面的学者，在数学和天文学等方面做出了重要贡献. 1259 年，他在马腊格(Marāgha)主持建造了一座大天文台，在实测的基础上编制了《伊尔汗历》. 还著有其他一些天文学著作. 主要数学贡献在三角学方面，他著的《横截线原理》和《论四边形》最早把三角学作为独立的学科进行论述，后来把平面三角学和球面三角学加以系统化，包含了解球面三角形的 6 个基本公式，并指出怎样用现代所谓极三角形来解更一般的三角形. 他的

这两部著作对后来欧洲学者有较大影响.他还评注过许多古希腊数学家的著作,并试图证明平行公设.此外,他在伦理学、逻辑学和哲学方面也有重要著述.

培　根(Bacon,Roger,1219?—1292)　英国自然科学家、哲学家.生平不详.早年在牛津大学和巴黎大学学习.曾在巴黎文学院和牛津大学执教.长期受到教会的迫害,被投入修道院监狱达14年之久.

培根是欧洲文艺复兴初期杰出的思想家,博学多闻,深入研究了古希腊、罗马和阿拉伯的科学和哲学著作,对当时的社会现象作过深入的剖析.他猛烈抨击了长期统治欧洲学术思想的亚里士多德(Aristotle)的观点、流行的教学方式和内容;以及教会的各种丑恶行径,认为它们阻碍了真理的发现和传播.他关心和研究新的科学技术,提倡通过实验来建立科学理论,认为数学是一切自然科学的基础.他在光学、地理学、历法改革方面做了很有价值的工作.著有《大著作》、《小著作》、《哲学研究纲要》等.

彼　得(Peter,Philomena of Dacia,约1290年前后)　数学家、天文学家.国籍和生平不详.原为丹麦罗斯基勒(Roskilde)大教堂的牧师,1291—1292年任教于波伦亚大学,其后去巴黎从事著述.他的著作很多,留下来的不下200多种.在数学方面,他提供了一些算法,例如,求立方根的方法等,还编写了一些数表.他对制造天文计算仪器和编制天文用表也做出了贡献.例如,他最先发明出一种计算器,可以用来计算所有行星的黄径.

布雷德沃丁(Bradwardine,Thomas,约1290—1349)　英国自然哲学家、数学家.出生地不详,卒于兰贝斯(Lambeth).牛津大学神学教授,坎特伯雷(Cantebury)的大主教.他是欧洲最早研究三角学的一位学者.引入了"正切"(他称为"反阴影"(umbra versa))和"余切"(他称为"直阴影"(umbra resta))的概念.他还在哲学著作中讨论了有关无穷大和无穷小的问题.著有《理论几何》和《理论算术》(1495)等.他被公认为是14世纪英国最有成就的数学家.

坎帕努斯(Campanus of Novara,约13世纪初—1296)　意大利数学家、天文学家.生于诺瓦拉,卒于维特尔博(Viterbo).他较早地将欧几里得(Euclid)的《几何原本》由希腊文和阿拉伯文翻译成拉丁文,并加入了许多有见解的评注,使该书成为最早印刷出版此书的蓝本.他还研究过三等分角、黄金分割律和弦切角的性质等问题,由他撰写的算术和初等几何教科书,因取材适当和语言通俗被广泛流传,沿用了近300年.

奥雷姆(Oresme,Nicole,约1320—1382)　法国数学家.原籍为诺曼(Norman),生于卡昂(Caen),卒于利雪(Lisieux).曾在巴黎大学学习,1356年成为该大学的神学教师.1362年开始,先后担任牧师、鲁昂大教堂的教长(1364)和主教(1377).1369年,受法王查理五世(Charles,Ⅴ)之命翻译了亚里士多德(Aristotle)的著作,并作了注释.

奥雷姆在数学方面做出了重要贡献.他最早引入分数指数的概念和记法(在1360年出版的《比例算法》中),在《论质量与运动的结构》(1360)中提出过一种坐标几何,用两个坐标来确定点的位置,这是从天文、地理坐标到近代坐标几何的过渡.他还研究过无穷级数的求和问题,把一些收敛级数和发散级数区别开来,并给出级数收敛的某种判别法则.

布拉休斯(Blasius of Parma,约1345—约1416)　意大利自然哲学家.生于帕尔马(Parma),卒于帕尔马.1374年在帕维亚大学获博士学位.先后在巴黎、帕维亚、波伦亚、帕多瓦、威尼斯等地任教,讲授哲学、逻辑学和占星学.主要贡献在代数、算术和透视学等方面.此外,他还注释过亚里士多德(Aristotle)和奥雷姆(Oresme,N.)的著作.

乌鲁伯格(Ulūgh Beg,1394—1449)　乌兹别克天文学家、数学家.成吉思汗后裔帖木儿的孙子,生于苏丹尼亚(Sultāniyy).他在撒马尔罕创建了一所宗教学校和一座当时世界上最大的天文台,亲自担任着学校的教师,并组织了大批学者进行天文观测和计算.他还领导编制了《乌鲁伯格恒星表》,包括天文学原理、太阳和行星的运行表和1018个恒星的位置表,具有很高的精确度.他利用代数方法制作了很准确的三角函数表,提供了一种可使计算结果十分精确的方法.1447年继承王位,成为帖木儿帝国的苏丹,两年后被其子所弑.

阿尔贝蒂(Alberti,Leone Battista,1404—1472)　意大利数学家、物理学家、工艺学家、自然史家.生于热那亚,卒于罗马.曾在帕多瓦学习,后到波伦亚继续深造,获博士学位.1430—1432年随红衣主教游历了法国、比利时和德国,1432年定居罗马,在教皇宫廷中任职.

阿尔贝蒂是文艺复兴时期意大利著名的自然科学家.由于当时绘画艺术的发展,艺术家们注意研究如何把一个三维的物体描绘在二维的画布上.阿尔贝蒂精于绘画、雕刻,在他的主要著作《论绘画》(1435)中,引入了投影线和截景的概念,阐明了最早的数学透视法思想.他的工作后来成为射影几何发展的起点.

阿尔贝蒂还研究了普通力学、流体静力学、热学和光学等物理科学问题,并探讨过建筑物的平衡、梁的扭曲、地壳和地震、水的循环、植物的生长及衰败等问题.

盖拉萨迪(al-Qalasādī,1412—1486)　西班牙

数学家.生于巴士达(Bastā,现为巴萨),卒于突尼斯的巴杰(Beja).他是西班牙一位著名的穆斯林数学家,精通代数和算术,著述颇多.他注重使用数学符号,以某些字母代替算符或未知量,如用“*wa*”表示加号,“*illā*”表示减号,“*m*”表示 x^2 等.他还研究了近似计算问题,曾取

$$\sqrt{a^2+b} \doteq \frac{4a^3+3ab}{4a^2+b}.$$

后人研究其解法,认为包含连分数的思想.他的两部著作《算术科学启蒙》和《印度数字用法释疑》在北非被用作标准教材达几个世纪之久.

波伊巴赫(Peurbach,Georg von,1423—1461) 奥地利数学家、天文学家.生于波伊巴赫,卒于维也纳.早年从库萨的尼古拉斯(Nicholas of Cusa)主教学习,后在意大利的费拉拉、波伦亚、帕多瓦等地教书,曾任维也纳大学数学教授.

波伊巴赫的主要贡献在三角学方面.他采用印度人的正弦概念,取代了希腊人取全弦长的作法,并编制出一种正弦表.他校订了托勒密(Ptolemy)《天文集》的拉丁文译本,并指出该译本错误太多,同时着手直接由希腊原文翻译,可惜他去世过早而未能完成这项工作,他的学生雷格蒙塔努斯(Regiomontanus,J.)继承师志,完成了这项工作.除此之外,波伊巴赫还写过一本算术著作.

卡 西(al-Kāshī,Ghiyth al-Dīn Jamshīd Mas,ūd,生年不详,卒于 1429 年) 伊朗数学家、天文学家.生于卡尚(Кашан),卒于撒马尔罕(Самарканд).他是兀鲁伯格天文学派的主要成员之一,曾担任撒马尔罕天文台的领导者.他撰写了大量的数学和天文学著作,主要数学著作有《圆周论》(1426 年)和《算术的钥匙》(1427 年)等.

卡西在《算术的钥匙》里,详细地叙述了十进位制分数的理论,并指出把六十进位制分数化成十进位制分数的方法,同时用四舍五入的方法使计算简化,这是他的一大贡献.书中还有任意自然数幂的二项展开式的一般形式,即

$$(a+b)^n - a^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

并给出“帕斯卡三角形”的系数组成法则;还有近似计算任意次根的式子,如

$$\sqrt[n]{A^n+a} \approx A + \frac{a}{(A+1)^n - A^n}.$$

总之,该书给出了多种类型的有趣题目.

卡西在《圆周论》中,特别注意圆周率 π 的计算.他运用阿基米德(Archimedes)的方法,利用外切和内接正 3×2^{28} 边形的周长代替圆的周长,即正多边形的边数为 805 306 368,同时采用 60 进制和 10 进小数两种记数法来表示.突破了祖冲之保持了近千年的圆周率世界纪录.其成果是:

$2\pi = 6°16'59''28^{\mathrm{III}}1^{\mathrm{IV}}34^{\mathrm{V}}51^{\mathrm{VI}}46^{\mathrm{VII}}14^{\mathrm{VIII}}50^{\mathrm{IX}}$(60 进制);

$2\pi = 6.283\,185\,307\,179\,586\,5$(10 进制小数),

即

$$\pi = 3.141\,592\,653\,589\,793\,25.$$

有 17 位准确数字.该值一直保持到 1596 年才被柯伦(Ceulen,L. van)超过.

雷格蒙塔努斯(Regiomontanus,J.,1436—1476) 德国数学家.原名约翰·缪勒(Müller,Johannes).生于柯尼斯堡.先在莱比锡完成古典式大学教育,后来到维也纳学习天文与数学,还到过罗马学习希腊文.1471 年移居纽伦堡,1476 年逝世于罗马,年仅 40 岁.

雷格蒙塔努斯的名著《论一般三角形》约完成于 1464 年.该书包括平面三角和球面三角两部分.他是欧洲人中第一个使三角学正式脱离天文学并作为数学独立的一章加以系统地叙述.他在此书中提出了球面三角的正弦定律及余弦定律;列有三角值表,他成功地编出了每隔 1 度角的正切表和每隔 1 秒角的正弦表.书中还讨论了有趣的极大、极小问题与数论问题.

雷格蒙塔努斯还向欧洲介绍了阿基米德(Archimedes)、阿波罗尼奥斯(Apollonius,(P))、托勒密(Ptolemy)和海伦(Heron,(A.))等许多古希腊数学家,并译出了他们的作品.这是他在促进欧洲数学发展上的最大功绩.

在天文学方面,雷格蒙塔努斯曾在著名天文学家波伊巴赫(Peurbach,G. von)(1423—1461)的领导下,在维也纳大学从事天文和数学研究.1463 年,在波伊巴赫死后,雷格蒙塔努斯发表了他们共同的著作《简述托勒密巨著》(拉丁文版).1472 年,在纽伦堡进行过彗星观察(后称哈雷彗星);还修改过裘里安历.

许 凯(Chuquet,Nicolas,1445? —1500?) 法国数学家.生平不详.他仅有一本数学手稿《算术三篇》存世,1484 年完成,直到 1880—1881 年才出版.据书中自述得知,他成长于巴黎,获取过医学学位,并在里昂行过医,还教过算术.书中包括数的理论和 156 个问题,给出了序数名称,讨论了有理数、无理数及方程的理论,解释了“零”的意义和作用,创设了方根符号,并给出开平方和开立方的方法.书中还讨论了等比数列和等差数列的关系,对后来对数的发展有一定的启发作用.

帕乔利(Pacioli,Luca,约 1445—1517) 意大利数学家.生于托斯卡纳(Toscana)区的圣塞波尔克罗(Sansepolcro),卒于圣塞波尔克罗.他早年在威尼斯做一富商的家庭教师,并自学数学.1471 年移居罗马,不久便开始了旅游式的生涯,所到之处甚

多，常忙于教学和著述.在米兰曾与达·芬奇(daVinci，L.)会晤，共同讨论了数学问题.

帕乔利最重要的数学著作是《算术、几何、比与比例集成》(1494)，这是一部最早印刷的数学书，也是继斐波那契(Fibonacci，L.)的《算法之书》之后第一本内容全面的数学书，其中包含了实用算术、代数基础、意大利通用的币值表、重量表和度量表、复式簿记法以及欧几里得(Euclid)几何学的概述等.在书中使用印度-阿拉伯数码，大量采用符号.此外，他还提出了一些重大数学难题，对16世纪欧洲数学的发展有着重要影响.他的另一本重要著作是《神圣比例》(1509)，其中讨论了把已知线段分成"中末比"和正多面体的性质等问题.

达·芬奇(da Vinci，Leonardo，1452—1519) 意大利艺术家、数学家.生于芬奇(Vinci)，卒于法国.欧洲文艺复兴时期的代表人物，在绘画、雕塑、音乐、建筑等许多领域都取得了显著的成就.他在研究自然界的同时也注意研究力学和数学.他在流体动力学和光波性质的研究中取得了重要成果.此外，他对天文学亦有所研究.

达·芬奇对数学的评价很高，他认为："任何人的研究，没有经过数学的证明，就不能认为是真正的科学."由于艺术创作的需要，他深入地研究了透视理论，等积图形的作图问题，并十分注意正多边形作图的理论和等分圆周问题.他在求半圆和四面体重心时，方法独特，特别是求椭圆面积时所运用的方法.

维德曼(Widmann，Johannes，1460—约1499) 德国数学家.生于波希米亚(Bohemia)，卒于莱比锡.早年在莱比锡大学学习，后来在该校任教.主要贡献在算术和代数方面.他首次在莱比锡大学开设代数讲座.在他的著作《商业中的巧妙速算法》中，最早出现了符号"＋"和"－"，用来表示加和减.他还列出了一个乘法表，指出了用数字9和7对算术运算进行检验的方法，例举了28种不同类型的问题，并用三率法解决了这些问题.

科贝尔(Köbel，Jacob，1460？—1533) 德国数学家.生于海德堡，卒于奥彭海姆(Oppenheim).早年在海德堡大学和克拉科夫大学学习，曾与天文学家哥白尼(Kopernik，M.)同过学.他担任过测量员和酒店经理，并热心文化事业，积极从事印刷、出版、销售书刊的工作.1499—1532年之间，经他手出版了近百种书.他编著的三部算术著作在当时影响很大，书中介绍了阿拉伯数字及其运算，介绍了算盘的使用，以及一些立体体积的计算等.他的一部几何学著作中，给出了许多实用公式.此外，他还出版了第一本(1518)用阿拉伯数码记载的历书.

维尔纳(Werner，Johann，1468—1528) 德国数学家.生于纽伦堡(Nürnberg)，卒于纽伦堡.早年在因戈尔施塔特大学学习.曾任基督教的神父，1493—1497年到罗马传教.同时在某印刷厂担任科学论著原稿的复查和校对工作，因此他得以接触希腊数学家门纳劳斯(Menelaus，(A))、西奥多修斯(Theodosius，(B))以及阿拉伯数学家贾比·伊本·艾夫拉赫(Jābir ibn Aflah al-Ishbili，)等人的原著及手稿.这不仅丰富了他的数学、天文学和地理学知识，而且熟悉了希腊人、阿拉伯人和意大利人的学术成就.返回纽伦堡后，1508年开始在纽伦堡的教堂供职，直至去世.

维尔纳主要贡献在球面三角和圆锥曲线的理论方面.在三角学上，一般认为他是雷格蒙塔努斯(Regiomontanus，J.)的继承人.他在欧洲最早使用三角函数积化和差公式：

$$2\sin a\sin c=\cos(a-c)\cos(a+c).$$

他的手稿《大圆的弧所形成的三角形》对三角学的发展具有重要意义，可惜失传.在他的《论球面三角》一书中，改进了雷格蒙塔努斯的工作.在其著作《圆锥曲线的二十二个命题》(1522)中，深入地研究了曲线理论，这是16世纪在欧洲出现最早的论述圆锥曲线的著作.

迪　勒(Dürer，Albrecht，1471—1528) 德国数学家、艺术家.生于纽伦堡，卒于纽伦堡.早年从事绘画与雕刻.1494年到意大利学习，认识到艺术必须以科学为基础.遂转向学习欧几里得(Euclid)的《几何原本》和维特鲁维厄斯(Vitruvius，P.M.)的《建筑学》.1505年后第二次去意大利，拜访了帕乔利(Pacioli，L.).他是文艺复兴时期重要的数学家，著作《圆规直尺对线、面、体的测量法》，阐述了平面曲线的结构，并用画法几何思想研究了螺旋线.还研究了多边形的结构、各种柱体、锥体的轮廓正视图、日晷和其他天文仪器等.他的某些思想方法后来被蒙日(Monge，G.)发展为画法几何.

哥白尼(Kopernik，Mikolaj，1473—1543) 波兰数学家、天文学家.生于托伦(Torun).1491年进入克拉科夫大学学习，主要攻读天文学和数学.毕业后到意大利留学，先后进入波伦亚大学、帕多瓦大学和费拉拉大学学习.在意大利的10年中，受了法学、神学和哲学的教育，掌握了拉丁文、希腊文等多种语言，阅读了大量古希腊和罗马的经典著作，特别是数学、天文学和文艺作品.1506年，哥白尼回国.1512年开始任弗龙堡教堂的神甫，但主要精力是进行天文研究.这以后的30年，他一直住在该教堂高高围墙内的一个箭楼上，把这座小楼作为天文观测台，自制各种天文仪器进行长期反复的观测和计算，为他的日心说理论提供了主要依据.

哥白尼对人类科学的最大贡献是打破了传统的

地心说，提出新的宇宙观——日心说，向千百年来被神学家歪曲了的宇宙观念提出挑战，使整个自然科学从神学中解放了出来，引起整个自然科学的革命．他的著作《天体运行论》(1543)在近代科学发展史上具有划时代的意义．哥白尼的天文研究对数学的发展产生了很大的影响，特别是促进了三角学的发展，进而推动了其他数学领域和计算技术的进步．哥白尼还编制出一些三角函数表，他的这些工作对平面三角和球面三角的发展都具有重要的意义．

汤斯托尔(Tonstall，Cuthbert，1474—1559) 英国数学家．生于约克郡(Yorkshire)，早年在牛津、剑桥和意大利的帕多瓦学习，在帕多瓦获法学博士．1511 年，他被任命为坎特伯雷大主教的副监督，后来又委以教会的职务和外交官，1522 年成为伦敦的主教．主要贡献是在 1522 年在伦敦出版了一本名为《汤斯托尔计算技术》(4 卷)的算术书．这是英格兰作者用拉丁文撰写的第一部算术著作，其中引用了帕乔利(Pacioli，L．)和雷格蒙塔努斯(Regiomontanus，J．)数学著作中的内容和符号，所使用的阿拉伯数码和现在的写法基本一致．这部著作在英国和法国曾流行一时．

奥尔特加(Ortega，Juan de，约 1480—约 1568) 西班牙数学家．生于帕伦西亚(Palencia)，曾在阿拉贡省做传教士，后又在西班牙和意大利等地任数学教师，讲授算术与几何．他研究了平方根的求法，利用满足佩尔方程($x^2-Ay^2=1$)的值去进行代换，得到了极精确的近似值．他关于平方根的求法曾引起历代许多数学家的兴趣．关于佩尔方程的一般解法在当时还是一个很困难的问题，他是怎样求出满足该方程的值的，至今仍是一个谜．

奥尔特加还写了几本数学著作，其中以《算术》流传最广，该书 1515 年初版，后来在欧洲各地再版多次，被公认为是法国出版的第一本商业算术书．

施蒂费尔(Stifel，Michael，约 1487—1567) 德国数学家、神学家．生于德国埃斯林根(Esslingen)，卒于耶拿(Jena)．早年为神职人员，因对《圣经·新约》之《启示录》中的神秘数字产生兴趣，于是开始研究数学．

施蒂费尔的数学著作主要涉及算术、代数，其中有《整数算术》，书中论述了有理数、无理数和代数问题．他研究了二项式系数、多项式除法以及无理数的计算．指出几何级数 $1,r,r^2,r^3,\cdots$ 的各项与其指数所形成的算术数列 $0,1,2,3,\cdots$ 的各项互相对应，几何数列中两项相乘(或除)得出的项，其指数等于算术数列中两项之和(或差)．他还把两个数列间的这种联系推广到负指数和分数指数的情形．施蒂费尔第一次提出了解方程的一般方法．他的研究工作对代数符号体系的发展很有影响．有些数学史家认为他是 16 世纪德国最重要的代数学家．

格拉马托伊斯(Grammateus，Heinrich，Schreybeĭ 1490？—1525) 德国数学家、数学教育家．生于埃尔富特(Erfurt)，早年在克拉科夫学习，1507 年进入维也纳大学，1518 年获硕士学位．曾在维也纳任家庭教师，鲁多尔夫(Rudolff，C．)是他的学生，后由于瘟疫流行而离开维也纳到纽伦堡和埃尔富特．不久又返回维也纳继续钻研数学．

格拉马托伊斯撰写了关于代数、算术、比例论和求积法等方面的书，其中最有名的是用德文写的算术书．在书中记载了如何用式子和数字进行计算，以及数论方面的知识、簿记，还有一些最简单的代数法则和各种木桶的测量等．在书中使用了加法和减法符号．在他的《比例算法》(克拉科夫，1514)中指出了加法和乘法、减法和除法的关系，并强调了进行数字计算采用一定格式的必要性．例如，他指出，两个数进行运算，把一个数写在另一个数的下面，在两个数下面划一横线，然后把计算结果写在这条线的下面，他的这种方法直到 18 世纪才得到普及．

里　斯(Ries，Adam，1492—1559) 德国数学家．生于斯塔弗尔施泰因(Staffelstein)，卒于安娜贝格-布赫霍尔茨(Annaberg - Buchholz)．先后在爱尔福特和安娜贝格生活，曾在矿山任职，并在学校担任教员．主要贡献在代数和算术方面，研究过代数方程理论、负数及其计算方法、算盘、印度算法、三分律等课题，并在已有成果的基础上有所创新．他编著了四部算术著作，从 1518 年至 1656 年在德国各城市印刷 100 多版次，影响甚远，有力地促进了新算术的普及．他十分注重习题训练，由浅入深，循序渐进．里斯的名字已与算术运算联系起来，直至今日，“依据亚当·里斯”仍表示计算的准确性．

毛罗利科(Maurolico，Francesco，1494—1575) 意大利数学家、物理学家、天文学家．生于墨西拿(Messina)，卒于墨西拿．早年曾任牧师和工程师，1569 年任墨西拿大学数学教授．他是百科全书式的学者，在许多学科都做出过重要贡献．他在数学上的主要贡献是最先明确使用数学归纳法，曾用此法证明了恒等式 $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$ 等．他还把圆锥曲线论应用于物理学和天文学，并研究了多角形的性质等．此外，他还翻译、整理、注释了大量的古代文献，研究过天文观测仪器的光学原理、力学和磁学的某些问题等．

阿皮安努斯(Apianus，Petrus，1495—1552) 德国数学家、天文学家．生于莱斯尼希(Leisnig)，卒于因戈尔施塔特(Ingolstadt)．早年在莱比锡和维也纳求学，后来成为因戈尔施塔特大学教授，主讲天文学和三角学，是当时为数不多的用德语授课的教授之一．他于 1527 年出版的算术书中出现了用表格表

示的二项展开式$(a+b)^n$的系数，直到$n=9$. 这在欧洲是发表最早的“贾宪三角形”，比帕斯卡(Pascal, B.)早100多年，在这本书的封面上就记有此图. 书中还介绍了普通分数与十进分数之间的变换法则，以及如何利用二项展开式求2至8次方根的方法. 著作还有《宇宙志》(1524).

塔尔塔利亚(Tartaglia, Nicolò, 约1499—1557) 意大利数学家. 原名丰塔那(Fontana). 生于布里西亚城. 幼年时，父亲被法国占领军杀害，他自己颌部和舌头也被砍伤，说话不清，人们便称他“塔尔塔利亚”(即口吃者). 塔氏在贫困中长大，自学数学和拉丁文，并以传授科学知识谋生，曾任过数学教师.

塔尔塔利亚在数学上以解三次方程式而闻名. 1535年，威尼斯的菲俄以30个三次方程向他挑战，塔氏将30个方程全部解出，获得了极高的声誉. 后来他将解法告诉了卡当(Cardan, G.)，即有了现在方程式论中的卡当公式. 塔氏的另一大贡献是将阿基米德(Archimedes)的一些著作译成拉丁文，将欧几里得(Euclid)的《几何原本》译成意大利文. 塔氏的著作《数和度量概念》是中世纪最重要的数学著作之一.

尼拉坎塔(Nilakantha, 约15、16世纪之间) 印度数学家. 曾注释阿耶波多第一($\bar{\text{A}}$ryabhata Ⅰ)的数学和天文学著作《阿耶波多历书》. 当时，他已认识到圆周长和直径之比是一个无理数，并利用几种不同的级数求出π的具有10位准确数字的值；他还导出了相当于

$$\frac{d^2\sin\theta}{d\theta^2}=-\sin\theta$$

的结果，并著有《科学文集》一书.

鲁多尔夫(Rudolff, Christoff, 约15、16世纪之间) 波兰-奥地利数学家. 生于西里西亚(Silesia, 现属波兰)，卒于奥地利的维也纳. 曾跟从格拉马托伊斯(Grammateus, H. S.)学习，还做过家庭教师.

鲁多尔夫讨论过有理多项式、无理多项式的计算；注意到方程$ax^2+b=cx$有二重根；给出过某些一次不定方程的所有解. 他的著作由于十进分数的出现以及数学符号的改进而著称于世. 介绍了二次、三次、四次方根的符号可分别用√、ʍʍ√、ʍ√ 表示. 他的工作也为指数和对数基本思想，即$x^0=1$的创立，埋下了伏笔. 鲁多尔夫在德国数学研究上所起的作用，等同于斐波那契(Fibonacci, L.)在法国数学研究上所起的作用. 他的主要著作《未知数》(1525)是第一本用德语写的较完整的代数书，其中讨论了几何数列、自然数序列等. 另一本著作是《计算技巧》(1526). 除此之外，还出版过一部习题集(1530). 他的《未知数》对欧拉(Euler, L.)等数学家曾产生过一定的影响.

安德烈斯(Andre's Juan, 15世纪至16世纪初) 西班牙数学家. 生于萨拉哥萨(Saragossa). 经历不详. 他的算术书是用西班牙语写的，是他首次探讨有关课题的著作，内容包括对指算符号使用的总结.

卡泰纳(Catena, P., 1501—1577) 意大利学者. 生于威尼斯. 经历不详. 曾任帕多瓦大学教授. 他探讨过数学可靠性的问题，曾将欧几里得(Euclid)的数学与亚里士多德(Aristotle)的哲学加以比较，发现数学在逻辑上和认识论上具有自律性(由其内部规律确定).

卡尔达诺(Cardano, Girolamo, 1501—1576) 意大利数学家、医学家、物理学家. 其姓氏英文拼法是“Cardan”，译为“卡当”，常以此通用. 生于帕维亚(Pavia)，卒于罗马. 早年学习古典文学、数学和星占学. 1520年入帕维亚大学学习医学，后转学于帕多瓦大学，1526年获医学博士学位. 毕业后在帕多瓦附近的小镇萨科隆戈(Saccolongo)行医近6年. 1532年移居米兰，独自开业行诊. 1534年成为米兰专科学校的兼职数学教师，由此开始数学研究. 1539年加入米兰医学协会，1543年升任帕维亚大学医学教授. 1562年受聘为波伦亚大学医学教授. 1571年定居罗马，成为教皇皮乌斯五世(Pope Pius Ⅴ)的宫廷星占学家，直至去世.

卡尔达诺被誉为百科全书式的学者，一生共写了各类文章、书籍200多种，现存材料就有约7000页. 他的数学贡献体现在几本著作中：《算术实践与个体测量》(1539)在计算方法与代数变换中显示出较高的技巧；《论掷骰游戏》(1663)给出一些概率论的基本概念和定理，得到所谓“幂定理”等结果；他最重要的著作《大术》(1545)，首次公布了三、四次代数方程的一般解法，确认了高于一次的代数方程多于一个根，已知方程的一个根可将方程降阶，指出方程的根与系数间的某些关系，利用反复实施代换的方法求得方程的近似解，在解方程中使用了虚数等. 在其当中关于一般三次代数方程的求根公式今称“卡当公式”或“卡尔达诺公式”. 他的另外两部著作《事物之精妙》(1550)与《世间万物》(1553)包含了大量力学、机械学、天文学、化学、生物学等自然科学与技术的知识，还有密码术、炼金术，以及占星术等内容. 被誉为当时最好的百科全书，曾多次印刷，广泛流传于欧洲大陆. 他还提出过物体支撑力的“斜面原理”，设计过“卡尔达诺悬置”、“卡尔达诺接合”等机械装置. 此外，他还是最早认识自然界水循环理论的学者之一，提出了解释自然现象的“三元”、“两基”学说. 作为医生，他既精于诊断开方，也专于外科手术. 他还在理论上第一个阐述了诊断斑疹伤寒病的方法，对生理学和心理学的问题提出自己的见解.

努涅斯(Nunes, Pedro, 1502—1578) 葡萄牙

数学家.生于萨尔堡(Alcácer do sol),卒于科英布拉(Colmbra).曾在里斯本大学学习,1529年成为该校伦理学教授,1530年任哲学教授;1544—1562年任科英布拉大学数学教授.翻译过托勒密(Ptolemy)的部分著作;发明了一种精确测量小角度的仪器;证明了与子午线成等角航行的船只的轨迹不是直线,也不是地球球大圆,而是一条斜驶线,他早于荷兰的墨卡托(Mercator,G.)给出了这一结论.他曾发表过算术、代数和几何方面的论著及航海学、天文学方面的著作.他是16世纪葡萄牙最负盛名的数学家.

巴罗齐(Barozzi,J.,1507—1573) 意大利数学家.生平不详.他的重要著作《实用透视的两个法则》,大约写于1530年,1582年首次在博洛尼亚出版.巴罗齐在书中给出两个法则,分别是关于垂直射影和水平投影之间的表示关系和有关比例点的几何作法.巴罗齐由此书而享有盛名.

海马弗里叙斯(Gemma Frisius,Reiner,1508—1555) 荷兰数学家.生于多克姆(Dokkum),卒于比利时卢万(Louvain).早年在卢万学医,获学位后在那里行医,后任卢万医学院教师.他业余爱好数学、地理学和天文学,著有《宇宙》(1529)、《天文原理》(1530)、《算术实践》(1540)等书,其中后者包括受人欢迎的商业实用数学,仅在16世纪就重印50余次.

科曼迪诺(Commandino, Federico, 1509—1575) 意大利数学家.生于乌尔比诺(Urbino),卒于乌尔比诺.早年在法诺(Fano)学习拉丁语和希腊文,后回家乡学习数学.1534年入帕多瓦(Padua)大学攻读了10年哲学和医学,在费拉拉(Ferrara)大学获医学学位.

科曼迪诺以编辑、翻译和注释古希腊经典数学著作而出名,其中有阿基米德(Archimedes)的《圆的度量》等5部著作(1544)、托勒密(Ptolemy)的《星座图》(1558)、阿波罗尼奥斯(Apollonius,(P))的《圆锥曲线论》(1566)等,以及阿里斯托赛诺斯(Aristoxenus)、海伦(Heron,(A.))、帕普斯(Pappus,(A))等人的著作.此外,他还出版了欧几里得(Euclid)的《图形分割》的拉丁文本(1570),并指导学生将《几何原本》译为意大利文(1572).这些工作对传播古希腊科学文化很有帮助.

雷科德(Recorde,Rokert,约1510—1558) 英国数学家.生于英国威尔士彭布罗克郡(Pembrokeshire)的腾比(Tenby),卒于伦敦.1531年牛津大学毕业后,成为万灵(All Souls)学院大学评议员.1545年获剑桥大学医学博士学位.1549年被任命为布里斯托尔(Bristol)造币厂的审计员,由于拒绝挪用钱给爱德华国王西部军队而被控告为叛徒,关进监狱60天.1551—1553年,他在韦克斯福德(Wexford)、都柏林等地的造币厂和银矿任职,由于上述等原因,他又一次关进监狱,被王座法庭(King's Bench)判处死刑.

雷科德是英国数学作家学院的奠基者之一,数学著作很多,《技艺基础》(1543)是一本流行最广的书,另外还有《知识之路》(1551)、《知识入门》(已丢失,可能从未出版)、《知识宝库》(1556)、《砺智石》(1551)等,其著作涉及平面几何、实用几何、代数等数学领域.他写数学书力求通俗易懂,并探讨一些数学方法.在《知识之路》中,翻译并重新编排了欧几里得(Euclid)的《几何原本》前四卷.他还讨论了整数的各种运算、黄金律、假位法等内容,并首次使用"=",使代数变成完全的符号的代数,其中"+"和"—"号是首次在英语国家使用.此外,他还在代数长除法中使用了零系数,并使用任意数检验代数运算的正确性.

莱因霍尔德(Reinhold,Erasmus,1511—1553) 德国数学家、天文学家.生于萨尔费尔德(Soalfeld).经历不详.他是哥白尼(Kopernik,M.)的拥护者,但碍于教会的统治,只能按照教会要求讲授托勒密(Ptolemy)的天文系统知识.他曾制作了一个比雷格蒙塔努斯(Regiomontanus,J.)的更进步的正切表,由每隔1°改进为每隔1′.他还根据哥白尼的《天体运行论》的原理制造了当时最精密的行星表.

墨卡托(Mercator,Gerardus 或 Gerhard Kremer,1512—1594) 比利时数学家、地理学家.生于佛兰德(Flanders)鲁珀尔蒙德(Rupelmonde),卒于德国杜伊斯堡(Duisburg).1530年就学于卢万大学,学习哲学、神学、数学和天文学,后来成为多才多艺的学者.1536年,他发表了有关地球形态的文章,次年出版了第一张,也是欧洲和英国首张现代形式的地图.在地图绘制方面,他做出了突出贡献.1569年,他又用新创制的"墨卡托投影法"绘制了世界地图,他的绘制方法为当代制图业奠定了基础.

雷蒂库斯(Rheticus,George Joachim,1514—1574) 奥地利数学家、天文学家.生于奥地利的费尔德基希(Feldleirch),卒于匈牙利的卡萨(Kassa,现属捷克).1532年,他就读于维腾贝格(Wittenberg)大学,1536年获硕士学位,毕业后留校教初等数学和几何.1539年,他到波兰弗劳恩贝格(Frauenberg),向著名科学家哥白尼(Kopernik,M.)学习新的宇宙论.1542年被聘为莱比锡大学数学教授.

雷蒂库斯的主要贡献在三角学和天文学方面.1542年制作过半弦表,半径为10^{15},角度间隔以10′到1′不等,在表中雷蒂库斯首次给出余弦.他的《三角学准则》(1551)首次给出了六种三角函数表,包括正弦、余弦、正切、余切和正割、余割;重新定义了三

角函数，即为直角三角形边与边的比，并指出比与角度有关，从而脱离了过去那种必须依赖圆弧的作法．他还给出大于45°角的函数与其余角（小于45°角）的函数相等．1562年，雷蒂库斯着手编制了更为精密的正弦、正切、正割表．计算这些表的数据，工作量相当大，雷蒂库斯工作12年之久，仍未在生前完成，后由他的学生奥托（Otto V. 或 Otho V.）完成出版．此外，他还深入研究过地理、天文、医学等．

拉米斯（Ramus，Peter，1515—1572） 法国学者．生于法国韦瓦杜瓦（Vermandois）的屈茨（Cuts），卒于巴黎．1527年，他就读于巴黎大学，后在芒市学院（Collège du Mans）等校执教，曾一度是普雷勒学院（Collège de Presles）的院长．

拉米斯在逻辑学、方法论、数学、天文学、力学等方面都颇有造诣，“方法”一词是他首次提出的．他曾深入研究希腊数学史，尤其是在普罗克洛斯（Proclus）评论方面．他否认数学缺乏应用性，坚持将数学的起源和实际应用作为自然哲学理论的基础．他指出数学教学应以解决实际问题为基础，几何应与距离、面积、体积及角度测量等有关．为此，他将传统数学和欧几里得（Euclid）的《几何原本》的内容重新做了安排．他所暗示的代数与希腊几何分析之间的联系，后来被笛卡儿（Descartes，R.）和韦达（Viete，F.）继承并发展．

佩尔蒂埃（Peletier，Jacques，1517—1582） 法国数学家、医学家、诗人．生于勒芒（Lemans），卒于巴黎．曾在巴黎、勒芒等地攻读哲学、法律，后又转学医学．1543年任巴黎巴约（Bayeux）学院的院长．后到波尔多（Bordeaux）、普瓦捷（Poitiers）、里昂、巴黎等地行医．

佩尔蒂埃的主要贡献是初等数学和文学，他的著作有《算术》（1549）、《代数》（1554）等，以及有关边、角和圆几何方面的著作．在他的《欧几里得几何原本中的证明》（1557）中，批判了欧几里得（Euclid）用叠合法证明全等的有关定理．1588年，他发现了方程根与系数之间的关系，将方程所有项都移到一边，使它们等于零，并指出：当所有的根都是整数时，任何一个根都是常数项的因子．此外，他还研究过“帕斯卡三角形”，并大力提倡用本民族的语言撰写科学著作．

拉罗什（La Roche，Estienne de，约1520年前后） 法国数学家．生于里昂（Lyons）．经历不详．他早年师事数学家许凯（Chuquet，N.），后在家乡商业中心教授算术．人称“计算大师”．1520年，他在他的算术著作中，较早地将意大利先进的算术知识引进法国，内容包括了实用基础知识、商业交往和计算方法等，此外，还有一些几何例题．该书于1538年再版，较有影响．

迪格斯（Digges，Leonard，1520？—1559，另一说卒于1571年） 英国数学家．生于英国，卒于英国．曾于1554年参加叛乱，经说情得到赦免后不久去世．他的兴趣在初等实用数学上，特别是勘测、航海和射击．他的航海日历和预言（1555）为海员提供了出海参考资料．1556年，他还出版了初等测量手册，在他去世后，他的儿子继续完成并出版了较先进的实用测量手册，其中第一册为现代测量课本．

费拉里（Ferrari，Ludovico，1522—1565） 意大利数学家．生于波伦亚，卒于波伦亚．14岁时，他到米兰充当了数学家卡尔达诺（Cardano，G.）的家仆，不久成为其助手．1540年，在他18岁时，在米兰接替了卡尔达诺开设的数学讲座．主要贡献是得到了三次和四次代数方程的某些解法，特别是四次方程 $x^4+ax^2+b=cx$（a、b、c 为正数）的降阶解法，现称为“费拉里方法”．1564年，曾任波伦亚大学数学教授，次年病逝．

邦贝利（Bombelli，Rafael，1526—1572） 意大利数学家．生于波伦亚．约1551年，开始从事水利设计工作，并参与了基亚纳河谷沼泽地的开垦，被视为工程设计师．

邦贝利酷爱数学，钻研中颇有心得，1556—1560年，他利用开垦间断时间撰写了《代数学》，在1572年出版了前3卷，后2卷手稿是1923年才被发现，1929年出版．该书从基本定义和符号入手，系统地总结了16世纪的代数方程理论，讨论了多种二、三、四次方程的求解，特别是解决了三次方程不可约的情形，并为此建立起了虚数的运算法则．他还采用了若干较先进的代数符号，首次用连分数逼近平方根的值．他被誉为意大利文艺复兴时期的最后一位代数学家．他的工作受到斯蒂文（Stevin，S.）、莱布尼茨（Leibniz，G. W.）等后继数学家的高度赞誉，影响很大．

福卡德尔（Forcadel Pierre，？—1574） 数学家．国籍不详．生于法国贝济耶（Béziers），生活在意大利．从1560年起，在法兰西学院任数学教授，长达13年之久．主要贡献是翻译了欧几里得（Euclid）的《几何原本》，在法国颇为流行．

里斯内（Risner，Friedrich，？—1580？） 德国数学家、物理学家．生于德国黑茨费尔德（Herzfeld），卒于黑茨费尔德．很长一段时间，他与拉米斯（Ramus，P.）合作．按他的意愿，拉米斯创建了法国皇家学院，并指定他为首席教授，但他没教课．1576年回到他的家乡．他们两人合作的最大成就是编辑整理了波兰数学家维泰洛（Wite lo）与阿拉伯物理学家伊本・海塞姆（Ibn al - Haytham）的光学著作．里斯内发表过来源于拉米斯的手稿——《伊本・海塞姆光学》（初版），并增加了例证．他们合作的内容，基本轮廓是拉米斯的，里斯内给出证明及讨论．

迪 伊(Dee,John,1527—1608) 英国数学家.生于伦敦,卒于萨里郡(Surrey)的莫特莱克(Mortlake).1548年,他获剑桥大学圣约翰学院硕士学位,与墨卡托(Mercator,G.)以及其他大陆学者联系密切.他曾担任英国海上探险顾问近30年,撰写过有关航海与航海仪器方面的论文,其手稿仍被保存着.主要贡献是修订了比林斯利(Billingsley)译的《几何原本》(英文首译本),他为之作序并附加了注释和一些定理.迪伊是一个科学天才,但后来他却把兴趣放到秘术上,潜心于炼金术、占星术的研究.尽管如此,他对英国数学发展的影响还是不容忽视的.

内安德尔(Neander,Michael,1529—1581) 德国数学家、医学家.生于波希米亚(Bohemia,今在捷克),卒于德国耶拿(Jena).他就读于维腾贝格(Wittenberg)新教大学,1558年获耶拿高等学校的博士学位,1560年任该校数学、医学教授.他曾深入研究许多古典科学和哲学著作,认为数学是最好的证明方法.他将分析法和综合法区分开,引进了间接证明法.他撰有《计量学一览》(1555)及关于历法方面的论著.

帕特里齐(Patrizi,Francesco,1529—1597) 意大利数学家、自然哲学家.生于伊斯特里亚(Istria),卒于罗马.1547—1554年,他先后在德国因戈尔施塔特(Ingolstadt)、帕多瓦(Padua)、威尼斯等地的大学学习.他曾去东方游历,充实了希腊的有关知识.1578年,他被任命为费拉拉(Ferrara)大学哲学教授,1592年成为了罗马大学教授.

帕特里齐的兴趣相当广泛,发表过诗歌、历史、自然哲学、修辞、文学等著作,并还将一大批希腊著作译成了拉丁文.他的思想具有柏拉图主义的特色及强烈反亚里士多德(Aristotle)的倾向.他曾对空间本质提出自己独特见解,认为空间是一种无限存在的不确定的容器,一种容纳物体存在的简单容器,它是其他东西存在的先决条件.这与牛顿(Newton,I.)提出的"绝对空间"的观念相类似.根据这种观点,他试图建立一种几何系统,空间作为该系统中最基本的、不定义的概念,这种概念会成为基本定义点、线和角的一部分.他还将"数学"和"物理"空间和科学理论区分开.

埃雷拉(Herrera,Juan Bautista,1530—1597) 西班牙数学家、建筑师.生于阿斯图里亚斯(Asturias),卒于马德里.毕业于布鲁塞尔大学,担任过菲利浦二世(Philip,Ⅱ)的主要建筑师.他是马德里数学研究院的创始人之一,翻译过阿尔贝蒂(Alberti,L.B.)的一些著作,还是阿拉伯数学的积极传播者.

达西波迪斯(Dasypodius,Cunradus,约1530—1600) 法国数学家、天文学家.生于瑞士费劳恩费尔德(Frauenfeld),卒于斯特拉斯堡(Strasboutg).曾在斯特拉斯堡著名的施图姆(Sturm,J.C.)研究院学习.1558年任教授.他的代表作是《几何分析》(1566),其中对欧几里得(Euclid)的《几何原本》前6卷的证明用三段论法加以分析,目的在于训练学生的逻辑推理能力.他认为当时的数学水平远不如古希腊,故而大量注释出版希腊数学家的著作.他还编撰过数学辞典,为斯特拉斯堡教堂制作过精密的天文时钟.

贝内代蒂(Benedetti,Giòvanni Battista,1530—1590) 意大利数学家、物理学家.生于威尼斯,卒于都灵(Turin).1546—1548年,他在塔尔塔利亚(Tartaglia,N.)指导下学习《几何原本》.1558—1566年成为帕尔马(Parma)的奥特维奥-法尔内塞(Ottario Farnese)公爵的宫中数学家,其间还曾赴罗马讲学.1567年,受萨沃依(Saroy)公爵之邀前往都灵讲学,直至去世.

贝内代蒂是位多产的作者,22岁时就发表了他的第一部著作,讨论了只用开口定的圆规解题的方法.1585年,出版了他的重要著作,也是他的最后一部著作《数学和物理的各种探究》,集数理之大成.在数学方面,还有大量用几何方法证明算术命题、透视理论、欧几里得(Euclid)的《几何原本》第Ⅴ卷的评注等.在物理方面,他批驳了亚里士多德(Aristotle)的许多基本物理概念,探讨了有关自由落体、流体静力学及压力和水平起重机的问题.在建立自由落体正确理论的过程中,贝内代蒂是伽利略(Galilei,G.)的先导.

坎宁安(Cunningham,William,1531—1586) 英国数学家、内科医生.生于诺福克(Norfork).1548年,他自费上了剑桥大学,1557年获硕士学位,约在1559年德国海德堡大学博士毕业.曾当过医生.著有《希波克拉底评注》,以及天文观测和计算、测量与制图、设计数学仪器等诸方面的著作.

阿皮安(Apian,Philipp,1531—1589) 德国数学家、地理学家.生于因戈尔施塔特(Ingolstadt),卒于蒂宾根(Tübingen).1552年,他任因戈尔施塔特的数学教授,1569—1584年任蒂宾根大学的数学教授.他是第一位近代地形学者,曾绘制了400平方尺巴伐里亚的地图,这个地图是16世纪地形学的杰作,直到18世纪仍为巴伐里亚勘测的基础.此外,他还制作了天球仪和地球仪.

杜迪特(Dudith,Andreas,1533—1589) 天文学家、占星术家、数学家.国籍不详.生于匈牙利的布达(Buda,现布达佩斯),卒于德国的布雷斯劳(Breslau 现波兰的弗罗茨瓦夫(Wroclaw)).他将政治、宗教活动、人文主义以及科学事业结合在一起,是典型

文艺复兴时期人文主义者.

杜迪特曾到过意大利、法国、英国，并结识了一些人文主义者、文献学家及物理学家. 收集了一大批希腊数学手稿，有丢番图(Diophantus)的《算术》、帕普斯(Pappus，(A))的《数学汇编》及托勒密(Ptolemy)等人的著作. 这些手稿的一部分及他自己的5000多本书籍，现收在罗马教廷、巴黎、莱顿、瑞典等图书馆. 他曾用精确数学观测批判了亚里士多德(Aristotle)的一般物理理论，50年后，这种精确观测在伽利略(Galilei,G.)的著作中成了有力的依据.

波尔塔(Porta，Giambattista Della，1535—1615) 意大利自然哲学家、数学家. 生于意大利的维科埃昆塞(Vico Equense)，卒于那不勒斯(Naples). 他接受的是非正式教育，具有强烈的反教会思想，因此遭到了宗教法庭的审查. 其著作也被禁止出版，直到1598年才解除禁令. 他自己于1570—1580年间创办了自然秘密学院，这是早期文学院的雏形，主要探讨自然的神秘. 1610年，他加入著名的罗马山猫学院. 他在自然科学方面涉猎甚广，曾用几何的观点解释透镜的折射等光学现象，设想过发明望远镜，最早认识到光线的热效应. 著有《自然奥秘》(1558)，托勒密(Ptolemy)的《天文集》第一卷及赛翁(Theon，(A))评注的译文(1605)，以及有关农业、曲线理论、化圆为方等方面的著作.

丹 蒂(Danti，Egnatio，1536—1586) 意大利天文学家、数学家. 生于佩鲁贾(Perugia)，卒于阿拉特里(Alatri). 早年他入了多明我教会，后为该会描制过天象图. 1575年，他任波伦亚大学数学教授，1577年出版了《节省表格的数学科学》. 书中将数学进行分类，使之有利于教学. 他制造了大量天文观测仪器，并精确测定了春分点，指出当时历法(儒略历)的不足. 1580年，被教皇格雷戈里13世(Gregory XⅢ)邀到罗马进行历法改革，修成现行公历(格里历).

克拉维乌斯(Clavius，Christoph，1537—1612) 德国数学家、天文学家. 生于班贝格(Bamberg)，卒于意大利罗马. 1560年前后，他在葡萄牙读大学，1565年到罗马教数学，以出版《欧几里得几何原本》(1574)而著名. 1606—1607年该版本前6卷，在来华传教士利玛窦(Ricci，M.)帮助下，由中国明代学者徐光启译为中文. 克拉维乌斯在书中对《几何原本》做了大量注释，同时给出自己的评价. 他的另一部算术著作(1583)是中国学者李之藻编译著述《同文算指》(1613)的主要依据，该书成为明清交替之际介绍欧洲笔算的第一部著作. 他还创设过一些算术符号，出版了有关几何、代数(1608)、三角、历法和天文学等方面的著作及教科书.

普雷托里乌斯(Praetorius，Jean，1537—1616) 发明家、天文学家、数学家. 国籍不详. 生于德国的约阿希姆斯塔尔(Joachimsthal). 1571年，他任维腾贝格大学数学教授. 曾精心制作过天文历法，发明了普雷托里乌斯平面表(1611)及水力天平.

巴罗齐(Barocius，Franciscus，1537—1604) 意大利数学家、天文学家. 生于克里特(Crete)的干地亚(Candia)，卒于威尼斯. 他学习过希腊语、拉丁语、数学和哲学. 22岁时，他完成了普罗克洛斯(Proclus)关于欧几里得(Euclid)《几何原本》第1卷评注的编译工作，并于1560年出版. 这是一本具有史料价值的著作，因为它基于较完整的手抄本基础上. 他还翻译了海伦(Heron，(A.))、阿基米德(Archimedes)、帕普斯(Pappus，(A))等人的著作. 还曾用拉丁语撰写过论文，其中论及用13种方法画两条平行线、初等宇宙结构知识，以及气象学、物理学、地理学等知识.

卡文迪什(Carendish，Richard，约1539—1601) 英国数学家. 生于特里姆利(Trimley). 就读于牛津大学，1573年获剑桥大学硕士学位. 当过国王的勘测员、水文地理学家、制图学者. 1572—1585年为议会议员. 他还曾将欧几里得(Euclid)的著作译成英文版本.

韦 达(Viete，Francois，1540—1603) 法国数学家. 生于普瓦图地区(Poitou)，卒于巴黎. 其名应译为“维埃特”，因其著作均用拉丁文发表，故常用拉丁文拼法“Vieta”，译音“韦达”，沿用至今. 早年他在家乡受初等教育，后到普瓦捷(Poitiers)大学学习法律，1560年获法学学士学位，成为一名律师. 1580年成为法国行政法院审判官，后又任皇室私人律师、最高法院律师(1589). 他业余研究数学，在代数、几何和三角学方面都做出过贡献.

《分析方法入门》(1591)是韦达最重要的代数著作，也是最早的符号代数专著，其中首次系统地使用字母表示已知量和未知量的值，甚至表示未知量的乘幂. 他把符号代数称为类的算术，以区别于数的算术，这就确定了算术与代数的分界. 他认为代数是研究方程的学问，并预言未来将出现一种运用符号的关于量的演绎科学. 两年后，韦达在《分析五篇》(1593)中用具体实例将类的运算与丢番图(Diophantus)的《算术》相比较，并试图将后者在几何形式下的代数恒等式重新推导出来. 他的《论方程的检查与订正》(1615)是他逝世后由朋友帮助出版的，其中包括三、四次代数方程改进后的解法，给出了三次方程不可约情形的三角解法，记载了著名的韦达定理——方程的根与系数的关系式. 他的第一本三角学著作是《应用于三角形的数学定律》(1579)，也是早期系统论述平面与球面三角学的著作之一. 书中给出了精确到5位小数的三角函数表，还整理了解

平面直角与斜角三角形的公式，介绍了一套完整的球面三角形公式及其记忆方法，提出涉及球面钝角三角形的余弦定律及 n 倍角的正弦与余弦展开恒等式. 他曾灵活运用三角学知识解决过一个高达 45 次的代数方程. 在几何学上他的《几何补篇》(1593) 给出尺规作图问题所涉及的一些代数问题，讨论了圆内接正七边形的作图方法. 他的《各种数学解答》(1593) 最早给出圆周率 π 的无穷乘积表达式，得到 π 的 10 位准确值. 韦达用代数方法解决几何问题的思想由笛卡儿(Descartes，R.)继承，后发展成为解析几何学.

柯　伦(Ceulen，Ludolph van，1540—1610) 德国数学家. 生于希尔德斯海姆(Hildesheim)，卒于荷兰莱顿. 常以名字卢多尔夫传世. 他早年随父经商，四处游历，多闻饱学. 1580 年到荷兰代尔夫特(Delft)，在那里成为数学教师. 1594 年移居莱顿，1600 年任教于莱顿工程学校. 他以计算圆周率 π 值而出名. 1596 年利用圆内接和外切正 15×2^{31} 边形，将 π 值计算至 20 位小数. 后倾其毕生精力，将该值推进至 33 位小数值，发表于他逝世后印行的《算术与几何基础》(1615) 中. 1621 年，他的学生斯内尔(Snel，W.)公布了柯伦 π 值计算的最终结果 35 位小数值，据说已刻在了柯伦的墓碑上(现已丢失). 德语中的圆周率就叫卢多尔夫数(Ludolphsche Zahl)，以示对他的纪念.

艾　伦(Allen or Alleyn，Thomas，1542—1639) 英国数学家. 生于尤托克西特(Vttoxeter)，卒于格洛斯特(Gloucester). 1563 年，他获牛津大学学士学位，1567 年获硕士学位. 他编辑整理过科学、哲学、历史及考古学方面的手稿(一些现存于牛津大学图书馆)，发表过托勒密(Ptolemy)的著作，并为其作注. 他的数学和天文学方面的技巧，使他的同代人认为他是星占学者.

梅蒂斯(Metius，Adriaen Anthonisz，1543? —1620) 荷兰数学家. 生于阿尔克马尔(Alkmaar)，卒于阿尔克马尔. 他以制图员和军事工程师为职. 1584 年在一本未出版的小册子中给出圆周率 π 的近似分数式 355/113，使用的方法是取两分数

$$\frac{377}{120}\text{与}\frac{333}{106}$$

分子、分母的算术平均值分别作分子、分母，与中国南北朝数学家祖冲之的结果一致，在欧洲称之为安托尼斯率. 后来，又发现德国的奥托(Otto，V.)在 1573 年已发现此式.

蒙　特(Monte，Guidobaldo，Marchese del，1545—1607) 意大利数学家、力学家、天文学家. 生于佩萨罗(Pesaro)，卒于乌尔比诺(Urbino)附近. 蒙特 1564 年在帕多瓦(Padua)大学学习数学，毕业后在政府任职，业余钻研数学. 著有《平面球体图》(1579)，其中给出了椭圆的新定义，即与两定点距离之和为常数的动点轨迹为椭圆，改变了传统的圆锥截线定义法. 他还讨论了正五边形的定角圆规作图问题，制造了比例规、椭圆规和分圆仪. 他是伽利略(Galilei，G.)的好友，写过《力学》(1577) 和天文学方面的论著.

迪格斯(Digges，Thomas，1546? —1595) 英国数学家. 生于肯特(Kent)，卒于伦敦. 迪格斯之子，从师于迪伊(Dee. John). 迪格斯是英国哥白尼学派的领导者. 1576 年在他父亲的《预言》中，增添了哥白尼(Kopernik，M.)的《革命》卷 1 的部分翻译，以及迪格斯自己关于物理方面的研究成果，另外还收录了他在天文学方面提出的无限空间中各个恒星距离不同的理论. 他曾探讨过柏拉图(Plato)和阿基米德(Archimedes)研究的几何体，解决了弹道学的一些问题，并摒弃了弹道学某些公认的错误. 他还观测了第谷(Tyeho，B.)于 1572 年发现的新星，试图验证哥白尼理论.

阿吉隆(Aguilon，Francoisd，1546—1617) 比利时物理学家、数学家. 生于布鲁塞尔，卒于安特卫普(Antwerp). 菲利浦二世(Philip，Ⅱ)的书记员之子. 1586 年他成为了耶稣会教士. 曾教过句法、逻辑和神学，后来负责组织可用于商业、地理、航海、建筑及军事行动的所谓精密科学的教学工作. 这些工作促使他编写了一部有关的光学书，其中综合了欧几里得(Euclid)、伊本·海塞姆(Ibn al-Haytham)、培根(Bacon，R.)、开普勒(Kepler，J.)等诸家的成果，成功地论述了眼睛、物体、视觉本质、光线和双眼视界、视觉误差、发光体、不透明体及投影等方面的知识. 他还深入研究了在光学史上有重要影响的正射影和平面射影理论.

第　谷(Tycho，Brahe，1546—1601) 丹麦天文学家. 生于斯科讷(Skane). 他先后在莱比锡大学、罗斯托克(Rostock)大学学习. 研究过托勒密(Ptolemy)的《天文集》. 在汶岛(Hreen)建立过一座天文台，并进行了近 20 余年天文观测. 在 1572 年 11 月 11 日发现在仙后座里出现了一颗新星，现测知为银河系的一颗超新星. 开普勒(Kepler，J.)曾做过第谷的助手，并从第谷的观测结果中导出了行星运动的三大定律，而且制作完了鲁道夫星表. 第谷的主要贡献是三角学，他阐述了极三角形的应用、平面三角形和球面三角形的解法，并在其中体现出了高度的技巧性.

拜亥艾丁(Beha-Eddin，1547—1622(另一说 1621)) 阿拉伯数学家、诗人. 生平不详，只知道他大部分时间在伊朗度过. 他的主要著作《算术精华》，曾在土耳其、伊朗和印度流行 200 年之久. 此书对现

在也有影响，书中的许多问题被编入近代习题集中．拜亥艾丁曾研究过数论问题，宣称方程 $x^3+y^3=z^3$ 对任何正整数 x、y、z 都不能成立．他还用双试位法解过一次方程问题，是最早把单词“algebra”解释为复原、对消的人．

斯蒂文(Stevin，Simon，1548—约 1620)　荷兰数学家、工程学家．生于荷兰布鲁日(Bruges，今属比利时)，卒于海牙(The Hague)．早年曾做过银行出纳和簿记员．1583 年在莱顿大学注册，后当过工程师，荷兰陆军军需司令．他与约翰(John de Groot)熟识，一起做过落体实验，证明亚里士多德(Aristotle)的有关说法是错误的．他的落体实验早于伽利略(Galilei，G．)的实验．

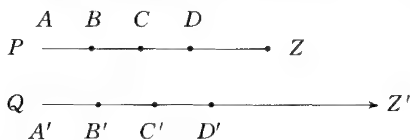
斯蒂文的著作涉及许多方面，包括数学、力学、天文学、地理学、航海、军事科学、工程技术、音乐理论、逻辑学(辩术)等，其中许多极富创造性．在数学方面，他发表过《利息表》(1582)、《几何问题集》(1583)，处理了一些纯粹数学中的问题，其中明显体现了欧几里得(Euclid)、阿基米德(Archimedes)的传统；《论十进》(1585)是他最重要的著作，著作中系统地处理了十进分数及其应用，引入了表示单位的符号，使小数运算同整数一样处理．他是系统论述十进分数及其算术的第一人；在《算术》(1585)中，斯蒂文将他那个时代的算术和代数做了综合处理，并提供了相应的几何证明．在卡尔达诺(Cardano，G．)、塔尔塔利亚(Tartaglia，N．)著述基础上，他认为所有的数包括平方根及负数或无理数本质上都是相同的，还给出了二次、三次及四次方程解答．他是工程师和技术专家的典范，用科学的方式处理实际问题，极为重视理论与实践相结合．他还探讨过相当于积分的问题，为穷竭法向积分的过渡做出了贡献．其他著作有《流体静力学基础》(1586)、《平衡术》(1586)等．

萨维尔(Savile，Henry，1549—1622)　英国数学家．生于哈利法克斯(Halifax)附近的布雷德利(Bradley)，卒于伊顿(Eron)．就读于牛津大学默顿(Merton)学院，1570 年获硕士学位．1578 年成为伊丽莎白女王的希腊语和数学教师．1585—1621 年任默顿学院院长．他主要研究、翻译及校订希腊几何学、天文学以及历史方面的著作．著有《托勒密天文学大成研究》，还参与了制订《圣经》标准本的工作．

乌尔苏斯(Ursus，Nicholas Reimarus，约 1550—约 1599)　数学家．国籍和生平不详．鲁道夫二世(Rudol ph Ⅱ)的宫廷数学家．著有《天文学基础》(1588)、《天文学假说》(1597)．提出与第谷(Tycho，B．)相似的天文体系，但宣称地球绕其自身的轴转动．

纳皮尔(Napier，John，1550—1617)　英国数学家．生于苏格兰爱本堡附近的小镇梅奇斯顿(Merchiston)，卒于梅奇斯顿．家境殷实．13 岁入圣安德卢斯(St. Andrews)圣萨尔瓦特(St. Salvator)学院读书，成绩平平．热衷出国旅行．1566 年游历欧洲大陆，聆听各种形式的讲学，逐渐养成勤于观察和独立思考的习惯．1571 年返回故里．1608 年继承父亲产业后，定居梅奇斯顿，直至去世．

纳皮尔是对数理论的发明者，这一成就使他成为数学史上的重要人物．对数理论约始于 1594 年，纳皮尔当时的动机是寻求一种球面三角计算的简便方法．对数的本质表现为算术级数与几何级数之间的联系．由于当时关于非正整数的指数概念并不清楚，纳皮尔并没有把对数当作指数的逆运算，他依靠运动学的帮助解释了对数思想．设有两个质点 P 与 Q，P 沿一有限长直线 AZ 运动，Q 沿一无限长直线



$A'Z'$ 运动．两质点初始速度相同．Q 保持匀速运动，而 P 在任何一点的速度与它尚未经过的距离成正比．若 P 点位于 B 点时，Q 点位于 B' 点，则称 $A'B'$ 是 BZ 的对数．可以记为

$$A'B' = Nap\log BZ,$$

称为纳皮尔对数．为了避免出现小数的麻烦，纳皮尔取 $AZ=10^7$，用现代方法可以推出

$$Nap\log BZ = 10^7\log1/e\left(\frac{BZ}{10^7}\right).$$

当数(质点 PZ 间的距离)按几何级数递减时，其对数按算术级数递增．17 世纪初，大量的天文计算问题促进了对数的产生．1614 年 6 月，纳皮尔发表《奇妙对数规则的说明》，将对数的性质和用法作了简要叙述，并包括以分弧为间隔角的正弦对数表，引起了人们的广泛兴趣．不久，他又在《奇妙对数规则的结构》(1619)中详细阐述了对数计算和对数表的制作方法，但遗憾的是出书时纳皮尔已去世．伦敦数学教授布里格斯(Briggs，H．)继承、完善并进一步发展了纳皮尔的对数理论，发明了常用对数．对数方法以节省时间，起到“延长天文学家寿命”的作用(拉普拉斯语)．纳皮尔还发明了用于乘除运算的“纳皮尔筹”(1617)，发现了球面三角形的关系式等．他还发明了一些武器，并对治国安邦提出过许多具体策略．

奥　托(Otho，Valentin or Otto Valentinus or Parthenopolitanus，约 1550—1605)　荷兰数学家．原籍马格德堡(Magdeburg，今德国东部)．生平不详．奥托的主要贡献是对圆周率 π 的研究，1573 年得到 π 的近似值355/113，可能是来自 22/7 和托勒密(Ptolemy)的 377/120，两者折衷，有

$$\frac{377-22}{120-7},$$

这比安托尼斯(Anthonisz,A.)早100余年(欧洲人通常称355/113为安托尼斯率).但迟于祖冲之1111年.另外,他完成了他的老师雷蒂库斯(Rhaeticus,G.J.)和其助手们勤奋工作12年之久,而没能在生前完成的三角函数表,其中包含每隔10″的6种三角量的值,并用了十进小数表示.

拉万纳(Lavanha,João Baptista,1550—1624) 葡萄牙-西班牙数学家、天文学家.生于葡萄牙,卒于西班牙马德里.1583年在马德里任数学教授,后从事过工程学和宇宙结构学研究.制造了星盘、象限仪和罗盘等仪器,还发明了测角仪.他的代表作是《航海须知》(1595),内容包括纬度确定法、太阳赤纬测量法等,可作为海员培训教材.

马斯特林(Mastlin或Möstlin,Michael,1550—1631) 德国数学家、天文学家.生于符腾堡(Württemberg)格平根(Göppingen),卒于蒂宾根(Tübingen).就读于蒂宾根大学.1580年任海德堡大学数学教师.他积极拥护哥白尼(Kopernik,M.)的地动说,是开普勒(Kepler,J.)和伽利略(Galilei,G.)的老师,指导过开普勒研究天文学.1577年,他对彗星进行系统研究,解释了月球发光的原因,发展了准线想法.由于宗教势力的控制,他只能私下向学生讲授哥白尼理论.此外,他还出版过天文学方面的著作.

比利亚尔潘多(Villalpando,Juan Bautista,1552—1608) 西班牙-意大利数学家、力学家、建筑学家.生于西班牙科尔多瓦(Cordoba),卒于罗马.1575年加入耶稣会,后迁居罗马,在那里结识了伽利略(Galilei,G.)的朋友克拉维乌斯(Clavicus,C.),并参与了16世纪科曼迪诺(Commandino,F.)等人对阿基米德(Archimedes)和帕普斯(Pappus,(A))著作的复兴工作,以及对《以西结书》(Book of Ezekiel,《圣经·旧约》中大先知书之一)的注释工作.他出版了三大卷注释,论述占星术、音乐、数学比例论、度量与货币的罗马制及语言学等,其中第三卷,包含了大量他本人提出的数学和力学命题、重心和方向线等.有关的21个命题后被梅森(Mersenne,M.)在1626年的著作中引用.

比利亚尔潘多对建筑学也有贡献.他是文艺复兴时期很有影响的博学者.

瓦莱里奥(Valerio Luca,1552—1618) 意大利数学家.生于意大利的那不勒斯(Naples),即那波利(Napoli),卒于罗马.就读于罗马学院(Collegio Romano).曾师事克拉维乌斯(Clarius,C.).曾在希腊学院(Collegio Greco)教希腊语,从1600年开始在知识学院(Collegio Sapienza)教数学.1612—1616年成为山猫学院(Aecademia dei Lincei)的成员.他还曾当过梵蒂冈图书馆(Vatican Library)希腊语校对员.他与伽利略(Galilei,G.)交往密切.在他的《重心》(1604)一书中,运用阿基米德法求各种旋转体的重心和体积,其中一个最有意义的引理是:设 $\lim x=a$,$\lim y=b$,如果 $x/y=c$(常数),则

$$\frac{a}{b}=\frac{\lim x}{\lim y}=\frac{\lim x}{y}=c,$$

这一引理也出现于牛顿(Newton,I.)和卡瓦列里(Cavalieri,(F.)B.)的著作中.在他的《抛物线面积求法》(1606)一书中,从已知半球重心出发,求出抛物线的重心和面积.

瓦莱里奥的思想来源于阿基米德(Archimedes),伽利略称他为"当今的阿基米德".此外,科曼迪诺(Commandino,F.)对他的影响也很大,而他的工作又对卡瓦列里、托里切利(Torricelli,E.)、古尔丁(Guldin,P.)等人产生了很大影响.

比尔吉(Bürgi,Joost,1552—1632) 瑞士数学家、天文学家.生于列支敦斯登(Liechtenstein,瑞士与奥地利之间的一个小国),卒于德国卡赛尔(kassel).比尔吉很可能没受过系统教育,因为他曾是宫廷钟表匠和仪器匠,后来成为开普勒(Kepler,J.)的助手.他著有《算术》一书,在此书的手稿中使用了小数点,有时又用小圆弧代替.他还详细地阐述过高次代数方程根的近似计算,但最著名的是他所发现的相当于以e为底的自然对数,这独立于纳皮尔(Napier,J.).此外,他还制作过每隔2″的正弦表.

卡塔尔迪(Cataldi,Pietro Antonio,1552—1626) 意大利数学家.生于波伦亚,卒于波伦亚.早年他在佛罗伦萨设计院供职,1572年到佩鲁贾(Perugia)大学教数学,1584年任波伦亚大学数学教授.主要贡献是发展了连分数理论,即通过用无穷连分数表示一般无理根建立起无穷算法,讨论了连分数的若干性质.他的代表作是《数的平方根的简洁表示法》(1597年完成,1613年出版).此外,在几何方面,他还研究过欧几里得第五公设(1620),对同时代学者的数学和天文学文献做过评注.

利玛窦(Ricci,Matteo,1552—1610) 意大利数学家.生于意大利的马切拉塔(Macerata),卒于中国北京.1568年去罗马学习法律,3年后入耶稣会,1572年在罗马大学学习,著名数学家克拉维乌斯(Clarius,C.)是他的老师之一.1577年,他离开罗马,被派往东方传教.曾先后在中国澳门、肇庆等地活动,1601年定居北京.

1596年9月22日在南京预测一次日食,使利玛窦的名声大振.1600年,他在南京认识了徐光启,从此与徐光启共同合作研究西方科学.1606年秋天,利玛窦口译,徐光启执笔,合译了欧几里得(Eu-

clid)的《几何原本》前 6 卷. 这是中国近代翻译西方数学书籍的开始,从此打开了中西学术交流的大门. 他们翻译根据的底本是德国人克拉维乌斯校订增补的拉丁文本. 他们共同创用了"几何"的名称. 该书于 1607 年出版. 他还曾与李之藻合译《同文算指》. 此外,利玛窦根据绘有五大洲的西方世界地图,制成了一副较原图大的世界地图,并用汉文做了注释. 由于利玛窦精通数理,故他所测得的北京、南京、杭州、广州、西安等地的经纬度都相当准确.

巴尔迪(Baldi,Bernadino,1553—1617) 意大利数学家、数学史学、力学家. 生于乌尔比诺(Urbino),卒于乌尔比诺. 巴尔迪先从科曼迪诺(Commandino,F.)学习数学,后在帕多瓦攻读文学. 他曾编写过数学编年史书,其中包括 200 多名数学家传记. 他还把海伦(Heron,(A.))的著作译成了拉丁文,并收集整理了科曼迪诺等人关于帕普斯(Pappus,(A))、阿波罗尼奥斯(Apollonius,(P))、欧几里得(Euclid)和柏拉图(Plato)等数学家著作的拉丁文译本. 巴尔迪是一位出色的语言学家,这很有利于他取材不同语种的原文资料,从而保证了史料的真实性. 此外,他在物理学方面也颇有造诣,深入研究了静态、非静态平衡等问题.

德格罗特(De Groot,Jan Cornets or Jahan Hugo or Janus Grotius,1554—1640) 荷兰数学家、机械学家. 生于代尔夫特(Delft)附近,卒于代尔夫特. 1575 年,他就读于新开办的莱顿大学,后在法国成为大学文科和哲学学士. 他曾任代尔夫特地方议员、市长(1591—1595)和莱顿大学学监(1594—1617). 1596 年获法学博士学位.

德格罗特在数学家柯伦(Ceulen,L. van)的帮助下将阿基米德(Archimedes)的《圆的度量》由希腊文译为了荷兰文. 他还与斯蒂文(Stevin,S.)合作做了大量科学实验,其中最著名的是自由落体试验,得出不同重量的物体同时落地的结论,首次用实验否定了亚里士多德(Aristotle)关于轻重物体下落不一样的错误观点. 这一工作早于伽利略(Galilei,G.)的同类工作,但在当时没有引起重视.

克里斯特曼(Christmann,Jacob,1554—1613) 德国数学家、天文学家. 生于约翰内斯贝格(Johannesberg),卒于海德堡. 1580 年在海德堡当教师,1584 年成为希伯来语教授,1591 年开设亚里士多德(Aristotle)的逻辑学课程.

克里斯特曼精通 9 种东西方语言,讲授过希伯来语和阿拉伯语. 其数学贡献是三角函数计算和圆的求积,较早使用并证明了公式:

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta).$$

著有《论化圆为方的几何》(1595). 他还第一个将望远镜和六分仪之类的仪器相结合,并为开普勒(Kepler,J.)的天文理论提出过改进意见.

维蒂赫(Wittich 或 Wittichius,Paul,1555? —1587) 波兰数学家. 生于西里西亚的布雷斯劳(Brelau,今波兰弗罗茨瓦夫 Wrocfaw),卒于布雷斯劳. 生平不详. 1580 年,他结识天文学家第谷(Tycho B.),并与之合作. 1582 年执教数学,两年后到卡塞尔(Kassel)讲授数学. 他在化简三角问题的计算中发现了一些新方法,得到了球面三角形边角关系的若干公式.

马吉尼(Magini,Giovanni Antonio,1555—1617) 意大利数学家、天文学家、地理学家. 生于帕多瓦,卒于波伦亚. 1579 年,他毕业于波伦亚大学,1588 年受聘为该校两名数学教授之一,讲授内容包括天文学和神学. 数学上,他发表过自然数的平方表(1592)、球面几何学(1592)等论著. 在 1609 年出版的较为精确的三角函数表中,他引入了余弦、余切和余割概念. 此外,他还写过大量天文学著作,并在地理学中绘制了意大利地图册.

哈里奥特(Harriot,Thomas,1560? —1621) 英国数学家、天文学家、物理学家. 生于牛津,卒于伦敦. 就学于牛津大学,曾受聘为远征队专家,前往美洲弗吉尼亚考察. 他几乎不发表科学论文,可能是由于外部环境及他总想把工作推进一步的缘故. 他留有一万多页(对开)的科学著作手稿,内容包括测量法、图解及与不同领域实验和理论工作相关的计算.

哈里奥特的主要著作《实用分析技术》(1631),是在他去世 10 年后才发表. 这本书对方程的性质及结构做了深入研究,探讨了给定根方程形式、根与系数关系及根的个数法则等,遗憾的是没有认识到虚根和负根,因而没能得到任何方程皆可分解的结论. 他第一个将方程分解为简单因子乘积的形式,并在数学符号上有所创新,引进了一些简便的代数符号,如"＞"(大于)、"＜"(小于)和用 a 表示未知数. 他在解析几何上的贡献是:证明球极射影是保形的,并将球面上的恒向线变换成赤道平面的等角螺线. 他还在光学、天文观测、弹道学、物质比重理论等方面做了许多工作. 还曾画过月球地图.

贝德韦尔(Bedwell,William,约 1561—1632) 数学家. 国籍和生平不详. 1581 年就读于英国剑桥大学,1588 年获该校硕士学位,1604 年成为威斯敏斯特(Westminster)圣经翻译会成员. 他以对数学包括阿拉伯数学著作翻译而闻名于世. 1636 年翻译《算术》、《几何之路》等. 他著有《几何数论文》(1614),其中探讨了木工角尺的应用.

芬克(Fink,Thomas,1561—1656) 丹麦数学家、天文学家、医学家. 生于弗伦斯堡(Flensburg,今属德国),卒于哥本哈根. 1577 年就学于法国斯特拉斯堡(Strasboutg),1582 年起先后到德国、瑞士和

意大利的多所大学学习，1587 年获医学博士学位.1591 年任哥本哈根大学数学教授.后教过修辞学和医学，并居大学高位要职直至 95 岁去世前几年.芬克的代表作是《圆的几何》(1583)，论述了圆、三角形及球面三角学的有关问题，引入了“正切”(tangent)、“正割”(secans)等术语和若干新公式，如正切法则等.此外，他还写过占星术和天文学等方面的论著.

布里格斯(Briggs，Henry，1561—1630) 英国数学家.生于约克郡(Yorkshire)，卒于牛津.1581 年获剑桥大学圣约翰学院学士学位，1585 年获硕士学位.1592 年成为数学讲师，1596 年成为伦敦新成立的格雷沙姆(Gresham)学院的第一位几何教授.1619 年后任牛津大学几何教授.

布里格斯从 1615 年 3 月 10 日起，他完全沉迷于对数的研究，与纳皮尔(Napier，J.)一起探讨将纳皮尔双曲形式对数加以改造，后成为以 10 为底对数，也称布里格斯对数或常用对数.在 1617 年发表的《一千个数的对数》中，他评注了新形式的对数以及有关球面三角的结论.主要成就是《对数算术》(1624)包含从 1 到 20000 及从 90000 到 100000 以 10 为底的整数对数值，还详细阐述了求对数的方法，即把 10 不断开平方，把前一平方根的对数除以 2 就可得后一平方根的对数.他曾在盖利布兰德(Gellibrand，H.)帮助下制作了每隔 10/1000 的正弦和正切的 13 位对数表，并以《不列颠三角学或关于三角的学说》书名出版.此外，他还翻译、编辑过欧几里得(Euclid)的《几何原本》的前 6 卷；研究过一些有关航海的问题；制作了在给出磁偏角的情况下可查出当地北极星高度的数值表等.

皮蒂斯楚斯(Pitiscus，Bartholomeo，1561—1613) 德国数学家.生于西里西亚(Silesia)的绿山城(Grünberg，今属波兰)，卒于海德堡(Heidelberg).曾在布雷斯劳(Breslau，今波兰的弗罗茨瓦夫)任牧师.

皮蒂斯楚斯的主要贡献在三角学方面.1595 年出版了《三角学，解三角形的简明处理》一书，创造了“trigonometry”一词，显然是仿照“几何学”一词的构词法，由“triangulum”(三角形)和“metricus”(测量)两词凑合而成.这本书于 1600 年再版，改名为《三角学或三角形测量》(5 卷)，后来又有增订版(1609).全书分为三部分：第一部分 5 卷，介绍了平面和球面三角学；第二部分是三角函数的 5 位或 6 位函数值表；第三部分是应用题.书中还给出了三角函数的概念、正余弦定理.他还编辑修订了雷蒂库斯(Rhaeticus，G. J.)的函数表，于 1596—1613 年重新出版，将雷蒂库斯每隔 10″的正弦值计算到了 15 位小数，把其余的正弦值算到了 22 位小数.他的工作对欧洲三角学的发展曾产生很大影响.

兰斯贝尔热(Lansberge，Philip Van，1561—1632) 比利时-荷兰数学家.生于比利时根特(Ghent)，卒于荷兰米德尔堡(Middelburg).早年在英国学习数学和神学，1579 年回比利时充任新教牧师.1585 年移居荷兰，先后在莱顿、泽兰(Zeeland)和米德尔堡等地传教.

兰斯贝尔热的代表作是《三角形的几何学》(1591)，书中对三角函数定义、三角函数表、解平面三角形及球面三角形进行了讨论.他还将圆周率 π 计算至 28 位小数值，并撰写了天文测量(1581)和行星运动理论(1619—1632)方面的论著.

罗 门(Roomen，Adriaan van，1561—1615) 比利时-德国数学家、医学家.生于比利时的卢万(Louvain)，卒于德国的美因茨(Nainz).他曾在科隆(Cologne)耶稣学院学习数学和哲学.1586—1592 年任卢万大学医学和数学教授，后来成为维尔茨堡大学医学教授，1596—1603 年又任该大学数学教授.并曾拜访过韦达(Viete，F.).1598 年在布拉格担任御医，受封为享有王权的伯爵.

罗门的重要工作之一是解决数学课题，特别是三角学和圆内弦的计算.他发现三种计算正多边形边的方法，其中之一是用代数方程.他用不断增加边数计算正三边形、四边形、五边形和十五边形的边，一直计算到了 32 位小数，但无证明.他还计算了 $15 \cdot 2^{60}$ 边形的边长，并用 251，658，240 边形计算 π 值到 16 位小数.在他的论文中，他向所有几何学家提出了著名的 45 次方程的问题.韦达给出了解答，反过来，韦达又向他提出阿波罗尼奥斯问题：作一圆切于三个给定的圆.罗门在他的论文《阿波罗尼奥斯问题》(1596)中给出了解答，他用两条双曲线相交的方法解决了该题.他的主要著作有《天文学之鉴》(1606)、《球面三角学法则》(1609)等.他首次系统地使用了三角符号.另外，他还计算过九边形、十八边形边长到 108 位小数，将平方根计算到 220 位和 300 位小数，评注过花拉子米(al-Khowārizmī)、阿基米德(Archimedes)的著作.

赖 特(Wright，Edward，1561—1615) 英国数学家、航海学家.生于诺福克郡，卒于伦敦.1576 年入剑桥大学学习，1584 年获硕士学位后，留校任教.1589 年参加了远征亚速尔(Azores)的探险，10 年后写成《航海中的失误》(1599)一书，用数学方法和充足的事实论证了墨卡托(Mercator，G.)的地图绘制方案，得到了详细的纬度数据表及其计算方法，推进了制图学的发展.他还翻译过数学家纳皮尔(Napier，J.)的对数等著作(由拉丁文译为英文)，去世后由儿子出版.

拜 尔(Beyer，Johann Hartmann，1563—

1625） 德国数学家.生于莱因河畔的法兰克福(Frankfurt an Main)，卒于法兰克福.先在法国斯特拉斯堡(Strassburg)学习，后于德国蒂宾根大学取得医学博士学位.他曾当选过国会议员和市长，同开普勒(Kepler，J.)等许多数学家有通信联系.1596年，他在德国独立发明十进分数，并在1603年出版了《小数计算》一书.

伽利略(Galilei，Galileo，1564—1642） 意大利数学家、天文学家、物理学家、哲学家.生于比萨，卒于佛罗伦萨附近的阿切特里.1581年入比萨大学学医，后改学数学和自然科学.1585年退学回家，自学欧几里得(Euclid)和阿基米德(Archimedes)的著作.自1589年先后任比萨大学和帕多瓦大学数学教授.1610年被迈地奇的大公爵科西莫二世(Cosimo，Ⅱ)邀请到佛罗伦萨任宫廷首席数学家.由于他拥护并积极宣传哥白尼(Kopernik，M.)的日心说，触怒了罗马教皇，1633年被判处终身监禁.晚年双目失明，死于幽禁之中.

伽利略是历史上最伟大的科学家之一，常被称为近代发明之父，曾独立发明了显微镜，设计了第一个摆钟.他开创了经典力学和实验物理学的先驱，发现了物体的惯性定律、单摆振动的等时性、抛物体运动规律，并确定了相对性原理，推翻了亚里士多德(Aristotle)关于“物体落下的速度和重量成比例”的学说，建立了落体定律.他的工作为牛顿力学的诞生开辟了道路.他是近代声学的先驱者，提出过一种声波理论，并且开展了音调、谐音和弦振动的研究工作.梅森(Mersenne，M.)和牛顿(Newton，I.)继承了他的这一工作，成了18世纪数学发展的重要源泉.在数学上的贡献是他相信自然界是用数学设计的，认为任何科学分支都应通过数学进行研究，从而开创了科学实验与数学相结合的新途径——“实验数学”，其特点是所提出的假说必须数学化.伽利略明确提出自然科学应用数学来描述.他还是一位伟大的哲学家，认为经验是知识的惟一源泉.他承认世界的客观性、宇宙的无限性和物质的永恒性.他曾发明过比例规，求出了摆线一个拱下面面积，并发现了对摆线作切线的方法.他的主要著作有：《关于两种世界体系的对话》(1632)、《关于两种新科学的论述和数学证明》(1634).1983年，罗马教正式承认350年前宗教裁判所对伽利略的审判是错误的，并公开予以平反.

盖塔尔迪(Ghetaldi，Marino，1566或1568—1626） 南斯拉夫数学家.生于拉古萨(Ragusa，今杜布罗夫尼克 Dubrovnik)，卒于拉古萨.曾在当地受过教育，后去罗马并游学欧洲.他深受意大利文化影响，是文艺复兴运动晚期的追随者.1603年，他回到罗马，开始出版希腊早期的科学文献，包括阿基米德(Archimedes)、阿波罗尼奥斯(Apollonius，(P))等人的著作及详尽的注释.

盖塔尔迪对几何与代数之间的联系进行过研究，在代数方程求根中用几何法证明了代数法则，反之又用代数方法解决几何问题，成为解析几何的早期探索者.他的论述还涉及数理逻辑的某些术语和力学、天文学等内容.

哈特曼(Hartmann，Johannes，1568—1631） 德国数学家、医学家.生于安贝格(Amberg)，卒于卡塞尔(Kassel).曾在耶拿(Jena)、维滕贝格(Wittenberg)等地大学学习艺术和数学，1591年在马尔堡(Marburg)大学获硕士学位，次年任该校数学教授.1606年获医学博士学位.1609年任医学教授.哈特曼著有《初等几何研究》(1600)等数学、天文学和医学论著，并较早地将药物学和医药化学引入了大学医学课程.

凯克尔曼(Keckermann，Bartholoew，1571—1609） 波兰天文学家、数学家.生于波兰但译(Danzig，现格但斯克)，卒于但译.1590—1592年间，曾先后在维腾贝格(Wittenberg)大学、莱比锡大学、海德堡大学学习.1595年获硕士学位，其后任教于海德堡大学，1600年成为希伯来文教授，1602年获神学博士学位，并被聘为但泽大学预科的哲学教授.

凯克尔曼推行教学改革，提出过用三年时间使年轻一代接受多种学科教育的设想.他还首次从理论上对体系(system)进行讨论，主张每一门科学要有自己的一套规则，这些规则支配着整个学科.他把这种思想引进课堂，并运用这一观点从哲学和教学法的角度论述了逻辑、政治、物理、形而上学、伦理学、神学、地理、几何、天文、光学等学科.著作有《物理宇宙系统论》(1610)等.

布　劳(Blaeu，Willem Janszoon，1571—1638） 荷兰数学家、天文学家、制图学家.生于阿尔克马尔(Alkmar)，卒于阿姆斯特丹.师从第谷(Tycho B.)，在阿姆斯特丹创办商行，出售地球仪、数学仪器、图表等，并由此而扬名.著有《天文仪器》，但到1688年才出版.1631年，他还绘制了系列地图集，后由其子完成.

开普勒(Kepler，Johannes，1571—1630） 德国数学家、天文学家、物理学家.生于魏尔(Weil)，卒于雷根斯堡(Regensburg).开普勒自幼体弱多病，但聪明好学，智力超群.1584年入教会学校读书，1587年就学于蒂宾根大学，次年获得文学学士学位，1591年又获硕士学位，并开始深造神学.1594年因格拉茨(Graz)一所教会学校的一名数学教师去世，开普勒被推荐就任这一教职，从此走上了科学研究之路.1600年到布拉格与天文学家第谷(Tycho B.)合作

研究天文学.第二年第谷去世后开普勒继承了他的未竟事业,被任命为皇家数学家.此后虽又历经坎坷,但他潜心学术,新作叠出,成为了著名科学家.

开普勒是在数学理论应用方面卓有成就的学者.最突出的贡献是发现了行星运动三大定律:

1.行星的轨道是椭圆,太阳居其焦点之一.

2.在相等的时间内,行星与太阳的连线所扫过的面积相等.

3.行星公转周期的平方同轨道半长轴的立方成正比.

开普勒定律消除了以往人们对太阳的偏见,支持了哥白尼(Kopernik,M.)的学说,为牛顿万有引力定律的发现铺平了道路.他的有关名著《新天文学》(1609)、《宇宙的和谐》(1619)等在一定程度上左右了人们对整个世界的认识.他还是微积分学的先驱者之一,在《测量酒桶的新立体几何》(1615)中,用通俗语言引入了无穷大和无穷小的概念,指出"圆是由无数个顶点在圆心的三角形构成,圆周是由这些三角形的无穷小底边构成".他用同样的思路阐明了构成圆锥和棱锥的学说,扩展了阿基米德(Archimedes)求曲边形面积的穷竭法.他还研究了各种旋转体的性质,把无限小的弧看成直线,把无限窄的面看成直线,把无限薄的体看作面,讨论了90多种各类体积问题.他的朴素的积分思想是卡瓦列里(Cavalieri,(F.)B.)不可分原理的先导.此外,该书还研究了等周问题,即用尽可能少的材料建造容积尽可能大的容器.他还提出判别一个变量极值的方法,即在一个极值近邻,该变量的值实际上保持不变.他的《光学天文》(1604)是几何光学的基础,其中研究了二次曲线的相互转化问题,提出了平行线的无穷远点概念.他还提出了与蜂房结构有关的数学问题,引入了"轨迹"术语,讨论过黄金分割.他的宇宙结构说、日心说、星表编制、眼镜助视原理等均是各领域的经典之作.

戈克伦纽斯(Goclenius,Rodolphus,1572—1621) 德国医学家、数学家.生于维腾贝格(Wittenberg),卒于马尔堡(Marburg).戈克伦纽斯曾在马尔堡、哥本哈根等地学习,1601年获马尔堡大学医学博士.曾任物理学、医学、数学教授.著有占卜、药物方面的书籍.

奥特雷德(Oughtred,William,1575—1660) 英国数学家.生于白金汉郡(Buckinghamshire),卒于萨里(Surrey).就读于剑桥大学国王学院(King's College),1600年获硕士学位.1603年被任命为牧师,5年后提任艾尔伯里(Albury,在伦敦附近)教区的教区长.他花了大半生时间从事数学研究工作.

奥特雷德的主要著作《数学之钥》仅100页,却包含了两个数学分支:算术和代数,当时几乎所有的有关内容.这本书在英国和欧洲大陆产生了极大的影响,牛顿(Newton,I.)曾给予高度的评价.书中引进一系列符号,并用符号表示数量、幂次和算术、代数的基本运算,主要有:"×"表示"乘","⊐"表示"大于","⊏"表示"小于","∽"表示"差",用一点表示"比",用"::"表示"比例",用"∺"表示"连比".他还采用了简乘法和简除法,指出符号"+"和"-"的两种用途的差别.在此书的后一版里,用"π/δ"表示圆周率,这是首次将π与圆周率联系起来.《比例圆与水平仪器》(1632)原文为拉丁文,后由他的学生福斯特(Foster,S.)译成英文.书中详细地描述了圆形计算尺(好几个套在一起的圆环,可两面使用),并叙述了已构思的直线型计算尺.《三角学》(1657年),探讨了平面三角形和球面三角形问题,采用了缩写符号"s"表示正弦、"t"表示正切、"se"表示正割、"sco"表示余弦、"tco"表示余切、"seco"表示余割.在奥特雷德所采用符号中,只有少数现在仍被使用.

卡斯泰利(Castelli,Benedetto,1577—1644) 意大利数学家.生于佩鲁贾(Perugia),卒于罗马.他在帕多瓦师从伽利略(Galilei,G.),后去佛罗伦萨学习.他当过修道院院长,曾在比萨、罗马等地从事数学教学工作,是托里切利(Torricelli,E.)的老师.他还研究过洪水治理、排水法,汇编了达·芬奇(daVinci,L.)的笔记,发明了太阳望远镜.著作有《稳态水流连续性定律研究》,该定律被称为卡斯泰利定律.

古尔丁(Guldin,Paul,1577—1643) 瑞士数学家.生于圣加尔(St. Gall),卒于奥地利格拉兹(Graz).早年当过金匠,曾到德国许多城镇谋生.20岁时成为耶稣会士.1609年到罗马深造,后在罗马和格拉兹等地教会学校讲授数学.还曾任过维也纳大学数学教授.他以独立发现(1635)帕普斯定理而著称,即平面图形绕同一平面内不与之相交的轴旋转,所产生的立体体积等于这图形面积乘以图形重心所描画出的圆周长.因此该定理也称为"古尔丁定理".他还研究过对数、无穷小理论、阿基米德(Archimedes)重心测量法、地球运动等许多数学和物理学问题,并对传入西欧不久的格里历(Gregorian calendar)进行过论述(1618).

罗 特(Rothe,Peter,约1580—1617) 德国数学家.生于因戈尔施塔特(Ingolstadt),卒于纽伦堡.他的主要贡献是对代数方程理论的研究,并探讨过三、四次方程的解法.1608年,他首次提出代数基本定理:"n个代数方程可以有n个根."但没引起当时人们的注意.1629年,这一定理被荷兰数学家吉拉尔(Girard,A.)重新提出.

斯内尔(Snel,Willebrord,1580—1626) 荷兰数学家、天文学家、光学家.生于莱顿,卒于莱顿.他

父亲是莱顿大学数学教授.他从小受父亲影响,喜爱数学,曾到德国、瑞士、法国等地学习.1613年,继父业从教.两年后任教授.早年从事拉丁文本的翻译工作,将古希腊数学家阿波罗尼奥斯(Apollonius,(P))有关平面轨迹的两部著作译为了拉丁文版(1608),还翻译注释过其他数学家的著作,后来的研究成果有:子午线三角测量法的创立(1615)、三点退行问题(斯内尔问题的研究)、"斜驶线"的命名、光的折射定律(斯内尔定律)(1621)等.

昂里翁(Henrion,Denis 或 Didier,1580?—1632?) 法国数学家.出生地不详,卒于巴黎(?).主要从事私人教学和翻译工作.1613年,出版了他的第一部著作《基础数学教程》,1626年,出版了《论对数》,它是法国出版的第二部对数著作.此外,他还将欧几里得(Euclid)的《几何原本》、西奥多修斯(Theodosius,(B))的《球面学》等著作由拉丁文译成了法文.

韦尔内(Vernier,Pierre,1580—1637) 法国数学家.生于奥尔南(Ornans),卒于奥尔南.早年跟随父亲学习,曾在西班牙低地国家任过公职.著有《新发明数学象限的性质及使用》(1631),还独立发明了游标尺.现在外语书中的"游标尺"(英、法语 Vernier,俄语 Верньер)一词,就是以他的名字命名的.

福尔哈贝(Faulhaber,Johann,1580—1635) 德国数学家.生于乌尔姆(Ulm),卒于乌尔姆.早年学纺织,后转向数学研究.1600年自办一所数学学校,自己编写讲义,自己任教,后来发展成为一所综合性学校.他著的《算术指南》(1614)是当时较好的教材.他是对数理论的早期研究者之一,自己制作了1—10000的七位对数表(1630—1633).他还对高阶代数方程、幻方理论、级数理论、数论、平面三角与球面三角、圆内接正七边形等问题有自己的论述,并得到了高达13次幂的自然数幂求和公式(1620)等结果.他与笛卡儿(Descartes,R.)、开普勒(Kepler,J.)等学者都有交往,并受到后者的赞誉.他还设计过测量长度、体积和重量的计量壶(1622).

冈　特(Gunter,Edmund,1581—1626) 英国数学家.生于哈福德郡(Hertfordshire),卒于伦敦.冈特祖籍威尔士,在威斯敏斯特(Westminster)学校和教堂受教育.1603年获牛津大学硕士学位.1619年任伦敦格雷莎姆(Gresham)学院天文学教授.直至突然早逝.他在第一本出版的著作《三角法则》(1620)中给出第一张相隔一分的七位数正弦对数表和正切对数表,并引入余弦(cosine)和余切(cotangent)概念.他擅长简化计算,是对数计算尺的发明者,在《函数尺》(1623)中设计了一种含有正弦、正切、对数刻度的函数尺,化乘除为加减运算,被称为"冈特尺",是现代计算尺的前身.他还发明了用于测量田亩的"冈特链"等工具,促进了生产技术的改进.

巴　歇(Bachet de Méziriac,Claude-Gaspar,1581—1638) 法国数学家.生于法国布雷斯地区布尔格(Bourg-en-Bresse),卒于布尔格.6岁时巴歇接受教会的早期教育.他是数学游戏的先驱之一,对数学、历史、诗歌等富有创见,被誉为17世纪最有才华的人.

巴歇的主要贡献是数论和数学游戏.1612年,他出版了《有趣的问题》,1621年,把丢番图(Diophantus)的《算术》的希腊文本译成拉丁文出版,其中还补充了自己对数论和丢番图分析的研究成果.这部著作对费马(Fermat,P.de)影响很大,为费马创立费马大定理奠定了基础.他于1635年被选为法国科学院成员.

胡　德(Hood,Thomas,活跃于1582—1598年前后) 英国数学家.生平不详.1585年获剑桥大学物理博士学位.1588—1592年在伦敦讲授数学.著作有《几何原理》(1590)、《算术原理》(1596)、《一种几何工具——两脚规的制作与应用》(1598)等.此外,他还设计过有关图表和仪器.

安德森(Anderson,Alexander,1582—1619) 苏格兰数学家.生于苏格兰阿伯丁(Aberdeen).在巴黎以讲授数学为业.他还注释过大批古希腊数学著作,包括《阿波罗尼奥斯著作补遗》(1612)等.他是韦达(Viete,F.)的朋友,在韦达去世后,他整理出版了韦达的大量著作,并进行了适当的修改和补充,如韦达的《论方程的识别与订正》(1615).他首次用引进辅助角的方法,依靠三角形的一角及其夹边的对数来确定该三角形的其余二角.

迪歇纳(Duchesne,Simon,活动年代为1583年前后) 数学家.出生于法国的达勒(Dale).国籍和经历不详.因为他是加尔文教徒而遭受迫害,故移居荷兰代尔夫特(Delft),在那里从事数学教学工作.1584年出版了《圆的求积》,研究过化圆为方的问题.

博勒斯(Borrus,Christopher,约1583—1632) 天文学家、数学家.国籍不详.生于意大利米兰,卒于罗马.他是耶稣会士,曾在澳门、科钦、中国内陆等地传教,在葡萄牙科英布拉大学讲授数学.他应用磁差确定了海上经度,并制作了大西洋、印度洋磁力表.此外,他还有天文、航空、星象学等方面的著作.

圣樊尚(Saint Vincent,Gregorius,1584—1667) 比利时数学家、天文学家.生于布鲁日(Bruges),卒于根特(Ghet).他11岁入耶稣会学校,17岁研习哲学和数学,21岁成为修道士,29岁任神父.他先后在比利时和意大利的多座城市讲授数学.曾为西班牙马德里研究院成员.

圣樊尚的代表作《圆与圆锥曲线求积的几何学》(1647),长达1250对折页,十余卷.内容包括圆与三角形的性质,用渐近线方法求双曲线的面积定理等.他对阿基米德(Archimedes)、阿波罗尼奥斯(Apollonius,(P))等希腊数学家的二次曲线理论有所发展.他的求积方法与卡瓦列里(Cavalieri,(F.)B.)的方法类似,是微积分学的先驱.

米多尔热(Mydorge,Claude,1585—1647) 法国数学家、物理学家.生于巴黎,卒于巴黎,他的家庭富有,早年热衷法学,曾任沙特莱(Châtelet)市政委员,又任亚眠(Amiens)财政官员.1625年结识笛卡儿(Descartes,R.),遂成挚友,从此专事几何学研究,著有《圆锥曲线》(1631—1639,1644重印),发展了阿波罗尼奥斯(Apollonius,(P))等数学家已有的结果,得到许多新的解题方法,其中解决"在已知圆锥上作出已知圆锥曲线"等,受到后人称赞.他还著有《数学游戏》(1624),并在光学等领域也有所建树.

施文泰尔(Schwenter,Daniel,1585—1636) 德国数学家.生于纽伦堡,卒于阿尔特多夫(Altdorf).1608年任阿尔特多夫大学希伯来语教授,1625年任东方语教授,1628年成为数学教授.他对连分数颇有研究,首次将连分数引入计算.主要著作有《引人入胜的物理数学》,于1636年施文泰尔去世后才出版.

布罗泽克(Brozek 或 Broscius,Jan,1585—1652) 波兰数学家.生于波兰谢拉兹(Sieradz)附近,卒于克拉科夫(krakow).他在克拉科夫大学毕业后任牧师,1614年成为克拉科夫大学教授.此后,他的职位不断更换.他与罗门(Roomen,A. van)关系密切.曾到波兰的托伦(Torun)、格但斯克(Danzig)等地收集过有关哥白尼(Kopernik,M.)的资料,发表过的30多种著作大部分涉及到哥白尼.布罗泽克最重要著作是《整数算术》(1620),这是一本介绍新对数的数学手册.他还曾研究过完全数、亲和数、初等数论的基本定理及著名的费马大定理.

特 纳(Turner,Peter,1586—1652) 英国数学家.生于伦敦,卒于伦敦.1612年获牛津大学文学硕士学位.1620年任格雷沙姆(Gresham)几何学教授,1630年又任萨维尔几何学教授,还曾到伦敦大学讲学.1641年被查理王(King Charles)延聘,是获此殊荣的首位英国学者.特纳的数学著作均已失传.据同代学者载述,他精通拉丁文、希腊文、希伯来文及阿拉伯文,撰写过一些译著.

卡贝奥(Cabeo,Niccolo,1586—1650) 意大利科学家.生于费拉拉(Ferrara),卒于热那亚.他是天主教耶稣会士,曾在帕尔马教神学和数学,后在意大利各地传教.定居热那亚时,他结识了物理学家巴利亚民(Baliani,G. B.),诠释并传播了巴利亚民有关自由落体运动的观测结果:不同重量的物体在相同的时间内下落的距离相等.这启发了伽利略(Galilei,G.)设计出著名的比萨斜塔实验.

祖 基(Zucchi,Niccolò,1586—1670) 意大利数学家、神学家.生于帕尔马(Parma),卒于罗马.祖基曾在罗马耶稣会学院讲授修辞学、神学和数学.后遇到开普勒(Kepler,J.),深受其影响.他以发明早期反射望远镜而出名,并用此观察到火星上的斑点.

容吉乌斯(Jungius,Joachim,1587—1657) 德国科学家.生于德国吕贝克(Lübeck),卒于汉堡.1606年就读罗斯托克大学,1608年于吉森大学获硕士学位,毕业后任数学教授,1616年获罗斯托克大学医学博士学位.曾任过汉堡大学自然科学教授.在数学方面,容吉乌斯解决过大量算术和几何问题,证明了悬链线不是抛物线,还是最早用指数表示乘方的.他主张用数学作为一般科学的模型,科学的论断应根据原理及定义通过证明或完全及不完全的归纳而得到,还进一步阐述数学的作用.他在天文学方面观测到过太阳的黑子,还深入探讨过植物学和化学.

贝克曼(Beeckman,Isaac,1588—1677) 荷兰物理学家、数学家.生平不详.原子论者,他是笛卡儿(Descartes,R.)的朋友.研究过物体的碰撞,还曾与笛卡儿一起研究过落体,并用公式表述了落体定律;曾宣称空气是有重量的,真空是存在的;相信运动守恒定律.主要著作《数学物理》于1644年完成.

布拉默(Bramer,Benjamin,约1588—1652) 德国数学家.生于德国费尔斯贝格(Felsberg),卒于齐根海因(Ziegenhain).他有建筑才能,曾任马尔堡(Marburg)的建筑师.他的兴趣相当广泛,曾深入探讨过真空的问题.1614年首次发表关于正弦计算的文章;1617年出版《平面三角学》一书,阐述了如何用器具画真实反映自然界的几何透视图.

霍布斯(Hobbes,Thomas,1588—1679) 英国数学家、哲学家.生于马姆斯伯里(Malmesbury),卒于德比郡(Derbyshire)哈德威克(Hardwick).霍布斯早年学拉丁文和希腊文,14岁入牛津大学读书,喜爱天文学和地理学.1608年受聘为贵族的家庭教师.后数次陪同学生访问欧洲大陆,与伽利略(Galilei,G.)、培根(Bacon,R.)、笛卡儿(Descartes,R.)等著名学者都有交往.1646年受聘为流亡法国的英国王子查理二世(Charles,Ⅱ)的数学教师.

霍布斯写过几何学方面的论著,并在光学和哲学领域有所创建.他是欧洲近代哲学史上第一个机械唯物主义者,提出"自然状态"学说,用数学和力学说明一切.他将一般概念看作"符号",用逻辑思维进行数学的演算,强调几何学的理性演绎法.曾与牛津大学的教授们争论有关的数学问题长达20年之久.

帕斯卡(Pascal,Étienne,1588—1651) 法国数

学家.生于法国中部克莱蒙费朗(Clermont - Ferrand),卒于巴黎.帕斯卡(Pascal,B.)之父.帕斯卡,É.曾在下奥弗涅(Bas - Auvergne)当律师,1625年任法院(Cour des Aides,审理间接税案的最高法院)院长.他经常参加"梅森学会"(法国科学院前身)的活动,由此与数学家罗贝瓦尔(Roberval,G. P. de)、德扎格(Desargues,G.)、米多尔热(Mydorge,C.)等熟识.他的主要贡献是:在解决三等分任意角问题时,引入了圆的蚌线,后来罗贝瓦尔把它称为"帕斯卡蚶线".

梅　森(Mersenne,Marin,1588—1648)　法国数学家.生于缅因省(Maine),卒于巴黎.以神甫为职度过了大半生.他曾创办"梅森学院"(1666年改为巴黎科学院)并倾注了毕生精力.他与伽利略(Galilei,G.)、费马(Fermat,P. de)、笛卡儿(Descartes,R.)、帕斯卡(Pascal,B.)等学者长期有书信交往.他著有数学、哲学、光学、声学、力学、航海学、音乐等多方面的论著.他还曾在《物理—数学探索》(1644)中提出猜想:当 $p=2,3,5,7,13,17,19,31,67,127,257$ 这11个素数时,$M=2^p-1$ 为素数.后人发现该猜想不完全正确,但此类数有很多性质,为纪念提出者,将形如 2^p-1(p 是素数)的素数称为梅森素数.

卡彭特(Carpenter,Nathanael,1589—1635)　英国数学家、哲学家.生于德文郡(Pevonshire).在英国牛津大学学习两年,1607年获学士学位.1626年获博士学位后,曾在都柏林(Dublin)和切尔西(Chekea)等地任教.研究数学、哲学,还曾抨击过亚里士多德体系.他还著有地理方面的书籍.

诺伍德(Norwood,Richard,1590—1665)　英国数学家.生于赫特福德郡(Hertfordshire)斯蒂夫尼奇(Stevenage),卒于百慕大(Bermuda).早年就读于语法学校,15岁时随鱼贩学徒,接触了大批海员,向往航海并专心学艺.首次航行偶遇一位携带大量数学书籍的旅客.后来出航,他便自带数学书学习.1617年后在伦敦讲授数学,发表了《三角学或三角形学说》(1631)等数学和航海学方面的著作.他创用了许多缩写符号,如正弦 s、正切 t、余弦 sc、余切 tc 及正割 sec 等.1622年,他又出版了有关百慕大区域的地图,1635年测量过子午线的长.此外,他还曾为皇家学会的创建做出过贡献.

勒雷雄(Leurechon,Jean,约1591—1670)　法国数学家.生于巴勒杜克(Bar - le - Duc),卒于蓬特阿米松(Pont - à - Mousson).他曾以耶稣会士身份在修道院教授神学、哲学和数学.还先后撰写过天文学(1616—1619)、几何学(1622)及数学游戏文集(1624)等论著,其中数学游戏文集影响最大,仅17世纪就重版达30余次,为后继的数学家提供了各种有启迪意义的问题.

德扎格(Desargues,Girard 或 Gérard,1591—1661)　法国数学家.生于里昂,卒于里昂.曾任军事工程师和建筑师.与梅森(Mersenne,M.)、笛卡儿(Descartes,R.)、费马(Fermat,P. de)等著名数学家交往密切.他的第一本几何学著作《关于透视绘图的一般方法》,主要介绍了他的透视绘图方法,指出了他对平行和相交直线的新见解.此时,他的射影思想已露端倪.1639年出版了他的重要著作《圆锥曲线论稿》,书中集中体现了德扎格的新思想、新方法,是射影几何早期发展的代表作.但由于该书难以阅读,博格朗(Beaugrand,J.)等人又进行敌意的攻击,加之人们对综合法处理几何不重视,致使此书逐渐被遗忘.直到1845年,被法国几何学家沙勒(Chasles,M.)重新发现,人们才真正认识到它的价值,使其成为射影几何的奠基人之一.

德扎格的主要贡献是提出了无穷远点和无穷远线的概念,从而使平行和相交完全统一了起来.欧氏几何与射影几何的重大区别之一就是无穷远元素的引入,建立点列的对合定义,并获得一些重要结果.他提出圆柱和圆锥的统一思想,并且第一个采用射影的方法,统一研究圆锥曲线的问题;提出并证明了德扎格定理.所谓德扎格定理,即如果两个三角形 abl、DEK 对应顶点的连线 aD、bE、lK 共点(H),那么它们的对应边的交点 c、f、g 共线,其逆定理也成立.德扎格在射影几何学上的贡献是开创性的,他的无穷远元素的思想及射影的证明方法是射影几何学的基本内容.他的《圆锥曲线论稿》被列为纯粹几何的经典著作之一.他本人由于这些工作而被誉为17世纪最有创造精神的数学家.德扎格是一个为满足实际需要而进行理论研究的数学家,他曾写过一些绘图方面的书,介绍过运动透视原理的新方法.

席卡德(Schickard,Wilhelm,1592—1635)　德国数学家、科学家.生于黑伦贝格(Herrenberg),卒于蒂宾根(Jübingen).1611年获蒂宾根大学文学硕士学位后,继续学习神学和东方语言学,1617年转学数学与天文学.1619年任该校希伯来语教授.著有数学、天文学、光学、气象学和制图学等方面的论著.他还擅长机械制造的雕刻术,1623年制造了世界上第一台现代机械计算机工作模型,并建议天文学家开普勒(Kepler,J.)用此种仪器计算星历表.除此之外,他还制作过用于教学的天象仪.

温盖特(Wingate,Edmund,1593—1656,另一说1596—1656)　英国法学家、数学家.生于约克郡(Yorkshive),卒于伦敦.1614年获牛津王后学院(The Queens College)硕士学位,曾任查理一世(Charles,Ⅰ.)的未婚妻玛丽(Henriethe Marie)公主的英语教师.他一生著作颇多,因编著初等算术书

(英文版)而极负盛名.著有《对数算术》(1626;英文版1635),书中记载有1到1000的7位对数表及正弦、正切的对数.这是17世纪欧洲大陆出现的第一本常用对数表.他还著有《天然与人工算术》(1630),在书中他利用两条相对滑动的对数尺(与冈特尺类似),进行计算.此书曾多次印刷,流行了一个多世纪.此外,他还撰写过仪器制造方面的著作;还给出过最小公分母的求法.

吉拉尔(Girard,Albert,1595—1632) 法国-荷兰数学家.生于法国圣米希尔(St. Mihiel),卒于荷兰莱顿.生平不详.自幼在莱顿学习.编辑出版了斯蒂文(Stevin,S.)的《算术》等著作(1625,1634),出版过三角学(1626)、应用几何(1627)、代数学(1629)、数论等方面的著作.代表作是《代数新发现》(1629),书中较早地意识到了负数的几何意义,将负数与正数同样处理,认为二次方程可以有两个负根;进一步还使用了虚数,得到根与系数的关系表达式.他还给出了代数基本定理,但叙述不够完整.在数学符号的使用上他也有许多改进和建议,如三次方程中的根号等.此外,在三角学、椭圆几何及其应用方面也有贡献.

布尔丹(Bourdin,Pierre,1595—1653) 法国数学家.生平不详.他是耶稣会士,曾在巴黎教授修辞学达22年之久.主要著作有《数学教程》,出版于1646年.

博格朗(Beaugrand,Jean,1595?—1640) 法国数学家.生于巴黎(?),卒于巴黎(?).曾任法官,1630年左右活跃于法国的数学界.他同费马(Fermat,P. de)、梅森(Mersenne,M.)和德扎格(Desargues,G.)等数学家来往密切.后来由于学术争论,与德扎格决裂.他曾拜访过卡瓦列里(Cavalieri,(F.)B.)、卡斯泰利(Castelli,B.)、伽俐略(Galilei,G.)等人,并探讨过费马得出的一些结论,这些都记录于他的主要著作《大地静力学》(1636)中.1634年,他作为官方指定的科学家参与审评莫恩经度测定工作.他对德扎格的攻击被德扎格的论敌保存了下来,导致庞斯列(Poncelet,J.-V.)对德扎格工作重新发现.他还曾评注韦达(Viete,F.)的《分析方法入门》(1631).

马尔齐(Marci of Kronland,Johannes Marcus,1595—1667) 捷克斯洛伐克数学家、物理学家、医学家.生于兰什克龙(Lanskroun),卒于布拉格.在耶稣会学院受早期教育,后到布拉格学医,1625年获博士学位.长期任布拉格大学医学教授.著有力学(1639)、哲学、光学(1648)、神经学和心理学等方面的论著.业余研习数学,试图为力学引入数学模式,其力学等著作中包含此类尝试.

笛卡儿(Descartes,René du perron,1596—1650) 法国哲学家、数学家、物理学家、生理学家.生于法国图赖讷(Touraine)的小城拉艾(La Haye),卒于斯德哥尔摩.8岁入拉弗里镇的耶稣会学校读书.1616年获巴黎普瓦捷大学博士学位,当过律师.此后他开始长达10年的游历和军旅生活,在此期间与荷兰哲学家兼物理学家比克曼(Beeckman,I.)相识.他与梅森(Mersenne,M.)等人交往密切.1628年移居荷兰,开始长达20年的潜心研究和写作生涯.

笛卡儿建立的解析几何在科学史上具有划时代的意义.《几何学》(1637.莱顿)是他的惟一数学著作,全书分成三部分:

1.将几何问题化为代数问题.提出几何问题的统一作图法;将线段与数量联系起来,设立方程,根据方程对线段间的关系的解析表达进行作图.

2.给出解析几何的基本思想.将平面上的点与一种斜坐标确定的数对(x,y)联系起来,进一步考虑含两个未知数的二次不定方程,再依据方程的次数将曲线分类.从此,人类进入变量数学阶段.

3.讨论代数方程理论.他提出并直观论证了代数基本定理,首次给出了笛卡儿符号法则:多项式方程的正根个数不超过其系数的变号次数;而负根个数不超过同号系数连续出现的次数.他引进了本质上可代表任何一种量的符号体系,如用a、b、c等表示已知量,用x、y、z等表示未知量.他还批评了希腊人的综合几何,认为它过于依赖图形,束缚了人的想象力.

笛卡儿是欧洲近代哲学的主要开拓者之一,黑格尔称他是"现代哲学之父".他赞同培根(Bacon,R.)彻底破除旧哲学体系的观念,但强调以理性为主导的认识自然的方法.他把哲学看成一种完整的知识体系,并形象地比喻成一颗大树,树干是物理数学,树根是形而上学.他用自己的方法研究自然界,建立了宇宙万物形成和运行的机械模式,提出了对空间与物质的基本特性的看法,冲破了经学院哲学宇宙观神秘观念的羁绊.他的主要哲学著作有《方法论》、《哲学原理》、《指导思维的法则》(未最终完稿,1701年收于他的选集中)等.他还研究过光的本质、折射现象、物质的性质与结构、生理学、解剖学,定义过运动,提出三条运动定律.他的机械论自然观在历史上起过重要的启蒙作用.笛卡儿是17世纪及以后的欧洲哲学界和科学界最有影响的学者之一.他的科学成就影响了一大批著名的科学家,如牛顿(Newton,I.)、莱布尼茨(Leibniz,G. W.)等.

拉法耶(La Faille,Charlesde,1597—1652) 比利时-西班牙数学家.生于比利时的安特卫普(Antwerp),卒于西班牙的巴塞罗那(Barcelona).在安特卫普的教会学校接受早期教育,1603年成为马

林(Malines)耶稣会的见习修道士. 1620—1628 年在法国多勒和比利时的卢万等地任数学教师. 1629 年成为西班牙马德里帝国大学教授.

拉法耶被认为是格雷戈里(Gregory of St. V.)的门徒之一,以《关于圆及椭圆扇形重心的定理》(1632)而著称于世. 他首次算出圆扇形的重心,并给出 45 个命题,其中第 9 命题很有意思:AB、AC、AD 是三条给定直线,B、C、D 在一条直线上,$BD:BC=\angle BAD:\angle CAD$,如果 $BAD<CAD$,则 $AD<AC<AB$. 这个命题的证明在克拉维乌斯(Clavius,C.)的著作及《天文学大成》中可见.

盖利布兰德(Gellibrand,Henry,1597—1636) 英国数学家. 生于伦敦,卒于伦敦. 1615 年入牛津大学三一学院学习,1623 年获硕士学位,同年任皇家军事学院数学教师. 1627 年任格雷沙姆(Gresham)学院天文学教授. 主要工作是研究地磁偏角的长期变化,并以精确的计算表述船舶航行过程中遇到的问题,因而大大促进了英国航海业的发展. 其著作因他早逝多由他人出版,如有关三角学的教科书(1652)、《航行概论》(1631—1634 完成,1674 出版)等. 他还是数学家布里格斯(Briggs,H.)的好友,1633 年帮助完成了布里格斯的遗作《不列颠三角学》(Trigonometria Britannica)第二卷的编辑工作.

卡瓦列里(Cavalieri,(Francesco)Bonaventura,约 1598—1647) 意大利数学家. 生于米兰,卒于波伦亚. 1615 年成为耶稣会士. 1616 年入比萨修道院任职,在那里开始研究几何学. 1617 年结识伽利略(Galilei,G.),在交往中颇受教益. 1620 年回米兰修道院教神学. 1629 年由伽利略推荐任波伦亚大学首席数学教职,直至去世. 同时兼任波伦亚女修道院院长.

卡瓦列里的主要贡献是建立了不可分量方法,成为微积分发展史上的一个重要里程碑. 代表作有《不可分量几何学》(1635)和《六道几何练习题》(1647). 该方法基于下述假设:线是由无穷多个点组成,面是由无穷多条平行的等距线组成,体是由无穷多个平行的等距平面组成. 平面图形中相应的线段和立体图形中相应的平面就是不可分量. 书中提出后来以他的名字命名的原理:如果二等高图形(立体)在任一等高处的截线(面)恒相等,则其面积(体积)相等;如截线(面)恒成定比,则其面积(体积)也成这一比值. 它与中国的"祖暅原理"基本内容一致. 依靠这一理论,卡瓦列里用几何方法巧妙地求得若干曲边图形的面积,还证明了旋转体的表面积及体积公式. 其工作被确认为当时几何学的顶峰. 他还得到微分中值定理的一个几何形式,较早认识到对数的巨大价值;第一个得到透镜曲率半径与焦距的关系式,出版了天体测量专著. 此外,他还论述了声学原理在建筑中的应用等.

阿尔迪(Hardy,Claude,1598? —1678) 法国数学家. 生于勒芒(Le Mans),卒于巴黎. 1625 年于巴黎当律师. 他经常参加由罗贝瓦尔(Roberval,G. P. de)、梅森(Mersenne,M.)及其他法国几何学家创办的"梅森学院"(Académie Mersenne,当时巴黎数学家的一个民间团体,巴黎科学院的前身)的周会. 阿尔迪是米多尔热(Mydorge,C.)的朋友,因此认识笛卡儿(Descartes,R.). 为此,曾卷入笛卡儿和费马(Fermat,P. de)间关于极值和切线问题的激烈讨论,他支持了笛卡儿. 1630 年与 1638 年,他先后发表了《详细探索》和《批驳》两篇文章,指出了伊冯(Yron)用比例中项法解倍立方问题的错误. 他还把欧几里得(Euclid)的《已知数》(The data)的希腊本初版译成了拉丁文.

珀　蒂(Petit,Pierre,1598—1677) 法国物理学家、数学家. 生于蒙吕松(Montlucon),卒于巴黎. 1633 年迁居巴黎,他是笛卡儿(Descartes,R.)的学生、朋友和辩护人. 与帕斯卡(Pascal,B.)等人有过通信往来. 1667 年加入皇家学会. 著有《彗星的性质》(1665)、《冷和热的性质》(1671). 1646 年于法国鲁昂(Rouen)重复了托里切利(Torricelli,E.)的气压实验,并发表了实验过程. 这实验早于帕斯卡(Pascal,B.). 此外,他还发明了测量星距的仪器.

格里戈尔(Григор,К.,16 世纪末—17 世纪初) 亚美尼亚数学家. 生平不详. 他曾用亚美尼亚文编译了欧几里得(Euclid)的几何著作,采用了《几何原本》的各种欧洲译本中的符号,并广泛地收集了各种计算问题,尤其是应用问题,还介绍了无穷大、无穷小量的概念. 他所使用的术语,部分来源于阿拉伯人、波斯人和土耳其人的数学术语,与格里戈尔(Грцгор,М.)的译本不同.

比林斯利(Billingsley,Henry,?—1606) 英国数学家. 可能出生于坎特伯雷. 曾在英国剑桥大学圣约翰学院和牛津大学学习. 先后担任过伦敦名誉郡长、托马斯医院院长、伦敦市长. 1570 年,他首次出版了欧几里得(Euclid)的《几何原本》英译本.

布　伦(Brunn,Lukas,?—1628) 德国数学家. 生于德国安娜贝格(Annaberg),卒于德累斯顿(Dresden). 先后在里斯、安娜贝格、莱比锡、阿尔特多夫(瑞士)、纽伦堡等地学习. 著作有《透视画法问题集》(1615)、《欧几里得几何习题集》(1625). 在 1619 年,他还发明了精密测微计.

埃里冈(Hérigone,Pierre,? —1643?) 法国数学家. 祖籍在西班牙的巴斯克(Basque),大半生时间在法国当数学教师. 还任过审查数学课题的公职. 著作有《数学教程》(1634),共 6 卷,是用法语和拉丁语写的初等数学概要. 此书的特点是引入了一套数学

和逻辑符号，非常符合17世纪语言的思想，遗憾的是这本书没有引起当时人们的注意.

福斯特(Foster, Somuel, ?—1652) 英国数学家. 生于北安普敦郡(Northamptonshire). 1623年取得剑桥大学伊曼纽尔学院硕士学位. 1636年成为天文学教授. 著作有《象限仪的使用》(1624)、《日晷的技术》(1638)等. 他对日食、月食进行过观测研究，改进过观测行星的仪器.

勒唐纳(Le Tenneur, Jacques - Alexandre, ?—1652年以后) 法国数学家. 生于巴黎. 1651年任地方法律顾问. 他是数学家梅森(Mersenne, M.)的好友. 在他所著的《不可通约量》(1640)一书中，试图将代数学从希腊传统数学中独立出来，受到梅森的好评. 他还写了《自然加速运动》(1649)等，为伽利略(Galilei, G.)的自由落体学说作了理论上的探索.

拉卢韦(Lalourère, Antoine de, 1600—1664) 法国数学家. 生于法国上加龙(Haute - Garonne)的里约(Rieux)，卒于图卢兹(Toulouse). 1620年成为图卢兹的地方牧师，后来任该地大学数学、人文学、修辞学、希伯来文和神学教授.

拉卢韦被认为是与卡瓦列里(Cavalieri, (F.)B.)、费马(Fermat, P. de)、开普勒(Kepler, J.)等齐名的数学家，是现代积分学的先驱者，又是注释古希腊著作的专家. 他与费马、沃利斯(Wallis, J.)交往密切. 主要著作为《圆面积求法》(1651). 介绍了古尔丁(Gulin, P.)等人的著作. 他的思想主要来源于阿基米德(Archimedes)，用间接证明方法找到旋转体、圆柱体及曲边楔形的体积和重心. 1658年，帕斯卡(Pascal, B.)发起求与摆线相联系的面积和旋转体体积的公开竞赛，拉卢韦积极响应，展开了一场激烈的争论. 此外，他还深入研究自由落体，作切线的方法也颇有特色，其把切线的方向取为动点运动方向的观点，在运动学上有着重要的应用.

比 奥(Buot, Jacques, ?—约1675) 法国数学家、天文学家、物理学家. 生平不详. 1666年成为巴黎科学院创始成员之一. 次年7月与数学家、天文学家惠更斯(Huygens, C.)合作，观察并计算了土星光环与黄道的交角，后得到该值为31°38′35″的结果. 1670年，他又通过实验方法观察到水与油在冷凝过程中的不同. 此外，他还发明过一些天文观测仪器.

卡尔卡维(Carcavi, Pierre de, 约1600—1684) 法国数学家. 生于里昂，卒于巴黎. 1663—1683年任王室图书馆(后为法国科学院所在地)管理员. 工作期间结识了惠更斯(Huygens, C.)、费马(Fermat, P. de)、帕斯卡(Pascal, B.)、笛卡儿(Descartes, R.)等人，遂成密友，充当他们相互联系的纽带，为他们的著作出版和学术思想传播做了大量工作. 他还保存有费马和帕斯卡等人的手稿，并收藏有帕斯卡赠送他的一架早期计算机.

胡尔西乌斯(Hulsius, lerinus, 活动于1600年前后) 数学家. 国籍不详. 生于比利时的根特(Ghent)，但主要生活在德国纽伦堡. 著作有《几何象限仪》(1594)，通常将其归功于科利尼厄斯(Comelius de jueis)，但科利尼厄斯只画过一个图. 胡尔西乌斯还研究地理、数学、成比例罗盘等.

西尔毛斯(Ciermaus, Johnn, 约1600—1648) 数学家. 国籍不详. 生于低地国家(今荷兰)，卒于葡萄牙. 耶稣会士，后担任比利时卢万(Louvain)耶稣学院教授. 1640年首次提出自动计算机器的构想.

弗拉克(Vlacq, Adriaan, 1600—1666) 荷兰数学家、出版家. 生于豪达(Gouda)，卒于海牙(Hague). 受过良好教育，对数学感兴趣，曾是书商.

弗拉克将英国人用拉丁文写的有关新计算技术的书译成荷兰文出版，其中有纳皮尔(Napier, J.)和布里格斯(Briggs, H.)的对数书. 在他的《对数算术》(1628)中补充了20000—90000以10为底的对数，完善了布里格斯计划从1—100000的对数表. 在《三角对数表》(1633)中，他给出了以10″，即1/360度为间隔的正弦、正切和正割的7位对数值. 1636年，他出版了《1到10000的正弦、正切和正割值以及对数表》，书中首次指出常用对数的基本法则，如"1的对数是0，10的对数是1.000"等. 这些表在当时流传甚广.

邦 德(Bond, Henry, 约1600—1678) 英国数学家. 生平不详. 曾在查塔姆(Chatham)皇家船舶修造厂讲授应用数学，用20余年时间编制了航海日历. 他发表过关于确定经度的著作，并以罗盘变化预测年鉴而著称. 他还鉴定过莱特的余切对数表.

博 纳(Beaune, Florimond de, 1601—1652) 法国数学家. 生于布卢瓦(Blois). 早年从军并任军官，后来成为政府官吏和法律家. 曾任布卢瓦议会的议员、议长. 数学是他的业余爱好. 他是笛卡儿(Descartes, R.)的朋友，最早领会笛卡儿数学思想. 他向笛卡儿提供了著名的反切线问题，这一问题于1676年为莱布尼茨(Leibniz, G. W.)所解决. 博纳首先得到"方程 $ax+by=c$ 表示一条直线"的论断. 他的一部分工作已包含在笛卡儿的《几何学》中. 他还写过一本代数书《作出方程根的上下限》，他去世后于1659年在阿姆斯特丹出版，书中科学地处理了数字方程根的上、下限.

费 马(Fermat, Pierre de, 1601—1665) 法国数学家. 生于图卢兹(Toulouse)附近的一个皮革商家庭. 自幼接受了良好的家庭教育. 曾在图卢兹大学学习法律，并担任过律师. 从1631年到去世，他还一

直任图卢兹的议会议员.费马博览群书,尤其热爱古典文学,精通拉丁文和希腊文,数学只是他的业余爱好.他结交了当时许多著名的学者,如罗贝瓦尔(Roberval,G. P. de)、米多尔热(Mydorge,C.)、笛卡儿(Descartes,R.)、梅森(Mersenne,M.)、惠更斯(Huygens,C.)等,并经常互通书信,讨论新颖的数学课题.费马为人谦逊敦厚,公正廉明,生前不愿发表作品,他的许多发现都是通过给朋友的书信而为世人所了解的.去世后,由他的儿子费马(Fermat,F.)将其笔记、批注及书信加以整理,编辑成《数学论集》出版.

费马是17世纪上半叶杰出的数学家之一.他对于近代数论的研究在欧拉(Euler,L.)之前,无人能与之匹敌.他独立于笛卡儿发现了解析几何的基本原理;由于提出了求曲线的切线及其极大、极小点的方法,而被认为是微分学的创始人.通过与巴斯卡(Pascal,B.)的通信,成为概率论的共同创立者之一.在他的论文《平面与立体轨迹引论》中,通过引进坐标,用代数方程表示几何曲线,对解析几何的发展有重大意义.他把通常的抛物线方程 $ay=x^2$ 和等轴双曲线方程 $xy=a^2$ 推广为 $a^{n-1}y=x^n$ 的形式,后一方程确定的曲线,现在称为费马抛物线(当 $n>0$ 时)和费马双曲线(当 $n<0$ 时).他还曾指出含有三个未知量的方程表示一个曲面.费马曾把求极值点的方法应用于光学中,提出的"最短时间原理"与光线的折射定律相吻合.

费马在数论中得到许多重要结果.其中最出色的结果之一是下述定理:形如 $4n+1$ 的素数均能惟一地表示为两个平方数之和.另一个重要的结果是费马小定理:如果 p 是素数,a 是正整数,则 p 能整除 a^p-a.费马的许多命题中最著名的是费马大定理:当 n 大于2时,方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有正整数解.近十几年来,在这个领域取得许多很重要的突破,1995年终由怀尔斯(Wiles,A.)通过椭圆曲线的算术解决了费马大定理.

罗贝瓦尔(Roberval, Gilles Personne de, 1602—1675) 法国数学家、物理学家.生于法国桑利(Senlis),卒于巴黎.早年自学数学,1628年到巴黎,参加了"梅森学院",成为活跃分子.1634年获得巴黎皇家学院的教授职位.他是巴黎科学院的创始院士.

罗贝瓦尔主要贡献在几何学和代数学方面,并在微积分创立前为之做了大量的先驱性工作.他解决了一些等周形作图和极值解问题,独立于卡瓦列里(Cavalieri,(F.)B.),提出了无穷小几何的思想,并比卡瓦列里更接近定积分概念,运用"不可分原理"解决了许多面积和体积问题.他还引入了"运动合成"法则,把平面曲线看成是一个质点受两个作用力的合力所推动的运动轨迹,其切线由平行四边形法则决定.在物理学和天文学方面,他也有一些新的见解,倾向于实证主义的研究方法,曾做过关于真空的著名实验.

法布里(Fabri,Honoré,1607—1688) 法国数学家、自然哲学家.生于法国多菲内省(Dauphiné)大维里约(Virieu - le - Grand),卒于意大利罗马.早年接受耶稣会教育.1636年任牧师,1640年任里昂三位一体学院(Collège de la Trinit'e)哲学与数学教授,后任院长.1646—1680年在罗马宗教法庭工作.他曾从事广泛的科学研究,对当时需迫切解决的科学问题,如日心说、土星光环、潮汐理论、磁学、光学和运动学等均有贡献.在数学方面,他通过动力学的概念,重新解释了卡瓦列里(Cavalieri,(F.)B.)的不可分原理,并提出了不同的求积法.

托里切利(Torricelli,Evangelista,1608—1647) 意大利数学家、物理学家.生于法恩扎(Faenza),卒于佛罗伦萨.先后在法恩扎、罗马学习数学和礼学,后来接替伽利略(Galilei,G.)的职位.

托里切利在数学、物理学方面颇有贡献.他在其著作《几何学》中发展了卡瓦列里(Cavalieri,(F.)B.)的不可分原理,给出了不可分原理对立体图形的应用.用现代的术语来说,他的方法是用圆柱坐标下的积分来代换笛卡儿坐标下的积分.托里切利提出了所谓"通用定理",依据这一定理,可以利用两个积分间的关系求出图形的重心.他还讨论了求曲线的弧长问题;发现了微分学上一些关系式;确定了三角形内距三顶点距离之和最小的点,现今称为托里切利点.在《几何学》中,还有由伽利略创始的抛射运动的研究,引入了托里切利原理.他证明了对应于给定初速度和不同倾角的抛物线切于同一条抛物线,后者被称为托里切利抛物线.在数学史上,这是曲线族的包络曲线的第一个例子.他还做过许多有名的物理实验,包括研制液体温度计、望远镜的透镜等.特别是以他的名字命名的气压计实验,有力地证实了他关于大气压力的理论,在当时的物理学界引起了轰动.

佩　尔(Pell,John,1611—1685) 英国数学家.生于萨塞克斯(Sussex)的索斯威克(Southwick),卒于伦敦.1624年入剑桥大学三一学院和牛津大学学习,20岁的时候,他就掌握了拉丁文、希腊文、希伯来文、阿拉伯文、意大利文、法文、荷兰文和西班牙文.先后任阿姆斯特丹和布雷达大学教授.1663年被选为英国皇家学会会员.佩尔研究过化圆为方的问题,编制了平方数表,对数学符号的改革也有贡献,除号"÷"的出现就与他的工作有关.

阿尔诺(Arnauld,Antoine,1612—1694) 法国数学家、语言学家.生于巴黎,卒于比利时的布鲁塞

尔. 1641 年成为神父并获得神学博士学位. 1643—1656 年受聘于巴黎大学.

阿尔诺与笛卡儿(Descartes,R.)、帕斯卡(Pascal,B.)、莱布尼茨(Leibniz,G. W.)等数学家联系甚密,在几何、数论、幻方等方面都做过工作. 其著作《新几何学原理》吸取当时数学发展的新成果,重新处理了欧几里得几何学中的一些定理. 他曾提出 $1:(-1)=(-1):1$ 是否成立的问题,式中等式两端的值都等于 -1,此式应成立;但在左端比例前项大于后项,而在右端的前项却小于后项,此式不能成立;这被称为阿尔诺悖论. 此外,他还在语言学中也提出了许多新的观点.

塔　凯(Tacquet,Andreas,1612—1660)　比利时数学家. 生于安特卫普(Antwerp),卒于安特卫普. 早年在马林(Malines)、卢万(Louvain)等地学习逻辑学、物理学和数学,后来在布鲁日(Bruges)、卢万和安特卫普等地任教. 塔凯的重要著作《柱与环》包含着一些关于柱和环的有独创性的定理,阐述了体由面构成,面由线构成的思想. 另一本著作《几何学原理》也颇负盛誉,流行甚广. 其著作还有《数学论文集》等. 他的一些数学教科书影响很大,为好几代人所使用. 他对物理学、天文学以及文学也有浓厚兴趣,是一位富有创造性的科学家.

沃利斯(Wallis,John,1616—1703)　英国数学家. 生于肯特郡(Kent)阿什福德,卒于牛津. 他是肯特郡一牧师的儿子,受过良好的古典教育,曾在剑桥大学主修神学,数学以自学为主. 他的才智和惊人的记忆力,使他在数学上获得了许多重要成果. 1649 年任牛津大学教授,直到 1702 年. 他的声望当时在英国仅次于牛顿(Newton,I.).

沃利斯的主要著作有《无穷算术》、《论摆线》、《圆锥曲线》、《代数论文》、《普遍数学或算术大全》等. 其作品的突出特点是强调普及、提倡实用、注重简明,但有些问题缺乏严格的证明. 沃利斯在《圆锥曲线》里,第一次引进负的横、纵坐标,并得出圆锥曲线的方程,明确地把圆锥曲线称为二次曲线,给出 π 的表达式为

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdots}.$$

在《无穷算术》里,引进了函数极限的概念:“变量的极限——这是变量能如此逼近的一个常量,使得它们之间的差能够小于任何给定的量.”这个定义一直保持到现在. 他将卡瓦列里(Cavalieri,(F.)B.)提出的不可分法算术化,第一次在求积问题上改变了传统的几何方法;他提出了负指数和分数指数的概念,连分数一词也是他提出来的,并为收敛的连分数提供一般的运算规则;在他的著作里还初次发现表示无穷大的符号“∞”. 他是牛顿和莱布尼茨(Leibniz,G. W.)之前,在把分析方法引进微积分方面工作做得最多的人. 在力学方面的著作有《力学,或论几何运动》,其中给出了 $y=\sin x$ 的图象.

布龙克尔(Brouncker,William,1620—1684)　英国数学家. 出生地不详,卒于威斯敏斯特(Westminster). 早年在牛津大学学习语言学、数学和医学,1647 年获博士学位. 他是皇家学会创建人之一,并任学会首任主席. 他和著名数学家沃利斯(Wallis,J.)一直保持通信联系,其许多研究成果发表在沃利斯的著作中. 主要贡献在无穷小分析领域,研究求抛物线和摆线的弧长、求双曲线和圆的面积等问题. 他导出了 π 的连分数表达式,并计算出具有 10 位准确数值的 π 值.

维维亚尼(Viviani,Vincenzo,1622—1703)　意大利数学家、物理学家. 生于佛罗伦萨,卒于佛罗伦萨. 17 岁时成为伽利略(Galilei,G.)的最得意的学生与合作者. 伽利略去世后,曾致力于整理出版他的著作,因教皇反对而未获成功. 以后转向研究古代学者的著作和贡献. 1696 年当选为伦敦皇家学会会员,1699 年当选为巴黎科学院当时仅有的 8 个外籍院士之一.

维维亚尼主要研究几何学. 他挖掘了古希腊学者的几何学遗产,整理了一些手稿,成功地复原了阿波罗尼奥斯(Apollonius,(P))的《圆锥曲线论》的第 5 卷,还收集整理了一些东方学者对此书的评注. 1692 年,提出了著名的“佛罗伦萨之谜”:求一个教堂的半球形屋顶的面积,在此屋顶的四面有挖去了相同的圆孔形窗子. 这就是现在的“维维亚尼问题”. 这个问题在当时引起许多一流数学家的兴趣. 莱布尼茨(Leibniz,G. W.)曾用积分法解决了这个问题. 维维亚尼本人用不可分原素法给出一种很简单的解法. 他还给出摆线的切线的作法,借助于等边双曲线解决三等分角的问题等.

佩　蒂(Petty,William,1623—1687)　英国政治经济学家、数学家、医生. 生于汉普郡(Hampshire)的拉姆西(Romsey),卒于伦敦. 曾多次到欧洲大陆,在莱顿、巴黎等地学习医学、物理等学科. 他在《政治算术,关于伦敦城市的发展》一书中最早在经济学中使用数学工具. 他利用格兰特(Graunt,J.)的方法统计了不同职业的人口及税额. 伦敦和其他地区的居民数目等. 在当时,无论是佩蒂还是格兰特都还没能建立概率论这门学科,但是他们所采用的方法本质上已经属于概率论,他们的工作推动了概率论的产生和发展.

帕斯卡(Pascal,Blaise,1623—1662)　法国数学家、物理学家、哲学家、文学家. 生于法国中部的克莱蒙费朗. 幼年丧母,8 岁(1613 年)迁居巴黎,在其父亲坦尼・帕斯卡(Pascal,Etienne,1588—1651,蜗

牛线的发现者）的影响下，少年时代就在数学上显示了出众的才华；16 岁便随父参加了巴黎数学家和物理学家小组（1666 年改组为巴黎科学院）的活动，同年写出了很有价值的《圆锥曲线论》，受到大数学家笛卡儿（Descartes，R.）的高度评价. 后来他的兴趣转向神学，从怀疑论出发，认为感性和理性知识都不可靠，于是得出“信仰高于一切”的结论，强调“微妙的精神”（直觉）优于“几何的精神”（演绎），通过直觉才能洞察宇宙的真相. 他的最后几年是在修道院度过的，过度紧张的劳累损害了帕斯卡的健康，他仅活了 39 岁.

帕斯卡短短的一生，在学术上留下了极为丰富的遗产，内容涉及数学、物理、哲学、文学等方面. 在数学方面，他受法国建筑师兼数学家德扎格（Desargues，G.，射影几何创始人之一.）的影响很深，于 1640 年发现了关于圆锥曲线内接六边形其三组对边的交点共线的定理，即著名的“帕斯卡定理”. 1642 年，他设计和制造了第一架可作加减运算的计算机；1654 年提出了关于二项式展开的系数规律，即著名的“帕斯卡三角形”. 他与费马（Fermat，P. de）共同建立了概率论的基础，得出了概率论问题的一系列解法. 他还研究了摆线问题，给出了求不同封闭曲线面积和重心的一般方法，计算了一些定积分. 在物理方面，通过大量的流体实验，于 1646 年提出了密闭流体能传递压强的定律，即著名的“帕斯卡原理”，建立了流体静力学的基础. 帕斯卡的数学著作还有《数的整除性的特征》、《论算术三角形》、《几何的特征》等. 此外，帕斯卡还有文学作品《思想录》、《致外省人书》等，对法国散文的发展影响很大.

安杰利（Angeli，Stefano Degli，1623—1697）意大利数学家、物理学家. 生于威尼斯，卒于威尼斯. 早年在波伦亚大学学习，后来在威尼斯任修道院院长（1652），1663 年受聘为帕多瓦大学数学教授. 他是著名数学家卡瓦列里（Cavalieri，(F.)B.）的学生，他是卡瓦列里不可分原理的积极拥护者. 他运用这一原理研究了与无穷小概念有关的问题，计算出某些几何形体的面积、体积和重心. 他的工作推进了不可分原理的发展. 在天文学和物理学方面他也有所贡献. 他研究了托勒密（Ptolemy）和哥白尼（Kopernik，M.）的宇宙学说，用实验的方法探讨了一些物理原理.

维　特（Witt，Jan de，1625—1672）　荷兰数学家. 生于多德雷赫特（Dordrecht），卒于海牙. 1641—1645 年在莱顿大学攻读法律. 1645 年在法国昂热（Angers）取得学位. 后来成为共和党的首领，并主持荷兰王国的国务工作. 他一生只用了很少时间研究数学，但成效却甚大.

维特的主要贡献在解析几何方面. 早在大学读书期间他就接受了笛卡儿（Descartes，R.）的数学思想. 他的重要著作《曲线初步》可以认为是最早的解析几何教程，他在阿波罗尼奥斯（Apollonius，(P)）《圆锥曲线论》的基础上对几何理论进行了综合处理，系统地发展了直线和圆锥曲线理论，建立了圆锥曲线作图的力学方法，引进了坐标的定义（放弃负坐标）和坐标变换等. 还研究了与人寿保险有关的财产计算问题，建立了相应的数学模型，后来又验证了他所创造的数学方法的正确性.

许　德（Hudde，Jan，1628—1704）　荷兰数学家. 生于阿姆斯特丹（Amsterdam），卒于阿姆斯特丹. 早年在莱顿大学攻读法律和数学. 他的数学成果有：改进了解高次代数方程的笛卡儿方法，总结了次数可以用分离因子约化的各种情况，讨论了难度较大的三次和四次方程，并用代换 $x=y+z$ 给出了简化的三次方程 $x^3=qx+r$ 的解答；用消去法求两个多项式的最大公因式；发展了费马（Fermat，P. de）的求极值和切线的方法；探讨了笛卡儿叶形线的最大宽度问题、面积问题以及某些代数曲线的形心问题；首先在解析几何中运用三个变量，最早用字母表示正数或负数（1659）等.

惠更斯（Huygens，Christiaan，1629—1695）荷兰数学家、物理学家、天文学家、机械工程师. 出生于海牙，父亲是位职业外交官，著名学者. 自幼受过良好教育，16 岁进入莱顿大学研习法律与数学，青年时代就显示出各方面的才能. 曾去英、法、德各地旅行. 1666 年当选为巴黎科学院院士，并居留巴黎至 1681 年. 教过莱布尼茨（Leibniz，G. W.），并与牛顿（Newton，I.）相识.

惠更斯以研究离心力、单摆运动和光波理论而闻名. 在物理上，1656 年发明了摆钟，受到马克思（Marx，k.）的高度评价. 1863 年 1 月 28 日马克思在给恩格斯（Engels，F.）的信中指出：“钟表是第一个应用于实际目的的自动机，匀速运动引出的全部理论就是在它的基础上发展起来的.”他又是光波理论的创始人，1690 年发表的《光学》著作获得了很高的声誉.

惠更斯对数学进行了广泛的研究. 还在青年时代就求出了二次曲线弧的长度. 1654 年，他写出了名著《论求圆周率》，由于利用了重心的某些性质，仅用 12 边形就得到了比较精确的 π 的近似表达式. 1657 年，他发表了概率论的早期著作《论赌博的计算》. 在他的著作中引入了无穷小量的概念，并在计算积分时，开始运用无穷级数. 他还发展了连分数理论. 他解题的方法独特、新颖. 在天文学方面，他研制和改进了天文望远镜，1655 年还发现了土星环，次年又观察到猎户星云等.

巴　罗（Barrow，Lsaac，1630—1677）　英国数

学家. 生于伦敦，卒于伦敦. 受教于剑桥大学三一学院，在沃利斯(Wallis,J.)的指导下学习数学. 1652年获硕士学位. 1664年成为剑桥大学第一个"路卡斯教授"，1675年被任命为剑桥大学副校长. 他是英国皇家学会的首批会员.

巴罗是牛顿(Newton,I.)的老师，是最早赏识牛顿才能的人. 1669年，他坦然宣称牛顿的才能已超过自己，将"路卡斯教授"的职位让给了牛顿. "巴罗让贤"已成为数学史上的佳话. 巴罗在数学、光学和神学方面都有所发现，他还是微积分前史上的主要人物之一. 他的求切线方法对微积分的产生有重要意义，提出的"微分三角形"对牛顿有直接影响. 他的著作有《数学讲义》、《几何讲义》、《光学讲义》等.

德拉曼(Delamain,Richard,活跃于1630年前后)　英国数学家. 生平不详. 从伦敦格雷沙姆(Gresham)学院毕业后，在伦敦讲授应用数学. 他是奥特雷德(Oughtred,W.)的学生和密友，曾作过查尔斯王一世(King Charles Ⅰ)的数学教师，他的主要著作是一本只有32页的小册子《数学计算环》(1630)，描述圆形计算尺，也由此拉起了与奥特雷德争夺优先权的序幕. 奥特雷德于1622年发明了圆形计算尺，但提及圆形计算尺的著作《比例圆》直到1630年才出版. 德拉曼的数学才能表现在应用领域，他通常被认为是查尔斯王的银日晷仪的制作者.

科汉斯基(Kochansky,Adam,Adamandus,1631—1700)　波兰数学家. 生于多勃利任(Добрижин)，早年到德国、捷克和意大利留学. 1680—1685年到华沙任数学教授. 1686—1690年被受命为宫廷神甫. 1691年获皇家数学家爵位. 他发表了大量的关于圆内接多边形边长的计算、圆的求积和幻方等方面的论著. 他把平面幻方的原理推广到三维空间得到了很好的结果. 他计算出π的具有7位准确数字的近似值，还编制了一些数学用表.

雷　恩(Wren,Christopher,1632—1723)　英国数学家、建筑学家、天文学家. 生于威尔特郡(Wiltshire)东诺伊尔(East Knoyle)，卒于剑桥. 早年在牛津大学学习，1653年获硕士学位，并留校工作. 1657—1661年任伦敦大学格雷沙姆学院天文学教授，1661—1673年任牛津大学萨维尔天文学教授. 他是伦敦皇家学会成立之前科学小组的创始人之一，并在1680—1682年间任该学会第三任会长.

雷恩作为天文学家是一位杰出的观察者和实验者，特别研究了物体碰撞中的自然法则. 在数学方面，他主要研究了几何学中的一些课题. 1669年，他发现单叶双曲面是两组直线束构成的，给出了求摆线长度的方法，探讨了有关透视圆的问题等. 此外，他还致力于建筑学. 1666年伦敦大火之后，他很快向国王提出重建城市的方案，并负责建造了圣堡罗大教堂和它周围的教堂群的巨大工程，对重建伦敦城做出了重大贡献.

卡　雷(Carré,Louis,1633—1711)　法国数学家. 生于唐纳-马恩省(Seine - et - Marne)，卒于巴黎. 早年在普罗万(Provins)学院学习神学，曾任过数学和哲学教师. 1711年当选为巴黎科学院院士. 主要贡献是在解析几何和微积分方面. 他特别研究了正切曲线、摆线、抛物线等曲线的求长问题，以及一些平面图形的面积计算法. 著作有《面积计量方法》等.

胡　克(Hooke,Robert,1635—1703)　英国自然科学家. 生于怀特岛(Isle of wight)佛雷什沃特(Freshwater)，卒于伦敦. 早年在牛津大学学习，毕业后作玻意耳(Boyle,R.)的助手. 1663年当选为伦敦皇家学会会员，1677—1683年任学会的书记. 1665年成为伦敦大学数学教授.

胡克的成就是多方面的：在物理学中，他发现了后来以他的名字命名的弹性定律，并阐明其数学本质；1665年，他提出了光的波动学说，后来又进一步指出，光的振动可以垂直于它的传播方向；他还研究了单摆的振动规律. 在天文学方面，他探讨了行星运动理论，预言了牛顿(Newton,I.)的天体力学，设计并改进了许多天文仪器. 此外，他还以建筑师著称. 他的工作对17世纪自然科学的数学化起了很大推动作用. 他在物理学和天文学方面的研究促进了微积分的建立和发展. 他著述甚丰，有《哲理实验和观察》等.

巴雷姆(Barrême,Francois,1638—1703)　法国数学教育家. 生于塔拉斯孔(Tarascon)，卒于巴黎，是著名的算术教师. 他所著的《算术》(1677)一书影响很大，流行甚广. 在1677年以后的100年内反复印刷，销量很大. 现在法语中的"barème"(善于计算的人)一词，就是由他的姓氏转来.

格雷戈里(Gregory,James,1638—1675)　英国数学家、天文学家. 生于阿伯丁，卒于爱丁堡. 在意大利研习几何学、力学、天文学，1668年成为圣安德鲁大学的第一位数学教授. 1674年任爱丁堡大学数学教授.

格雷戈里一生主要从事天文学和几何学的研究，给出了计算圆及双曲线所围面积和曲线长度的具体方法，证明了求切线与求面积问题的互逆性，给出了函数的定义. 他在1670年与牛顿(Newton,I.)的通信中提出了著名的格雷戈里-牛顿插值公式. 他是最早使用级数收敛和发散概念的数学家，并研究级数的收敛速度问题，得到了 $\tan x$ 和 $\sec x$ 的无穷级数展开式. 他撰写过一些著作，对微积分和数论的发展都做出了贡献. 他还最早证明了π为不可通约数，并给出π的无穷级数表达式.

关孝和(Seki,Takakazu,1642—1708) 日本数学家.生于群马县藤冈,卒于江户(今东京).早年拜高原吉种为师,他是日本传统数学——和算的奠基人和关氏学派的创始人,在日本被尊为算圣.其著作《发微算法》(1674)对日本和算的发展有重要影响;其数学思想由其弟子建部贤弘等人继承发扬.

关孝和的研究涉及了当时数学的各个领域,主要成就有:

1.曾将圆周率计算至小数 50 位,计算球积.

2.用代数符号演算,是演段术之创始者.

3.独立发现了行列式.

4.研究了常系数方程式的近似解法和不定方程式的解法,提出了方程式正负根的存在条件和方程式变换论.

5.建立整式导函数之整式判别式.

6.发现连分数,建立极值概念,提出与牛顿(Newton,I.)一样的迭代法.

7.从事正多角形、椭圆的性质和阿基米德螺线的研究,给出圆弧、圆环的求长和求积公式.

8.幻方的一般解法.

关孝和去世后,其弟子荒木村英整理其遗稿,出版了《括要算法》(1709).

牛　顿(Newton,Isaac,1643—1727) 英国物理学家、数学家、天文学家.生于林肯郡的伍尔斯索普(Woolsthorpe)村的一个农家.出生前父亲去世,3岁时母亲改嫁,他便由外祖母抚养.少年时,牛顿智力一般,但从中学起成绩提高很快.1661 年考人剑桥大学三一学院,毕业后留校任教,先后获得学士和硕士学位.1669 年晋升为数学教授,1688 年当选为英国国会议员,1699 年任造币局局长,1703 年任英国皇家学会主席,1705 年受封为爵士.晚年主要从事科学研究.他作为一代伟人,死后被葬于伦敦西部圣地威斯敏斯特教堂.

牛顿在大学里深受几何学家巴罗(Barrow,I.)的影响,在其指导下,逐步理解了开普勒(Kepler,J.)的光学、笛卡儿(Descartes,R.)的《几何学》、沃利斯(Wallis,J.)的《无穷小算术》及巴罗的《数学讲义》和《几何讲义》,为他的三大发明:流数术(微积分)、万有引力定律和光的分析打下了良好基础.在数学方面,牛顿在 1665 年就发现了二项式定理,1666 年写出了《曲线求积论》(1704 年出版),1670 年又写出了《流数术和无穷级数方法及其对几何曲线的应用》的论文(1736 年出版).在这两种著作中,牛顿提出了"流数术",并发现了微积分基本定理,他和莱布尼茨(Leibniz,G. W.)并称为微积分学的创始人.他的《广义算术》对发展初等数学具有重要意义.

牛顿是经典力学的奠基者.他发现了万有引力、机械运动三定律等重要的力学原理.在光学方面,他用三棱镜分析月光,发现白光是由不同颜色的光构成的,这一发现成了光谱分析的基础.他主张光的"微粒说",创造了牛顿色盘,1675 年观察到"牛顿环".在天文学方面,牛顿研究了天体运行,正确地解释了潮汐现象,预言地球不是正球体,并由此说明岁差现象,他在 1668 年还发明了反射望远镜.1687 年出版的《自然哲学的数学原理》与 1704 年出版的《光学》两部名著,便是牛顿对上述研究的科学总结.

莱布尼茨(Leibniz,Gottfried Wilhelm 1646—1716) 德国数学家、物理学家、哲学家.生于莱比锡的一个哲学教授家里.他 8 岁起自学拉丁文、希腊文;15 岁(1661 年)进入莱比锡大学法学系,并习哲学和数学,1664 年取得哲学硕士学位,1666 年取得法学博士学位.毕业后曾在梅因茨(Mainz)侯爵门下任职,处理法律与外交事务.1672 年赴法国巴黎访问,1676 年后跟随汉诺威公爵从事历史编纂工作.1673 年当选为伦敦皇家学会会员,1700 年被选为巴黎科学院院士,同年柏林科学院建立,他为第一任院长.卒于汉诺威.

莱尼布茨博学多才,兴趣广泛,他的研究涉及社会科学和自然科学的各个领域.他的著述涉及 41 个学科,曾先后获得法律、宗教、哲学、政治、历史、文学、伦理学等科学位,被誉为"百科全书式的天才".他曾试图统一新旧哲学、调和天主教和基督教的矛盾;企图以数学为标准,将一切学科体系化;还想建立通用语言和文字等.

数学方面,莱布尼茨研究了笛卡儿(Descartes,R.)、帕斯卡(Pascal,B.)等名家著作,巧妙地建立了数学符号体系,发现了微积分基本定理,他与牛顿(Newton,I.)并称为微积分学的创始人.他还创立了数理逻辑思想;引入了行列式的概念;发现了函数展成幂级数的一般方法;提出了常微分方程的常数变易法和变量分离法;给出了交错级数的判别法;改进了帕斯卡的加速器;发明了第一架机械四则运算机等.

在物理学上,莱布尼茨第一个提出了"动能"概念,并为矿井设计了风力电动机.

切　瓦(Ceva,Giovanni,1648—1734) 意大利数学家.生于米兰,卒于曼图亚.任教于曼图亚大学.他的主要著作是《截线论》(1678),其中阐述了从质点系的重心性质出发得出相交直线各部分的关系式——切瓦定理,并由此导出横截线理论的许多性质.他采用几何与力学结合的方法解决了圆柱截面、圆锥截面以及平面图形与固体重心求解等一系列问题.还在计算曲面重心和测定运动的几何性质方面得到一些结果.撰写了《数学简论》、《运动几何学》等专著.

罗　尔(Rolle, Michel, 1652—1719)　法国数学家. 生于下奥弗涅(Basse Auvergne)的昂贝尔(Ambert),卒于巴黎. 早年仅受过初等教育,靠自学掌握代数和丢番图分析. 1685年以后在巴黎科学院从事科学研究.

罗尔的主要贡献在代数学方面. 他用简明的数学符号撰写代数著作,研究过实数集的序概念和代数方程根的分离方法等. 在他的著作《方程的解法》(1691)中,证明了一个定理,其内容相当于:在多项式 $f(x)=0$ 的两个实根之间,$f'(x)=0$ 至少有一个实根. 这定理本来与微分学没有联系,后人把它推广并用于一般的连续函数,并称之为"罗尔定理",现已成为微分学中的重要定理.

纽文泰特(Nieuwentijt, Bernard, 1654—1718)荷兰数学家、哲学家. 生于西格拉夫特代克(Westgraftdijk),卒于皮尔默伦德(Purmerend). 早年入莱顿大学和乌得勒支大学攻读医学和法律,后定居皮尔默伦德行医,自学数学和自然哲学. 曾参与微积分基础的争论,对莱布尼茨(Leibniz, G. W.)的研究方法提出了猛烈的批评. 在他的《无穷小分析》(1695)一书中,第一次使用了"分析"一词. 此书对无穷小分析本身没有本质的贡献,只是对早期微积分在逻辑上的含混提出质疑,促使数学家们认真思考了这些问题.

瓦里尼翁(Varingnon, Pierre 1654—1722)　法国数学家、力学家. 生于卡昂(Caen),卒于巴黎. 1688年当选为巴黎科学院院士,并任马扎兰(Mazarin)学院的数学教授. 瓦里尼翁在数学方面有许多新的思想,例如采用极坐标方法,使用比较复杂的初等函数等. 在法国,他是最早认识到微积分学说的价值的学者之一. 在力学研究中,开始了构造微分方程解的工作,曾力图摆脱几何学的束缚来建立动力学理论. 主要著作有《新力学初稿》、《关于重力的新推测》等.

雅各布第一·伯努利(Bernoulli, Jacob Ⅰ, 1654—1705)　瑞士数学家. 生于巴塞尔,青年时研究神学,后来喜欢上数学,尤其是新生的微积分学,他无师自通. 曾到荷兰和英国旅行,结识了一些数学名家,回国后在大学里任教,讲授数学和实验物理学. 1687年起成为巴塞尔大学的数学教授.

雅各布是伯努利家族中第一个数学上成就卓著的人. 他是变分法的创始人之一,在微积分、常微分方程、概率论等方面均有重要贡献. 他曾和莱布尼茨(Leibniz, G. W.)共同获得微积分学中的不少结果,并将其应用于力学和天文学上. 他在研究一系列曲线的性质时,引进了极坐标,于1694年首次给出直角坐标和极坐标的曲率半径公式. 他还发现了许多特殊曲线,如对数螺线、双扭线、悬链线等. 算出了球面三角、劈锥曲面和球曲面的面积,并得到许多求积法和求长法. 他还提出了著名的伯努利方程;最先发现调和级数的发散性. 他与其弟约翰第一·伯努利(Bernoulli, Johann Ⅰ)一起奠定了变分法的基础,提出并部分解决了等周问题及最速降线问题. 与其侄子尼古拉第一·伯努利(Bernoulli, Nicolaus Ⅰ)解决了某些组合分析问题,发现了伯努利数列. 在概率论中证明了大数定律的局部情况,即伯努利定理,并建立了描述独立试验序列的数学模型等. 他的主要著作有《猜测术》和《关于无穷级数及其有限和的算术应用》等. 此外,他还撰写了大量的论文.

格雷戈里(Gregory, David, 1659—1708)　英国数学家、天文学家、光学家. 生于阿伯丁(Aberdeen),卒于伯克郡. 早年就学于爱丁堡大学. 1683年主持该校数学讲座,1691年任牛津大学天文学教授,次年成为皇家学会会员. 他在几何学、光学、天文学、力学等古老学科中均有创见,对笛卡儿(Descartes, R.)的解析几何和牛顿(Newton, I.)的微积分等新思想也有独到的见解. 他一生的论著达400多种,尤其对悬链线的性质、欧几里得(Euclid)著作的分析和天体物理学的几何基础等问题都做出了较大的贡献.

罗必塔(L'Hospital, Guillaume Francois, 1661—1704)　亦译洛必达. 法国数学家. 出生于巴黎,约翰第一·伯努利(Bernoulli, Johann Ⅰ)的学生,伯努利曾于1691年,在罗必塔家授以当时新生之微积分学. 当时仅牛顿(Newton, I.)、莱布尼茨(Leibniz, G. W.)及伯努利兄弟4人懂得这一数学最新成就. 后罗必塔精通微积分,他以浅显的方式解说,并配以应用题例,编出了教科书《无穷小分析》,于1696年出版. 使微积分学记号开始通用于法国,逐渐遍及全欧,罗必塔亦成为了推广微积分学的先导. 该书中载有其师所发明的求"$\frac{0}{0}$"型极限法则,后世称为罗必塔法则. 他常与莱布尼茨、伯努利兄弟研讨数学难题,如求解等速曲线、抵抗力最弱之立体的形状等问题. 他还著有《圆锥曲线解析论》一书,于1707年出版,亦为当时的名著,流传达百年之久. 罗氏于1704年2月2日在巴黎逝世.

帕　朗(Parent, Antoine, 1666—1716)　法国数学家. 生于巴黎,卒于巴黎. 1699年到巴黎科学院工作,1716年当选为院士. 他的许多论著都以手稿形式保存了下来,包含了大量未发表的,但却十分重要的结果. 帕朗的主要兴趣在力学和物理学方面. 数学研究涉及球面、柱面及其他曲面和螺旋线的几何性质,还研究了算术和射影问题. 他最重要的数学贡献在于首先把解析几何推广到三维的情形,用三个坐标变量的方程表示曲面. 他的一些重要论著收集

在他的《数学与物理论文集》(1705)中.

约翰第一·伯努利(Bernoulli, Johann Ⅰ, 1667—1748) 瑞士数学家.生于巴塞尔.雅各布第一·伯努利(Bernoulli,Jakob Ⅰ)的弟弟,变分法的创始人之一.青年时从事商业,后在其兄指导下研究数学和医学,曾去巴黎留学和讲学,1694年获医学博士学位.1695年任荷兰格罗宁根大学数学教授.1705年起,长期任巴塞尔大学数学教授,后来成为俄国圣彼得堡科学院名誉院士.他还是欧拉(Euler, L.)的老师.

约翰第一·伯努利比他兄长有更多的著述,他的大量论著涉及微积分、微分方程、变分法、几何学与力学等学科.他首先给出了函数的定义,提出"变量"这个词,并发明了指数运算.1696年提出了捷线问题,即最速降线问题,推动了变分学的发展,并还提出了大地测量线变分计算的经典问题,得出了大地测量线的性质,推出了有关的微分方程.他同莱布尼茨(Leibniz,G. W.)在微积分方面共同获得了不少结果.1742年,他出版了《积分学教程》,第一次对微积分做了系统的阐述,主张把"求和计算"改为"求整计算",后来演变成专门的术语"积分学".在研究"$\frac{0}{0}$"型分式极限时,约翰第一·伯努利发现了一个法则——这个法则后来被错误地命名为罗必塔法则.1715年,他给出了空间坐标的定义,研究了各种特别曲线,并建立了焦散面理论.在力学上,约翰第一·伯努利还提出了虚拟速度的原理.

棣莫弗(De Moivre, Abraham, 1667—1754) 英籍法国数学家.生于法国的维特里勒弗朗索瓦(Vitryle - Francois),卒于伦敦.幼年随父母前往英国,一生大都在英国度过.1685年在英国当家庭教师,因受牛顿(Newton, I.)的《原理》一书的启发,对数学发生了兴趣,就常与牛顿、哈雷(Halley, E.)等人来往.由于他勤奋好学,后成为英国的一流数学家.1697年当选为伦敦皇家学会会员,后又被接纳为巴黎科学院和柏林科学院的院士.

棣莫弗的主要贡献在概率论方面,他所著的《机会论》(1718)中,第一次给出独立事件的乘法定理,并给出二项分布公式.他还发现了正态概率曲线.他在1707年研究三角学时得到的结果相当于现在通用的"棣莫弗公式":

$$(\cos\varphi \pm \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm \mathrm{i}\sin n\varphi.$$

他的另一著作《分析杂谈》(1730)中给出了 $n!$ 的级数表达式,并指出当 n 足够大时,有

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

(此式后来被误称为斯特灵公式).他还研究了求解割圆方程 $x^n-1=0$ 的问题.

萨凯里(Sacchei, Girolamo, 1667—1733) 意大利数学家.生于圣雷莫(San Remo),卒于米兰.非欧几何学的先驱者.1693年,他出版了《几何问题》,后又撰写了《逻辑证明》(1697)和《免除所有污点的欧几里得几何》(1733),并深入讨论了初等几何、坐标几何、数学公理以及第五公设等问题.他采用了另一条与欧氏公设等价的公理去代替第五公设,虽然试图证明的目的没有达到,但对建立欧几里得(Euclid)严密的逻辑体系和发展非欧几何有很大帮助.

惠斯顿(Whiston, William, 1667—1752) 英国数学家、宇宙学家、神学家.生于莱斯特州(Leicester)诺顿(Norton),卒于拉特兰州(Rudland)林登(Lyndon).早年接受家庭教育,后进剑桥大学学习数学,1693年获硕士学位.毕业后曾任私人教师、牧师、教区长等职.他的才能得到牛顿(Newton, I.)的赏识,并应聘到剑桥大学任牛顿数学课的助理.1703—1710年,接替牛顿在剑桥大学任路卡斯教授的职位.在这期间发表了一些关于神学和自然科学方面的论文.由于反对三位一体(视圣父上帝、圣子耶稣和圣灵为一体)的教义而于1710年被撤消了教授职务,并赶出学校,以后流浪街头,过着十分贫困的生活.但他一直坚持科学研究,发表了关于神学和自然科学的一些著作.

惠斯顿的主要贡献在几何学方面.他于1703年出版了《几何原本》的拉丁文版本;提出一系列有关几何严密性的理论,这些理论发表在他的《引理》、《假设》、《现象》、《解题》等几何论著中.1707年,他出版了牛顿在30年前写的讲稿《普遍的算术》.他在天文学方面也有着重要贡献.他的著作《地球的一个新理论》(1696)再版了6次,流传甚广.

马格尼茨基(Магницкий, Леонтий Филиппович, 1669—1739) 俄国数学教育家.生于奥斯塔什科夫斯基总主教村庄的一个农家里.他靠自学成材,掌握了几国外语,曾在航海学校任数学教师.从1701年开始,作数学家法赫瓦松(Фархварсон, А. Д.)的助手.1715年晋升为一级教师和教导处负责人.

马格尼茨基的主要著作有《算术·即数的科学》,对俄罗斯数学的发展与数学教学法产生了极大影响.该书于1703年出版,内容包括算术、代数、几何、三角等初等数学的各个方面.它不仅可作为数学教科书,而且可作为天文学、航海学和其他学科某些教学部分的参考书.

黎卡提(Riccati, Jacopo Francesco, 1676—1754) 意大利数学家.生于威尼斯,卒于特雷维索(Treviso).早年在帕多瓦大学学习,1696年获博士学位.主要从事微分方程的研究,曾提出了著名的"黎卡提方程式",即指形如

$$\frac{dy}{dx}=A+By+Cy^2$$

(A、B、C 均是 x 的函数)的方程. 他还给出了用降阶的办法解二阶微分方程,同时得出了处理高阶微分方程的一种原则方法. 伯努利家族、欧拉(Euler,L.)和达朗贝尔(d'Alembert,J. le R.)等人都相继在这方面进行了研究.

赫尔曼(Hermann,Jakob,1678—1733) 瑞士数学家. 生于巴塞尔,卒于巴塞尔. 早年学习神学,对数学有强烈兴趣,曾得到雅各布第一·伯努利(Bernoulli,Jakob Ⅰ)的指导. 1707 年,成为帕多瓦大学的数学教授,以后相继受聘于奥得河畔的法兰克福大学和圣彼得堡科学院,最后回到巴塞尔,任巴塞尔大学教授. 还曾任柏林科学院和巴黎科学院院士. 他的主要贡献在微分学、常微分方程、微分几何、解析几何等方面. 他发表了许多有关微分学的论文,求出了一些特殊曲面的测地线. 阐明过极坐标的意义,并用来研究曲线,给出了它与直角坐标之间的变换公式.

沃尔夫(Wolf,Christian von,1679—1754) 德国数学家、物理学家、哲学家. 生于布雷斯劳(Breslau),卒于哈雷(Halle). 1703 年在莱比锡获得硕士学位,并成为大学讲师. 1706 年任哈雷大学教授. 由于宗教信仰不同曾一度被赶出学校,但很快又被召回,1743 年成为该校校长. 他还曾任伦敦皇家学会会员、巴黎科学院和柏林科学院的院士.

沃尔夫是莱布尼茨(Leibniz,G. W.)的朋友及其思想的追随者. 他发表了大量的数学著作,包括对数表(1711)和数学辞典(1716). 他的《数理科学的基础》(1710)曾多次印刷. 他对某些数学符号和术语的使用及流行曾在学术界产生很大影响,例如,"·"作为乘法符号,":"作为除法符号,由此得到通用. 此外,还引入了"横坐标"一词.

梅 钦(Machin,John,1680—1751) 英国天文学家、数学家. 剑桥大学天文学教授(1713—1751). 生平不详. 1718—1747 年曾任皇家学会秘书.

梅钦的主要贡献是利用幂级数

$$\arctan x = x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots$$

得到梅钦公式

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239},$$

并于 1706 年计算出 π 的 100 位准确数值. 这个公式被认为是反正切结构性定义的最合理的表达式. 方程

$$m\cdot\arctan\frac{1}{p}+n\cdot\arctan\frac{1}{q}=\frac{\pi}{4},$$

一共有 5 组解,已经全部求出,其中之一是欧拉(Euler,L.)求出的,上述公式中给出了梅钦求出的一组解. 1874 年,尚克斯(Shanks,W.)根据梅钦公式计算 π 值到小数点后 707 位,1946 年人们发现了这个值的小数点后第 528 位数是错的. 1712 年 7 月 26 日,泰勒(Taylor,B.)给他写信,谈到有关"泰勒级数"的一些内容. 这是关于泰勒级数的最早记载.

科 茨(Cotes,Roger,1682—1716) 英国数学家、天文学家. 生于累斯特郡(Leicestershire),卒于剑桥. 1699 年就学于剑桥大学三一学院,后来成为剑桥大学天文学和哲学教授. 他研究过牛顿(Newton,I.)的微分法,得到了牛顿-科茨公式等结果,并为牛顿的《自然哲学的数学原理》再版时写了一个序言,支持牛顿的学说. 他著有《对数计算》(1714);他给出了自然对数底 e 的连分数表达式,并求出 e 精确到七位小数的值;他还对复数解的几何意义、误差估计方法等做出了贡献,其工作受到牛顿等学者的高度赞扬.

法尼亚诺(Fagnano dei Toschi,Giulio Carlo,1682—1766) 意大利数学家. 生于塞尼加利亚(Senigallia),卒于塞尼加利亚. 自学成材. 与欧拉(Euler,L.)、拉格朗日(Lagrange,J.-L.)等数学家都有交往. 伦敦皇家学会会员和柏林科学院院士. 他是最先使用虚指数的数学家,还提出三次和四次方程的新解法,又是三角几何学的创始人,还得到三角形内几何比例的一般理论. 此外,他还对椭圆函数论的建立做了一定的工作,给出"椭圆积分"概念,并证明了若干定理.

雷奥米尔(Réaumur,René-Antoine Ferchault de,1683—1757) 法国科学家. 生于法国拉罗谢尔(La Rochelle),卒于圣于连-迪泰鲁(St.-Julien-du-Terroux)附近. 早年在拉罗谢尔等地受教育. 1708 年到巴黎科学院学习,不久即发表了三篇几何学方面的论文,后来转向了其他自然科学课题的研究. 在工艺学、生物学、自然史和实验物理学等方面都做出了贡献. 他曾猜测蜂房的奇特结构在相同的容积下最省材料,后来他的猜想被证实. 他还先后被选为法国、普鲁士、俄国、瑞典等国的科学院院士及伦敦皇家学会会员,并曾任法国科学院院长.

波伦尼(Poleni,Giovanni,1683—1761) 意大利数学家、物理学家. 生于威尼斯,卒于帕多瓦(Padua). 早年在其父亲教育下学习数学、物理. 1709 年到帕多瓦大学任教,32 岁成为物理学教授,36 岁时成为数学教授. 1739 年当选为巴黎科学院外籍院士. 主要贡献在数学、天文学、物理学、工程学、考古学和古代史等多个方面. 他还研究了历法改革和海运工程中的技术问题,并多次获得科学院的奖励.

尼科尔(Nicole,Francois,1683—1758) 法国

数学家.生于巴黎,少时天资聪颖,表现出超常的数学才能.早年在巴黎耶稣学院学习.1707年被选为巴黎科学院院士.他以研究几何曲线著称,深入地研究了旋转线,特别是球的外摆线的几何性质,并求出了其长度.1717—1727年发表的《有限差分论》,给出了若干问题的级数解法,并求出了某些级数的和.尼科尔还发表了大量的有关概率论、高等分析、三次方程、圆锥曲线、三次曲线以及三等分角问题的论述,并在1731年的论文中证明了射影定理.

泰　勒(Taylor,Brook,1685—1731)　英国数学家、物理学家.生于中萨克斯的爱德蒙顿.毕业于剑桥大学圣约翰学院,1714年获法学博士学位,1712年被选为伦敦皇家学会会员,1714年任该学会学术秘书.1731年在伦敦逝世.

在数学上,泰勒主要从事函数性质的研究,他于1712年得出,并于1715年发表的函数展成级数的一般公式,被称为泰勒级数和泰勒展开式(即著名的泰勒公式).他还系统地研究并总结了透视学,是透视学的创始人之一.泰勒在微分方程的研究中,也取得了重要成果.他的主要数学著作有《增量法及其他》、《直线透视》、《直线透视的新原理》等.

在物理上,泰勒对流体动力学、磁学和热学等方面进行过研究,并发表过一些论文.晚年从事宗教和哲学研究.

西姆森(Simson,Robert,1687—1768)　英国数学家.生于苏格兰埃尔郡西基布里德(West Kilbride),卒于格拉斯哥.1701年就学于格拉斯哥大学.1711年任该校数学教授.主要研究古希腊数学,他所注释的欧几里得(Euclid)的《几何原本》(1756,1762)和阿波罗尼奥斯(Apollonius,(P))等人的著作长期为英国学者引用,他还撰写过有关牛顿流数术、几何的代数分析、对数理论及力学、几何光学等方面的论著,在初等几何学中有以他名字命名的"西姆森线".

克劳斯贝格(Clausberg,Christlieb,1689—1751)　德国数学家.生于但泽(Danzig),卒于哥本哈根.早年在瑞士学习,1729年以前任算术和希伯来语教师.1730年以后在汉堡、吕贝克(Lübeck)、莱比锡等地教学,并服务于丹麦宫廷.他的著作《证法算术》(1732)享有盛名,其中所有内容都采用论证方式来叙述,并出现了一重和双重试位法,还利用了布里格斯对数.他本人也编制了从1到100的具有32位小数的对数表.

哥德巴赫(Goldbach,Christian 1690—1764)　德国数学家.生于柯尼斯堡,卒于莫斯科.早年学习法律和医学,后转向数学.1710年游学欧洲,结识了许多数学名流.1725年移居俄国,1727年任沙皇彼得二世(Peter,Ⅱ)的家庭教师.

哥德巴赫从1729年起与大数学家欧拉(Euler,L.)之间保持着长期的书信交往,讨论数学问题.他的许多发现就是以这种形式为世人所知.1742年6月7日,他给欧拉的信中提出:"每一个大于2的偶数都是两个素数的和."这个命题称为哥德巴赫猜想.它引起全世界数学家的极大兴趣,经过200多年的努力,相继得到一批近似结果,但尚未最后解决,以中国数学家陈景润1973年所取得的成果为最好.哥德巴赫还研究过特殊函数、无穷级数展开式、微分方程及其他数论问题.

斯特灵(Stirling,James,1692—1770)　英国数学家.生于苏格兰的斯特灵郡(Stirlingshire),卒于爱丁堡.早年在格拉斯哥大学和牛津大学学习.1724年之后定居伦敦.1726年当选为伦敦皇家学会会员,1748年当选为柏林科学院院士.

斯特灵的主要贡献在分析数学方面.在他的著作《微分法》(1730)中,考察了 $\log n!$ 和 $n!$ 的无穷级数展开式,引入了第一类或第二类斯特灵数和斯特灵级数.还研究了级数的插值,得到

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

等结果.他的成名之作是《牛顿的三次曲线》(1717),其中证明了牛顿(Newton,I.)关于三次曲线分类研究的许多命题,还增加了四种新的曲线,把 x 和 y 的一般二次方程化为几种标准型.

布　盖(Bouguer,Pierre,1698—1758)　法国数学家、物理学家、水文学家.生于勒克勒佐,卒于巴黎.曾远征秘鲁,测量赤道附近的一度子午线的弧长.他是光学的奠基人之一,曾被选为巴黎科学院院士和伦敦皇家学会会员.他在数学方面的主要贡献是首先研究了一种特殊的平面曲线——追踪曲线,或称曳物线.现在这种曲线在自动化过程中具有广泛的应用.他还首先用符号"≥"和"≤"表示"不小于"和"不大于".

马克劳林(Maclaurin,Colin,1698—1746)　英国数学家.出生于苏格兰的基尔莫丹(Kilmodan),11岁入格拉斯哥大学学习,15岁获硕士学位,19岁(1717年)在阿伯丁(Aberdeen)的马里沙尔学院任数学教授.1719年被选为伦敦皇家学会会员.1722—1726年在巴黎从事研究工作.1740年由于他的一篇论潮汐的论文和欧拉(Euler,L.)、丹尼尔第一·伯努利(Bernoulli,Daniel Ⅰ)共同获巴黎科学院的奖.回国后,由牛顿(Newton,I.)推荐在爱丁堡任数学教授.还曾做过保险统计工作,死于爱丁堡.

马克劳林是牛顿流数理论的继承者.主要数学著作有《结构几何学或关于一般几何曲线的说明》(1720年)、《流数通论》(1742年)、《代数论》(他死后1748年出版).他确立了数列收敛的积分特征,并得

出了级数求和的公式;他利用几何方法讨论了椭面对粒子的引力问题,对克莱罗(Clairaut,Alexis - Claude)在地球形状方面的研究有积极影响;他还研究了函数展成幂级数的问题,得出了函数在原点展成幂级数的表达式,被称为马克劳林级数,或马克劳林公式.他也是第一个正确地提出极大和极小有何区别的人,并最先出版了有关的著作.此外,马克劳林还发表过天文学方面的论文,改进了奥克尼和谢特兰岛的地图等.

丹尼尔第一·伯努利(Bernoulli,Daniel Ⅰ,1700—1782) 瑞士数学家和物理学家.出生于荷兰的格罗宁根,是约翰第一·伯努利(Bernoulli,Johann Ⅰ)的次子.1716年,他毕业于巴塞尔大学.他和他的父亲一样,开始研究医学,不久转向数学.1724年与其兄前往圣彼得堡科学院讲授数学,并成为该院名誉院士.1733年返回瑞士,同年在德国柏林先后任过解剖学和植物学教授.1750年当选为伦敦皇家学会会员.

丹尼尔第一·伯努利是伯努利数学家族中成就最大的人,他在代数、概率论、微积分学、级数理论和微分方程等方面都有重要贡献.曾与大数学家欧拉(Euler,L.)10次共同荣获巴黎科学院奖.1734年与其父以《行星轨道与太阳赤道不同交角的原因》的论文,获双倍奖金.在代数上,他借助反级数推得代数方程数值解的近似法.在概率上,他首次利用微积分学,并将概率用于人口统计中,确定了正态分布误差理论,并发表了第一个正态分布表.

丹尼尔第一·伯努利的主要著作《流体动力学》是研究气体动力学和液体动力学的重要文献.他研究得出的理想液体常态运动方程,即液体和气体动力学基本方程,被誉为伯努利方程.在弦振动研究中,他第一次把三角级数(傅里叶级数)用于解偏微分方程.

贝叶斯(Bayes,Thomas,1702—1761) 英国数学家.生于伦敦,卒于坦布里奇韦尔斯(Tunbridge Wells).早年他在伦敦助理宗教事务,后来长期担任坦布里奇韦尔斯地方教堂的牧师.他业余时间钻研数学,颇有成效.

贝叶斯的主要贡献在概率论方面,他在论文《机会的学说概论》(此文在他死后发表于1763年)中建立了条件概率的贝叶斯定理或贝叶斯公式,以后成为了统计推断的基础,对后世统计思想有很大影响.在关于微积分基础的大论战中,贝叶斯也发表过文章,反对贝克莱(Berkeley,G.,1685—1753)主教对微积分的攻击.

克莱姆(Cramer,Gabriel,1704—1752) 瑞士-法国数学家.生于日内瓦,卒于法国塞兹河畔的巴尼奥勒(Bagnols - sur - cèze).1734年任几何学教授,1750年任哲学教授.

克莱姆著有《代数曲线分析引论》(1750),书中第一次正式引入坐标系的纵轴(Y轴),并给出由线性方程组的系数确定方程组解的表达式,即"克莱姆法则";还提出过曲线中的"克莱姆悖论".他的另一重要贡献是加强了数学家之间的联系,约翰第一·伯努利(Bernoulli,Johann Ⅰ)、丹尼尔第一·伯努利(Bernoulli,Daniel Ⅰ)、欧拉(Euler,L.)等人都与他有长期通信来往.

欧　拉(Euler,Leonhard,1707—1783) 瑞士数学家.出生于瑞士巴塞尔(Basel)的一个牧师家庭,早年在巴塞尔大学读神学,因受伯努利家族的教育和影响,转而从事数学研究.欧拉17岁(1723)获得硕士学位,19岁便发表了第一篇论文,20岁(1726)应聘为圣彼得堡科学院研究员,3年后升为物理学教授.1732年接替丹尼尔第一·伯努利(Bernoulli,Daniel Ⅰ)的职位主持数学讲座,第二年被选为圣彼得堡科学院院士.1741—1766年,应普鲁士国王邀请定居柏林,任柏林科学院数学所所长.1766年应俄国沙皇之邀移居圣彼得堡.晚年失明,但仍坚持科学研究和著述,1783年在圣彼得堡逝世.

欧拉是18世纪数学界的中心人物,他是变分法的奠基人,复变函数论的先驱者.在数论和微分方程等方面亦有重大成就,几乎在数学的每一个分支学科都可见到他的名字.如初等几何的欧拉线,多面体的欧拉定理,空间解析几何的欧拉变换公式,四次方程的欧拉解法,数论中的欧拉函数,微分方程中的欧拉方程,级数中的欧拉常数,变分学的欧拉方程,复变函数论中的欧拉公式等.

欧拉是位高产数学家,共发表论文865篇,特别是约一半的作品是在他完全失明后口述写成的.著有《无穷小分析引论》一书,对牛顿(Newton,I.)和莱布尼茨(Leibniz,G. W.)的微积分学、傅里叶级数的发展起了推动作用.另有《微分学原理》和《积分学原理》等论文集四卷,主要涉及微积分学;还有《代数基础》一书,是他失明后口述写成的,并用俄、德、法文出版.他同丹尼尔第一·伯努利(Bernoulli,Daniel Ⅰ)合作,曾10次荣获巴黎科学院奖.

此外,欧拉在物理学、力学、天文学等方面也有重要贡献,他是理论流体力学的创始人.他对航海、弹道研究也起了一定的作用,其有关著作有:《论船舶的左右及前后摇晃》、《1769年彗星的计算》、《日食的计算》、《月球新理论》等.

布　丰(Buffon,Georges Louis Leclerc de,1707—1788) 法国自然科学家.生于蒙巴尔(Montbard),卒于巴黎.早年在第戎(Dijon)耶稣会学院学习,以后到意大利和英国游历.25岁回到家

乡，开始研究自然科学.起初专攻数学和物理，后来成为植物学家.1733年当选为法国科学院院士.1739年任巴黎植物园园长，1771年受国王路易十四(Louis,XIV)的爵封.

布丰的主要数学贡献在概率论方面.他于1777年出版了《能辨是非的算术试验》一书，其中主要研究几何概率，提出并解决了下列概率计算问题：把一个小薄圆片投入被分为若干个小正方形的矩形域中，问使小圆片完全落入某一个小正方形内部的概率是多少？他还解决了这种类型更复杂的问题，这些概率问题都被称为"布丰问题"，特别是"布丰投针问题"的结果可以用来计算 π 的近似值.这是近代蒙特卡罗法的古典例子.

布丰还以研究自然博物史闻名于世.这方面最重要的著作是《自然史》，计44卷.这是他几十年心血的结晶，书中附了许多精美的植物插图.这部著作从1749—1804年陆续出版，后8卷是由他的学生完成的.布丰还在1740年翻译了牛顿(Newton,I.)的《流数论》，同时探讨了牛顿和莱布尼茨(Leibniz,G.W.)发现微积分的历史.此外，他还是进化思想的先驱者.

辛普森(Simpon,Thomas,1710—1761) 英国数学家.生于累斯特郡马基特博斯沃思(Market Bosworth)，卒于马基特博斯沃思.他家庭生活贫困，14岁开始自学数学，26岁发表论文，获得成功.1743年(33岁)时任伍利奇皇家军事学院数学教授，两年后当选为伦敦皇家学会会员.

辛普森的第一本专著为《流数新论》(1737)，在微积分理论的严密化方面做出了尝试.以后又相继出版了《机遇规律》(1740)、《年金保险与赔款》(1742)和《数学论文集》(1743)，发展了概率论及其在公共事业中的应用.此外，他还写了三本很有影响的教科书：《代数》(1745—1826，共10版)、《几何》(1747—1821，共6版)、《三角》(1748—1799，共5版).后期从事牛顿(Newton,I.)的流数术的完善工作，撰写了《流数学说及其应用》(1750)、《总论》(1757)，成为流数术计算的楷模.

柯尼希(Koenig,Johann Samuel,1712—1757) 德国数学家、物理学家.生于德国比丁根(Büdingen)，卒于荷兰阿默龙恩(Amerongen)附近.幼时受过良好的家庭教育，1730—1734年到巴塞尔向数学家约翰第一·伯努利(Bernoulli,Johann Ⅰ)、丹尼尔第一·伯努利(Bernoulli,Daniel Ⅰ)等人学习数学.1744年成为弗拉讷克(Franeker)大学教授.还被选为巴黎科学院、普鲁士科学院院士，以及伦敦皇家学会、格丁根大不列颠科学学会会员.他以研究蜂房问题和最小作用原理著称，后者是数学史上的一个著名课题，曾激起许多学者的兴趣，并为此发生过一场科学论战.

克莱罗(Clairaut,Alexis-Claude,1713—1765) 法国数学家、天文学家.生于巴黎，卒于巴黎.他在童年时代就表现出非凡的天赋，尤其擅长数学，早年受到其父亲的良好的启蒙教育.12岁就向巴黎科学院提出了关于特殊曲线的报告，对四次代数曲线的一种类型进行了研究.16岁(1729年)就出版了巨著《双重曲率曲线的求法》.18岁时就破格当选为巴黎科学院正式院士，后来又成为伦敦皇家学会会员.

克莱罗的几何学著作同欧拉(Euler,L.)的著作一起为研究空间曲线奠定了基础.他第一次引用曲线积分的概念，给出了多元函数全微分的概念，并引入一阶微分方程通解和特解的概念.在天文学上，他著有《地球形状理论》(1743年)和《月球的理论》(1753年)，正确地预报了哈雷彗星在1759年4月中旬出现，并在1760年将计算方法公布于众.他还参加了以测量子午线为目的的拉普兰德勘察工作，后来提出了克莱罗大地测量基本定律.

拉卡伊(La Caille,Nicolas Louisde,1713—1762) 法国天文学家、数学家.生于龙梅尼(Rumigny)，早年在巴黎教会学校学习修辞学和哲学，后改学神学，获天主教神甫职位.1736年到巴黎天文台工作，1739年任巴黎马扎兰学院的数学教授，1741年被选为巴黎科学院院士.

拉卡伊编写的一套数学、力学、天文学和光学教科书，如《初等数学教程》(1741)等曾被广泛采用.1750—1754年，他在南非好望角测定了月球视差和太阳视差，还勘测了子午线的长度和南半球的10035个星的位置，绘制出一万颗南天星图.他还完成了对南天星座的划分，分出了14个新的星座，并一一加以命名.

达朗贝尔(D'Alembert,Jean le Rond,1717—1783) 法国数学家、力学家、哲学家.生于巴黎，卒于巴黎.他是一位贵妇人的私生子，出生后被遗弃，由一对玻璃匠夫妇抚养成人.早年学习法律和医学，后转向自然科学.1739年，他在巴黎科学院宣读第一篇论文，1741年当选为科学院院士.1754年成为法兰西学院院士，1772年担任学院终身秘书，还被选为多国科学院院士.

达朗贝尔在力学方面做出了杰出的贡献.他在1743年发表了关于动力学的一部基础性著作《论动力学》，提出了动力学基本规律——达朗贝尔原理.

达朗贝尔的数学研究主要在微分方程论、复变函数、级数理论和无穷小分析等方面.1747年，他在研究弦振动问题的论文中应用了偏微分方程理论，得到方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

并给出通解.他与欧拉(Euler,L.)、丹尼尔第一·伯努利(Bernoulli,Daniel Ⅰ)的工作共同奠定了数学物理的基础.他在流体力学论文《关于流体阻力的新理论》中,首先应用了复变量函数,并推导出表示解析函数实部和虚部关系的基本方程,为复变函数理论的建立做出了贡献.在常微分方程理论中,他得到了常系数线性方程和一阶、二阶线性方程组的重要结果.他首次给出了判别正项级数收敛的充分条件——达朗贝尔法则,并建立了绝对收敛的判别法,还曾试图建立严格的极限理论.

达朗贝尔是18世纪法国启蒙运动的领袖人物之一.他和唯物主义哲学家狄德罗(Diderot,D.)是朋友,他们共同编纂了《百科全书》(计35卷,1751—1780年出版).达朗贝尔在该书前言中提出百科全书要以统一的观点反映当代知识,追溯发展历史,研究各学科分支间的关系,并显示出它们如何融为一体.他还为《百科全书》撰写了“微分”、“方程”、“动力学”、“几何学”、“维数”、“哲学原理”等重要条目.在“维数”一文中,他首先把时间作为第4维空间提出.达朗贝尔还致力于哲学研究,他主张理性和自然的权力,反对旧教条和旧制度,拥护社会改良.他的主要数学著作编辑成了8卷集的《数学论文集》.

阿涅西(Agnesi,Maria Gaetana,1718—1799) 意大利女数学家.生于米兰,父亲为波伦亚大学数学教授,幼年聪慧,受到过良好的家庭教育.她长期钻研当代数学名著,数学基础扎实,30岁完成重要著作《解析的直观》(Aberdeen Marisohal),获极高评价.后被任命为波伦亚大学荣誉教授.她还研究过三次曲线 $x^2y=a^2(a-y)$,现被称为“阿涅西箕舌线”.1749年获罗马教廷金质奖章.

兰 登(Landen,John,1719—1790) 英国数学家.生于皮克尔克(Peakirk),卒于米尔顿(Milton).早年学习测量技术,后充当地产经理人和测量人员.他业余时间研究数学,1744年开始发表论文,1766年当选为伦敦皇家学会会员.

兰登提出了用两段椭圆弧长求双曲线弧长的方法,他的工作对椭圆积分论的发展有积极意义.他还利用微积分求三次方程的根,研究过二重对数和三重对数理论,并试图以代数方法消除微积分基础中存在的困难.他的工作成了欧拉(Euler,L.)、拉格朗日(Lagrange,J.-L.)和勒让德(Legendre,A.-M.)某些数学研究的起点.

克斯特纳(Kaestner,Abraham Gotthelf,1719—1800) 德国数学家.生于莱比锡,卒于格丁根.早年在莱比锡大学求学,1739年通过教师资格考试,在该校讲授数学和逻辑学等课.1756年受聘为格丁根大学数学和物理学教授.他用大量精力研究过欧几里得(Euclid)的平行公设.值得指出的是,他与三个非欧几何的发现者都有密切关系:高斯(Gauss,C.F.)曾是他在格丁根大学任教时的学生,波尔约(Bolyai,J.)的父亲受过他的指导,他还是罗巴切夫斯基(Лобачевский,Н.И.)的老师巴特尔斯(Bartels,J.M.C.)的老师.此外,他在方程论、级数论和数学史方面也有一定贡献.

科捷利尼科夫(Котельников,Семён Кириллович,1723—1806) 俄国数学教育家.生于圣彼得堡,是欧拉(Euler,L.)最优秀的学生之一,俄国第一个在数学和力学方面有独创性工作的学者.1757年被选为圣彼得堡科学院院士.他的科学实践是多样化的.他不仅在学校里讲授数学和力学课程,还举办公开数学讲座.他编著了俄国第一部数学分析(1771)和力学(1774)的教科书.参加创办了一批新型的培养科学和教育骨干的学校.他收集了大量的图书目录资料,成为杰出的图书目录学专家之一.他的科学遗产包括8部著作,内容主要涉及分析学及其邻近学科.

蒙蒂克拉(Montucla,Jean Étienne,1725—1799) 法国数学家、数学史家.生于里昂,卒于凡尔赛.1761年起任政府官职,业余研究数学与数学史,曾当选为柏林科学院通讯院士.他的《圆求积的历史探索》(1754)是最早系统研究圆周率历史的专著;《数学史》又是当时第一部全面阐述数学历史的著作,其中有许多他本人的论述和见解.该书初版时为2卷,经过40多年不断地补充修订,1799—1802年出版时已扩展为4卷,在以后的100多年里一直被奉为数学史及科学史的经典.

朗 伯(Lambert,Johann Heinrich,1728—1777) 德国数学家.生于阿尔萨斯(Alsace),是一家成衣商之子,家景贫寒,求学时是工读学生,曾当过会计、家庭教师.1763年前往柏林科学院任职,晚年任俄国航海历编译长.死于柏林.

朗伯是欧拉(Euler,L.)和拉格朗日(Lagrange,J.-L.)在柏林科学院的同事,双曲线三角法的创立者.主要著作有《光学》和《透视学》(1759)、《彗星论》(1761);重要论文有:《关于超然量》(1768),证明了 π 和 e 为不可通约量;《关于三角法》(1768),详述了棣莫弗定理,而以 $\cos hx$、$\sin hx$ 之记号代表双曲线正余弦等.他对平行线理论的研究也很深入.在天文学方面,他提出关于星系的假说.此外,他对哲学也有一定研究.

贝 祖(Bezout,Étienne,1730—1783) 法国数学家.生于内穆尔(Nemours),卒于枫丹白露(Fontainebleau)附近.贝祖主要研究代数方程理论.他用消元法把只含一个未知量的 n 次方程问题与解联立方程组问题联系了起来,提供了某些 n 次方程的解法.他是最先认识到行列式价值的数学家之一.1764年,他证明了含 n 个未知量的 n 个齐次线性方

程组有非零解的条件是其结式(系数行列式)等于零.他还研究了用消元法解二次以上的两个二元方程,并证明了关于方程次数的定理,称为贝祖定理.他的工作对近代消元法的研究有很大影响.

马尔法蒂(Malfatti, Gian Francesco, 1731—1807) 意大利数学家.生于特伦托(Trento),卒于弗拉拉(Ferrara).1754年到弗拉拉办学,1771年受聘为该地大学教授.1770年给出解决五次方程的"马尔法蒂构造法".1802年发表了著名的"马尔法蒂问题"及其分析解法,即在任意一个三角形中做出两两相切的三个圆,并使每个圆与该三角形的两条边相切,该问题以其新颖性与和谐性引起数学家们的极大兴趣.

安岛直円(Ajima〔or Azima〕, Naonobu, 约1732—1798) 日本数学家.生于江户(今东京),卒于江户.曾从关孝和学派学习数学,30岁以后,又到山路主住(Yamaji, Nushizumi)门下继续深造,后来成为该学派的第四代大师.

安岛直円对日本和算的发展产生过重要影响,被誉为"日本的拉格朗日(Lagrange, J.-L.)".他的特点是强调理论的指导意义,重视数学理论的一般性,注重用几何方法处理问题.他关于微积分方面的工作颇有特色.他给出了一种求弧长的方法,又进一步推广,形成二重积分,求出一些立体的体积.他还解决了一般情形下的所谓马尔法蒂问题.可能是由于学派保密的规定,他的著作生前未发表过.

拉朗德(Lalande, Joseph, Jérôme le Fr an,cois de, 1732—1807) 法国数学家、天文学家、科学史家.生于里昂附近的一个小村镇,1748年毕业于里昂中学后,进入法兰西学院学习天文学、数学和物理学.他曾协助数学史家蒙蒂克拉(Montucla, J.É.)编写和出版了四卷集《数学史》(第二版1799—1802),此书初版在1758年,1799年第二版的前两卷问世,第三卷还未印完蒙蒂克拉就去世了.他在1799—1802年间完成了这项工作,还补充了第四卷,其内容主要是天文学史,他也因此而出名.此外,他编制的五位对数表直到现在还有使用价值.

卡斯滕(Karsten, W. J. G., 1732—1787) 德国数学家.生于新勃兰登堡(Brandenburg),曾在比措任教授,后到哈雷工作.他编写了一部百科全书式的著作《数学体系》(共8卷,1767—1777年),这部著作的科学价值在于系统地使用了字母符号表示法.1768年,他给出了虚数对数的几何解释——所谓卡斯滕图解.

华 林(Waring, Edward, 1734—1798) 英国数学家.生于什鲁斯伯里(Shrewsbury),卒于该城附近的普利莱(Plealey).1757年,他以优异的成绩毕业于剑桥大学,1760年获硕士学位,同年被任命为剑桥大学第六任路卡斯数学教授.1763年当选为伦敦皇家学会会员.

华林的数学才能在学生时期就有所显露.1762年,他出版了《分析杂记》一书,使他一跃成为当时第一流的数学家.在这本书中,他叙述了整数论中的华林定理,并提出"华林猜想":每个自然数可以表示为至多r个数的k次幂之和.这个结果的一般证法首先由希尔伯特(Hilbert, D.)在1909年给出.1770年,华林把哥德巴赫猜想公布于世.

除数论外,华林在代数、代数曲线论和无穷级数理论等方面也做出了重要贡献.他得到了n次代数方程的根的对称函数与方程系数之间的关系式;研究了预解式理论、方程根的分布范围;建立了三、四、五次方程的虚根存在准则.他还曾给出任意次代数曲线的某些性质.在无穷级数论中,华林得到了级数

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots$$

当$n>1$时收敛,$n<1$时发散的结果.1776年,他得到一个著名的比值判别法,但通常认为是属于柯西(Cauchy, A.-L.)的.华林的著作还有《代数沉思录》和《代数曲线的性质》等.

范德蒙德(Vandermonde, Alexandre-Théophile, 1735—1796) 法国数学家.生于巴黎,卒于巴黎.曾在巴黎学习过音乐,后从事数学研究.1771年当选为巴黎科学院院士.

范德蒙德的主要贡献在代数方程理论和行列式方面.他通过对根的置换下函数不变量的讨论,研究了代数方程可解性的一般问题,证明了根的任何对称函数都能用方程的系数来表示.他还独立于求解线性方程组来考查多项式,首次对行列式理论做出系统的逻辑论述,成为行列式理论的奠基人.他又把行列式理论应用于解线性方程组,并给出用余子式展开行列式的法则.有一种特殊的行列式被称为"范德蒙德行列式".

拉格朗日(Lagrange, Joseph Louis, 1736—1813) 法国数学家、力学家、天文学家.变分法的奠基人之一.生于意大利的都灵(Turin),法籍意大利人,父亲是法国军人,母亲是意大利人.他曾在都灵炮兵学校学习,最初喜欢文学,后转向数学,未毕业就担任该校数学教师.1753年受哈雷(Halley, E.)的影响,开始从事数学分析的研究,是都灵科协(后改为科学院)的组织者,并在协会主办的杂志上发表论文《声的传播》、《求积分最大与最小的方法》等.因成绩卓著,1755年(18岁)便任都灵皇家炮兵学校教授,25岁已成为欧洲著名数学家.1759年当选为柏林科学院院士,1772年当选为巴黎科学院院士,1776年又被选为圣彼得堡科学院名誉院士.1764年、1766年先后以《月球天平动》和《木星卫星理论》

的论文获巴黎科学院的一等奖. 1766—1787 年,在柏林科学院工作,并接任欧拉(Euler,L.)之职,任柏林大学数学所所长. 1787 年后,定居巴黎. 曾任高等师范学校数学教授. 1790 年负责制定了公制法. 1795 年任巴黎综合工科学校第一任校长.

拉格朗日是 18 世纪后期和 19 世纪初期世界公认的大数学家之一. 他的数学成就涉及到数学分析、代数方程论、变分法、分析力学、天体力学、偏微分方程积分法、球面天文学、制图学诸方面. 在数学分析方面,他得出了泰勒级数的余项公式(即拉格朗日余项),有限增量公式,著有《解析函数论》(1797)、《函数计算讲义》(1801)两大巨著. 代数方程论方面,他在 1770 年前后,利用统一的方法(现在称为拉格朗日预解式方法),详细分析了二次、三次、四次方程的根式解法. 他的方法对于求解低次方程卓有成效,但对于一般的五次方程效果不大,所以他预见到也许一般的五次方程没有根式解(但未能给出证明). 他还研究了任意常数的变分法. 在微分方程方面,建立了特解理论. 在数论上,借助于连分数解决了二元二次不定方程,证明了二次不尽根分解成连分数的周期性等.

拉格朗日在力学方面著有《分析力学》(1788)、《关于物体任何系统的微小振动》,他引进广义坐标,解出所谓拉格朗日运动方程,从而创立了分析力学.

拉格朗日在天文学方面提出了彗星起源假说,研究了彗星和小行星的轨道摄动,并对金星凌日日食进行了计算. 著作有《关于月球的天平运动问题》、《木星的运行问题》、《三物体算题》、《月球的多年加速度》、《彗星轨道的摄动》等.

克吕格尔(Klügel,Georg Simon,1739—1812) 德国数学家、物理学家. 生于汉堡,卒于哈雷(Halle). 早年在格丁根大学学习,1763 年获博士学位,相继在黑尔姆施泰特大学和哈雷大学任教. 1803 年当选为柏林科学院院士.

克吕格尔的主要贡献在三角学和几何学方面. 他对欧几里得(Euclid)平行公理的可证明性提出异议,他的看法有助于早期非欧几何学的探讨. 在三角学方面,他统一了三角学中各公式,引进了"三角函数"这一术语,概括了直角三角形中各边之间的关系,并把几个基本公式推广到球面直角三角形中. 著有《分析三角学》(1770)一书. 他还研究了形式代数问题和球极平面射影理论. 另外,还著有《数学辞典》.

兴登堡(Hindenburg,Carl Friedrich,1741—1808) 德国数学家. 生于德累斯顿(Dresden),卒于莱比锡. 早年在莱比锡大学学习,1771 年获硕士学位. 1781 年任莱比锡大学哲学教授,1876 年受聘为物理学教授. 兴登堡主要研究组合论,他是德国"组合学派"的开创人之一. 1778 年,他开始发表组合论方面的论文,还编制了一套复杂的符号系统,用来表示排列、变差、组合等概念,这套符号在概率论、级数论、高等微分学的研究中十分有用. 他编著有《纯粹与应用数学文献》和《组合分析论文汇编》等书.

孔多塞(Condorcet,Marie - Jean - Antoine - Nicolas - Caritat,Marquis de,1743—1794) 法国数学家. 生于里伯蒙特(Ribemont),卒于巴黎. 1759 年毕业于纳瓦尔学院. 1769 年当选为法国科学院院士. 他是百科全书式的学者,在许多学科中做了探索和预言,在数学中出版过《积分计算》(1765)、《论文集》(1765). 1768 年断言所有超越函数(当时限于三角函数、对数函数和指数函数)能用圆和双曲线构成,并证明了条件方程可以通过系数确定其可积性和降阶. 1785 年出版了《概率分析的应用》,阐明了数学应用于人类社会的巨大作用,后人对他预言过 20 世纪中才蓬勃兴起的边缘学科倍加赞赏,称他为"社会数学"的开创者.

韦塞尔(Wessel,Caspar,1745—1818) 丹麦数学家、土地测量员. 生于挪威,卒于丹麦哥本哈根. 早年在哥本哈根大学学习. 1764 年开始担任丹麦皇家科学院的测量员. 他一生都从事测量和绘图,1798 年以后领导皇家科学院的土地测量工作.

韦塞尔在数学方面最著名的贡献是建立了复数表示法. 1797 年 3 月 10 日,他向丹麦科学院递交了一篇题为《方向的分析表示,特别应用于平面和球面多边形的测定》的论文,其中他研究了平面和空间的向量理论,并把复数作为平面上的向量给出其几何表示法. 他建立的复数表示法,除虚数单位的符号不同外,和现代复数平面的表示法完全一致,他定义的几种运算一直沿用至今. 他还用向量的几何表示法来解决几何和三角问题. 他的论文虽有重大价值,但由于是用丹麦文写的,所以一直没引起人们的注意. 直到 1897 年译成法文后才被重视.

蒙　日(Monge,Gaspard,1746—1818) 法国数学家、物理学家、教育家. 出生于科多尔区博思(Beaune)镇的一个小商贩家庭,从小聪明好学,14 岁就制成一台结构完整的消防水泵,引起人们的注意. 16 岁进入里昂教会学校学习,两年以后以优异的成绩毕业. 18 岁时(1764 年),他的才华被一位工程兵军官发现,举荐他去法国著名的梅济埃尔皇家工兵学校旁听,那里虽学习艰苦,但他自强不息,奋发学习,成绩优异. 23 岁(1769 年)开始在工兵学校教数学,并写出了第一篇数学论文. 25 岁求教于达朗贝尔(d'Alembert,J. le R.)等数学名家,并向巴黎科学院提交了 4 篇重要的论文,被巴黎科学院选为通讯院士. 29 岁(1775 年),工兵学校授予他"皇家数学和物理学教授"称号. 34 岁(1780 年),在达朗贝尔

的推荐下被选为巴黎科学院院士，并任巴黎卢夫尔流体动力学教授. 1794 年，蒙日负责筹建综合工科学校. 1795 年，他参加倡办了高等师范学校. 他曾积极参加法国资产阶级大革命，还担任过海军学员的主考官. 拿破仑(Naploeon,B.)失败后，遭到残酷迫害，被开除出科学院，剥夺了养老金，在悲愤中病逝于巴黎.

蒙日在数学上以画法几何闻名于世，成为画法几何学的创始人，并为射影几何奠定了基础，促进了几何学的迅速发展. 他在解析几何、微分几何、微分方程等方面亦有重要建树. 此外，他在物理学、化学、锻冶及机械制造等方面都有一定的成就. 蒙日的主要著作有《画法几何学》、《代数在几何中的应用》、《分析在几何学上的应用》、《静力学基础教程》、《论海市蜃楼光学现象》(埃及十年)等.

蒙日不仅是一位优秀的教师，还是一位卓越的教育家. 他特别重视师资水平、基础训练、实验教学，对学生要求严格，推动了法国教育的发展，培养了大批人才.

会田安明(Aida,Yasuaki,1747—1817)　日本数学家. 生于山形(Yamagata)，卒于江户(今东京). 15 岁(1762 年)开始拜师学习数学，1769 年到江户谋生. 曾参加河道改造和水利工程的管理. 业余时间自修数学，并经常参与当时的学术争论. 1788 年弃去公职，专心从事数学研究，并到各地讲学，在日本数学界产生了较大影响. 他创立了一个学派，称为宅间派. 主要贡献在几何学、代数学和数论等方面. 他著述甚多，并大量使用了新的简化的数学符号.

坦索达蒙当(Tinseau d'Amondans,Charles de,1748—1822)　法国数学家. 生于法国贝桑松(Besancon)，卒于蒙波利埃. 1771 年毕业于梅济耶尔皇家军事学院. 1771—1791 年在工兵部队任工程师，被授予陆军准将衔. 因卷入法国政治斗争，1791 年后到处流亡，68 岁才回到法国. 他是著名的几何学家蒙日(Monge,G.)的学生，受其老师影响在微分几何方面有突出贡献. 他研究了双曲率曲线和曲面理论，曲面的切平面、外切锥面和柱面的接触曲线，空间曲线上一点的密切平面的确定，与直纹面有关的面积和体积的求法，以及空间解析几何等.

拉普拉斯(Laplace,Pierre - Simon,1749—1827)　法国数学家、天文学家、物理学家. 生于法国西北部诺曼底的一个贫苦农家. 自幼聪慧，在邻居的资助下才获得上学机会. 1767 年前往巴黎求学，后在达朗贝尔(d'Alembert,J. le R.)的帮助下获得巴黎陆军学校教授职务. 还曾任高等师范和综合工科大学教授. 他把终生的精力献给了数学、物理学，特别是天体力学的研究. 在拿破仑时代他曾参与政治，任内务大臣，被授予伯爵. 拿破仑(Naploeon,B.)失败后，投靠路易十八(Louis,XⅧ)，获赠侯爵. 由于他政治上没有气节，又在处理先发权问题上欠公正，地位虽高，但声望不大，晚年无故人，凄凉地去世.

拉普拉斯在数学上的主要贡献是将解析学方法应用到天体力学；在位势论和概率论等方面，取得了一系列成就，使解析学发展到新的高度. 由他创立的拉普拉斯变换、拉普拉斯方程、拉普拉斯算子在科学技术中得到广泛的应用. 他的数学专著有《分析概率论》(1812)，其中包括几何概率论、伯努利定理，以及对最小二乘法的讨论等.

在天文学和力学方面，主要著作有《宇宙系统论》(1796)和《天体力学》(1799—1825). 1796 年，拉普拉斯在《宇宙系统论》中，提出了著名的星云假说，探讨了太阳系的起源，并从数学上做了论证. 他以宇宙进化论的先驱而闻名. 在《天体力学》中，他阐述了天体运动的数学理论，讨论了地球形状、月离理论、天体问题及行星摄动等问题.

马斯凯罗尼(Mascheroni,Lorenzo,1750—1800)　意大利数学家. 生于贝加莫(Bergamo)附近，卒于巴黎. 1770 年在贝加莫神学院供职. 1786 年受聘为帕维亚大学数学教授，后当选为多个学会和科学院成员. 他在《欧拉积分计算注释》(1790)中对欧拉常数进行了较为详细的计算，得到精确到 32 位小数的值，被后人称为欧拉-马斯凯罗尼常数. 在《圆规的几何学》(1797)中，他从理论上解决了著名的马斯凯罗尼圆规问题，即只用一个圆规就足以完成传统的尺规作图问题，从而大大地推动了近两千年来几何作图问题的研究.

勒让德(Legendre,Adrien - Marie,1752—1833)　法国数学家. 生于巴黎(亦说法国南部的图卢兹(Toulouse))，毕业于巴扎林学院. 曾任军事学院和巴黎高等师范学院数学教授，并担任过政府许多部门的顾问，后来担任艺术学院的学生监督，直至 1833 年逝世. 1783 年与 1787 年，他先后被选为法兰西科学院院士和伦敦皇家学会会员.

勒让德主要从事椭圆函数论的研究，并在数学分析与数论等方面有重要成果. 他创立并发展了大地测量理论，在球面三角学方面有重大贡献；二次互反律和米突制亦为其所创立. 他的研究范围甚广，几乎涉及当时数学的各个方面，他的成就和威望仅次于同时代法国的数学大师拉格朗日(Lagrange,J.-L.)、拉普拉斯(Laplace,P.-S.)、蒙日(Monge,G.)等. 他的主要数学著作有《椭圆函数论》(1827)、《数论》(1798)、《几何学原理》(1794)等.

卡　诺(Carnot,Lazare - Nicolas - Marguerite,1753—1823)　法国数学家、政治家. 生于法国东部地区诺雷(Nolay)的一个律师家庭，曾受过军事工程专门教育. 1744 年为工程部队少尉，1787 年升任

司令.他积极参加了1789年的法国资产阶级革命,1791年任立法会议成员,第二年当选为议会成员,1793年受托组织强大的革命军,保卫了革命成果,并投票将路易十六(Louis, XVI)处死,被法国人民称为"革命的将军"、"胜利的组织者".路易十八(Louis, XVIII)上台后,卡诺被流放,死于德国的马格德堡(Magdeburg).

卡诺以顽强的意志,坚持业余科学研究,在几何、工程、军事等方面著述颇丰.在数学方面,主要研究了分析学和几何学.他对几何学的研究使射影几何脱离分析学成为纯粹数学的一个分支,代表作有《几何图形的相互关系》(1801)、《位置几何学》(1803)和《横截线论》(1806)等.他的《关于无穷小分析的玄想》(1797)被认为是19世纪分析基础严密化的开端,书中论证了无穷小计算过程的正确性.

斯尼亚代茨基(Sniadecki, J. B. 1756—1830) 波兰数学家、天文学家.早年在波兹南(Poznan)的耶稣学校里接受教育.1775年毕业于克拉科夫大学,并获博士学位.以后曾到格丁根、莱顿、巴黎、伦敦等地留学,接触到当时许多数学名流.1781年以后任克拉科夫大学教授,1806—1815年任该校校长.1806—1824年任维尔纽斯天文台台长.他为统一波兰的数学术语做了大量的工作,并撰写了一系列初等数学教科书.在天文学方面,他也做出了杰出的贡献,由他撰写的哥白尼(Kopernik, M.)传记在波兰很有影响.

阿博加斯特(Arbogast, Louis Francois Antoine, 1759—1803) 法国数学家.生于马奇格(Mutzig),卒于斯特拉斯堡(Strasbourg).早年当过律师,1787年之后先后在斯特拉斯堡、巴黎、下莱茵等地任教.1792年被选为法国科学院院士.主要贡献在分析数学方面,他的研究工作,涉及到解析函数、非连续函数、级数的收敛和算子演算等现代数学概念.他最先使用微分符号$Df\cdot x$.在他的著作《微分计算》(1800)中,给出逐次推导展开式系数的法则,被称为阿博加斯特法则.

克拉姆(Kramp, Chrétien, 1760—1826) 法国数学家、天文学家、物理学家.生于斯特拉斯堡,卒于斯特拉斯堡.曾在莱茵河畔的几个城市求学,后来到科洛涅的鲁尔中央大学任教.1809年前后,成为斯特拉斯堡理学院院长和数学教授.还曾是柏林科学院和巴黎科学院的通讯院士.1816年,他引入符号$n!$表示前n个自然数的乘积,并称之为"n的阶乘",同时将阶乘推广到非整数的情形.他编制了超越函数

$$\varphi(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$$

的数值表.在天文学和物理学方面,他探讨过空气动力学、结晶学和双折射理论,还推算过1820年以前的日月食时间.

古里耶夫(Гурьев, Семен Емельянович, 1764—1813) 俄国数学教育家、力学家.生平不详.炮兵工程学校毕业后留校作数学辅导教师,后升为数学教授.1798年被选为圣彼得堡科学院院士.主要研究几何学、分析学和力学,特别是教学法和数学方法论中的一些问题.在他的《数学及其分支的论证》一书中,用唯物主义的观点论述了数学的起源和研究对象等问题.他的主要著作《几何基础完备化的一种尝试》(1798),对不同形式的几何论证和通用的分析表述法进行了评述,并提出了几何教学大纲.他还写了大量的初等数学和高等数学教科书,他的《计算的科学》(1805)一书的思想,对19世纪初俄国普通中等学校的数学教育产生了良好的影响.

奥西波夫斯基(Осиповский, Тиморей Федорович, 1765—1832) 俄国数学家、哲学家、物理学家、天文学家.生于奥西波沃(Осипово),早年在教会学校读书,后来进入圣彼得堡师范学校学习,1786年毕业后到莫斯科民众学校任教.1800—1803年在圣彼得堡师范学校任数学教授.1803年以后任哈尔科夫大学教授,1813—1820年任该校校长.1820年,因反对沙俄政府的教育政策及学校中的学术独裁制度而被解除校长和教授职务.从此迁居莫斯科,在十分困难的条件下,他仍坚持科学研究.

奥西波夫斯基的著作和教学法对俄国数学的发展具有重要影响,其数学代表作《数学教程》(三卷集)被各大学广泛采用,该书系统地叙述了初等数学和高等数学的内容,包括解析函数的应用和变分法方面的知识.《数学教程》还被译为西欧几种文字出版.他的哲学思想是以唯物主义观点为基础,并曾发表重要讲演,批判了康德(Kant, I.)的唯心主义观点.此外,他在物理学、力学和天文学方面也有许多著作.他还培养了许多优秀人才,其中有奥斯特罗格拉茨基(Остроградский, М. В.)等人.

鲁菲尼(Ruffini, Paolo, 1765—1822) 意大利数学家、医学家、哲学家.生于意大利的瓦伦塔诺(Valentano),卒于摩德纳(Modena).就读于摩德纳大学,1788年获博士学位,同年受聘为教授.1814年成为摩德纳大学校长.

鲁菲尼在数学、医学、哲学等方面都做出了重要贡献.在数学方面,证明了一般高于4次以上的方程不能用根式法求解(1799),被称为阿贝尔-鲁菲尼定理,这项工作对置换群理论的产生和代数学的发展有重要意义.他引入了传递群和本原群等概念,证明了"一个群不一定有以其秩的任一因子为秩的子群".还研究了多项式的除法,得到了以逼近法解代数方程的法则.类似的法则15年以后由英国数学家

霍纳(Horner,W. G.)得到,现在称为鲁菲尼-霍纳法则.其实,这一法则早在500年前就为中国数学家秦九韶发现,故应称为秦九韶法则.

加尼埃(Garnier,Jean,Guillaume,1766—1840) 法国数学家.生于兰斯(Reims),卒于比利时布鲁塞尔.他先后任过科尔马(Colmar)的数学教授、巴黎综合工科学校教授和比利时根特(Gent)军事学院的教授、布鲁塞尔科学院院士.还编著出版了大量数学教科书.在他的《解析几何初步》(1801)中,第一次出现了"解析几何"这一术语.

傅里叶(Fourier,Jean Baptiste Joseph,1768—1830) 法国数学家、物理学家.生于欧塞尔(Auxerre)城的一个裁缝家庭,9岁时父母双亡,由当地一主教收养.曾在地方军校学习,后成为牧师.1790年成为巴黎综合工科学校教授.1798年随拿破仑(Naploeon,B.)远征埃及,任南埃及总督、开罗大学秘书,曾撰写过一些科学论文.1801年回国任过伊泽尔(Lsére)县地方长官,1808年被封为男爵,拿破仑垮台后,失去职位.但他仍继续从事科学研究,1816年成为法兰西科学院院士,1822年成为科学院终生秘书.还当选为伦敦皇家学会会员(1823)和圣彼得堡科学院荣誉院士.

傅里叶从1800年开始研究热传导理论,在1807年的论文中首次推导出热传导方程.1811年,因解答科学院提出的问题(即导出热传导方程式)而获奖.在研究热传导中,他把函数表示为三角级数,即傅里叶级数,并详细讨论了系数构成法则.他还发展了函数概念,对数学理论的发展影响很大.著有《热的分析理论》一书(1822),在其中进一步发展了积分理论,提出"傅里叶积分",为用封闭形式求解微分方程提供了普遍方法,在数学和工程技术中得到了广泛应用.

此外,傅里叶对代数学也有研究,提出笛卡儿符号法则的新证明,预言了线性代数的一些现代结果.1796年,他证明了在给定区间内代数方程实根个数的定理,即傅里叶定理.

华莱士(Wallace,William,1768—1843) 英国数学家.生于戴萨特(Dysart),卒于爱丁堡(Edinburg).华莱士没受过正规教育,早年曾在工厂当学徒,后自学数学成才,在珀恩(Perth)谋得职员工作.1819—1838年任爱丁堡大学教授.

华莱士的主要贡献在几何学方面:在1799—1800年,他证明了"如果三角形的一边与一条抛物线相切,那么三角形的外接圆经过抛物线的焦点".但他不知道这一结果早已由兰伯特(Lambert,J. H.)证得.他还深入研究了抛物线的性质,并由此引出某些结果.1804年,他又证明,如果四条直线两两相交,依次去掉一条直线可得到四个三角形,则这些三角形的外接圆相交于一点.这一定理后来被克利福德(Clifford,W. K.)推广到一般情形.此外,他还为百科全书和爱丁堡皇家学会会刊写过大量文章,其中包括他的许多数学发现.

阿歇特(Hachette,Jean-Nicolas Pierre,1769—1834) 法国数学家.生于法国阿登省的梅济耶尔(Mézières),卒于巴黎.早年在梅济耶尔皇家工程学院和梅斯大学学习,以后在梅济耶尔、旺德雷港和柯利乌尔等地工作.曾积极参与创建巴黎综合工科学校,并在该校任教.主要贡献在解析几何、画法几何和代数学等方面.他和他的老师蒙日(Monge,G.)共同发展了三维解析几何的理论,证明了二次曲面的每一个平面截口都是一条二次曲线,单叶双曲面和双曲抛物面是直纹面等结果.这些成果均发表在他们合作的论文《代数在几何中的应用》一文中,后来他又进一步完善了二次曲面的解析理论.此外,他还研究了代数学中三个变量的二次型的特征值等.

巴特尔斯(Bartels,Johann Martin Christian,1769—1836) 德国数学家.生于不伦瑞克(Braunschweig),高斯(Gauss,C. F.)的朋友.高斯读小学时,巴特尔斯担任教师的助手,他很早就发现了小高斯的数学才能.由于他的推荐,高斯得到一个公爵的资助而进入格丁根大学学习.巴特尔斯后来攻读于赫尔姆施泰特大学和格丁根大学.1803年获博士学位.1808年任喀山大学教授,俄国著名数学家罗巴切夫斯基(Лобачевский,Н. И.)是他的学生.1820年以后,受聘为塔尔图大学教授.1826年当选为圣彼得堡科学院院士.

热尔岗(Gergonne,Joseph-Diez,1771—1859) 法国数学家.生于南锡,卒于蒙彼利埃.1795年在南锡的工科大学教数学.1816年任蒙彼利埃大学教授.他是近代射影几何与代数几何的创始人之一.1810年创刊第一个专业性数学杂志《纯粹与应用数学年刊》,并任主编20多年.他先后在该刊上发表有关射影几何、代数几何、数学分析等方面的论著200多篇.成就有:首先引入极、对偶、曲线的类等许多基本概念;发明了把相互对偶的定理写成两栏的格式,利用对偶原理证明了九点圆定理等一系列定理.此外,他首创几何定理的解析证明,发展了古老的几何学.

鲍迪奇(Bowditch,Nathaniel,1773—1838) 美国数学家、天文学家、航海家.生于塞勒姆(Salem),卒于波士顿.早年在波士顿当过海员.他是靠个人奋斗获得成功的科学家.17岁开始自学牛顿(Newton,I.)的《自然科学的哲学原理》,以后学习并精通了法语、西班牙语、意大利语和德语,学习和研究了各国的数学和天文学文献.鲍迪奇最重要的贡献是编著了《美国新的实用航海术》(1802),翻

译了拉普拉斯(Laplace,P.-S.)的《天体力学》,并作了注释(英译本计4卷).这些工作使他获得了国际声誉,并被选为了伦敦皇家学会会员.

伍德豪斯(Woodhouse,Robert,1773—1827) 英国数学家.生于诺里奇(Norwich),卒于剑桥.1794年毕业于剑桥大学.1798—1823年在剑桥大学工作,1820年成为路卡斯数学教授.1822年后任天文学和哲学教授,任剑桥天文台台长.1802年当选为伦敦皇家学会会员.主要研究数学哲学,探讨了微积分的理论基础、几何法和分析法的作用和区别、符号表示的重要性,以及虚数的本质等问题.代表作为《解析计算原理》(1803),书中着力阐述了拉格朗日(Lagrange,J.-L.)的分析法、微分符号和微积分的理论基础.还曾特别研究了发散级数.此外,他对数学史也颇有研究,著有《十八世纪变分学史》(1810).

比 奥(Biot,Jean Baptiste,1774—1862) 法国物理学家、大地测量学家、天文学家、数学家.生于巴黎,早年在巴黎综合工科学校学习,与著名数学家拉普拉斯(Laplace,P.-S.)、拉格朗日(Lagrange,J.-L.)、蒙日(Monge,G.)等都有过接触.1800年成为法兰西学院教授,1803年当选为巴黎科学院院士,1809年受聘为巴黎大学教授.他的主要贡献在解析几何方面:建立了三种圆锥曲线的标准方程及其切线方程的简单形式,首先把正弦、余弦作为单位圆周上点的坐标来研究.此外,他对数学物理也颇有研究,并十分注意把数学方法应用于物理学和天文学的问题中.一生共发表论文、评述、回忆录和著作等,计300多篇(部).

朗克雷(Lancret,Michel Ange,1774—1807) 法国数学家、工程师.生于巴黎,卒于巴黎.早年在巴黎综合工科学校学习,1798年成为桥梁工程师,同年被派往埃及考察,第二年当选为埃及研究所数学部成员,1801年被任命为负责埃及测绘的总管.他发表了多种地形测量、建筑等方面的论文.在数学方面,主要研究微分几何,涉及空间曲线曲率挠率的有关性质、挠率的显式、曲线伸长、曲面性质和可展曲面尖锥理论等课题.

安 培(Ampère,André-Marie,1775—1836) 法国数学家、物理学家、化学家.生于里昂,卒于马赛.他是一个"神童",12岁就掌握了当时已有的数学知识,1801年在布尔任物理学和化学教授,1809年任巴黎综合工科学校数学教授.他是多个国家学术团体的成员.

安培不是一个有条理的实验者,而是凭灵感追求结论.他制定了安培定律,对电之间的磁力做了数学描述,从而解释了已知的电磁现象,并预言了一些新现象.他在物理学研究中,发展了偏微分方程理论,提出了通解的定义,给出了构造二阶偏微分方程解的方法.他对曲线积分和曲面积分理论也颇有贡献.主要著作是《由试验导出的电动力学现象的数学理论文集》(1927).他还发展了电测量技术,制造了一种利用自由移动的针来测量电流动的仪器,经过改进,称为电流计.

热尔曼(Germain,Sophie,1776—1831) 法国女数学家.生于巴黎,卒于巴黎.早年学习父亲的藏书,受阿基米德(Archimedes)事迹的感染,立志学习数学.自修过牛顿(Newton,I.)、欧拉(Euler,L.)、拉格朗日(Lagrange,J.-L.)等人的著作,并写出了心得寄给拉格朗日,受到其赞赏.后与勒让德(Legendre,A.-M.)、高斯(Gauss,C.F.)等人长期通信,探讨学术问题,并在高斯的推荐下成为格丁根大学的荣誉博士.她对数论和数理方程做有贡献.她证明了费马大定理的第一种情形,当$p<100$时成立(即p是100以下的素数,且与x、y、z互素时$x^p+y^p=z^p$无正整数解),还于1816年赢得法国科学院悬赏有关弹性表面数学表达式的奖金.

巴 洛(Barlow,Peter,1776—1862) 英国数学家、物理学家.生于英国诺里奇(Norwich),自学成材.1801年,他以数学竞赛优胜者的资格被聘为乌尔维奇皇家军事学院数学教师.1823年当选为伦敦皇家学会会员.他发表了大量数学、物理学著作,以《数论初探》(1811)、《新数学哲学辞典》(1814)、《新数学表》(1814,称为"巴洛表")等比较有名.他还发明了调整航海罗盘的方法,改进了望远镜的透镜,他制造的透镜称为"巴洛透镜".

高 斯(Gauss,Carl Friedrich,1777—1855) 德国数学家、物理学家、天文学家.生于不伦瑞克的(Braunschweig)一个贫民家里,父亲为瓦匠.高斯在童年时就显示出非凡的数学才能,人称"神童",3岁就替他父亲计算每周薪水,10岁能用简捷算法求出$1+2+3+\cdots+100$的和,相当于使用了等差数列部分和公式.12岁已懂得二项式定理,15岁读完了牛顿(Newton,I.)、拉格朗日(Lagrange,J.-L.)等人的名著,并掌握了微积分理论.他的天资得到当地公爵的赏识,赞助他进入卡罗琳学院深造.18岁进入格丁根大学学习(1795—1798),第一年发明了最小二乘法,第二年给出了用尺规作正十七边形的作图法,解决了自欧几里得(Euclid)以来2000多年悬而未解的问题,从此便潜心攻读数学.1797年证明了代数基本定理,因此于1799年获得哈雷大学博士学位.1801年,他的名著《算术研究》问世,1807年受聘为格丁根大学数学和天文学教授,并兼任该校天文台台长,直到逝世.

高斯是19世纪上半叶最伟大的数学家.数学业绩遍及整个数学王国,公认为高斯是通晓整个时代全部数学的最后一个人.他是近代数论的开创者,近

代微分几何的奠基人，也是非欧几何的创始人之一．在超几何级数、复变函数、椭圆函数的研究中，取得了显著成就．奠定了在平衡状态下的液体的理论基础．他曾与德国物理学家韦伯（Weber，W. E.）一道建立了电磁学中的高斯单位制．用自己的行星轨道法和最小二乘法算出意大利天文学家皮亚齐（Piazzi，G.）发现的谷神星的轨道．在应用数学方面，结合统计数学、天文学、测地学、电磁学诸学科的研究，获得了重要成果．此外，他还对位势论、向量分析正态分布曲线、质数定理的验算等问题做了深入的研究，也都取得了成果．

高斯的著作还有《曲面的一般研究》、《天体沿圆锥曲线绕日运动理论》等．他的论著生前发表不多，格丁根大学对其遗著、日记、书信进行了整理，出版了高斯全集．此外，高斯还发明了电磁电极机，与韦伯一起发明了双叉磁强机等．

克雷尔（Crelle，August Leopold，1780—1855）德国数学家、工程师．生于弗里森（Wriezen），卒于柏林．早年曾从事公路和铁路工程的设计和建造，自学数学．1816 年获博士学位．

克雷尔是一位出色的组织者和管理者，在培养数学人才方面做了大量工作．1826 年，他创办了《纯粹与应用数学杂志》（也称《克雷尔杂志》），该杂志刊登了 19 世纪许多著名数学家的优秀论文，阿贝尔（Abel，N. H.）、雅可比（Jacobi，C. G. J.）、施泰纳（Steiner，J.）、狄利克雷（Dirichlet，P. G. L.）、外尔斯特拉斯（Weierstrass，K.（T. W.））、普吕克（Plücker，J.）、库默尔（Kummer，E. E.）等人都在这一刊物上发表过论文，也正是这些论文使《纯粹与应用数学杂志》赢得了国际声誉．克雷尔本人也在这个杂志上发表过数学、技术等方面的文章．此外，他还翻译了拉格朗日（Lagrange，J.-L.）、勒让德（Legendre，A.-M.）等人的著作．

利特罗夫（Littrov，Joseph Johann Von，1781—1840） 奥地利数学家、天文学家．生于捷克波希米亚（Bohemia），卒于维也纳．早年在维也纳和布拉格攻读数学和天文学，1807 年被聘任为波兰克拉科夫大学教授和天文台台长．1809—1816 年到俄国，任喀山大学天文学教授，并领导了那里的天文观测工作．1819 年以后一直任维也纳天文台台长．还是伦敦皇家学会会员和圣彼得堡科学院通讯院士．他主要从事数学和天文学的研究，在数学方面，他推广了圆外旋轮线，研究了许多圆彼此之间作相对转动时某定点的运动曲线，即高阶本轮线．在他的天文学著作中，给出了不同体系的历法的算术理论，并使用了连分数．他的数学著作有《解析几何学》（1823）等．

泊　松（Poisson，Siméon-Denis，1781—1840）法国数学家、物理学家．生于法国皮蒂维耶（Pithiviers），卒于巴黎．早年遵从父亲旨意学习医学，后来转向数学研究，并成为了法兰西著名学府巴黎综合工科学校教授．

泊松深受傅里叶“任何函数可展成函数的级数”的观点的影响，以至于相信任何偏微分方程均可用级数展开（过于乐观）．但在个人感情上更尊崇拉格朗日（Lagrange，J.-L.）．他还研究过热力学理论，是弹性的数学理论的创始人之一．他在数学和物理上的成就及见解有：

1. 完成偏微分方程求封闭式解的最出色的方法——傅里叶积分，但是同时进行这项工作的还有傅里叶与柯西（Cauchy，A.-L.）．

2. 泊松是第一个认真考虑欧拉-马克劳林求和公式余项的人．

3. 1815 年首先提出复变函数在复平面上的线积分的应用，并指出积分值与路径有关．

4. 为变分法提供了重要的新概念．

5. 证明三元二次式的特征值为一实数．

6. 运用发散级数，研究热的传导及弹性振动问题．

7. 讨论傅里叶级数求和时，建立了可和性的新概念——阿贝尔可和性．

8. 给出拉普拉斯变换

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-xt}g(t)\mathrm{d}t$$

中的 $g(t)$ 可写成：

$$g(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\mathrm{e}^{xt}f(x)\mathrm{d}x.$$

9. 推广大数定律，提出了概率论中的“泊松分布”．

10. 给出了泊松方程：

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=-4\pi\rho \text{（}\rho\text{ 为引力体的密度）}.$$

11. 在电场方面，提出一个基本理论：在任意导体内部，静电引力之总和为 0.

12. 第一个提出：“重力理论也可以应用于电场和磁场．”

泊松的代表作有《热学的数学理论》（1835）等．

布　雷（Bret，Jean Jacques，1781—1819） 法国数学家．生于德龙省（Drôme），卒于格勒诺布尔（Grenoble）．早年在巴黎理工大学学习，1804 年成为教授．1811 年以后在巴黎综合工科学校任教，直至去世．1812 年获博士学位．布雷的主要贡献在解析几何方面，他深入研究了二次曲线和二次曲面理论，并得到了重要结果．他对行列式理论和代数方程理论也有许多研究．例如他提出了代数方程实根界限的定理，对代数基本定理也进行了探讨．

波尔查诺（Bolzano，Bernard，1781—1848） 捷

克数学家、哲学家.生于布拉格,卒于布拉格.早年在布拉格大学学习哲学,1800年进神学院,后来担任神学院宗教哲学教授.

波尔查诺对数学、哲学、逻辑学均有重要贡献.在数学方面,他是19世纪使分析基础严密化的重要数学家之一.1816年,他明确地提出了级数收敛概念,对极限、变量也有较深刻的理解.1817年,他在《纯粹分析的证明》一书中给出了函数连续性的定义:如果在区间内任一点 x 处,只要 w(的绝对值)充分小,就能使 $f(x+w)-f(x)$(的绝对值)任意小,那么就说 $f(x)$ 在该区间上连续.他的这个定义一直沿用至今.他证明了多项式函数是连续的.

波尔查诺还研究了无穷理论,他的工作是康托尔集合论的前驱,而其哲学意义比数学意义更大.他的工作生前并没引起学术界的注意,其著作《无穷的悖论》在他死后两年才发表.

布里昂雄(Brianchon,Charles - Julien,1783—1864) 法国数学家.生于塞夫尔(Sèvres),卒于凡尔赛.早年在巴黎综合工科学校学习,是著名数学家蒙日(Monge,G.)的学生.大学毕业后参加了拿破仑(Naploeon,B.)的部队,作战勇猛且多智谋.1818年在皇家炮兵警卫学校任教授.

布里昂雄为19世纪射影几何学的复兴做出了重要贡献.在他的早期论文《二次曲线论》(1806)中,给出一个著名的定理,称为布里昂雄定理,这是巴斯卡(Pascal,B.)所建立的有关命题的对偶命题.他与庞斯列(Poncelet,J.-V.)共同研究等轴双曲线的性质,第一次使用了"9点圆"这一术语,并给出9点圆定理的完整证明.著作有《二阶曲线论》(1817)和《截线理论的应用》(1818)等.

贝塞耳(Bessel,Friedrich,Wilhelm,1784—1846) 德国天文学家、大地测量学家、数学家.生于明登,卒于柯尼斯堡.早年他在不来梅一家的大商号学徒,自学数学、天文、地理、外语等课程.1804年,他算出了哈雷彗星的轨道要素,得到了天文学家奥尔伯斯(Olbers,H. W. M.)的赏识与鼓励,从此专心研究天文学,1810年被任命为柯尼斯堡天文台台长.

贝塞耳在天文学上有许多贡献,1818年发表了他订正的布雷德列星表.1830年完成了包括75000颗星的基本星表,经补充后成为著名的《波思星表》.他还计算出天鹅座61号双星的距离.对天狼星、木星等也都进行了测定.

贝塞耳在数学方面的主要贡献是用变量分离法导出一种重要的方程,称为贝塞耳方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0,$$

并对该方程做了系统研究,对每个 n,此方程有两个独立的解,现记为 $J_n(x)$ 和 $Y_n(x)$,分别称为第一类和第二类贝塞耳函数.这些函数在应用数学、工程物理中有很多应用.此外,他还建立并证明了贝塞耳不等式.

贝塞耳在大地测量方面也做出了一定贡献,用三角测量法测出了地球的形状和大小,并得到国际上的公认.

霍 纳(Horner,William George,1786—1837) 英国数学家.生于布里斯托尔(Bristol),卒于巴思(Bath).早年他在布里斯托尔的金斯伍德(Kingswood)学校接受教育.18岁时即成为该校校长.1809年以后又在巴思兴办学校.

霍纳最重要的贡献是在1819年7月1日,在伦敦皇家学会宣读了其论文《用连续逼近法解各阶数值方程的新方法》,提出了求代数方程实根近似值的方法,西方称为"霍纳法",有时也称"鲁菲尼-霍纳法".但实际上,此方法早在500年前就被中国数学家秦九韶所发现.

比 内(Binet,Jacques Philippe M.,1786—1856)法国数学家、天文学家.生于雷思(Rennes),卒于巴黎.1843年当选为法国科学院院士.他发表了许多数学、力学和天文学方面的论文.在数学方面,他的主要贡献在特殊函数方面.他引进了术语"β函数",建立了Γ函数的对数展开式,称为比内公式.他还对行列式理论进行了较一般的研究,1812年,他给出了行列式的乘法定理,但未能给出满意的证明.他还研究了具有变系数的线性差分方程,建立了一种特殊的线性递归序列(斐波那契序列)的通项公式,称为比内公式.

弗雷内尔(Fresnel,Augustin Jean,1788—1827) 法国数学家、物理学家.生于布罗利耶(Broglie),卒于阿夫赖城(Ville d'Avray).1805年,他毕业于巴黎综合工科学校后,又进入了巴黎桥梁公路学校学习,1809年毕业并成为工程师.1823年被选为巴黎科学院院士,1825年被选为伦敦皇家学会会员.他从事光的本性的研究,他利用自己设计的仪器经过实验证明了光的波动性,指出了两束光发生干涉的条件,发展了惠更斯原理(以后被称为惠更斯-弗雷内尔原理),并对其内容进行了补充和推广,以解释各种衍射现象.为说明光波衍射的规律性,他建立了有关的数学理论,研究了波动曲面理论.他计算了与此有关的奇异定积分,现称为弗雷内尔积分.他还算出了光在运动媒质中传播时的所谓"曳引系数",后来为实验所证实.弗雷内尔曾展望19世纪数学的发展远景,预言"大自然并不为分析学的困难所阻碍",用以描述这一世纪数学与自然界的关系.事实上,19世纪的数学家们克服了分析学中出现的种种困难.

柯 西(Cauchy,Augustin - Louis,1789—1857)法国数学家.生于巴黎,其父也致力于数学研

究，常与拉格朗日(Lagrange，J.-L.)、拉普拉斯(Laplace，P.-S.)等名家往来.柯西自幼接受父亲的指教，显示了数学方面的才能.1807年毕业于巴黎理工科学校，1810年毕业于桥梁公路学院.曾在瑟堡任土木工程师.1816年因关于重液体表面波理论的研究，获法兰西科学院一等奖.同年晋升为巴黎综合工科学校教授，并当选为巴黎科学院院士.1830年七月革命时，由于拒绝向皇帝做效忠宣誓而流亡国外.1838年返回祖国，1848返回理工科大学任教授，直到逝世.他还是伦敦皇家学会会员和几乎所有欧洲国家科学院院士.他在宗教上信仰罗马天主教，在政治上属于保皇党，终生坚守气节.

柯西的研究遍及数学(包括应用数学)的各个领域，特别在数学分析、微分方程、数论、复变函数、行列式和群论等方面.学术成果卓著，共发表论文800余篇，其全集共26卷，在数量上仅次于欧拉(Euler，L.)，居世界第二位.他阐明了级数收敛准则；提出了关于极限理论的ε方法，即把整个极限过程用不等式来刻画，后经外尔斯特拉斯(Weierstrass，K.(T.W.))改进，形成了$\varepsilon-\delta$方法，一直沿用至今.他还引入了目前通用的连续性概念，给出了定积分的第一个确切定义.他还系统地总结了复数理论，探讨了柯西-黎曼条件，证明了复变函数的主要定理，为复变函数理论的发展奠定了基础.同时还证明了微分方程解的存在性定理，并对初值问题做了研究，深化了微分方程理论.在代数学方面，他对行列式和矩阵理论、二次型理论、群论等分支都做出了重要的开拓性工作.他还是弹性力学的创始人之一，在天文学、光学、理论物理等方面也有重要贡献.代表作《分析教程》(1821)、《无穷小计算讲义》(1823)等都具有划时代的价值.

默比乌斯(Möbius，August Ferdinard，1790—1868)　德国数学家.生于德国的舒尔帕福特(Schulpforde)，卒于莱比锡.早年在莱比锡大学求学，1816年任天文学教职，后转至格丁根大学，成为大数学家高斯(Gauss，C.F.)的门生及得力助手.1844年晋升为莱比锡天文台台长.1827年发表重要著作《重心的计算》，在保形几何学方面建立了默比乌斯几何理论，是近代几何学的先驱.他最奇妙的发现是闻名数坛的"默比乌斯带".取一长方形纸条，把一个短边旋转180°后首尾相连，贴在一起，就得到一个默比乌斯带.这是他在1858年发现的，默比乌斯带有许多奇妙的性质，吸引着无数学者，对拓扑学的诞生和发展起了重要的作用.

皮科克(Peacock，George，1791—1858)　英国数学家.生于达灵顿(Darlington)附近的登顿(Denton)，卒于伊利(Ely).早年在剑桥大学三一学院学习，以后在该校任教.后来任朗迪安的几何与天文学教授.他的主要贡献是把欧洲大陆的微积分成果引入剑桥，使莱布尼茨派先进的符号和研究方法取代了流数术符号和几何方法，促使英国与欧洲大陆分析学的统一，改变了英国和欧洲大陆数学研究长期隔离的状况.他在代数学方面也颇有贡献，著有《代数学》(1830)，推动了抽象代数的发展.皮科克还被选为多个科研机构的成员.

赫谢尔(Herschel，John Frederick William，1792—1871)　英国天文学家、数学家、物理学家.生于伯克郡(Berkshire)，卒于肯特(Rent)科灵伍德.他是著名天文学家赫谢尔(Herschel，F.)(1738—1822)的儿子，早年接受家庭教育，1813年毕业于剑桥大学.他是19世纪初期英国接受并研究莱布尼茨(Leibniz，G.W.)微积分原理及符号的代表人物之一.1816年，他参加了翻译和出版欧洲大陆所使用的微积分学教程.著有《有限差分学的例题汇编》(1820)，并最早使用$\sin^{-1}x$、$\tan^{-1}x$表示反三角函数，这种符号后来为英、美等国所采用，但欧洲大陆则用$\arcsin x$、$\arctan x$等.他在其父影响下，后半生主要从事天文学研究，著有《天文学大纲》，并流传很广.

欧　姆(Ohm，Martin，1792—1872)　德国数学家、物理学家欧姆(Ohm，Georg Simon，以发现电学的欧姆定律著称)的弟弟.生平不详.柏林大学教授.在他1822年出版的著作《一个数学完全相容系统的尝试》中，明确地论述了数系扩充的原则，建立了完整的算术有序体系和形式代数基础，给出了复数的运算法则，特别是指出了负数的对数运算.他还引进了符号$\sqrt{-1}$.

欧姆还研究了发散级数.赞同当时关于发散级数的理论，指出用无穷级数去表示一个函数是合适的，一个无穷级数的值仅当级数收敛时才有意义.

罗巴切夫斯基(Лобачевский，Николай Иванович，1792—1856)　俄国数学家.生于下诺夫戈罗德(今高尔基城)的一个穷职员家庭.他10岁入喀山中学，14岁(1807年)以高材生的资格进入喀山大学，1811年获硕士学位.第二年进大学执教，1816年升为副教授，1822年晋升为教授，1820—1825年任物理-数学系主任，1827—1848年任喀山大学校长.在高斯(Gauss，C.F.)的建议下，曾被选为格丁根科学协会通讯会员.晚年由于劳累过度，双目失明，1856年死于喀山.

罗巴切夫斯基是非欧几何学的创始人之一.他的不朽功绩在于向人类几千年曾确信不疑的几何体系——欧几里德几何，进行了坚决的挑战，并以全新的姿态建立起他自己的几何体系，即罗巴切夫斯基几何学.为此，他被誉为数学革命家.但无知和偏见

压抑了新思想的发展,他的工作在他死后才逐渐被确认.1826 年 2 月 23 日,是他把手稿《几何学定理简述》正式交学校物理-数学系审查,并在全校大会上作了报告,因此人们把这一天定为非欧几何学的诞生日.

罗氏几何学因改变了欧氏几何的平行公理,又称为“双曲几何学”.有关的论文有:1829—1830 年发表在《喀山大学通报》上的部分手稿;1835—1838 年在《喀山大学科学论丛》上的两篇论文——《虚几何学》和《平行线无限理论的几何学新定理》.著作有:《平行线理论的几何研究》(1840 年德文版)、《泛几何学》(1855 年)、《代数或有限数的演算》等.

巴贝吉(Babbage,Charles,1792—1871) 英国数学家.生于英国廷茅斯(Teignmouth),卒于伦敦.早年在剑桥大学学习,毕业后留校工作.1827 年被任命为路卡斯数学教授,1816 年当选为伦敦皇家学会会员.

巴贝吉是现代电子计算机的先驱,他提出了带有程序控制的完全自动计算机的原理.1822 年制成一台差分机的模型,以后又设计了一台更先进的差分机和一台分析机,这些工作包含了现代电子计算机的基本思想和主要组成部分.巴贝吉还是学术组织的杰出组织者,参与创建了多个科学学会、协会等.他还同皮科克(Peacock,G.)等人一起翻译出版了拉克鲁瓦(Lacroix,S. F.)的《微积分》等著作,向英国引进欧洲大陆的分析学成果,特别是引进了莱布尼茨(Leibniz,G. W.)的微积分符号.

霍普金斯(Hopkins,William,1793—1866) 英国地质学家、数学家.生于德比郡(Derbyshire)索尔河的金斯顿(Kingston - on - Soar),卒于剑桥.1822 年入剑桥大学圣彼得堡学院学习,1827 年获硕士学位,以后任私人数学教师.他培养了许多优秀的学者,如斯托克斯(Stokes,G. G.)、凯尔文(Kelvin,W. T.)爵士、麦克斯韦(Maxwell,J. C.)等.1853 年,他当选为伦敦皇家学会会员.他把数学应用于地质学和物理学研究,曾获伦敦地质学会勋章.数学著作有《三角学原理》(1833—1847).在地质学方面,他研究了地壳的隆起及对地表断裂的影响、地球内部的性质、气候变化的原因等,并取得重要成果.他去世后,剑桥大学设立了一种奖来纪念他.

格　林(Green,George,1793—1841) 英国数学家.生于诺丁汉郡,卒于剑桥.他幼年辍学,坚持自学数学.1833 年,他 40 岁时入剑桥凯厄斯学院学习,1837 年毕业.格林主要从事应用数学研究,是英国近代数学物理的先驱.他在《数学分析应用于电磁理论》(1828)中给出分析学中著名的“格林函数”与“格林定理”,对 n 维位势方程理论的发展起了奠基作用.不过该文在当时并未得到重视,直到 1846 年,他去世 5 年后才由汤普森(Thomson,W.)爵士重新发表,逐渐得到承认.

沙　勒(Chasles,Michel,1793—1880) 法国数学家.生于埃佩诺恩(Épernon),卒于巴黎.1812 年,他入巴黎综合工科学校读书,1841 年受聘为该校教授,1846 年主持巴黎大学高等几何讲座.著有《几何方法起源与发展的历史概述》等专著.讨论了射影几何中直射变换和对偶的一般理论,给出枚举几何学的一些结果.其著作思路清晰,结构严谨,以目的与方法的统一见长,强调定理的简洁和直观的重要性,并给予历史性叙述及评论.他还写过《算术史》等书,并细心收集了各名家的签名手稿,藏有牛顿(Newton,I.)、帕斯卡(Pascal,B.)、玻意耳(Boyle,R.)等人的信函.

当德兰(Dandelin,Germinal Pierre,1794—1847) 法国-比利时数学家.生于法国布尔歇(Le Bourget),卒于比利时布鲁塞尔.1813 年,他就学于巴黎综合工科学校,1825 年当选为布鲁塞尔皇家科学院院士,兼任列日工程学院教授.著作有《抛物线焦点几个值得注意的性质》(1822),书中给出了画法几何中的当德兰定理.他还在代数学中得到一种通过系数确定方程近似根的“当德兰-格高费方法”(1823).此外,他还撰有概率论和天文学方面的专著.

霍尔姆博(Holmboe,Bernt Michael,1795—1850) 挪威数学家.生于旺格(Vang),卒于克里斯蒂安尼亚(Christiania).早年在克里斯蒂安尼亚教会学校学习,并曾在母校和克里斯蒂安尼亚大学任教,1834 年成为教授.还曾在克里斯蒂安尼亚军事学校任教.他是著名数学家阿贝尔(Abel,N. H.)的老师,最早发现阿贝尔的数学才能,并给了他很多帮助,包括资助他到欧洲大陆求职.阿贝尔去世后,他又负责编辑出版其传记和著作.他本人也著有关于初等数学和微积分的若干著作.

里夏尔(Richard,Louis Paul Émile,1795—1849) 法国数学家.生于法国雷恩(Rennes),卒于巴黎.1814 年,他开始从事教学工作,曾担任过杜埃(Douai)公立中学的学监.1815—1822 年先后任庞梯韦(Pontivy)学院、巴黎圣路易学院数学教授.1822 年以后,他一直任巴黎大学路易学院数学教授.他是一个优秀的教师,了解当时数学发展的新动态,并用来指导教学工作.伽罗瓦(Galois,E.)就是他培养出来的学生.此外,19 世纪还有好几位科学家出自他的门下,例如勒威耶(Le Verrier,V. J. J.)、塞雷(Serret,J. A.)、埃尔米特(Hermite,C.)等.

拉　梅(Lamé,Gabriel,1795—1870) 法国数学家、工程师.生于图尔(Tours),卒于巴黎.巴黎综

合工科学校毕业，1824—1832 年，他被派往俄国，负责修筑公路、桥梁. 曾任物理学和统计学教授、开矿工程师，并参与了巴黎-凡尔赛铁路工程. 在数学方面，他的最大贡献是建立曲线坐标概念. 此外，在热力学中有拉梅定理，在弹性方面亦有重要发现. 在数学物理方面，他探讨了偏微分方程的变换和求解. 将拉普拉斯方程变换成可解的常微分方程，此方程现称为拉梅方程，其解称拉梅函数. 1839 年，他还证明了 $n=7$ 时费马大定理成立，即方程 $x^7+y^7=z^7$ 无整数解.

凯特勒(Quetelet，Lambert - Adolphe - Jacques，1796—1874) 比利时数学家. 生于比利时的根特(Ghent)，1819 年毕业于根特大学，并获博士学位. 1820 年被选为布鲁塞尔皇家科学院院士. 1828 年以后在布鲁塞尔皇家天文台任职. 1834 年当选为布鲁塞尔研究院常务秘书. 他的主要贡献在统计学、几何学、天文学、地球物理学和气象学等方面. 他把数理统计学应用于比利时的人口普查工作，引入了所谓平均人的概念，首次提到正态分布以及高次的二项分布的规律. 1852 年，他发起了在布鲁塞尔召开的首届国际统计学会议.

布拉什曼(Брашман，Николай Дмитриевич，1796—1866) 捷克-俄国数学家、力学家. 生于捷克的摩拉维亚(Moravia)，毕业于维也纳大学. 1823 年到圣彼得堡，先后在圣彼得堡罗巴甫洛夫斯克专科学校、喀山大学、莫斯科大学工作. 1839 年入俄国籍. 1855 年当选为圣彼得堡科学院通讯院士. 主要研究方向为流体力学和最小作用原理. 他的工作为莫斯科大学理论力学和实用力学的教学与科研奠定了基础. 他的解析几何教程和力学论著多次获奖. 他还是莫斯科数学会及其刊物《数学汇编》的创始人. 他在莫斯科大学开创了优秀数学论文奖，茹科夫斯基(Жуковский，Н. Е.)、恰普雷金(Чаплыгин，С. А.)等人曾获奖. 他培养了一批优秀的数学人才，如切比雪夫(Чебышев，П. Л.)、索莫夫(Сомнин，С. Я.)等.

施泰纳(Steiner，Jakob，1796—1863) 瑞士数学家. 生于瑞士伯尔尼州(Bern)北部乌岑斯多夫镇(Utzensdorf)，卒于柏林. 他家境贫困，没有读过中学. 1822—1824 年入柏林大学学习，后任教于技术学校. 1834 年成为柏林大学特别教授.

施泰纳是近代射影几何的奠基人，其代表作《几何形的相互依赖性的系统发展》(1832)详细讨论了对偶原理，即如果两个问题对偶，其一为真则另一个亦为真. 这部著作建立了射影几何的严密系统，把卡诺(Carnot，L. (- N. - M.))关于完全四边形的工作推广到空间多边形上，并发现了点列、线束、二次曲线及曲面的性质. 由于他在几何学方面的贡献，被誉为自阿波罗尼奥斯(Apollonius，(P))以来最著名的几何学家.

冯・施陶特(von Staudt，Karl Georg Christian，1798—1867) 德国数学家. 生于德国陶伯河上游罗滕堡(Rothenburg - ob - der - Tauber)，卒于埃尔朗根. 他早年在格丁根大学学习，得到了高斯(Gauss，C. F.)的赏识，1822 年获博士学位，1835 年任该校教授，直至去世. 他主要研究射影几何，由于他完全摆脱了代数学的束缚，以一种全新的方式建立起纯粹的几何理论，因此被誉为近世几何学的创始人之一. 他完善了虚点、虚线、虚平面的理论，并用尺规做出了圆内接正十七边形. 他的著作有《位置几何学》(1847)和《位置几何学论文》(1856—1860)等.

博比利埃(Bobillier，Étienne，1798—1840) 法国几何学家、力学家. 生于法国隆勒索涅(Lons - le - Saunier)，卒于马恩河畔沙隆(Châlons - sur - Marne). 他 1817 年入巴黎理工学院学习，不久因生活拮据而辍学，以后自学成材，1834 年成为教授. 他的主要贡献在代数曲线和代数曲面理论、统计学、动力学等方面. 他研究了代数曲线和代数曲面的逐次配极及其简记法等，并在《纯粹与应用数学纪事》上发表了多篇论文.

薛　克(Scherk，Heinrich. F，1798—1885) 德国数学家. 生平不详. 他是行列式理论的开创人之一. 曾定义了行列式的加法、常数积. 他提出了行列式若有一行(列)是其他行(列)的线性组合，则值为零. 还有，三角行列式(主对角线之一边的元素均为零)的值为主对角线元素之积的性质也是他给出的.

费尔巴哈(Feuerbach，Karl Wilhelm，1800—1834) 德国数学家. 生于耶拿(Jena)，卒于埃尔朗根. 1822 年获博士学位，后任中学教师. 他在《直线三角形某些特殊点的性质》一文中，发现并证明了"九点圆定理"(亦称费尔巴哈定理)，并于 1827 年独立发现空间点的齐次坐标原理. 由于健康原因，年仅 28 岁就退休，余年在埃尔朗根度过.

拉　比(Raabe，Joseph Ludwig，1801—1859) 瑞士数学家、物理学家. 生平不详. 他曾在苏黎世的高等学院和综合技术学校工作，戴德金(Dedekind，(J. W.)R.)是他的继承人. 他在分析学、几何学、代数学和应用数学等方面都有一定的成就. 在级数论中，他建立了几种重要的收敛准则，对某种特殊类型的级数采用取部分和的平均值的方法；提出发散级数的一种可和性问题. 他还借助于定积分导出了空间坐标系中球面三角形的主要公式，得到了伯努利多项式的有限表达式.

普吕克(Plücker，Julius，1801—1868) 德国数学家、物理学家. 生于德国埃尔伯费尔德(Elberfeld)，卒于波恩. 曾在波恩、海德堡、柏林、巴黎等大学求学，1824 年获博士学位，相继在波恩大学、柏林

大学、哈雷大学工作. 1867 年当选为法国科学院院士.

普吕克的主要贡献在几何学方面. 在他的第一部重要著作《解析几何的发展》(1828,1831)中,讨论了直线、圆和二次曲面的平面几何学,运用缩写符号推导出许多结论和定理,阐述了对偶性原理,引入了所谓三角形坐标. 以后又著书讨论了三次平面曲线,研究了三次曲线的结构和分类,考察了无穷远点邻域内代数曲线的性质,证明了著名的"普吕克公式". 晚年与他的年轻助手克莱因(Klein,(C.)F.)合作,发展了线几何学的理论. 他们的工作为二次线丛的研究奠定了基础. 在物理学方面,他探讨了稀薄气体中的放电过程,观测到三种氢光谱线,还发现了电气石晶体的磁现象.

艾 里(Airy,George Biddel,1801—1892) 英国天文学家、数学家. 生于诺森伯兰(Northomberland)的阿尼克(Alnwick),卒于格林威治. 曾任剑桥大学天文台台长,后任格林威治天文台台长. 1836 年当选为伦敦皇家学会会员. 1826 年,他发表了《月球和行星理论的数学评论》一文,以后又深入广泛地进行了这方面的研究,建立了确定太阳视差和太阳运动的向点(apex)的方法. 1838 年,在研究光的强度的同时,他得到一类柱函数,称为艾里函数,并把它应用到各种有关问题之中.

库尔诺(Cournot,Antoine - Augustin,1801—1877) 法国数学家. 生于格雷(Gray),卒于巴黎. 1829 年获博士学位,1835 年任教授. 著作有《财产理论数学原理的探索》(1838),他通过研究价格问题,阐述了用公式表示垄断竞争的数据图表等资料的方法,被认为是数理经济学的奠基之作. 他在《机会与概率理论》(1843)中提出"客观概率"、"主观概率"和"哲学概率"等概念,另外还定义了"科学"概念,并对"科学"进行了分类.

奥斯特罗格拉茨基(Остроградский,Михаил Васильевич,1801—1862) 俄国数学家. 生于帕申那亚(Пашенная)的一个地主家庭. 他自幼求知欲很强,9 岁上中学,中学毕业后曾投身一个近卫军团学习军事,15 岁(1816 年)进入哈尔科夫大学数学物理系学习,整日迷恋于对数学的研究,成绩优异. 由于他思想进步,拥护校长奥西波夫斯基(Осиповский,Т. Ф.)的唯物主义哲学思想和坚持无神论的视点,申请学位被拒绝. 他被迫离开俄国,到西欧数学中心——巴黎去求学. 他在那里受到了一流名家柯西(Cauchy,A.-L.)、拉普拉斯(Laplace,P.-S.)、傅里叶(Fourier,J.-B.-J.)、安培(Ampère,A.-M.)、泊松(Poisson,S.-D.)等人的指导,并获得一批重要成果. 1827 年回国,尽管处于警察的秘密监视之下,但他的成就和声望很快博得国内外学术界的公认,先后成为圣彼得堡科学院、美国科学院、巴黎科学院、罗马科学院、都灵科学院的院士. 他还是俄国理论力学学派的创始人和圣彼得堡数学学派的奠基者之一.

奥斯特罗格拉茨基的科学研究涉及分析数学、理论力学、数学物理、数论、代数、概率论等多方面. 在数学物理中,他建立了典型的热传导方程. 在数学分析中,他得到了三重积分和曲面积分之间相互关系的著名公式,现称奥-高公式(高斯(Gauss,C. F.)也曾独立地得到这一结果),后来又把这一公式推广到 n 重积分的情形,并得到二重和三重积分的变换公式,建立了有理函数积分法——奥斯特罗格拉茨基方法. 在力学中,他独立于哈密顿(Hamilton,W. R.)建立了最一般形式的虚位移原理和最小作用原理;在变分法中,获得比西方数学家更为一般的成果. 他还编写了大量的教科书,其中《天体力学教程》在国内外获得很高的评价.

普拉托(Plateau,Joseph Antoine Ferdinand,1801—1883) 比利时数学家、物理学家. 生于布鲁塞尔,早年他在布鲁塞尔大学学习,1829 年在列日大学获博士学位,1835 年成为根特大学教授. 1936 年当选为比利时科学院院士. 他的主要贡献在变分法方面,他提出了求空间内以所给闭曲线为边界的极小曲面问题,现称为普拉托极小曲面问题. 另外,他在微分几何方面也做出了一定的贡献.

阿贝尔(Abel,Niels Henrik,1802—1829) 挪威数学家. 生于挪威西南海岸斯塔万格附近的小岛芬岛(Finnöy),卒于阿伦达尔(Arendal)附近的弗鲁兰(Froland). 父亲是一个基督教牧师. 阿贝尔幼年丧父,家境贫困,但他从小酷爱数学. 16 岁起自学当时的数学名著,中学时被誉为"数学迷",得到教师霍尔姆博(Holmboe,B. M.)的赏识和资助. 1821 年以公费考入克里斯蒂安尼亚(Christiania)大学,1825 年大学毕业后,获得奖学金前往柏林和巴黎留学并谋职. 在德国期间,他结识了克雷尔(Crelle,A. L.),他们共同创办了《克雷尔数学杂志》,并在前三卷上发表了 22 篇有关方程论、椭圆函数论和幂级数方面的著名论文,使《克雷尔数学杂志》获得很高的声誉. 在巴黎他又写出一批重要论文. 1827 年回国,在克里斯蒂安尼亚大学任教,不久患肺结核,1829 年被聘为柏林大学教授,但未到任即病逝,年仅 27 岁.

阿贝尔一生虽然短暂,却在数学史上留下了光辉的一页. 自从 16 世纪三、四次方程得到解决之后,五次以上方程的根式求解问题吸引着众多的科学家. 200 多年未能成功,这使人们悟到了它的不可能性,在拉格朗日(Lagrange,J.-L.)和鲁菲尼(Ruffini,P.)之后,阿贝尔进一步严格地证明了一般五次方程不可能用根式求解,开辟了近世代数方程论的

道路，采用了包括群论和方程的超越函数解法. 1826年，他在《克雷尔数学杂志》创刊号上发表了震动数学界的论文《论代数方程，证明一般五次方程的不可解性》. 他还同德国数学家雅可比(Jacobi，C. G. J.)共同奠定了椭圆函数论的基础，创立了数学的一个新分支. 阿贝尔发现了椭圆函数的加法定理、双周期性，引进了阿贝尔积分. 此外，在交换群、二项级数的严格理论、级数求和等方面都有突破性贡献，但可惜他的论文的价值没有及时被学术界所认识.

波尔约(Bolyai，János，1802—1860)　匈牙利数学家. 生于克劳森堡，卒于毛罗什-瓦萨尔海伊. 其父波尔约(Bolyai，F.)也是一位数学家，与高斯(Gauss，C. F.)是好友. 波尔约少年时期在父亲的辅导下就掌握了高等数学的基础知识. 1818—1822年在维也纳皇家工程学院学习，毕业后任匈牙利陆军官员. 1833年因公伤退伍回家.

波尔约是非欧几何的创始人之一. 早在大学期间，他就醉心于平行线理论的研究. 他曾试图证明欧几里得第五公设，但很快就发现这是不可能的，因而决心创立新的几何学. 他父亲得知后，以自己失败的教训劝阻他，但他不听父亲的劝告，坚持研究，终于在1823年得到了非欧几何的基本原理. 他把自己的发现写成了论文(用马尔加文)，并译为拉丁文，附在他父亲的一本初等数学书《将好青年引入纯粹数学原理的尝试》(1832)中. 这篇论文的标题很长，简称《附录》，共26页. 内容十分简洁和概括，是一个完整的、无矛盾的非欧几何体系. 就仅《附录》一文，就足以使波尔约名垂千古，但他生前并没有享受到应有的荣誉. 1832年，其父把《附录》寄给高斯(Gauss，C. F.)后，也没有引起高斯的重视，这对波尔约是一个沉重的打击. 此外，他还曾致力于复数的研究，预言了虚数的表示法.

1894年，匈牙利数学物理学会在波尔约的坟墓上竖立了他的石像. 他的《附录》已被列入了世界一流的科学经典作品与世长存. 世界和平理事会还决定，1960年1月27日纪念波尔约逝世一百周年，并建议以他的名字命名一种国际数学奖.

布利萨德(Blissard，J.，1803—1875)　英国数学家、逻辑学家. 生平不详. 他的主要贡献是在1861—1868年创造了独具一格的符号演算法，即"哑演算"(umbral calculus)，亦称"布利萨德演算". 这种算法在本质上区别于当时流行的各种算法. 他去世后，这种算法几乎被人们遗忘. 直到20世纪40年代，贝尔(Baire，R. L.)才在组合分析和数论中发现"布利萨德演算"的合理性，并引起人们的重视. 另外，他建立的发生函数也广为人知.

斯图姆(Sturm，Charles - Francois，1803—1855)　瑞士数学家、物理学家. 生于瑞士日内瓦，卒于法国巴黎. 他曾在日内瓦高等专科学校学习，后又到巴黎大学和法兰西学院学习. 他与法国许多物理学家和数学家有过交往，并任过安培(Ampère，A.-M.)的助手. 曾在巴黎综合工科学校和巴黎理学院工作. 还相继被选为柏林科学院、圣彼得堡科学院、巴黎科学院院士和伦敦皇家学会会员.

斯图姆的主要贡献在代数方程论、微分方程论、微分几何学等方面. 他研究了代数方程根的分离，提出了有名的斯图姆定理，也称为斯图姆判别法. 此外，他还撰写过许多力学和分析学论著，其主要著作有《力学教程》(1861)、《分析教程》(1857—1859)等.

贝拉维蒂斯(Bellavitis，Giusto，1803—1880)　意大利数学家. 生于意大利维琴察的巴萨诺(Bassano，Vicenza)，卒于巴萨诺附近. 他是在其父亲的教导下自学成材. 1840年，他当选为威尼托学院研究员，1843年受聘为维琴察学院教授. 不久又获得帕多瓦大学数学教授职位，成为山猫学院等科研机构的成员.

贝拉维蒂斯的主要贡献在画法几何、代数几何、代数学和数论等方面. 他发展了几何演算中的均衡方法，对于四元数论和向量理论有重要意义. 在代数几何方面，他引入了曲面分类的新标准，完善了牛顿(Newton，I.)关于平面三次曲线的理论，并给出了球面三角形的解法. 他发展了鲁菲尼(Ruffini，P.)关于任意次代数方程数值解的工作. 此外，他在复数的几何、概率论和数学史等多方面也做出了一定的贡献.

多普勒(Doppler，Johann Christian，1803—1853)　数学家、物理学家、天文学家. 国籍不详. 生于奥地利萨尔茨堡(Salzburg)，卒于意大利的威尼斯. 早年他在维也纳工业学院学习，并先后在维也纳、布拉格和舍姆尼茨等地任教. 以1842年发现多普勒效应而闻名于世. 这一效应阐明了当波源和观测者有相对运动时，观测者接受到的频率与波源发出的频率不同的现象，有广泛的应用. 他曾出版过有关几何学、光学和电学方面的著作.

韦吕勒(Verhulst，Pierre - Francois，1804—1849)　比利时社会学家、数学家. 生于比利时的布鲁塞尔，卒于布鲁塞尔. 曾任布鲁塞尔私立学校和皇家军事学院教授，1841年成为比利时皇家科学院院士，1848年当选为科学院主席. 他致力于社会统计学研究，1846年，他经过分析给出论证，推断阻碍人口增长的因素正比于"过剩"人口对总人口的比率，进而推算出比利时人口的上极限为9400000人(到1967年比利时实际人口约为9581000). 他的这一工作为现代人口理论的研究提供了大量有价值的材料.

雅可比(Jacobi，Carl Gustav Jacob，1804—

1851） 德国数学家. 生于波茨坦一个富裕的银行家家庭，他自幼受到良好的教育. 曾就读于柏林大学，1825 年获博士学位，1826 年任格丁根大学讲师，1831 年晋升为教授. 此后，他在该校十分活跃，影响很大. 曾被选为多个科学院院士，包括柏林科学院院士. 但晚年健康不佳，1851 年死于天花.

雅可比早年结识阿贝尔（Abel，N. H.），晚年与狄利克雷（Dirichlet，P. G. L.）交往甚密. 他主要从事函数论的研究，他最突出的贡献是创立和发展了椭圆函数论. 1841 年建立行列式的系统理论；1846 年提出求实对称矩阵特征值的雅可比方法. 著作有《椭圆函数新理论基础》(1829). 此外，他在力学方面亦有贡献.

布尼亚科夫斯基（Буняковский，Виктор Яковлевич，1804—1889） 俄国数学家. 生于巴尔（Бар），早年他受过良好的家庭教育. 1820—1825 年到欧洲留学，在巴黎听过许多著名数学家的讲学，1925 年获博士学位. 回国后从事数学教育工作，先后在第一武备中学、海军学校、交通道路学校和圣彼得堡大学任教. 1858 年以后兼任沙俄政府统计和保险问题的总监. 1830 年当选为圣彼得堡科学院院士，1864—1889 年任该院副院长.

布尼亚科夫斯基的科学活动范围极广，且成效显著. 他共发表科学论文 168 篇，内容涉及数论、概率论及其应用、数学分析、几何学等. 他在数论方面的工作对俄国科学界发生过较大影响. 对计算技术他也很有兴趣，曾改进俄国算盘的式样. 他在概率论方面的贡献在其全部科学成就中占据最重要的地位，代表作为《概率论的数学基础》(1846). 以后他又发表多篇论文，对人口统计、俄国部队总额估计、民事诉讼程序，以及如何确定观察误差等问题做了详尽的论述. 他的工作有力地促进了概率论在俄国的发展.

在数学分析中，布尼亚科夫斯基发现了后来以施瓦兹（Schwarz，H. A.）命名的一类重要不等式. 在几何中，他研究了平行线理论. 他还为提高高等学校数学教育水平做出了贡献，他编的《纯粹和应用数学辞典》(1839)对普及数学教育和统一科学术语起了重要作用. 此外，他还编著过一系列中学数学教科书. 布尼亚科夫斯基曾获当时俄国所有大学和多个科学学会的荣誉称号. 他去世后，圣彼得堡科学院建立了以他的名字命名的优秀数学著作奖.

狄利克雷（Dirichlet，Peter Gustav Lejeune，1805—1859） 德国数学家. 生于德国迪伦（Duren）一个法兰西血统的家庭，卒于格丁根. 1823—1827 年，他在巴黎的一个贵族家庭做家庭教师，并参加了以傅里叶（Fourier，J.-B.-J.）为首的青年数学家小组活动，当时他对高斯（Gauss，C. F.）非常崇拜. 1827 年任布雷斯劳（Breslan）大学讲师. 1828—1855 年任柏林大学教授. 1855 年高斯逝世，他作为继任者受聘为格丁根大学教授，同年当选为伦敦皇家学会会员.

狄利克雷是 19 世纪最重要的数学家之一. 他的贡献涉及到数学的各个方面，其中以数论、分析，特别是关于位势论最著名. 在数论方面，他先后证明了 $n=5$ 和 $n=14$ 时的费马大定理. 1837 年，他证明了任何算术序列 $a, a+b, a+2b, \cdots$（a 与 b 互素）中，必有无穷多个素数，这就是著名的狄利克雷定理，证明中所用到的级数，称为狄利克雷级数. 他还提出了狄利克雷抽样法，成为解析数论的创始人. 在数学分析方面，他在 1837 年的论文中引入了近代函数的概念，一直沿用至今. 他还第一个准确解释了级数条件收敛的概念，讨论了傅里叶级数的收敛性问题. 他的工作发展了傅里叶级数理论. 在位势论理论中，他引入了所谓的狄利克雷原理. 他还提出了微分方程的边值问题. 他的研究工作在数学物理的许多领域中起了重要作用.

哈密顿（Hamilton，William Rowan，1805—1865） 英国数学家、物理学家. 生于爱尔兰都柏林（Dublin），卒于都柏林. 他自幼才智过人，5 岁时能读拉丁语、希腊语和希伯来语，14 岁时已学会 12 种语言. 1823 年入都柏林三一学院学习. 1827 年被聘为该校天文学教授，并获得皇家天文学家的称号. 1837—1845 年任爱尔兰皇家学院院长，并被选为多个科学院和学术机构的成员. 1836 年获伦敦皇家学会皇家勋章.

哈密顿早年曾精读牛顿（Newton，I.）和拉普拉斯（Laplace，P.-S.）的著作，1822 年撰文指出拉普拉斯的《天体力学》中的一个错误，从此开始数学研究. 他对数学的主要贡献是创立了四元数理论和发展了变分法和微分方程理论. 1835 年，撰文详细讨论复数 $x+\mathrm{i}y$ 的性质，进而试图寻找三维"复数"，由此导致创立了形如 $a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}+d\mathrm{k}$（$a, b, c, d$ 为实数）的所谓四元数，这是一种不同于实数系和复数系的新数系. 四元数的出现，深化了人们对"数"的认识，推动了向量代数、向量分析和物理学的发展. 哈密顿用分析的方法研究几何光学，引入了特征函数概念，并利用这一概念和最小作用原理（亦称哈密顿原理）把光学和动力学的问题转化为变分法问题. 他建立的动力学方程称为"哈密顿正则方程"，其中以广义坐标和广义动量作为独立变量，代表总能量的函数 H 称为"哈密顿函数". 这些结果在现代物理学中获得广泛应用. 他的主要著作有《四元数讲义》(1853)、《光束论》(1827)和《动力学一般方法》(1834)等.

柯克曼（Kirkman，Thomas Penyngton，1806—1895） 英国数学家. 生于博尔顿（Bolton），卒于沃

灵顿(Warrington)附近的克罗夫特(Croft). 早年在都柏林大学学习,1850 年获硕士学位,终身任兰开夏的克罗夫特教区的教区长. 他自学数学,与数学家凯莱(Cayley,A.)、德・摩根(De Morgan,A.)等都有交往. 他研究了初兴的拓扑学、群论、超复数与组合数学等理论. 他在 1850 年提出了一个"15 个女生问题",是组合数学中的有趣问题. 如果推广到 n 个元素就是一个著名难题.

德・摩根(De Morgan,Augustus,1806—1871) 英国数学家. 生于印度马都拉(Madura),卒于伦敦. 1827 年毕业于剑桥大学三一学院,1828 年成为数学教授. 他曾参加筹建伦敦数学会的工作,并于 1865 年任第一任主席. 他在分析学、代数学、逻辑学等方面有重要贡献,他的工作对 19 世纪数学产生了相当影响. 在分析方面,他建立了一种确定无穷序列收敛性的法则;为建立复数的几何表示,他引进了"双重代数"系统,并提出四元数的思想. 德・摩根最重要的贡献在逻辑学方面,他发展了一套适合推理的符号,并提出关系逻辑. 在符号逻辑领域内,有著名的德・摩根定律,即

$$(A\cap B)'=A'\cup B',\quad (A\cup B)'=A'\cap B'.$$

他的工作成为后来布尔代数的先声.

德・摩根对数学史也颇精通,他研究过牛顿(Newton,I.)和哈雷(Halley,E.)的传记,并有著述,还收集了 17 世纪科学家的通讯录索引. 他认为对数学发展的贡献,大数学家和小数学家的工作都是必不可少的. 此外,他在算术目录学方面也有突出贡献.

1859 年,中国数学家李善兰和英国学者伟烈亚力(Wylie,A.)把德・摩根 1835 年所著的代数学教科书译为中文,定名为棣么甘《代数学》,这是中国第一本代数学著作. 代数学的名称就是这样来的. 他的著作还有《微积分》(1842)、《算术书籍》(1847)等.

利斯廷(Listing,Johann Benedikt,1808—1882) 德国数学家、物理学家. 生卒地不详. 1847 年成为格丁根大学教授. 他的主要贡献在拓扑学方面,他在著作《拓扑学初步》(1847)中最早使用"拓扑"(Topologie)这个术语作为他所讨论的课题的名称,书中完成了拓扑学的某些奠基性工作. 他还在 1861、1862 年发表了他在 1858 年以后的一些研究结果,其中包括有关"默比乌斯带"的一些内容,这是他和默比乌斯(Möbius,A. F.)同时,但彼此独立发现的单侧曲面,它是把一长条纸带旋转 180°后首尾相连形成的;他力图寻求几何图形的定性规律,如他曾试图推广欧拉关系 $V-E+F=Z$.

比奥灵(Björling,Emmanuel Gabriel,1808—1872) 瑞典数学家. 生于韦斯特罗斯(Westerose). 经历不详. 曾任乌普萨拉大学教授. 他的主要贡献在复变函数论方面. 1847 年,他引用了"复变量函数的主值"的提法,以后被普遍采用. 他还研究了曲面理论,求出了通过已知曲面族的所有最小曲面,给出最小曲面的判定准则之一:平均曲率等于零的曲面是最小曲面.

刘维尔(Liouville,Joseph,1809—1882) 法国数学家. 生于圣・奥梅尔(St. Omer). 1827 年毕业于理工科大学,1836 年获博士学位. 先后在理工科大学、法兰西学院等校任教. 1836 年创办著名数学刊物《纯粹与应用数学杂志》. 1839 年当选为巴黎科学院院士,还是伦敦皇家学会的会员.

刘维尔在解析学、微分几何和数的理论方面有很大贡献. 他最大的功绩是 1844 年证明了超越数的存在,指出 e 和 e^2 不能为有理系数之方程式的根. 他在诱导双周期函数、微分方程和界值问题方面颇有建树. 他还对测地线的曲率、椭圆函数、数的几何、积分不变式、半纯函数、转换理论和静力学等问题均有所研究. 此外,他因担任《纯粹与应用数学杂志》的主编近 40 年,故该杂志又称《刘维尔杂志》. 杂志发表了许多著名数学家的创造性论文,为 19 世纪法国数学的发展做出了重要贡献.

皮尔斯(Peirce,Benjamin,1809—1880) 美国数学家、天文学家. 生于马萨诸塞州的塞勒姆(Salem),卒于坎布里奇. 早年在哈佛大学学习,后来任该校数学与自然哲学教授(1833—1842),1842 年以后在珀金斯任教. 他主管过美国《天文年鉴》的编撰工作,还参与创建了美国科学院和其他一些科研机构. 他的主要贡献在有限维代数方面,代表作是《线性结合代数》(1870),引入了幂零元素和幂等元素的概念和两个代数的张量乘积的概念,还得到了有关的结果. 在天文学方面,他编著了彗星轨道一览表,研究了土星光环的数学理论.

格拉斯曼(Grassmann,Hermann Günther,1809—1877) 德国数学家. 生于斯德丁(Stettin),卒于斯德丁. 他未接受过正统的大学数学教育,刻苦自学了物理、数学、拉丁语、梵文等. 他曾长期任教于德国斯德丁的一所高中,业余进行科学研究.

格拉斯曼主要著作有《线性扩张理论》(1844),书中首次引入欧几里得多维空间的概念,并把点、直线、平面、两点之间的距离等概念推广到任意空间 R_n,由此发展了张量分析和超复数理论. 在他的另一名著《算术教科书》(1861)中,对算术的基础进行了科学论述. 他在研究中提出了所谓"格拉斯曼公理",即 $(a+b)+1=a+(b+1)$. 给出了自然数加法与乘法的定义,证明了两种运算的一些基本性质,还特别讨论了无理数的基本理论. 他还用超复数的方法扩大了数的概念. 另外,他在电学、声学、植物学、语言学等领域也颇有研究,曾还编写了梵文词典(1875),

被广泛使用.

库默尔(Kummer,Ernst Eduard,1810—1893) 德国数学家.生于索拉乌(Sorau),卒于柏林.早年在哈雷大学学习,1831年获博士学位.曾在中学任教.1839年被选为柏林科学院院士.1842年受聘为布雷斯劳大学教授,1855年成为柏林大学教授.1863—1878年担任柏林科学院物理-数学部终身秘书,1868—1869年任柏林大学校长.

库默尔的主要贡献在数论、几何学、函数论、数学分析和方程论等方面.他研究了费马大定理,创立了理想数理论,推进了费马大定理的证明,这一新的数论领域为代数学、函数论、方程论等学科提供了新的有效工具.他的工作曾获得巴黎科学院颁发的奖.他还探讨了半直线系理论,发现了所谓库默尔曲面.他还发明了一种级数变换法,在级数的数值计算中有广泛应用.

勒威耶(Le Verrier,Vbain Jean Joseph,1811—1877) 法国天文学家.生于圣洛(Saint-Lô),卒于巴黎.早年在巴黎综合理工学院学习,1837年在该校任教.1846年任巴黎大学天体力学教授,同年被选为巴黎科学院院士,1847年成为伦敦皇家学会会员,1854年以后一直任巴黎天文台台长.

勒威耶的主要贡献在天体力学和气象学方面,他还精通数学,1845年,他和英国天文学家亚当斯(Adams,J.F.)同时分别用微分方程方法推算出当时尚未发现的海王星的位置.1846年,德国天文学家加勒(Galle,J.G.)在他们所指出的位置发现了一颗新的行星,被称为海王星.这一成就在当时被认为是最重要的科学事件,也是在科学技术中应用数学方法的典型事件.

黑 塞(Hesse,Ludwig Otto,1811—1874) 德国数学家.生于柯尼斯堡,卒于慕尼黑.早年在柯尼斯堡大学学习,是雅可比(Jacobi,C.G.J.)的学生.毕业后留校任教,1845年成为教授,后来又在哈雷大学、海德堡大学等校执教.他的主要贡献在代数函数论和几何学等方面.对二阶曲面理论、用行列式进行代数消元的方法、曲线拐点理论和三次曲线的有关课题进行了深入的研究.另外,对射影几何也颇有研究.他的主要著作有《空间解析几何讲义》、《直线解析几何讲义》等.

伽罗瓦(Galois,Evariste,1811—1832) 法国数学家.生于巴黎郊区布拉伦(Bourg-la-Reine),卒于巴黎.幼时受到良好的家庭教育.12岁入中学,在数学教师理查德(Richard 1795—1849)指导下研究代数方程可解条件问题,17岁(1828年)高中未毕业便写出了关于循环连分数及五次方程代数解法的论文.18岁(1829年)中学毕业,同年进入师范学校.他是法国资产阶级革命的积极参加者,曾因此被开除学籍并两次入狱.恢复自由后不久,因政治和爱情的纠葛,在一次决斗中不幸身亡,年仅21岁.

伽罗瓦短暂的一生,为数学增添了全新的思想,如群、域概念发展成为了许多新的数学分支.特别是还发现了每个代数方程必有反映其特性的置换群存在,从而解决了多年不能解决的用根式解代数方程的可能性的判断问题,创立了"伽罗瓦理论",并为群论的建立、发展和应用奠定了基础.也使他成为了19世纪伟大的数学家之一.

1830年与1831年,伽罗瓦写出了两篇关于方程论的重要论文,提交给了法国科学院,但因受权威压制,未能发表.直到他死后14年,即1846年,法国数学家刘维尔(Liouville,J.)才发现他的遗作的巨大意义,将他的遗稿汇集出版.1870年,法国数学家若尔当(Jordan,M.E.C.)还根据伽罗瓦的思想写出了《置换与代数方程》一书.

尚克斯(Shanks,William,1812—1882) 英国数学家.生于诺森伯兰郡,卒于达勒姆郡霍顿利斯普林(Houghton-le-Spring).1847年,他移居达勒姆郡霍顿利斯普林,在那里开办了一所寄宿学校,主要从事计算工作.他以圆周率 π 的计算而出名,1853年借助恒等式

$$\frac{1}{4}\pi = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right),$$

将 π 值算至10进小数的530位和607位,1873年又算至707位,后来有人指出其结果在528位上有错误,但其成就仍成为 π 值计算中的重要里程碑,长期为人称道.

洛 朗(Laurent,Pierre Alphonse,1813—1854) 法国数学家、光学家.生于巴黎,卒于巴黎.早年就学于综合工科学校.1843年,他向巴黎科学院呈交了论文《变分计算》,同年还写了《柯西定理的推广》(分别于1843年、1863年发表),独立给出了复变函数论中的一些结果,包括著名的"洛朗级数展开式",受到关注.该理论对幂级数理论的发展和解决固体热平衡问题及弹性现象非常重要.

施勒夫利(Schläfli,Ludwig,1814—1895) 瑞士数学家.生于波尔尼(Bern)格拉斯维尔(Grasswil),卒于伯尔尼.1853年任教授.1868年当选为意大利米兰科学院通讯院士.1870年以几何方面的论著获施泰纳奖.他主要研究消元理论和 n 维几何问题,创立了用一些特殊函数表述 n 维欧氏空间的正则体和高维球的正则部分等理论,引入"施勒夫利符号",解决了规则多胞形等一系列问题.此外,他还在伽马(γ)函数、贝塞尔函数和椭圆模函数等方面也有创建.

卡塔朗(Catalan,Eugène,Charles,1814—1894) 比利时数学家.生于布鲁日(Brugge),早年在巴黎

综合工科学校就学. 1856 年,任列日(Liège)大学数学教授,并被选为布鲁塞尔科学院院士.

卡塔朗一生共发表 200 多种涉及各数学领域的论著. 在微分几何中,他证明了下列所谓卡塔朗定理:当一个直纹曲线是平面和一般的螺旋面时,它只能是实的极小曲面. 他还和雅可比(Jacobi,C. G. J.)同时解决了多重积分的变量替换问题,建立了有关的公式. 1842 年,他提出了一种猜想:方程 $x^z-y^t=1$ 没有大于 1 的正整数解,除非平凡情形 $3^2-2^3=1$. 这一问题至今尚未解决. 此外,他还在函数论、伯努利数和其他领域也做出了一定的贡献.

旺策尔(Wantzel,Pierre-Laurent,1814—1848) 法国数学家. 生平不详. 只知道他曾在巴黎综合工科学校工作.

旺策尔在 1837 年第一个严格证明了三等分任意角和倍立方体问题——著名的三大几何作图问题,不可能用直尺和圆规作图来解决. 并还一般地指出了每个可作图的量必需满足一个 2^n 次的方程. 高斯(Gauss,C. F.)曾给出任何一个正 n 边形可尺规作图的充分条件,旺策尔则证明了这个条件也是必要的,从而解决了那些正 n 边形可以用尺规作图的问题. 他同时证明了,对于三次方程的不可约情形,如果不使用虚数,就不可能将它的三个实根"代数地"(即只用根式)表示出来.

西尔维斯特(Sylvester,James Joseph,1814—1897) 英国数学家. 生于伦敦,卒于伦敦. 早年在剑桥大学和都柏林大学学习,1841 年获硕士学位. 相继在伦敦大学学院、美国弗吉尼亚大学和约翰斯·霍普金斯大学,以及牛津大学任教. 担任过《纯粹和应用数学季刊》、《剑桥和都柏林数学杂志》编辑,并创办了《美国数学杂志》. 西尔维斯特先后被选为伦敦皇家学会会员、伦敦数学会主席,还曾获得多所大学和科研机构的名誉学位.

西尔维斯特和凯莱(Cayley,A.)、哈密顿(Hamilton,W. R.)等人共同开创了自牛顿(Newton,I.)以来英国数学发展的繁荣局面. 他的主要贡献在方程论、行列式和矩阵理论、不变量理论、线性结合代数、标准型、数论、概率论等方面. 他的工作对美国大学数学研究有很大影响. 他研究了数值方程根的实性和斯图姆定理;证明了牛顿关于虚根数目法则;把斯图姆方法应用于两个独立函数,并得到了进一步的结果;讨论了 5 次方程根的性质,把方程的系数的函数作为 n 维空间中点的坐标来处理;建立了高次方程组的消元法则,称为析配法. 他的工作丰富了三次曲线的剩余理论,发展了型的反变理论,搞清了正交变换、共变和反变叠合等. 他还证明了有关"凯莱数"的表达式的定理,首先把线性微分算子系统应用于生成不变量和共变量. 在数论方面,他引入了可数性的概念,发展了整数分析理论. 此外,他创造了许多数学名词,曾自称为"数学亚当".

索莫夫(Сомов,Осип Иванович,1815—1876) 俄国数学家、力学家. 生于奥特腊达(Отрада),1935 年毕业于莫斯科大学. 先后在莫斯科商业学校、莫斯科贵族学校和圣彼得堡各大学任教. 1847 年获博士学位,1857 年成为教授. 1862 年当选为圣彼得堡科学院院士. 他在力学、数学和数学物理方面都做了大量工作. 最早在圣彼得堡大学讲授椭圆函数论,并撰写了这一领域第一部专著《椭圆函数论基础》. 他在后半生主要研究了力学问题,他用向量法把微分参数理论广泛地应用于场论之中. 主要著作还有《某些高阶代数方程理论》(1938).

外尔斯特拉斯(Weierstrass,Karl Theodor Wilhelm,1815—1897) 德国数学家. 生于威斯特伐里亚奥斯滕费尔德的一个信仰天主教的地方金库主任家. 他曾在巴阶波尔中学受过初等教育. 1834—1838 年在波恩大学研习法律和商学,后转到蒙斯特学院研习数学. 早年在中学任教师,1841 年发表了关于《阿贝尔函数理论》的论文,引起数学界的重视,获克尼斯柏格大学的荣誉博士学位. 1856 年应聘至柏林大学任助理教授,1864 年晋升为教授,直到逝世.

外尔斯特拉斯主要从事复变解析函数理论和数学分析的研究,他最大的功绩是同黎曼共同奠定了这门学科的基础,他特别重视解析函数的构造和性质的研究,得到了著名的外尔斯特拉斯定理,以幂级数的观点写成了复变解析函数论. 他是把严格的论证引进分析学的一位大师. 他在严格的逻辑基础上建立了实数理论,改进了波尔查诺(Bolzano,B.)和柯西(Cauchy,A.-L.)的有关结果. 例如在柯西工作的基础上完成了极限的 ϵ-δ 定义,他还给出了处处不可微的连续函数的例子. 在几何学中,还创立了极小曲面理论. 此外,对变分法的严密化亦有所贡献.

外尔斯特拉斯是 19 世纪伟大的数学家之一. 但他的大部分著作生前没有发表,只是在讲课中加以叙述而得到传播. 他的研究成果卓著,又善于演讲,吸引了许多听众,培养出一批著名学者,如希尔伯特(Hilbert,D.)、康托尔(Cantor,G. F. L. P.)、柯瓦列夫斯卡娅(Ковалевская,С. В.)、施瓦兹(Schwarz,H. A.)、米塔-列夫勒(Mittag-Leffler,(M.)G.)等. 晚年他作为数学界的权威受到尊重.

布　尔(Boole,George,1815—1864) 英国数学家、逻辑学家. 生于林肯郡,卒于科克. 早年他在父亲的辅导下学习数学、拉丁文和希腊文等. 由于生活所迫,16 岁即开始在中学任教,以维持生活. 1835 年,他在家乡创办了一所学校. 为了提高数学修养,他直接阅读一些数学家著作,并刻苦钻研,终于在

1841 年写出一篇有关不变量计算的论文,受到数学界的重视.

布尔对数学的最大贡献是创立了逻辑代数. 1847 年,他发表了重要的论著《逻辑的数学分析》,阐述了使语言符号化的基本思想,成为 100 多年后计算机理论的基石. 1854 年,他又出版了逻辑代数的代表作《思维法则的研究》,系统归纳了这种新理论,后人称之为"布尔代数".

伟烈亚力(Wylie,Alexander,1815—1887) 英国数学史家及翻译家. 生平不详. 他精通中文,1847 年以传教士的身份来到中国上海,并取中文名"伟烈亚力",经营"墨海书馆". 1852—1859 年与中国数学家李善兰合作,翻译了《几何原本》9 卷、《代数学》13 卷、《代微积拾级》18 卷、《谈天》18 卷及《重学线说》等书. 1853 年,他还用中文写成《数学启蒙》一书,介绍了西方的一些初等数学知识. 他的主要著作有《中国算术漫谈》、《中国数学与天文学名词集》.

伟烈亚力对于中西数学的交流,以及对于中国近代数学的发展都做出了重要贡献.

德洛内(Delaunay,Charles - Eugène,1816—1872) 法国数学家、天文学家. 生于卢西格尼(Lusigny),1872 年于瑟堡(Cherbourg)溺水身亡. 他 1836 年毕业于巴黎综合工科学校,1841 年在巴黎大学获博士学位. 先后在几所工科学校和巴黎大学任教. 曾当选为巴黎科学院院士,还曾任巴黎天文台台长. 他发现一种特殊的曲线,现称为德洛内曲线. 这种曲线是由椭圆和双曲线沿直线滚动时,其焦点的轨迹. 此外,他对月球理论的研究也有很大成绩,并著有《月球运动的新解析理论》等.

博尔夏特(Borchardt,Carl Wilhelm,1817—1880) 德国数学家. 生于柏林,卒于鲁德斯多夫(Rudersdoff). 早年聘请了著名数学家施泰纳(Steiner,J.)任其家庭教师. 接受启蒙教育后,在柏林、柯尼斯堡和巴黎等地受教于狄利克雷(Dirichlet,P. G. L.)、贝塞尔(Bessel,F. W.)、雅可比(Jacobi,C. G. J.)、沙勒(Chasles,M.)和刘维尔(Liouville,J.)等数学家. 1843 年获博士学位,不久任柏林大学教授. 1855—1880 年,任《纯粹与应用数学杂志》(克雷尔创立的)主编. 在此期间,这一杂志也称为《博尔夏特的杂志》. 他早期的论文推广了库默尔(Kummer,E. E.)关于确定行星的特征方程的结果,利用行列式证明了有关结果. 以后,他继续研究行列式理论及其应用,并做出重要贡献.

阿龙霍尔德(Aronhold,Siegfried Heinrich,1819—1884) 德国数学家. 生于安格堡(Angerburg),卒于柏林. 先后在柯尼斯堡大学和柏林大学学习和深造,1851 年获博士学位. 以后在柏林多所工科学校任教. 他是最早研究不变量理论的德国数学家,引入了所谓符号表示法,导出一种微分方程,称为阿龙霍尔德方程. 他在 1863 年出版的《不变量理论基础》总结了他在这方面的主要成果. 此外,阿龙霍尔德在平面曲线理论方面也做出了贡献.

斯托克斯(Stokes,George Gabriel,1819—1903) 英国物理学家、数学家. 生于爱尔兰的斯莱戈郡(County Sligo),卒于剑桥. 早年在剑桥大学学习,毕业后留校工作,1849 年成为该校的"卢卡斯教授",直至去世. 他在学术界相当活跃,曾任剑桥哲学协会主席、伦敦皇家学会秘书、主席等职.

斯托克斯在物理学、数学和化学等方面都有贡献. 他受到法国应用数学学派的影响,深入研究了流体动力学、固体的弹性理论、弹性固体中波的变化等问题. 他特别对粘性流体的特性进行了研究,提出描述固体小球在流体中运动的粘度定律和作为矢量分析基本定理的著名结果——斯托克斯定理. 首创"荧光"这一术语,并用来研究紫外线;证实石英与普通玻璃不同,对紫外线是透明的. 他还以提出光的波动说,以及假定光必须赖以传播的以太观念而著名. 他还是大地测量学的先驱,发表过关于地球表面上引力差异的学术论文. 他在数学和物理学方面的论著颇丰,汇编成 5 卷的《数学物理学论文集》(1880—1905)已正式出版.

布　凯(Bouquet,Jean - Claude,1819—1885) 法国数学家. 生于法国杜省,卒于巴黎. 1842 年获博士学位,并任教授. 1875 年当选为巴黎科学院院士. 他与布里奥(Briot,C. A.)长期合作,进行分析数学方面的研究,并取得了很多成果. 他简化了微分方程解的存在性的控制函数或优势函数方法,引进全纯函数和亚纯函数概念,研究了解析函数的展开问题. 另外,他在椭圆和微分几何方面也发表过专题论文.

博　内(Bonnet,Pierre - Ossian,1819—1892) 法国数学家. 生于蒙波利埃(Montpellier),卒于巴黎. 经历不详. 他的主要贡献在级数论、微分几何和变分学等方面,特别以研究曲线和曲面的微分几何学而著称. 他提出了测地曲率和挠率的概念,建立了一系列有关定理,其中关于测地曲率沿曲面上一条封闭曲线的线积分公式称为高斯-博内定理. 在他 1844 年以后的一系列论文中,强调了曲面上特殊坐标系的用途,研究了特殊曲线,还特别注意到极小曲面的性质等. 此外,他在天文学、大地测量学、制图学、数学物理和代数学等方面也做出了一定的贡献.

托德亨特(Todhunter,Issac,1820—1884) 英国数学家. 生于英国苏塞克斯(Sussex)的拉伊(Rye),卒于剑桥. 早年他在伦敦大学学院、剑桥大学圣约翰学院学习,1849—1864 年任剑桥大学研究员,1862 年被选为伦敦皇家学会会员. 托德亨特是 19 世纪数学教育界最有影响的人物之一.

托德亨特主张在数学课程中，应把欧几里得(Euclid)的《几何原本》放在中心地位.他编写了许多数学教科书，如《代数》和《欧几里得》重版达十五六次."数学归纳法"一词的采用和推广，得益于《代数》一书的流行.他在数学史方面也做出过贡献.他的主要著作有《19世纪变分学发展史》、《从帕斯卡时代到拉普拉斯时代的概率论史》、《从牛顿时代到拉普拉斯时代关于地球引力和形状的数学理论的发展》、《弹性理论的历史》等.这些著作史料丰富、内容翔实，至今仍有一定的价值.他对变分学也颇有研究，关于间断解理论的论文曾获得皇家学会的亚当斯奖(1871).

海　涅(Heine，Heinrich，Eduard，1821—1881)　德国数学家.生于柏林，卒于哈雷.早年他在柏林大学和格丁根大学学习，是高斯(Gauss，C.F.)、狄利克雷(Dirichlet，P.G.L.)的学生.1842年获博士学位.1848年受聘为哈雷大学教授，1864—1865年担任该校校长，先后被选为普鲁士科学院通讯院士、格丁根科学协会会员.

海涅的主要贡献在数学分析和应用数学方面.他深入研究了一致收敛概念，证明了连续函数的一致收敛定理.在研究函数的一致连续性时，利用了闭区间的有限开覆盖的性质.因此，有关的定理后来称为海涅-波莱尔有限覆盖定理.他还研究了无理数的本质和一些特殊函数，著作有《球函数指南》(1861)等.

邦孔帕尼(Boncompagni，Balolassarre，1821—1894)　意大利数学家、数学史家.生于罗马，经历不详.他的主要贡献是创办并编辑了《数理科学的历史与文献通报》(1868—1887)杂志，整理、编辑和出版了许多著名数学家的著作.例如，1857—1862年，邦孔帕尼在罗马出版了花拉子米(al-Khowārizmī)和斐波那契(Fibonacci，L.)的著作，整理了拉格朗日(Lagrange，J.-L.)、高斯(Gauss，C.F.)等人的研究成果.

切比雪夫(Чебышев，Пафнутий Львович，1821—1894)　俄国数学家、力学家.生于波罗夫斯县奥卡多沃村的一个旧贵族家庭.1841年毕业于莫斯科大学.1846年获硕士学位.1847年起在圣彼得堡大学任教.1849年获数学和天文学博士学位.1853年在圣彼得堡科学院任职.从1859年起先后成为圣彼得堡科学院、柏林科学院、巴黎科学院、瑞士科学院院士，伦敦皇家学会会员.切比雪夫在学生时代就曾以《方程根的计算》荣获塞勒勃良奖章，博士论文《比较理论》获圣彼得堡科学院的杰米多夫奖.1890年，他荣获法兰西共和国最高勋章，即荣誉团勋章.

切比雪夫是圣彼得堡第二数学学派的创始人(欧拉(Euler，L.)被认为是圣彼得堡第一数学学派的奠基者)，培养了大批学者.他先后发表论文70多篇，内容涉及数论、概率论、函数逼近理论、机械原理和积分学诸方面，证明了贝尔兰特公式、关于自然数列中素数分布定理、大数定律的一般公式和中心极限定理等.他还是大数定律的创建人之一.在机械研究中，他创立了用多项式逼近连续函数的数学新分支，同时还运用圆周运动和直线运动的互换原理设计制造了40多种机械，改造了80多种机械.

凯　莱(Cayley，Arthur，1821—1895)　英国数学家.生于里士满(Richmond)，卒于剑桥.早年他在国王学校学习时，就显露出了数学才华.17岁考入剑桥大学三一学院，在数学方面取得优异成绩.1846年改学法律，3年后成为律师，在任职期间结识了数学家西尔维斯特(Sylvester，J.J.)，两人结下了深厚的友谊，并成为数学研究的合作者.在1849年后的14年内，他们合作发表了300多篇论文.1863年，凯莱返回剑桥大学任数学教授.在以后的几十年，他仍潜心钻研学问，在许多数学领域都做出了贡献.

凯莱和西尔维斯特同为代数不变量理论的创始人.他们首创代数不变式的符号表示法；导入了n维空间的概念，讨论了四维空间的性质；引入矩阵概念，规定了矩阵的符号和名称，研究了矩阵性质，导出了凯莱-哈密顿定理.他还发明了表示行列式的两竖线符号，建立了行列式的有关理论.

凯莱在微分方程的奇解理论、代数抽象群、图论、微分几何等许多方面都做出过贡献.他思维敏捷，乐于尽快发表新见解，他一生发表的论文竟达1000多篇，许多学科的创建阶段都能看到他的研究成果.他的专著有《椭圆函数论初步》(1876)等.

亥姆霍兹(Helmholtz，Hermann Ludwig Ferdinand，1821—1894)　德国数学家、物理学家、生理学家、心理学家.生于波茨坦(Potsdam)，早年在医学院学习，毕业后曾任柏林慈善医院的助理、随军医生和解剖学教师等职.1849年以后相继在格尼斯堡、波恩和海德堡等地任生理学教授.1871年任柏林大学物理学教授.1860年被选为英国伦敦皇家学会会员.亥姆霍兹的主要贡献在静电学和流体动力学方面.在数学中，他研究了黎曼空间的几何、黎曼度量和数学物理中的退化波动方程等课题.他提出的后经李(Lie，M.S.)改进的有关黎曼度量的论断，以及李-亥姆霍兹空间问题，在许多自然科学领域中都得到了证实.

贝特朗(Bertrand，Joseph Louis Francois，1822—1900)　法国数学家.生于巴黎，卒于巴黎.少年早慧，在他的叔叔、数学家杜阿梅尔(Duhamel，J.M.C.)的教导下，11岁就进入巴黎综合工科学校学习，1839年(17岁)获博士学位.1844年任该校数学教授，1847年兼任法兰西学院教授，1884年当选为

法国科学院院士.他的主要贡献在概率论、曲线与曲面理论、微分方程及其在分析力学中的应用、级数论、函数论,以及热力学、电学等方面.在他所著的《概率的计算》(1889)一书中,提出了有名的"贝特朗悖论".

埃尔米特(Hermite,Charles,1822—1901) 法国数学家.生于洛林地区的迪约兹(Dieuze),卒于巴黎.曾任巴黎大学文理学院教授.他从学生时代开始,就从事椭圆函数的研究,在理论上有重要贡献,并研究椭圆函数与数论之间的联系,应用椭圆函数解五次方程式,还解决了含椭圆函数之力学问题.

埃尔米特也因证明 e 的超越性,以及提出埃尔米特多项式而闻名(埃尔米特多项式为一族作为埃尔米特微分方程之解的正交多项式).他还提出关于微分方程、积分变换、矩阵及希尔伯特空间中用到的埃尔米特微分方程、埃尔米特形式、埃尔米特核、埃尔米特矩阵、埃尔米特算子等名词术语.

施勒米尔希(Schlömilch,Otto,1823—1901) 德国数学家.生平不详.1842 年获哲学博士学位.他先后在耶拿(Jena)大学、德累斯顿(Dresden)综合技术学校讲授数学.他在纯粹数学和应用数学方面做了大量的工作.一种泰勒级数余项的一般公式是以他的名字命名的.1856 年,他创办了德国的《数学物理杂志》.他的主要著作有《代数分析》、《有限差分教程》.

贝　蒂(Betti,Enrico,1823—1892) 意大利数学家.生于皮斯托亚(Pistoia)附近,卒于比萨.早年在比萨大学学习物理学和数学,以后在该校任教,并曾担任过该校校长.他的主要贡献是继鲁菲尼(Ruffini,P.)、阿贝尔(Abel,N. H.)和伽罗瓦(Galois,E.)之后,又得到了一些有关代数方程可解性的重要结果,为古典代数学向抽象代数学发展做出了贡献.他在拓扑学、函数论和数学物理等方面也颇有研究.弹性理论中的互反理论,称为"贝蒂定理";法国数学家庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)曾引进"贝蒂数",以纪念他在拓扑学方面的贡献.

阿姆斯勒(Amsler,Jakob,1823—1912) 瑞士数学家.生于布鲁克(Brugg),卒于沙夫豪森(Schafhausen).早年在耶拿大学、柯尼斯堡大学学习,1848 年获博士学位.后在苏黎世、沙夫豪森等地任教.1854 年转向精密数学器具的研制,1892 年被选为巴黎科学院通讯院士.

阿姆斯勒在数学、物理学方面都颇有成就,发表了多篇有关磁分布、热传导和引力理论的论文,推广了艾弗里(Ivory,J.)的椭球引力定理和泊松(Poisson,S.-D.)的某些研究成果.他在制造数学仪器方面也做出了重要贡献,1854 年,他发明并亲自研制了"极面积仪",它可以测出任意封闭曲线所包围的面积."极面积仪"至今仍为工程、地理、数学等部门不可缺少的仪器.

克罗内克(Kronecker,Leopold,1823—1891) 德国数学家.生于布雷斯劳(Breslau)附近的利格尼茨(Liegnit),卒于柏林.他在利格尼茨读中学时,其数学才能就受到库默尔(Kummer,E. E.)的赏识.1841 年考入柏林大学,后又在波恩大学和布雷斯劳大学听课,1845 年获博士学位.在其后的 8 年时间里,主要在家乡经营农场.1853 年重返学术界.1861 年被选为柏林科学院院士.后还被选为伦敦皇家学会会员、法国科学院和圣彼得堡科学院院士.

克罗内克在数论、代数学、函数论、拓扑学等方面都有重要贡献.他综合研究了数论和代数学问题,发展了库默尔的"理想数"理论,讨论了扩张域的数学结构,提出了用复数乘法可以得到虚二次域上的阿贝尔扩张的著名猜想,被称为"克罗内克青春之梦".还深入探讨了椭圆函数理论、行列式理论及平面代数曲线的性质等.他是直觉主义数学流派的代表人物,在关于数学基础的大论战中,激烈地反对外尔斯特拉斯(Weierstrass,K.(T. W.))和康托尔(Cantor,G.(F. P.))等人的观点,积极鼓吹数学的算术化,认为整个数学应该以自然数作为惟一的基础,他的一句名言是:"上帝创造了整数,其余都是人为的."

基尔霍夫(Kirchhoff,Gustav Robert,1824—1887) 德国自然科学家.生于柯尼斯堡,1847 年毕业于柯尼斯堡大学.1848 年到柏林大学任教,1850 年成为教授,1854—1875 年任海德堡大学和布雷斯劳大学教授,1875 年返回柏林大学任教,直至逝世.

在物理方面,基尔霍夫和本生(Bunsen)一起发现光谱分析方法,对电路理论和热辐射问题有贡献;在化学和天文学方面,他也取得了成就.在数学方面,他推广了亥姆霍兹(Helmholtz,H. L. F.)关于波动方程初值问题的工作,他所得到的公式对于解三维空间波动方程起到了重要作用.

布廖斯基(Brioschi,Francesco,1824—1897) 意大利水力学家、数学家.生于米兰,卒于米兰.早年在帕维亚大学学习,1852 年成为该校教授.1861 年以后,在政府机关任职,先后担任教育部秘书长、参议员、执行委员会委员等职.1884 年,任意大利山猫学院主席.他还创办了高级技术研究所,并担任所长及数学、水力学教授.

布廖斯基的主要贡献在行列式理论、型论、阿贝尔函数和椭圆函数等方面.在数学物理学、力学、水力学方面也都颇有研究.他在科学史方面也做了许多工作,曾校订达·芬奇(da. Vinci,L.)的著作,保存了一些重要的史料.此外,他还参加了编辑出版欧几里得(Euclid)的《几何原本》的工作.

巴尔默(Balmer,Johann Jakob,1825—1898) 瑞士数学家、物理学家.生于巴塞尔的劳森(Lausen),卒于巴塞尔.早年在德国求学,1849年在巴塞尔大学获博士学位.1859年之后,一直在巴塞尔女子中学任教,并在巴塞尔大学兼课.巴尔默的主要贡献在几何学和光谱学方面.他首次发现原子光谱线频率之间的数学关系,成功地建立了氢元素的谱线公式,阐明了氢光谱中谱线的频率形成一个收敛序列,称为“巴尔默系”.除此之外,他还研究过其他元素的光谱.

巴塔利尼(Battagllini,Giuseppe,1826—1894) 意大利数学家.生于那波利(Napoli),经历不详.他曾任罗马和那波利几所大学的高等几何教授.

巴塔利尼主要研究群论和线几何学.他还以创办《数学学报》(1863年在那波利创刊)而著称.该杂志对非欧几何在意大利的传播和推广起了重要作用.他还翻译了罗巴切夫斯基(Лобачевский,Н.И.)和波尔约(Bolyai,J.)的非欧几何著作.在他1867年于那波利出版的著作《罗巴切夫斯基的想象几何》中,解析地推导了罗巴切夫斯基公式.1885年,他又把德国数学家内托(Netto,E.)有关置换理论的论著,译成了意大利文.

温洛克(Winlock,Joseph,1826—1875) 美国数学家、天文学家.生于肯塔基州(Kentucky)谢尔比(Shelby),卒于坎布里奇(Cambridge).1845年毕业于谢尔比大学并留校工作,以后相继在美国海军观测台、海军学校和劳伦斯技术学校任教.1863年成为美国自然科学院的首批院士之一.温洛克在天文学方面的主要贡献是改进了长焦距的折射望远镜.1870年,哈佛市天文台安装了他制造的这种仪器,通过它可以获取太阳每天的传真照片.为了测定日食,他还提出了记录光谱线位置的力学方法.

黎　曼(Rieman,Georg Friedrich Bernhard,1826—1866) 德国数学家.生于丹嫩贝格(Dannenberg).1846年进入格丁根大学神学院学习,1847—1849年在柏林大学学习.1849年回到格丁根大学任教,1851年获博士学位,1854年任讲师,1857年晋升为副教授,1859年作为狄利克雷(Dirichlet,P.G.L.)的继承人任教授.他由于患肺病,1862年开始了疗养生活,1866年在马焦雷湖畔逝世,年仅40岁.

黎曼在格丁根和柏林大学期间,曾受到当代数学家高斯(Gauss,C.F.)、狄利克雷、雅可比(Jacobi,C.G.J.)、施特涅耳(Steiner,J.)等人的教育和影响,在数学各个领域都做出了划时代的贡献,成为了19世纪伟大的数学家之一.黎曼是黎曼几何的创始人,对复变函数和偏微分方程也有贡献.1854年在就职论文中,他定义了黎曼积分,给出了三角级数收敛的黎曼条件,从而指出积分论的方向,并奠定了近代解析数论的基础,提出了著名的“黎曼猜想”.他最初引入“黎曼曲面”概念,对近代拓扑学影响很大.在代数函数论方面,黎曼-罗赫定理很重要.在微分几何上继高斯之后,开辟了微分几何的新途径,建立了n维流形和黎曼空间的概念,创立了黎曼几何学,并定义了黎曼空间的曲率,使其在物理学中得到了广泛的应用.他在保角映射、椭圆函数论、多周期函数,以及偏微分方程等方面都做出了开创性的贡献.

史密斯(Smith,Henry John Stanley,1826—1883) 英国数学家.生于爱尔兰都柏林,卒于牛津.曾留学法国和瑞士,数次获奖学金.1860年任牛津大学教授.

史密斯主要从事数论研究,将高斯(Gauss,C.F.)的若干定理由实变量推广到复变量,其中n个不定元的一般理论受到后继数学家的赞赏.1883年获法国科学院奖.他还研究椭圆函数论,并对现代几何学、矩阵代数、不可积函数等学科分支都做出过贡献.

维　纳(Wiener,Ludwig Christian,1826—1896) 德国数学家、物理学家、哲学家.生于达姆施塔特(Darmstadt),卒于卡尔斯鲁厄(Karlsruhe).1843—1847年在吉森大学攻读工程学和建筑学.1848年在达姆施塔特高等工艺学校任教.1850年获博士学位,1852年成为教授.他一直在该校工作,直至去世.

维纳的主要贡献在画法几何和数学模型的构造方面.在他的主要著作《画法几何学教程》(2卷,1884—1887)中,他总结出了大量画法几何文献的内容和丰富的教学经验,讨论了画法几何的基本问题,给出了平面主线的各种应用,力求得到最简单的图解法.此外,他还以制作数学模型而出名,他用熟石膏制作的三阶曲面的模型多次在国际数学教具展览会上展出.

彼得松(Петерсон,Карл Михайлович,1828—1881) 俄国数学家.生于里加(Рига),1847年毕业于里加中学,1852年毕业于捷尔普茨克大学(今塔尔图大学).1865年以后在彼得罗巴甫洛夫学校任数学教师.

彼得松主要研究微分几何,他及其学生在这方面的工作奠定了莫斯科几何学派的基础.他深入探讨了曲面变形理论,解决了确定曲面几何形式的解析条件问题,还补充了高斯(Gauss,C.F.)的一些结果.他建立的高斯-彼得松方程是曲面理论的基础.他在偏微分方程方面也取得了引人注意的结果.彼得松还积极参加了莫斯科大学科学小组的活动,后来成为了莫斯科数学会的创始人之一.

康托尔(Cantor,Moritz Benedikt,1829—1920)

德国数学家、数学史家. 生于曼海姆(Mannheim). 卒于海德堡. 1851 年获博士学位. 1877 年任教授. 1860 年起开设数学史讲座,并在《德国人物传》等杂志上发表了一系列数学家传记和科学史及数学方面的论文. 他的主要专著《数学史讲义》(4 卷,1880—1908)奠定了数学史学科的基础. 此外,他还出版了《数学对人类文化生活的贡献》(1863)等.

克里斯托费尔(Christoffel,Elwin Bruno,1829—1900) 德国数学家. 生于亚琛(Aachen)附近,卒于斯特拉斯堡. 1856 年获博士学位. 1862 年任教授. 他是黎曼(Riemann,(G. F.)B.)微分几何理论的追随者,1869 年给出两个 n 元变量的 p 阶代数形式等价的充要条件,引入“克里斯托费尔符号”. 1877 年在不连续曲面研究方面也卓有成果. 1880 年还得到某些积分类数与亏格关系的结论,其工作导致了张量分析理论的发展.

克雷莫纳(Cremona,Antonio Luigi Gaudenzio Giuseppe,1830—1903) 意大利数学家. 生于帕维亚(Pavia),卒于罗马. 早年学土木建筑,1853 获博士学位,后转向数学. 1860 年任波伦亚大学教授. 克雷莫纳主要从事平面和空间变换问题的研究. 1866 年因三次曲面论方面的文章获施泰纳奖. 他发展了双有理变换(亦称克雷莫纳变换),对三次曲线、可展曲面和高阶曲面理论都有创见. 著作有《平面曲线几何理论导引》(1862)、《平面图形的几何变换》(1863)、《射影几何原理》(1873)等. 此外,他还写过几本有影响的几何教科书.

泰 特(Tait,Peter Guthrie,1831—1901) 英国物理学家、数学家. 生于苏格兰的达尔基斯(Dalkeith),卒于爱丁堡. 早年在爱丁堡大学、剑桥大学彼得豪斯学院学习. 1854—1860 年受聘为皇后学院数学教授,1860—1901 年任爱丁堡大学自然哲学教授.

泰特在热力学方面卓有贡献,曾与人合作运用克鲁克斯辐射计进行实验,给出了它的第一个满意的解释;撰写了一系列关于气体动力学的论文;第一个证明了有关瓦特斯顿-麦克斯韦均分定理的内容. 他还积极扩大哈密顿四元数的影响,用以同吉布斯(Gibbs,J. W.)和亥维赛(Heaviside,O.)的向量法则抗争.

麦克斯韦(Maxwell,James Clerk,1831—1879) 英国物理学家. 生于爱丁堡,卒于剑桥. 1847 年进入爱丁堡大学,3 年后转到剑桥大学三一学院学习. 以后在阿伯丁(Aberdeen)和伦敦等地工作. 1871 年任剑桥大学教授,并领导卡文迪什实验室.

麦克斯韦的最大贡献是建立了光的电磁理论. 他得到了电磁场的基本方程,现称为麦克斯韦方程. 还研究了分子物理、光学、力学和弹性理论等方面的问题,他的工作对数学物理的发展起到了重要作用. 他用数理统计的方法导出了分子运动的麦克斯韦速度分布律. 还对向量分析和系统的微分算子理论进行了深入的研究,促进向量分析发展成为一个独立的数学分支.

戴德金(Dedekind,Julius Wilhelm Richard,1831—1916) 德国数学家. 生于德国中部工业城市不伦瑞克,卒于格丁根. 曾在格丁根大学学习,并受过高斯(Gauss,C. F.)和狄利克雷(Dirichlet,P. G. L.)的教诲,1852 年获哲学博士学位. 先后任格丁根大学、苏黎世工学院、不伦瑞克工学院教授和巴黎科学院、柏林科学院、罗马科学院院士.

戴德金主要从事代数论、整数论、解析学和概率论等方面的研究. 在代数方面研究了域、群、环结构及模等问题,是 20 世纪抽象代数的先驱. 他在 1872 年提出用“分割”来定义无理数,为建立实数理论做出了贡献. 他是康托尔集合论的最早支持者之一,并用映射等概念研究集合论的某些问题. 主要著作有《连续性与无理数》、《数的意义》、《整代数的理论》、《数学论文集》等. 他还整理出版了狄利克雷的《整数论讲义》,并与德国数学家韦伯(Weber,W. E.)共同出版了《黎曼全集》.

道奇森(Dodgson,Charles Lutwidge,1832—1898) 英国数学家、逻辑学家. 生于柴郡(Cheshire)的达斯伯里(Daresbury),卒于萨里郡(Surrey)的吉尔福德(Guildford). 毕业于牛津大学. 道奇森主要研究行列式、几何学、竞赛图和竞选数学,以及游戏逻辑. 著作有《行列式的初等理论》(1867)、《平面代数几何学提纲》(1860)、《欧几里得和他的现代对手》等. 他还擅长编著儿童幻想小说,如《爱丽斯漫游奇境记》等,颇为流行.

诺伊曼(Neumann,Carl Gottfried,1832—1925) 德国数学家、理论物理学家. 生于柯尼斯堡(Königsberg),卒于莱比锡. 毕业于柯尼斯堡大学,1855 年获博士学位. 先后在哈雷大学、巴塞尔大学、蒂宾根大学、莱比锡大学任教. 他是柏林科学院院士,又是格丁根、慕尼黑、莱比锡等科学协会的会员.

诺伊曼的主要数学贡献在偏微分方程论、常微分方程论、积分方程论、函数论等方面. 在偏微分方程论方面,他深入地研究了边值问题,发展了解决该类问题的算术平均方法,运用此法给出了三维狄利克雷问题解的存在性证明. 他还研究了复式拉普拉斯边界问题,位势论中的第二边值问题是以他的名字命名的,术语“对数位势”也是他首创的. 在常微分方程论方面,他求出了贝塞尔方程对于整数 n 的一个解;在积分方程论方面,给出了解二类积分方程的方法. 在函数论方面,探讨了代数函数的黎曼理论,证明了一个单连通平面区域可以映射到一个圆. 此

外，他还参与创办和编辑了德国的重要数学杂志《数学纪事》.

利普希茨(Lipschitz，Rudolf Otto Sigismund，1832—1903) 德国数学家.生于柯尼斯堡附近，卒于波恩.早年在柯尼斯堡大学和柏林大学学习，1853年获博士学位.1864年成为波恩大学教授.还被选为巴黎科学院和柏林、格丁根、罗马等地科学院的院士.

利普希茨的主要贡献在微分方程、微分几何和数学基础方面.他建立了著名的鉴别常微分方程解存在的"利普希茨条件"，得到了"柯西-利普希茨存在性定理".1869年后，他发表了一系列关于微分几何的论文，发展了黎曼(Riemann，(G.F.)B.)的某些结果，研究了微分不变量理论.此外，在代数数论领域，建立了被称为"利普希茨代数"的超复数系，为该数学分支的发展奠定了基础.

叙洛夫(Sylow，Peter Ludvig Mejdell，1832—1918) 挪威数学家.生于克里斯蒂安尼亚(Christiania)，卒于克里斯蒂安尼亚.早年在克里斯蒂安尼亚教会学院和克里斯蒂安尼亚大学学习，后来到柏林、巴黎等地游学.1862年受聘在克里斯蒂安尼亚大学任教.他的主要贡献在椭圆函数论、复数乘法理论和置换群论等方面.他推广了柯西(Cauchy，A.-L.)关于群论的一个命题，得到了所谓叙洛夫定理.他还整理了阿贝尔(Abel，N.H.)的遗作，同李(Lie，M.S.)合作编纂了阿贝尔著作的新版本(1873—1881)，后来又出版了阿贝尔的通信集.

克莱布什(Clebsch，Rudolf Friedrich Alfred，1833—1872) 德国数学家.生于东普鲁士柯尼斯堡(Königsberg)，卒于格丁根.1850年入柯尼斯堡大学.1854年到柏林学习，1858年成为该校讲师.1868年移居格丁根，参与创办《数学纪事》杂志.早年他从事变分法和偏微分方程研究，后来又在代数不变量和代数几何领域做了奠基性的工作.为了对曲线分类，首次引入连通、亏格等概念，并证明了一系列有关定理.克莱布什的主要著作有《阿贝尔函数论》(1866)、《弹性体理论》(1862)等.

富克斯(Fuchs，Immanuel Lazarus，1833—1902) 德国数学家.生于波森(Moschin)，卒于柏林.1858年获柏林大学博士学位.1866年晋升为教授.先后执教于格丁根、海德堡和柏林等地的大学.1882年当选为科学院院士.1892年任《纯粹与应用数学杂志》编辑.

富克斯的研究涉及函数论、高等几何、数论、微分方程等多个学科，在线性微分方程中建立了"富克斯理论"，并引入"基础系统"描述线性微分方程的几个线性无关的解.其工作是19世纪柯西(Cauchy，A.-L.)、黎曼(Riemann，(G.F.)B.)、高斯(Gauss，C.F.)有关理论的继续，并对庞加莱(Poincaré，(J.-)H.)、班勒卫(Painlevé，P.)、皮卡(Picard，(C.-)É.)等人的工作起了引导作用.

拉盖尔(Laguerre，Edmond Nicolas，1834—1886) 法国数学家.生于巴勒迪克(Bar-le-Duc)，卒于巴勒迪克.早年在巴黎综合工科学校学习.19岁时发表了论文《论焦点》.曾任炮兵军官，后来回母校任教，并在法兰西学院兼职.曾被选为巴黎科学院院士.拉盖尔的主要贡献在方程式理论、保形几何、数值积分、正交函数、超越整函数、微分方程等方面.一类二阶微分方程被称为拉盖尔方程，其解为拉盖尔多项式.

维 恩(Venn，John，1834—1923) 英国数学家.生于赫尔(Hull)，卒于剑桥.早年在剑桥大学学习.1883年获理学博士学位，同年被选为伦敦皇家学会会员.

维恩的主要贡献在概率论和逻辑学方面，他改进了棣莫佛(De Moivre，A.)的一个经典概率定义，研究了与此有关的圣彼得堡悖论.在逻辑学方面，澄清了布尔(Boole，G.)工作中的一些含混的和矛盾的概念，其最重要的贡献是系统解释并发展了逻辑学的几何表示法.他以一系列简单闭曲线把平面分成许多部分，利用这种图式阐明逻辑推理的基本原理.现在这种逻辑图仍称为维恩图.其著作《机会逻辑》(1866)、《符号逻辑》(1881)在19世纪末到20世纪初颇为流行.

纽科姆(Newcomb，Simon，1835—1909) 美国天文学家、数学家.生于加拿大华莱士(Wallace)，卒于华盛顿.1853年迁居美国，在哈佛大学当旁听生，后来主要靠自学学习天文学和数学.1861年被聘为华盛顿海洋气象台研究员.1884—1895年兼任约翰斯·霍普金斯大学的数学和天文学教授，并担任《美国数学杂志》的主编.纽科姆主要从事天体力学、天体测量学和航海天文学的研究，对完善月球理论做出了重大贡献.在数学方面，他研究了数理逻辑，提出了所谓"纽科姆悖论"，并引进了"同调"这一术语.

斯特凡(Stefan，Josef，1835—1893) 奥地利物理学家、数学家.生于克拉根福(Klagenfurt)附近的圣彼得(St. Peter)，卒于维也纳.1853年进入维也纳大学学习.1863年成为维也纳大学物理学和数学教授，后当选为维也纳科学院院士.斯特凡在气体动力学理论、磁学理论、热力学等方面都做出重要贡献，特别是研究了热的辐射，现在称黑体热辐射定律为斯特凡-波尔茨曼定律.在数学物理中有斯特凡问题和斯特凡逆问题.

马蒂厄(Mathieu，Émile Léonard，1835—1890) 法国数学家、物理学家.生于梅斯(Metz)，卒于南锡(Nacy).1859年毕业于巴黎综合工科学校.1869年

晋升为教授. 早年从事置换群理论研究,毕业后转向数学物理,扩展了一类偏微分方程的形式与解法. 1868 年引入椭圆坐标,同时给出相应的函数表达式,后人称为"马蒂厄函数". 他的主要论著均收入《数学物理文集》(7 卷,1874—1890)中.

贝尔特拉米(Beltrami,Eugenio,1835—1899) 意大利数学家. 生于意大利的克雷莫纳(Cremona),卒于罗马. 早年在帕维亚大学学习,后在波伦亚、比萨、罗马和帕维亚大学任教. 1873 年当选为山猫学院院士,1898 年担任院长.

贝尔特拉米的主要贡献在微分几何学、非欧几何学、解析函数论、数学物理等方面. 他在 1868 年发表的关于非欧几何的论文,有助于澄清当时数学界对这一新学科的模糊认识,后来他又把非欧几何的表示推广到 $n(>2)$ 维流形,并研究了某些特殊的伪球面. 他还论证了微分参数在曲面论中的作用,成为微分几何中不变式理论应用的起点. 几何学中有许多概念和公式,如微分参数、映象、曲率公式等,都是以贝尔特拉米的名字命名的.

卡索拉蒂(Casorati,Felice,1835—1890) 意大利数学家. 生于帕维亚(Pavia),卒于卡斯泰焦(Casteggio). 早年曾到法国和德国游学,后来成为帕维亚的教授.

卡索拉蒂的主要贡献在函数论、常微分方程和数学史方面. 他研究了解析函数在本性奇点附近的性态,提出并证明了下列定理:如果 a 是 $f(x)$ 的本性奇点,则对任何复数 C,存在收敛于 a 的点列 E_n $(n=1,2,\cdots)$ 使 $f(E_n)\to C(n\to\infty)$. 这一定理通常称为卡索拉蒂-外尔斯特拉斯定理. 为判定线性差分方程组的基本解组,他引进了所谓卡索拉蒂行列式,其元素是某差分方程组的解,并由此给出一个判定定理. 著作有《复变函数论》(1868)等. 此外,他在数学史方面也做了不少工作.

外恩加滕(Weingarten,Leonhard Gottfried Johannes Julis,1836—1910) 德国数学家. 生于柏林,卒于布赖斯高地区弗赖堡(Freib im Breisgau). 早年在柏林贸易学校、柏林大学、柏林工学院学习,1864 年在哈雷大学获博士学位. 1871 年在柏林建筑工程学院任教授.

外恩加滕的主要贡献在微分几何方面. 他因曲面的曲率的研究成果于 1857 年获柏林大学的奖励. 他还研究了 19 世纪微分几何最主要的课题——求已知曲面的等距面问题. 在研究曲面的无穷小变形的基础上,他建立了一个已知曲面的所有等距面,并发表了很有价值的学术论文. 为此,1894 年获巴黎科学院奖. 在微分几何中,有以他的名字命名的曲面、定理、函数、偏差公式等.

巴赫曼(Bachmann,Paul Gustav Heinrich,1837—1920) 德国数学家. 生于柏林,卒于魏玛. 早年在柏林大学和格丁根大学学习,1862 年获博士学位. 1864 年以后,在布雷斯劳大学、明斯特大学任教. 巴赫曼的主要贡献在代数学和数论方面,他推导出三元二次型自同构的算术公式,在《无理数的性质》(1892)一文中采用"区间套原理",用来建立无理数理论,为后世所沿用. 他对数论领域中的大量成果及各种证明、研究方法进行了系统的总结和评价,并撰写了《数论》(1892—1923)一书.

科尔金(Коркин,Александр Николаевич,1837—1908) 俄国数学家. 生于税斯科耶(Шунское),1858 年毕业于圣彼得堡大学. 在学习期间,他的《论极大值和极小值》专题论文,获金质奖章. 1868 年晋升为教授.

科尔金和切比雪夫(Чебыщев,П. Л.)一起,为建立圣彼得堡数学学派做出了重要贡献. 他的数学研究主要在偏微分方程和数论方面. 他建立了一种积分变换,这种变换比通常从一个方程组到另一个方程组的变换优越得多. 反复进行这种变换,可得原方程组的一般积分. 他对数论的研究曾引起许多数学家的注意. 他还研究了二项式方程的解法,并得到了很好的结果. 他和佐洛塔廖夫(Золотарёв,Е. И.)共同研究了含有四个或五个变量的正定二次型的最小值问题,他们的结果在数学界产生很大影响. 他在圣彼得堡大学任教 50 年,在海洋学院兼课 30 年左右,同时编写了一系列专著和教材,培养了大量的科学人才. 有许多学生后来都成为著名的科学家,其中最杰出的是克雷洛夫(Крылов,А. Н.). 为了表彰科尔金的功绩,俄国政府于 1886 年授予他功勋教授的称号.

哥尔丹(Gordan,Paul Albert,1837—1912) 德国数学家. 生于布雷斯劳,卒于埃尔朗根. 1855 年到柏林大学学习. 1862 年,以有点回转扁球体短程线问题获布雷斯劳大学奖金. 1874 年,任埃尔朗根大学数学教授. 1863 年起,与克莱布什(Clebsch,R. F. A.)进行长期合作,共同著有《阿贝尔函数论》(1866)等专著,在其中给出了代数曲线亏格和阿贝尔定理的新证明. 1868 年,他又用构造性方法给出任意给定次数的二元型的基或有限完备系的存在性证明,得到"克莱布什-哥尔丹定理". 1874 年,他又开始了代数方程的研究,推进了不变量理论和方程理论的发展. 他的不变量理论由学生爱米诺特(Emmy Noether)继承并发展成为现代代数领域的重要分支. 此外,他还化简了重要常数 e 和 π 的超越性证明.

布加耶夫(Бугаев,Николай Васильевич,1837—1903) 俄国数学家. 生于格鲁吉亚的杜舍季镇,1863 年毕业于莫斯科大学. 1897 年被选为圣彼得堡

科学院通讯院士.布加耶夫主要研究分析数学和数论.他建立了级数收敛性的一般理论.根据这种理论,可以把当时已知的所有判断级数收敛性的法则统一起来.布加耶夫还是莫斯科数学学会及其刊物《数学汇编》的创始人之一.

莱克西斯(Lexis,Wilhelm,1837—1914) 德国学者.生卒地不详.先后任斯特拉斯堡(1872)、布雷斯劳(1884)和格丁根(1887)等地各大学的教授.1893年开始在德国政府内阁供职.莱克西斯的主要贡献在数理统计方面.他引进了统计级数稳定性的定量测度,这种级数的项按照某一特殊规律变化.他建立了估计这些项的独立性的最简单的准则,称为莱克西斯准则.1877年,他引进了离差和标准差的概念.他和比安内梅(Bienaymé,I. J.)及其继承者博特克维奇(Bortkiewicz,L. J.)等人为创立数理统计这门学科做出了重要贡献.

若尔当(Jordan,Marie Ennemond Camille,1838—1921) 法国数学家.生于里昂,卒于巴黎.毕业于巴黎综合工科学校,1861年获博士学位.先后在巴黎综合工科学校和法兰西学院任教.1881年当选为法国科学院院士.1895年当选为圣彼得堡科学院通讯院士.还曾担任过《纯粹与应用数学杂志》编辑.

若尔当的主要贡献在代数学、分析学、函数论、拓扑学、集合论等方面.他研究了多面体的多面性,引入了n维空间中任意集合外测度的概念;建立了有界变差函数的概念,并证明这种函数可表为两个增函数的差.在代数学方面,他系统地发展了有限群论及伽罗瓦理论,证明了著名的"若尔当-赫尔德定理"的前半部分.他最早开展无限群的研究,论证了所谓有限群定理.利用相似矩阵和特征方程的概念,他证明了矩阵可化为标准型,现称为"若尔当标准型".若尔当的名著《置换与代数方程》于1870年出版,它长期被认为是群论中的权威著作.若尔当的代表作《分析教程》是19世纪的很有影响的教科书.在这本书中给出了曲线的"若尔当定义",并证明了拓扑学中的"若尔当定理".

希　尔(Hill,George William,1838—1914) 美国数学家、天文学家.生于纽约,卒于纽约.他曾在纽约的拉特格斯(Rutgers)学院学习,后入坎布里奇大学学习数学.曾在坎布里奇、华盛顿等地长期参加制定星历表和航海天文年鉴的工作.1901年受聘到哥伦比亚大学讲授天体力学.他是美国全国科学院院士、巴黎科学院和比利时科学院院士、伦敦皇家学会会员.1894—1896年任美国数学会主席.

希尔根据欧拉(Euler,L.)的思想,用新方法对三体问题和月球的运动的研究卓有成效.在这些工作中,他创立了周期系数的线性齐次微分方程的数学理论,讨论了无穷齐次线性方程组及相关的无穷行列式问题.他对木星和土星理论的研究,是19世纪数理天文学的重要成果之一.他的主要著作有《月球理论研究》、《作为太阳和月球平均运动函数的月球近地点的运动》等.

吉布斯(Gibbs,Josiah Willard,1839—1903) 美国物理学家、数学家.生于纽黑文(New Haven).1858年毕业于耶鲁大学.1863年获博士学位,先后在巴黎、柏林和海德堡等地留学,并从事科学研究.1871年成为耶鲁大学数学和物理学教授.

吉布斯是热力学和统计力学的创始人之一.他的数学研究推动了数学方法在不同物理领域内的应用.主要数学贡献在向量分析方面,他的工作对向量分析发展成为一个独立的数学分支具有重大意义.他拒绝接受哈密顿(Hamilton,W. R.)的四元数理论,认为格拉斯曼(Grassmann,H. G.)的代数方法更适用.他撰写的小册子《向量分析基础》(1881,1884)最初是为私人交流而印刷的,但却产生了很大影响,后来被编入威尔逊(Wilson,E. B.)的著作《向量分析》(1901)中.此外,吉布斯对数学物理,特别是对偏微分方程解的理论和三角级数论也做出了贡献.1902年,他的著作《统计力学基本原理》出版.

汉克尔(Hankel,Hermann,1839—1873) 德国数学家、数学史家.生于哈雷(Halle),卒于蒂宾根(Tübingen)附近的施兰贝格.早年在莱比锡大学、格丁根大学和柏林大学学习,受教于默比乌斯(Möbius,A. F.)、黎曼(Riemann,(G. F.)B.)、外尔斯特拉斯(Weierstrass,K. (T. W.))等数学家.1862年获博士学位.1867年受聘为埃尔朗根大学教授,1869年以后在蒂宾根大学任教.

汉克尔是著名的数学史家,精通希腊文,曾阅读过许多希腊数学原著.其著作《近几世纪数学的发展》(1869)、《古代与中世纪数学史》(1875)等享有盛誉,受到许多数学史家的重视.他对数学的一些学科也有深入的研究,在复数和超复数理论、函数论等方面都取得过突出的成果.例如,他提出了构造以有理点为奇点的函数的方法,举出了在无穷多个点上不可微的连续函数的例子,给出了第三类贝塞尔函数(又称汉克尔函数)的意义等.

塞乌滕(Zeuthen,Hieronymus Georg,1839—1920) 丹麦数学家、数学史家.生于西日德兰半岛的格里姆斯特鲁普(Grimstrup),卒于哥本哈根.1857—1862年,他在哥本哈根学习纯粹数学和应用数学,取得了硕士学位.后赴巴黎留学,研究几何中的枚举方法,并对数学史发生了兴趣.1865年获博士学位,1883年成为教授.

塞乌滕的主要贡献在枚举几何学、代数曲线和代数曲面理论等方面.他还是研究文艺复兴时期和

希腊数学史的专家，著有古希腊数学、文艺复兴时期的数学、解析几何史和无穷小分析史等方面的专著，并广为流传，其中《古代和中世纪数学史》和《16 和 17 世纪数学史》曾被译为多种文字.

佩特森(Petersen，Julius，1839—1910) 丹麦数学家.生于索勒(Sore)，卒于哥本哈根.先后在哥本哈根工学院、哥本哈根大学学习.1871 年获博士学位，同年任教于哥本哈根工学院，1887 年任哥本哈根大学教授.佩特森的著作涉及到代数、数论、分析、几何及力学等领域，其中《几何作图题解法及其原理》有多种文字的译本，颇有影响.他的重要贡献是关于正则图理论方面.

罗 赫(Roch，Gustav，1839—1866) 德国数学家.生于德累斯顿(Dresden)，经历不详.他曾在哈雷(Halle)工作.罗赫主要研究代数几何.他研究了亏格为 p 的黎曼面上的函数，在论文《代数函数中的任意常数》(1864)中，证明了由黎曼(Riemann，(G.F.)B.)得到的一个重要结果，并加以引申，又得到一系列的定理，现在统称为黎曼-罗赫定理.这个定理在代数几何学中有广泛的应用.

施图姆(Sturm，Friedrich Otto Rudolf，1841—1919) 德国数学家.生于德国布雷斯劳(Breslau)，卒于布雷斯劳.1859 年入布雷斯劳大学学习，1863 年获博士学位.他先后在布龙贝格(Bromberg)、达姆施塔特工学院、明斯特大学和布雷斯劳大学工作.施图姆的主要贡献在综合几何学方面.他继承了施泰纳(Steiner，J.)的工作，以研究三次曲面和五次曲面理论而著称.著作有《仿射几何学理论》(1908)等.

科尔尼(Cornu，Marie Alfred，1841—1902) 法国物理学家、数学家.生于奥尔良(Orléans)，卒于罗莫朗坦(Romorantin).早年他在巴黎综合工科学校和矿业学校学习，1867 年任综合工科学校教授，1878 年当选为巴黎科学院院士.科尔尼在计算物理光学中的菲涅耳衍射的光强度时，引人用 $\rho=a^2/s$ 表示的曲线，这一曲线后来被称为科尔尼螺线或回旋曲线.

吕 卡(Lucas，Francois - Édouard - Anatole，1842—1891) 法国数学家.生于巴黎，卒于巴黎.毕业于亚眠师范学院，后在中学教书，业余致力于数论研究.吕卡在素数理论和因子分解方面做出了成绩，1876 年用新方法证明了 $2^{127}-1$ 为一素数.他还撰写了四大卷《数学游戏》(1891—1894)，该书以问题新颖奇妙而盛行一时.

韦 伯(Weber，Heinrich，1842—1913) 德国数学家.生于海德堡，卒于斯特拉斯堡.早年他在海德堡大学学习.1863 年获博士学位，1869 年成为教授.他先后在海德堡大学、格丁根大学等多所学校任教，还被选为德国科学院和其他国家多家科学院院士.他曾参与创建德国数学会，并任《数学纪事》的编辑.韦伯主要从事代数学、复变函数论、整数论及特殊函数等方面的研究.1868 年，他在曲线坐标上引入了一些函数，被称为"韦伯函数".在抽象代数方面，他认为群、体是代数的两个主要概念，而体又是群的延拓.他的著作有《代数教程》(2 卷，1895—1896)、《数学物理中的偏微分方程》(2 卷，1900—1901)等.

达 布(Darboux，Jean - Gaston，1842—1917) 法国数学家.生于尼姆(Nimes)，卒于巴黎.1861 年进入巴黎高等师范学校学习，后在尼姆中学、巴黎高等师范学校、巴黎大学等校任教，1880 年成为教授.1884 年当选为法国科学院院士.还曾被选为圣彼得堡科学院、伦敦皇家学会等多个学术团体的成员.

达布的主要贡献在微分几何、微分方程和积分学等方面.他在微分几何方面的专著《曲面通论教程》、《正交系与曲线坐标》中，系统地介绍了近百年来曲线和曲面微分几何学方面的成就.他总结推广了拉普拉斯(Laplace，P.-S.)和蒙日(Monge，G.)在微分方程积分法方面的工作，建立了"达布方程"，为微分方程奇解理论的系统化和发展做出了贡献，并给出了这一理论的现代形式.在定积分理论方面，他引入了以他名字命名的"达布和"，以及上积分、下积分等概念，还得到了"可测函数可积的充要条件是其间断点所组成的集合测度为零"的结果.达布在解析函数论、特殊函数等方面也取得了一些重要结果.1870 年，他还创办了《数学科学通报》.

李(Lie，Marius Sophus，1842—1899) 挪威数学家.生于努尔菲尤尔埃德(Nordfjordeide)，卒于克里斯蒂安尼亚(Christiania).1865 年，他毕业于克里斯蒂安尼亚大学.1869 年出国留学，在柏林和巴黎等地接触了当时数学名流.回国后于 1872 年获博士学位.1892 年当选为法国科学院院士.还被选为伦敦皇家学会等学术团体的成员.

李的最大功绩是创立了连续变换群，即李群理论.1874 年，他引入变换群的一般理论，引入无穷小群的概念，完成了从有限连续群到无限连续变换群的过渡，证明了一系列基本定理，并把他的理论应用于几何基础和微分方程的研究.1888—1893 年，他和他的助手恩格尔(Engel，F.)出版了三卷本的《连续群理论》.但是，李的研究成果生前未能引起数学界的重视，只有克莱因(Klein，(C.)F.)预言了它的作用.20 世纪初，李的工作由嘉当(Cartan，H.)和外尔(Weyl，(C.H.)H.)所发展.现今，李群的拓扑特征也被逐步认识，其应用十分广泛，已成为理论物理必不可少的工具.为研究李群而由李本人所创立的"李代数"已成为近世代数学的重要分支.李在微分几何、分析基础和函数论方面也有所建树.李曾获得

国际罗巴切夫斯基奖.

施瓦兹(Schwarz,Hermann Amandus 1843—1921) 德国数学家.生于赫姆斯多夫(Hermsdorf),卒于柏林.他是外尔斯特拉斯(Weierstrass,K(T.W.))的学生.曾担任格丁根大学、柏林大学等大学的教授.

施瓦茨的研究成果是多方面的.1870年,他与德国数学家诺伊曼(Neumann,C.G.)为黎曼映射定理提供了更完美的证明,并与瑞士籍数学家克里斯托费尔(Christoffel,E.B.)将该定理应用于解偏微分方程.1892年,在外尔斯特拉斯的指导下,引用一种称为交错法的方法,证明了狄利克雷问题解的存在性.对于微分方程 $\Delta u+k^2u=0$ 的固有值之存在问题,得到了很好的结果.在极小曲面理论方面,他曾与黎曼(Riemann,(G.F.)B.)共同获得了微分方程

$$\frac{d^2\eta}{dx^2}+p_1\frac{d\eta}{dx}+p_2\eta=0$$

的解的线性变换群,即该方程的单值群.他还为三维空间的等周界问题提供了严密的证明,并解决了"在给定的锐角三角形 ABC 的三边上各取一点 P、Q、R,若 P、Q、R 分别是三高的垂足,则$\triangle PQR$ 的周长最小"的几何问题.此外,他在几何方面常用内接多边形面积逼近曲面面积,并举过一个著名的例子,使得柱面面积为无限大.

帕 施(Pasch,Moritz,1843—1930) 德国数学家.生于布雷斯劳,卒于巴特·洪堡(Bad Homburg).早年在布雷斯劳大学和柏林大学学习.在吉森大学任教,1875年任教授.帕施长期从事数学研究.他是位专门研究几何基础理论的数学家.对于无定义名词及概念(通常指几何公理)有独到的见解:认为无定义名词的选定以足够定义其他名词为限;对于公设系统,则认为以足为限;公设的选定,有赖于经验;但一旦公设选定之后,任何推理过程,均不能再依赖经验,只能依据所选定的公设.他的代表作为《新几何学讲义》(1882).

帕施为射影几何建立了公设体系,也是第一个为线上的点提供顺序公设的人.他为普通的点、线及平面附加了无穷远点,在几何基础上建立坐标系,为射影变换提供代数式,奠定了射影几何学的基础.他的工作揭开了20世纪数学公理化的序幕.

玻耳兹曼(Boltzmann,Ludwig Eduard,1844—1906) 奥地利物理学家、数学家.生于维也纳.1866年毕业于维也纳大学,先后在格拉茨(Graz)、维也纳、慕尼黑、莱比锡工作.曾任维也纳科学院和欧洲多国科学院院士.

玻耳兹曼是统计物理学和动力学的创始人之一.其主要数学贡献在于把偏微分方程理论、数理统计和数学物理方法应用于物理学研究之中.他和吉布斯(Gibbs,J.W.)提出了遍历性假设,这种假设后来成为经典统计力学的基础.他们还建立了理想气体的最简单的力学模型和稀薄气体速度分布函数所满足的分布律,并导出速度分布函数所满足的偏微分方程,称为玻耳兹曼方程等.著作有《力学原理教程》(1897—1904)和《动力学气体理论教程》(1896—1898)等.

诺 特(Noether,Max,1844—1921) 德国数学家.生于曼海姆(Mannheim),卒于埃尔朗根(Erlangen).1865年,他进入海德堡大学学习,1868年获博士学位.1874年在该校任副教授,1888年以后任埃尔朗根大学教授.他的4个孩子有3个成为科学家,著名数学家诺特(Noether,E.)就是他的女儿.

诺特是19世纪代数几何学方面的代表人物之一.他深入研究了属于双有理变换的代数簇的不变性质,建立了关于二次变换的重要定理.1873年,他证明了其最著名的定理:给定两条代数曲线$\varphi(x,y)=0$,$\psi(x,y)=0$,它们在有限个孤立点上相交,当且仅当某些条件被满足时,那么通过所有这些交点的代数曲线的方程可表达为 $A\varphi+B\psi=0$ 的形式(其中 A、B 是关于 x 和 y 的多项式).他的另一个定理给出了过曲面 $\varphi(x,y,z)=0$ 和 $\psi(x,y,z)=0$ 的交线的曲面方程具有形式 $A\varphi+B\psi=0$ 的条件.诺特的这些结果,后来被克尼格(Koenig,J.)、拉斯克尔(Lasker,Emanuel)等人所推广.

阿尔方(Halphen,Georgs-Henri,1844—1889) 法国数学家.生于鲁昂(Rouen),卒于凡尔赛.1862年,他进入巴黎综合工科学校学习,普法战争期间曾到军队服役.1884年回到母校工作.1878年获博士学位,1886年当选为法国科学院院士.曾获得多种奖.阿尔方的主要贡献在代数几何、微分不变量理论、椭圆函数论和线性微分方程论等方面.1873年,他解决了沙勒猜想,并深入探讨了奇点理论以及其他有关代数平面曲线的问题.他把奇点归类,给出了代数平面曲线的亏格的一般公式.他在微分不变量方面的研究成为李(Lie,M.S.)的先导.此外,他在椭圆函数论方面也有很多论述.

汪格林(Wangerin,Albert,1844—1933) 德国数学家.生于波美拉尼亚(Pomerania)湾的格赖芬柏格(Greiffenberg),卒于哈雷(Halle).从1862年起先后在哈雷大学和柯尼斯堡大学学习.1866年获博士学位.1876年在柏林大学任特别教授.1882年任哈雷大学教授.

汪格林对势理论和球面函数有深入的研究,计算了某些卵形面和旋转曲面的势,撰写了两卷集的关于势理论和球面函数的著作.他在微分几何和数学物理方面也做过一些工作.他还对物理学史和数

学史有兴趣,曾研究过高斯(Gauss,C. F.)、欧拉(Euler,L.)、兰伯特(Lambert,J. H.)和拉格朗日(Lagrange,J.-L.)的生平和贡献.汪格林热情参加各种学术活动和社会活动,不仅在大学任教,编写教科书,而且还为百科全书和许多杂志撰稿,担任历史文献的编辑和学术团体的负责人.在柏林,他的讲演面向广大听众.在哈雷,他连续培训高级中学教员.1869—1924年,一直担任着《数学进展》的编辑.

康托尔(Cantor,Georg Ferdinand Ludwig Philipp,1845—1918) 德国数学家.生于俄国圣彼得堡,为丹麦犹太商之子,后移居德国.他先后在苏黎世、法兰克福、柏林等地求学,1867年毕业于柏林大学,并获得该校的哲学博士.1869年在哈雷(Halle)大学任讲师,1872—1913年任哈雷大学教授.1884年在内、外压力下患精神分裂症,1918年病逝于哈雷精神病研究所.

康托尔是集合论的创始人.1874年开始发表有关集合论的文章,提出了无限集的势、序型等概念,并建立了超限数理论.但他的"无限"理论曾遭到柏林大学教授克罗内克(Kronecker,L.)等一些权威人士的指责和攻击,给他的精神上带来巨大压力,他死后才逐渐被世界所公认,使他成为20世纪最有影响的数学家之一.

康托尔的名著《关于超限数理论的基础》于1895—1897年间出版,书中提到无限集、无穷基数、无穷序列、康托尔集论等.他还用基本数列建立实数理论,他的方法与戴德金(Dedekind,(J. W.)R.)的"分割"思想截然不同.康托尔的工作创造了数学研究的一个全新领域,20世纪以来,集合论已经渗入数学的每一个分支,成为分析学、拓扑学、测度论及数理科学中必不可少的工具.

克利福德(Clifford,William Kingdon,1845—1879) 英国数学家.生于埃克塞特(Exeter),卒于马德拉(Madeira).1863年就学于剑桥大学三一学院,1867年获史密斯数学奖,次年任教授.1874年成为伦敦皇家学会会员.克利福德将黎曼(Riemann,(G. F.)B.)等人的非欧几何引入英国,并在有关四次方程、轨迹分类、黎曼曲面的拓扑结构等方面有独到见解,引入"克利福德曲面"研究曲面的几何结构,引入新的超复数——八元数,推广了四元数理论为一般的"克利福德代数".

布罗卡尔(Brocard,Pierre René Jean-Baptiste Henri,1845—1922) 法国数学家、气象学家.出生地不详,卒于巴勒迪克(Bar-le-Duc).早年他就学于巴黎综合工科学校.曾还一度从军.他是新成立的法兰西数学会会员、气象学会会员等.后来他被派到非洲任职,参加创办阿尔及尔气象研究所的工作.布罗卡尔主要研究三角形的几何学.1881年,他向法国科学进步协会提交了《三角平面一个新圆的研究》的论文,宣布发现布罗卡尔圆,并由此产生了相应的布罗卡尔点和布罗卡尔三角形等概念.

达尔文(Darwin,George Howard,1845—1912) 英国数学家、天文学家.进化论创始人达尔文(Darwin,C.)的儿子.生于肯特,卒于剑桥.毕业于剑桥大学三一学院.1868年获史密斯数学奖.1879年当选为伦敦皇家学会会员.1883年任教授.达尔文的主要贡献是对太阳、地球、月球系统三体问题的研究,应用数学原理对宇宙进行动力分析和描述,并开创了所谓"宇宙起源的数学学说",解释了许多星系现象.他的有关报告在第五届国际数学家大会(1912)上宣读时,引起与会者的极大兴趣.

里博库尔(Ribaucour,Albert,1845—1893) 法国数学家.生于法国里尔,卒于阿尔及利亚的菲利普维尔(Philippville).早年他在巴黎综合工科学校学习,之后进桥梁工程学院深造.毕业后任工程师,在各地从事工程建筑.还被派往阿尔及利亚修建铁路和港口.他负责的法国迪朗斯运河工程曾获巴黎博览会金质奖章.里博库尔业余时间研究数学,主要贡献在微分几何方面.他研究了极小曲面问题、圆汇和球汇的有关性质、球面的包络、三重正交系、四次圆纹曲面和常曲率曲面等课题,并得到一些有价值的结果.

米塔-列夫勒(Mittag-Leffler,Magnus Gustaf,1846—1927) 瑞典数学家、教育家.生于斯德哥尔摩,卒于斯德哥尔摩.长期在斯德哥尔摩大学任职.他是外尔斯特拉斯(Weierstrass,K.(T. W.))的学生,曾兼任芬兰首都赫尔辛基大学的数学教授.

米塔-列夫勒在数学分析方面和复变函数方面有许多经典性的工作.他思想解放,又善于组织,重视师资和图书资料设备建设,可称为一位教育家和科学攻关的优秀组织者.1884年,他破格聘请俄国著名女数学家柯瓦列夫斯卡娅(Ковалевская,С. В.)为斯德哥尔摩大学的讲师,后又晋升为教授——世界上第一个女数学教授,显示出他过人的胆略和勇气.经他苦心经营,使瑞典当时拥有世界上最好的数学研究资料和图书馆.1882年,他又创刊出版了一流的数学杂志《数学学报》,培养和聘请了一批著名学者.在20世纪初,斯德哥尔摩一跃成为世界上数学人才荟萃之地,使瑞典成为当时世界数学研究中心之一.

米塔-列夫勒一生著述达119种,主要涉及函数论,其中有著名的米塔-列夫勒定理和米塔-列夫勒矩阵.

茹科夫斯基(Жуковский,Николай Егорович,1847—1921) 俄国力学家、数学家.生于奥列霍夫(Орехово),1868年毕业于莫斯科大学.1870—1872

年任教于莫斯科第二女子中学.1872以后,一直在莫斯科技术学校(后改为莫斯科高等技术学校)工作.1882年通过博士论文答辩.1886年兼任莫斯科大学教授.1887年开始任莫斯科高等技术学校教授.1894年被选为圣彼得堡科学院通讯院士.1905年被选为莫斯科数学会主席.

茹科夫斯基是现代流体力学和空气动力学的创始人,列宁(Lenin,V. I.)称他为"俄罗斯航空之父".在空气动力学、航空学、水力学、水文地理学、力学、数学和天文学等学科,他都做出了杰出的贡献.在数学方面,他研究了偏微分方程理论及其近似积分法,首先把复变函数广泛应用于流体力学和空气动力学中.复变函数论中有著名的茹科夫斯基函数和定理.为表彰他的卓越功绩,苏联科学院设立了两种茹科夫斯基奖;1956年莫斯科市内还修建了茹科夫斯基科学博物馆.

阿尔泽拉(Arzelà,Cesare,1847—1912) 意大利数学家.生于热那亚(Genova),经历不详.他的大部分时间在波伦亚工作.阿尔泽拉的主要贡献在实变函数论方面.他引进了广义一致收敛性的概念,给出在某区间上连续函数序列一致收敛的充分必要条件.他和阿斯科利(Ascoli,G.,1843—1896)共同研究了连续函数族的紧致性条件,建立了"等度连续且一致有界的函数族的任意序列中必可选出紧一致收敛的子序列"的定理,称为阿斯科利定理.这一定理在现代数学方法中占有重要位置.此外,他还研究了无穷级数的逐项积分问题,证明了积分号下取极限的定理.

佐洛塔廖夫(Золотарёв,Егор Иванович,1847—1878) 俄国数学家.生于圣彼得堡,经历不详.他1867年毕业于圣彼得堡大学.1876年任教授.佐洛塔廖夫和科尔金(Коркин,А. Н.)共同研究了正定二次型对于变量整体的最小值问题,特别是当变量的个数$n=4$或5时,他们得到了很好的结果,彻底地解决了这一极值问题.在1874年的博士论文中,他阐明了代数整数的可除性理论.他还证明了二次互反定律,他的局部方法现在得到了很好的普及和发展.还解决了切比雪夫(Чебышев,П. Л.)提出的下列问题:是否存在参数A,使积分

$$\int \frac{(x-A)\mathrm{d}x}{\sqrt{R(x)}}$$

呈现对数形式?其中$R(x)$是具实系数的四次多项式.他借助于函数的最佳逼近理论给出了这个问题在某些特殊情形下的解.

祖特尔(Suter,Heinrich,1848—1922) 瑞士数学史家.生于苏黎世州(Zurich Canton),卒于多尔纳赫(Dornach).1868年入苏黎世州立学校学习,掌握了拉丁文和希腊文,其后又就学于苏黎世大学、柏林大学深造.1871年获博士学位.曾在阿尔高州立学校、苏黎世州立学校任教.祖特尔对阿拉伯数学颇有研究,撰写过大量这方面的论著,主要刊载在《数学文献》上.他还研究了数学史和文明史的关系,主张依据思想概念史来探讨数学史.他的主要著作有《数学家目录》、《阿拉伯数学家、天文学家及其著作》等.

唐内里(Tannery,Jules,1848—1910) 法国数学家.生于法国芒特(Mantes - sur - Seine),卒于巴黎.早年在巴黎高等师范学校学习.1875年成为巴黎大学的物理教授.从1884年至其逝世,任巴黎高等师范学校科学研究的助理指导.同时还兼任过巴黎理学院的数学教授.1907年当选为巴黎科学院院士.

唐内里的主要贡献在复变函数论、微分方程论、代数学和微分几何等方面.此外,他还出版了伽罗瓦(Galois,E.)的一些未发表的手稿和刘维尔(Liouville,J.)与狄利克雷(Dirichlet,P. G. L.)的通信集.主要著作有《单变量函数论导引》(1886)和《数学概念》(1903)等.

舒伯特(Schubert,Hermann Cäsar Hannibal,1848—1911) 德国数学家.生于波茨坦,卒于汉堡.1870年获柏林大学博士学位,1887年任教授.1879年出版《枚举几何计算》,舒伯特提出了所谓"数的守恒原理",但未加以严格论证.1900年,希尔伯特(Hilbert,D.)在巴黎国际数学家大会上提出23个数学问题,其中第15题就是"舒伯特枚举演算的严格基础",该问题在1912年由意大利数学家塞维里(Severi,F.)给予纯代数处理,但严格基础至今仍未建立.舒伯特还于1874年因解决三次空间曲线特征理论的扩充,赢得丹麦皇家学院金质奖章.

内 托(Netto,Eugen,1848—1919) 德国数学家.生于哈雷(Halle),卒于吉森(Giessen).1870年毕业于柏林大学.先后在斯特拉斯堡(Strasbaurg)大学、柏林大学、吉森大学工作,1888年,成为吉森大学教授.内托对代数学、函数论、几何学都有贡献.对抽象群论的贡献尤为突出,代表作是《置换理论及其对代数的应用》.书中统一了置换群论和数论中隐含着的群论思想,研究了同态和同构理论.这部书曾被译成意大利文和英文,有效地扩大了抽象群论在数学中的影响.

布龙斯(Bruns,Ernst Heinrich,1848—1919) 德国数学家、天文学家、大地测量学家.生于柏林,毕业于柏林大学.曾在俄国普尔科沃的天文台工作.1882年,他成为莱比锡大学教授,同年任莱比锡天文台台长.1906年还被当选为柏林科学院院士.布龙斯主要研究地球轮廓理论和天体力学中的多体问题.在三体问题中,有著名的庞加莱-布龙斯定理.他

对许多天文观测结果进行了数学研究，并编著成书．在数学方面，他还对概率论和统计问题的内插法理论颇有研究．

格莱舍(Glaisher，James Whitbread Lee，1848—1928)　英国数学家、天文学家．生于肯特郡，卒于剑桥．1867 年就学于剑桥大学三一学院，毕业后留校任教．1871 年任《数学信使》编辑，1878 年兼任《数学季刊》编辑．格莱舍主要研究特殊函数，特别是椭圆模函数理论、数学史等，他先后发表论文、笔记近 400 篇．1884 年任伦敦数学会主席，1901 年任皇家天文学会主席．此外，他还对纽约数学会的组建(1888)有过影响．

弗雷格(Frege，Fridrich Ludwig Gottlob，1848—1925)　德国数学家．生于维斯马(Wismar)，卒于巴特克莱嫩(Bad Kleinen)．1871 年赴格丁根进修．1873 年获博士学位．1879 年成为耶拿大学教授．

弗雷格是逻辑代数的奠基人之一．1879 年，他在《概念语言》中扩展了变量和命题函数的使用范围，给出了逻辑的公理基础，并建立起一套逻辑符号系统．1884 年，他又在《算术原理》中将算术概念表示为逻辑概念，再用逻辑方法推导出函数的定义和规律，后来又在两卷本的《算术的基本法则》(1893，1903)中对逻辑系统进行了补充，使符号逻辑(数理逻辑)初具规模．他的学说由罗素(Russell，B. A. W.)系统地阐述后，才引起了重视，成为了现代数学的重要理论之一．

格根鲍尔(Gegenbauer，Leopold Bernhard，1849—1903)　奥地利数学家．生卒地不详．早年在维也纳学习历史与语言学，以后学习了数学与物理．1869 年取得教师资格，任中学教师多年．1875 年受聘为罗马尼亚切尔诺维茨大学副教授，1879 年获该校荣誉博士学位．1881 年成为因斯布鲁克大学教授．1893 年任维也纳大学教授、维也纳科学院院士．格根鲍尔的主要贡献在函数论和数论方面，他研究了一类特殊函数(称为格根鲍尔函数)．他的工作发展了正交多项式理论中的特种球多项式，这种多项式被称为格根鲍尔多项式．

索　宁(Сонин，Николай Яковлевич，1849—1915)　俄国数学家．生于图拉(Тула)，1869 年毕业于莫斯科大学，1871 年获硕士学位，以后到法国留学，听过许多著名数学家的讲学．1874 年获博士学位，1877 年被聘为华沙大学教授．1893 年当选为圣彼得堡科学院院士，后来在圣彼得堡大学工作．索宁早年从事级数论的研究，发表过有关论著．他的博士论文是对二阶偏微分方程的积分法的研究．他最重要的贡献在特殊函数论方面，研究了 Γ 函数、柱形函数、伯努利多项式和正交多项式等．其专著《定积分的某些不等式》，提供了研究正交函数系的方法．

克莱因(Klein，Christian Felix，1849—1925)　德国数学家．生于杜塞尔多夫(Düsseldorf)，早年在波恩大学学习，1868 年获博士学位．他曾到巴黎、格丁根、柏林等地深造．1872 年成为埃尔朗根大学数学教授，1886 年应聘为格丁根大学教授，直至去世．他还是伦敦皇家学会、法国科学院和普鲁士科学院成员．

克莱因在数学上的贡献是多方面的，但主要在几何方面．他在埃尔朗根大学的就职演说中，提出了著名的“埃尔朗根纲领”(Erlanget Programm)，即从变换群的观点出发，给出当时所知几何学各分支的分类表(鸟瞰图)，并指出欧氏几何与非欧几何都属于映射几何学．同时把群的概念应用在自守函数、椭圆模函数、线性微分方程、阿贝尔函数等方面．他还首先提倡改革中等教育的数学内容，对近代数学教学有很大影响．在数学史方面，他著有《十九世纪数学的发展》，成为当时最重要的著作之一．此外，克莱因在工程力学上也有贡献．

伍德沃德(Woodward，Robert Simpson，1849—1924)　美国数学家、地球物理学家．生于密歇根州罗切斯特(Rochester)，卒于华盛顿．1872 年毕业于密歇根大学．之后在陆军部队服务 10 年，1884—1890 年在美国地质局工作．1893 年到哥伦比亚大学任教．1904—1920 年任华盛顿卡内基学院院长．伍德沃德把地球作为研究对象，认为“地球是最大的实验室，是人类可利用的最大博物馆”．他把数学技巧运用于这些研究，通过改进计算公式得到高度精确的实验数据．他还研究了均匀物体的冷却和矩形物体的热传导问题，并得到了重要结果．他还曾批评过凯尔文(Kelvin，W. T.)关于地球存在时间的论点．

弗罗贝尼乌斯(Frobenius，Ferdinand Georg，1849—1917)　德国数学家．生于柏林，卒于夏洛滕堡(Charlottenburg)．1867 年就学于格丁根，1870 年获博士学位．1874 年任柏林大学教授．1893 年当选为普鲁士科学院院士．

弗罗贝尼乌斯主要从事群论研究，对代数方程的解的置换群、有穷与无穷变换群．涉及二次型复合的加法群有创建，着重论述了群的特征理论，引入了“秩”的概念，解决了一批长期悬而未决的问题．著作有《关于可换元素群》(1879)、《有限群》(1895)、《群特征》(1896)等．此外，他在超复数系、微分方程、解析函数论等方面也有贡献．

博贝宁(Бобынин，Виктор Викторович，1849—1919)　俄国数学史家．生于斯摩棱斯克(Смоленск)附近的一个小村镇，1872 年毕业于莫斯科大学，1882 年开始在该校讲授数学史课．博贝宁 40 多年来为数学史研究及普及数学史教育做出了积极的贡献．他的硕士论文《古埃及数学》(1882)是研究莱因

德纸草书的早期文献.他还创办了《物理数学科学的过去和现在》杂志,并在该杂志上发表了许多论文.他编著的《俄罗斯物理数学文献目录》(1885—1900,1—3卷)至今仍有珍贵的参考价值.

克尼格(Koenig, Julius, 1849—1914) 匈牙利数学家.生于杰尔(Györ),卒于布达佩斯.早年在维也纳大学和海德堡大学学习,1870年获博士学位.1874年成为布达佩斯大学数学教授,曾担任匈牙利科学院秘书,晚年在教育部任职.克尼格在数学分析、偏微分方程、代数学、集合论、数学基础等方面均有贡献.著作有《普通代数理论导引》、《逻辑、算术和集论新基础》(1914)等.

柯瓦列夫斯卡娅(Ковалевская, Софья Васильевна, 1850—1891) 俄国女数学家、物理学家、天文学家.生于莫斯科一个炮兵团长的家庭.优越的物质生活,并未影响她勤奋好学、自强不息的精神.童年时代就显示出她的数学才能,16岁时在著名教育学家斯特兰诺柳布斯基(Страннолюбоский, А. Н.)(1839—1908)的指导下学完了高等数学课程.当时俄国仍不准女性进入高等学府,为了出国求学,1868年,她与俄国古生物学家、地质学家科瓦列夫斯基(Ковалевский, В. О.)(1842—1883)举行了"假婚",第二年迁居德国,进入海得堡大学,并研究了许多数学名家的著作.1870年,她成为著名德国数学家外尔斯特拉斯(Weierstrass, K. (T. W.))的学生,并取得了显著成就.1874年获格丁根大学哲学博士.同年回国,因就业困难而从事文学写作.1881年她再次出国,定居巴黎.1883年起任瑞典斯德哥尔摩大学讲师,直到病逝,年仅41岁.1888年,她以论文《关于刚体在重力影响下围绕定点的运动》,获得著名的勃尔丁(Bordin)奖.此外,她还曾获得巴黎科学院、瑞士科学院的嘉奖.1889年,她成为圣彼得堡科学院第一位女性院士.

柯瓦列夫斯卡娅的主要论著有《偏微分方程理论》、《光在晶体中的折射问题》、《刚体绕定点旋转问题》等.此外,还有关于阿贝尔积分和无穷级数的研究成果.文学作品有《童年的回忆》、《女虚无主义者》及《为幸福而奋斗》等著名剧本.在天文学方面,她研究了土星光环的稳定性.

亥维赛(Heaviside, Oliver, 1850—1925) 英国物理学家、数学家.生于伦敦的卡姆登(Camden)镇,卒于德文郡(Devonshire)的佩恩顿.亥维赛未受过正式高等教育,早年是电报、电话工程师.1874年以后,隐居农村,专心于写作,主要课题是关于电学和磁学方面的.1891年,他当选为伦敦皇家学会会员.1892年,他将拉普拉斯变换应用于电机工程,发展成一套运算微积(或称算子演算)理论.但他并没有给出相应的数学论证,许多结果也都是未经证明而采用的.在他的著作《电磁理论》(3卷,1893—1921)中,他解释了哈密顿(Hamilton, W. R.)和格拉斯曼(Grassmann, H. G.)的向量分析,并给出向量代数的现代形式.通常认为他是三维向量分析的创始人之一.

迪克斯坦(Dickstein, Samuel, 1851—1939) 波兰数学家、教育家.生于华沙,卒于华沙.他1876年获硕士学位,其后一直在中学任教.1878—1888年自己开办起学校.1919年任波兰大学教授.他为建立波兰自己的科学组织,振兴波兰的科学教育贡献了毕生的精力.1888年以后,他先后参加创办了波兰数学物理学和多种科学及教育杂志,发起创建了几个科学学会,出版了一系列教科书.在数学方面,他主要是研究代数学和数学史.为宣传波兰,他发表过一些介绍波兰数学家的文章.他还曾当选为国际科学协会副主席.

哈纳克(Harnack, Carl Gustav, Axel, 1851—1888) 德国数学家.生平不详.早年在塔尔图(Tartu,今属爱沙尼亚)与埃尔朗根学习.1877年成为德累斯顿综合技术学校教授.

哈纳克在函数论和三角级数方面有所贡献.在他的《微积分学原理》(1881)中,首次给出了点集的(外)容量概念,称为施托尔茨-哈纳克(Stolz-Harnack)容量.这一概念后来由若尔当(Jordan, M. E. C.)、波莱尔(Borel, (F.-É.-J.-)É.)和勒贝格(Lebesgue, H. L.)发展为测度论.他和赫尔德(Hölder, O. L.),共同提出的广义积分概念对推广杜·布瓦-雷蒙(Du Bois-Reymond, P. D. G.)惟一性定理和建立积分第二中值定理具有重要意义.他还研究了调和函数,提出了著名的哈纳克定理.著作还有《对数位势和平面上单值位势函数基本理论》(1887)等.

林德曼(Lindemann, Carl Louis Ferdinand, 1852—1939) 德国数学家.生于德国的汉诺威(Hannover),卒于慕尼黑.1873年获博士学位,1877年任大学教授,1894年当选为巴伐利亚科学院通讯院士.他辗转于格丁根、慕尼黑等国内外大学教学,培养了包括希尔伯特(Hilbert, D.)在内的60多名博士生.林德曼的突出贡献是给出圆周率π的超越性的证明.著有《关于鲁多尔夫数》(1882)、《关于数π》(1882)等专著,彻底解决了困惑人们2000多年的化圆为方问题,给出其否定解.他还翻译校订过庞加莱(Poincaré, (J.-)H.)的部分著作,并对理论力学和光谱理论做出了贡献.

伯恩赛德(Burnside, William, 1852—1927) 英国数学家.生于伦敦,卒于西威克姆(West Wickham).1893年成为伦敦皇家学会会员.伯恩赛德的主要贡献在群论方面.1897年,他出版了《群论》一

书,其第二版(1911 年)是群论的经典著作之一.1900 年前后,他与其他学者共同进行了抽象群的研究,这些工作现已成为有限群论的基础.在有限单群方面,他得到"有限单群的阶数至少被 3 个互异的素数除尽"的著名结果和所谓的伯恩赛德猜想:"单群的阶数皆为偶数"等.他还研究并解决了群论中的许多重要问题.此外,他在数学物理、复变函数、几何学和概率论等方面也有贡献.

恩内斯特勒姆(Eneström,Gustav,1852—1923) 德国数学史家.生平不详.他搜集了 17 世纪以来的大量数学史资料,这些资料后来成为维莱特纳(Wieleitner,H.)著的《从笛卡儿到 19 世纪中期的数学》(1911—1923)一书的基础.他还研究了欧拉(Euler,L.)的学术生涯.在数学方面,他对代数方程理论颇有研究,他探讨了代数方程的根在复平面上的位置,建立了关于根的上限估计定理.著作有《数学文献目录》(1—3 辑)(1885—1915)等.

克韦多(Quevedo,T.,1853—?) 西班牙数学家、力学家.生平不详.他长期任西班牙科学院院长.克韦多的主要贡献在机械化计算和自动化技术方面.他制造了解代数方程的机械仪器、解微分方程的仪器和电动计算机.这种电动计算机根据运算程序能够输出数字和它们的运算符号.对于自动化技术的理论,他猜测到控制论的某些原理.例如,他猜测自动化装置可构造适应某种检验的"思维"函数,还着重指出,自动化装置只能满足于事先构造的内嵌思维.

里 奇(Ricci,Curbastro Gregorio,1853—1925) 意大利数学家.生于意大利的卢戈(Lugo),卒于博洛尼亚.1869—1872 年,他曾在罗马大学和博洛尼亚大学学习,以后又进入比萨高等师范学校深造,1875 年获博士学位.1880 年以后,他一直在帕多瓦大学任教授.还曾被选为山猫学院等科研机构成员.他的主要贡献在微积分学、黎曼簇理论、代数学和函数论等方面.他创立了绝对微分学理论,对任意黎曼簇上的线汇和绝对微分学的运用做了深入研究.他还发现了在广义相对论中有重要作用的缩短张量,被称为里奇张量.

平凯莱(Pincherle,Salvatore,1853—1936) 意大利数学家.生于奥地利的的里雅斯特(Trieste),卒于波伦亚.早年他在比萨大学求学,后到柏林深造,并得到了外尔斯特拉斯(Weierstrass,K.(T.W.))的许多指教.1880 年以后,他相继任巴勒莫大学、波伦亚大学教授,还创建了波伦亚大学的数学研究所,这对提高该校数学学术水平有很大帮助.他还创建了意大利数学协会,并任首届主席;他还担任过第三届国际数学家大会的主席.他是泛函分析理论的创始人之一.在拉普拉斯变换和无穷级数理论方面都做出了一定的贡献.

瓦西里耶夫(Васильев,Александр Васильевич,1853—1929) 俄国数学家.生于喀山(Казань).1874 年毕业于圣彼得堡大学,1879 年到欧洲留学.在柏林、巴黎,他聆听了外尔斯特拉斯(Weierstrass,K.(T.W.))、克罗内克(Kronecker,L.)、克莱因(Klein,(C.)F.)、埃尔米特(Hermite,C.)等人的讲学.回国后,1887 年任喀山大学教授.

瓦西里耶夫的科学研究涉及面很广.他研究了在分式线性变换中有限群的不变函数,探讨了代数方程组根的分离问题,引进了多维空间几何及其位势理论等.他是喀山物理数学学会的创始人之一.他出版和发表了一系列著作和论文.在 1912—1915 年间,他任《数学新思想》文集的编辑.从 19 世纪 90 年代开始,他广泛深入地宣传了罗巴切夫斯基(Лобачевский,Н.И.)的几何思想,参加了出版罗巴切夫斯基的《几何论文全集》的工作.他还发表了一系列关于罗巴切夫斯基的论文,特别是传记文章.

洛伦茨(Lorentz,Hendrik Antoon,1853—1928) 荷兰物理学家、数学家.生于阿纳姆(Arnhem),卒于哈勒姆(Haarlem).毕业于莱顿大学,1875 年获博士学位.1878 年成为莱顿大学教授.他是多国科学院的院士和多个学会的会员.1902 年,他与物理学家塞曼(Zeeman,1865—1943)共同获得了诺贝尔物理学奖.洛伦茨的主要贡献是创立了经典电子论,他的工作奠定了相对论和量子理论的基础.他提出了运动与静止参考系之间的时间、空间坐标变换形式,被称为洛伦茨变换.在数学方面,他编著了两卷集的《高等数学原理》,其中包括解析几何和微积分的基本原理,并指出了它们在自然科学中的应用.

埃曼努尔(Emmanuel,David,1854—1941) 罗马尼亚数学家.生卒地不详.1879 年在巴黎获博士学位.在布加勒斯特工作.埃曼努尔的主要贡献在分析数学方面,他以研究阿贝尔积分、伪椭圆积分和函数论而著称.他是罗马尼亚数学学派的创始人之一,还是一位杰出的教育家.为了在罗马尼亚普及数学教育,激发青年人学习数学的积极性,他做了不懈的努力.著作有《伪椭圆积分》(1904)、《函数论讲义》等.

皮尔斯(Peirce,Benjamin Osgood,1854—1914) 美国数学家、物理学家.生于贝弗利(Beverly),卒于坎布里奇.早年他在哈佛大学学习,后到德国莱比锡深造,1879 年获博士学位.1881 年开始在哈佛大学任教,1888 年任教授.他还曾参与创建了美国物理学会,并任主席;还任美国数学会副主席.皮尔斯的主要数学著作有《牛顿位势函数理论基础》(1888)和《积分简表》(1889);后者流传颇广,被译成许多国家文字的积分简表.

庞加莱(Poincaré, Jules, Henri, 1854—1912) 法国数学家、物理学家、天文学家. 生于南锡(Nancy)的一个显赫家族. 他具有非凡的心算和数学思维能力, 1875 年毕业于巴黎综合工科学校, 后来又取得了矿山学院的学位. 1879 年任卡昂(Caen)大学教授, 同年获得巴黎大学的科学博士学位. 从 1881 年起, 他一直在巴黎大学任教授. 1887 年成为法国科学院院士, 1912 年逝世于巴黎.

庞加莱是 19 世纪末、20 世纪初继高斯(Gauss, C. F.)和柯西(Cauchy, A.-L.)之后, 国际数学界公认的数学大师. 他的研究涉及了近代数学的各个分支, 但以分析学及其在理论物理学上的应用为中心. 特别著名的是他在 1880 年后, 创立的自守函数理论, 解决了解析函数的单值化问题. 而使他赢得最大声誉的是关于"三体问题"的论文, 并为此于 1889 年获得瑞典国王的奥斯卡(Oscar)奖. 他关于天文学的著作达 12 卷之多, 其中"天体力学的新方法"(即级数展开法), 为天体力学开创了新时代, 同时也为代数拓扑学的发展开辟了新途径. 庞加莱在相对论和量子理论的研究中, 也取得了重要成果. 在光学、电磁学、热学、流体力学等方面也做出了贡献. 微分方程定性理论的研究亦是从他开始的. 此外, 庞加莱在哲学上信奉马赫主义观点, 提倡所谓的定论.

尤埃尔(Juel, Sophus Christian, 1855—1935) 丹麦数学家. 生于兰讷斯(Randers), 卒于哥本哈根. 1871 年, 尤埃尔入哥本哈根工科大学学习, 1885 年获博士学位, 其后执教于哥本哈根综合技术学院, 1907 年晋升为教授. 尤埃尔著有多种数学论文和教科书. 在一个与两个复维情形的射影几何、曲线和曲面理论等方面做出了贡献. 他提出含有无穷个逐段光滑连结的凸弧的初等曲线的概念, 研究了三阶和四阶曲线, 发展了曲线的阶的理论.

阿佩尔(Appell, Paul-Émile, 1855—1930) 法国数学家、物理学家. 生于斯特拉斯堡(Strasbourg), 卒于巴黎. 早年就学于巴黎师范学院, 获博士学位. 以后从事教学、科研和出版等多项工作. 曾任巴黎大学力学教授. 1892 年当选为法国科学院院士, 1903—1920 年任巴黎大学理学院院长, 1920—1925 年任巴黎大学校长.

阿佩尔的主要贡献在分析数学和理论力学方面. 他研究了椭圆函数、超几何函数理论, 把其中许多结果推广到了更广的范围; 探讨了许多问题的物理意义和来源. 他讨论了函数序列问题, 引进了所谓阿佩尔多项式. 在射影几何方面, 他解决了蒙日(Monge, G.)提出的"切割与填充"问题, 获得了博尔丁(Bordin)奖. 他利用代数函数、椭圆函数研究了线性微分方程问题. 在理论力学方面, 他建立的在完全系统和非完全系统中都有效的运动方程颇为有名.

阿佩尔还是一位爱国主义者. 在德军占领期间, 曾与之进行过顽强的斗争. 第一次世界大战之后, 他曾担任国际联盟法国协会的总书记.

马尔可夫(Марков, Андрей Андреевич, 1856—1922) 俄国数学家. 生于梁赞(Рязань). 1878 年毕业于圣彼得堡大学. 不久在该校任教, 1884 年获博士学位, 1886 年成为教授. 1896 年当选为圣彼得堡科学院院士. 1905 年圣彼得堡大学授予他"功勋教授"称号.

马尔可夫的主要贡献在概率论、数论、函数逼近论和微分方程等方面. 他研究并发展了切比雪夫矩方法, 使中心极限定理的证明成为可能, 推广了大数定律和中心极限定理的应用范围. 他提出一种用数学方法研究自然过程的一般图式, 称为马尔可夫链. 这些工作发展成了概率论的新分支——随机过程论, 它在现代科学中具有重要的应用. 在数论中, 他研究了不定二次式理论, 解决了求已知行列式的极值二次式的难题, 还发展了函数逼近论和连分式的解析理论. 在数理统计和数的几何等方面也有创建. 他发表了大量论著, 代表作有《有限差分学》、《概率演算》等.

皮　卡(Picard, Charles Émile, 1856—1941) 法国数学家. 生于巴黎, 卒于巴黎. 1877 年毕业于巴黎高等师范学校, 并获得数学博士学位. 先后在图卢兹大学、巴黎大学、巴黎高等师范学校任职. 1889 年当选为巴黎科学院院士, 1917 年成为科学院终生书记. 他还被选为多家重要学术机构的成员, 多次获得科学大奖.

皮卡的主要贡献在解析函数论、数学分析、代数几何、微分方程论等方面. 他研究了正则解析函数的分类, 后被进一步推广, 称为皮卡小定理和皮卡大定理; 探讨了线性微分方程理论和代数方程理论的相似性, 得到线性微分方程的一个变换群, 即所谓皮卡群; 推广了逐步逼近法, 给出其普遍形式, 证明了含复变量的微分方程和积分方程的解的存在惟一性定理. 他还把数学分析理论应用于弹性理论、电学、热力学, 使之在物理学上也取得了一定的成果. 皮卡是他那时代法国最优秀的数学家之一. 他逝世后, 法国科学院为纪念他设立了以他名字命名的奖章. 他的主要著作有《分析数学专论》(1891—1896)、《泛函分析讲义》(1928)等.

龙　格(Runge, Carl David Tolmé, 1856—1927) 德国数学家、物理学家. 生于德国不莱梅(Bremen), 卒于格丁根. 早年他在慕尼黑大学和柏林大学学习; 1880 年获博士学位. 先后在汉诺威工科大学和格丁根大学任职. 1920 年担任格丁根大学物理研究所所长. 龙格在光谱学方面有重要贡献. 在

数学方面，主要研究了函数论、代数学、数值和图解计算理论及其应用. 他发展了解析函数的逼近理论，曾得到多项重要结果. 他给出了代数方程数值解的一般方法. 他还得到了微分方程数值积分的龙格-库塔程序和其他一些计算方法，并可应用于现代数字计算机的运算.

迈　尔(Meyer，Wilhelm Franz，1856—1934) 德国数学家. 生于马德堡(Magdeburg)，卒于柯尼斯堡. 1878 年获博士学位. 1888 年成为教授. 1897 年移居俄国. 迈尔主要从事几何学研究. 发表了《配极性与有理曲线》(1883)等专著，对多维射影几何学的发展起了重要作用. 他为《数学进展》杂志撰写了大量评论，几乎成为 20 世纪 30 年代德国惟一了解数学全貌的数学家.

斯蒂尔杰斯(Stieltjes，Thomas Jan，1856—1894) 荷兰-法国数学家. 生于荷兰兹沃勒(Zwolle)，卒于法国图卢兹(Toulouse). 1886 年获博士学位，后任教于图卢兹大学，直至去世. 斯蒂尔杰斯的主要贡献是推广了黎曼积分概念，引进了斯蒂尔杰斯积分. 1886 年以后，他开始研究发散级数，探讨发散级数的连分数展开. 这些工作是连分数解析理论的开端. 1894—1895 年，他发表《连分数的研究》，为解决如何表示一个解析函数的极限，而引入了新的积分. 斯蒂尔杰斯积分在物理学中应用广泛. 他对偏微分方程、常微分方程、Γ 函数、椭圆函数、插值理论和渐近级数理论等均有一定的贡献.

皮尔逊(Pearson，Karl，1857—1936) 英国统计学家. 生于伦敦，卒于萨里(Surrey). 1875 年，他先在剑桥大学国王学院学习，然后去德国海德堡大学、柏林大学继续深造，1881 年在剑桥大学获学士学位. 1884 年任伦敦大学学院教授.

皮尔逊是现代统计学的奠基人之一. 他将统计应用于生物遗传和进化问题，对生物统计进行了系统的研究. 他把统计学和概率论融为一体，研究基本统计问题，特别致力于数据分布理论的研究，提出“概率”与“相关”的概念，引进标准差、正态曲线、平均变差、均方根误差等一系列数理统计的基本术语. 著作有《科学的基本原理》、《数学对进化论的贡献》等. 他还担任过《优生学纪事》的编辑. 他的哲学思想属于马赫主义，曾受到列宁(Lenin，V. I.)的尖锐批判.

博尔查(Bolza，Oskar，1857—1942) 德国数学家. 生于德国贝格察伯恩(Bergzabern)，卒于布赖斯高地区弗赖堡(Freiberg im Breisgau). 早年在柏林大学物理系学习，后转到数学系，成为外尔斯特拉斯(Weierstrass，K. (T. W.))的学生，并在克莱因(Klein，(C.)F.)的指导下从事数学研究，1886 年获得博士学位. 曾在美国任教多年. 博尔查的主要贡献在椭圆积分和椭圆函数、变分法等方面. 他最重要的工作是把拉格朗日和迈尔问题统一于更具一般性的博尔查问题中. 著作有《变分学讲义》(1904)等.

李亚普诺夫(Ляпунов，Александр，Михайлович，1857—1918) 俄国数学家、力学家. 生于雅罗斯拉夫尔(Ярославль)，1876 年进入圣彼得堡大学物理数学系学习，不久转到切比雪夫(Чебыщев，П. Л.)所在的数学系. 在名家的影响下，他在大学四年级时就写出了关于物体在液体中平衡问题的论文，为此而获得金质奖章. 1880 年大学毕业后留校工作. 1892 年成为教授. 1901 年被选为圣彼得堡科学院院士.

李亚普诺夫是切比雪夫所创建的圣彼得堡数学学派的杰出代表. 他的研究工作涉及到多个领域. 在概率论中，他给出了比切比雪夫、马尔可夫(Марков，A. A.)关于中心极限定理更简单而严密的证明. 这些有效方法已在现代概率论中得到广泛的应用. 他是微分方程论中运动稳定性理论的创始人. 1888—1892 年，他发表了一系列研究材料系统运动稳定性问题的论文，这些问题导致了他去研究微分方程组. 他在专著《运动稳定性的一般问题》(1892)中，提出了解决运动稳定性问题的普遍方法，其中一种是以李亚普诺夫函数为基础，建立的解的稳定性曲线. 他所建立的方法还应用到了常微分方程理论的其他分支. 李亚普诺夫对位势理论的研究为数学物理方法的发展开辟了新的途径. 他于 1898 年发表的论文《关于狄利克雷问题的某些研究》具有重要的意义.

柯尼希(Koenigs，Gabriel，1858—1931) 法国数学家、物理学家. 生于图卢兹(Toulouse)，卒于巴黎. 早年在巴黎高等师范学校学习，1882 年获博士学位. 先后在贝桑松理学院、图卢兹大学、巴黎高等师范学校、巴黎大学和法兰西学院任教. 1918 年当选为法国科学院院士. 曾多次获法国科学院奖. 柯尼希的主要贡献在微分几何和数学分析方面，他把数学方法应用于物理学研究，成功地解决了分析力学中的一些问题. 他还证明了每一个代数曲面都能由一个绞链系统刻画.

古尔萨(Goursat，Éouard - Jean - Baptiste，1858—1936) 法国数学家. 生于洛特省兰萨茨(Lanzac)，卒于巴黎. 1876 年就学于巴黎高等师范学校，1881 年获理学博士学位. 1897 年任巴黎大学教授. 1919 当选为法国科学院院士，曾任法国数学会主席.

古尔萨在读大学时就给出了“古尔萨过程”和“古尔萨证明”，1900 年又在《关于柯西解析函数的一般定义》一文中，改进了柯西解析函数的定义，得到“柯西-古尔萨定理”. 他在偏微分方程中，对存在性定理的证明做了改进，还在椭圆积分、不变量理论和曲面理论等方面得到大量间接成果. 他又是一个出色的教师，以讲学清晰、严谨和计划性强而见长. 他编著的《数学分析

教程》(1902—1905)曾多次印刷,并被译为多国(包括中国)文字,被广泛采用为高校教材.

约翰逊(Johnson,William Ernest,1858—1931) 英国逻辑学家.生于剑桥,卒于北安普敦(Northampton).早年在剑桥大学国王学院学习,毕业后留校任教.1923 年当选为不列颠学院研究员.约翰逊的主要贡献在逻辑学和概率论方面.在他的《逻辑演算》一书中,以"合取"和"否定"为基本符号,对布尔命题和函数逻辑进行了描述.在概率方面,他发展了逐次性法则.

佩亚诺(Peano,Giuseppe,1858—1932) 意大利数学家.生于斯皮内塔(Spinetta),卒于都灵.早年他在都灵大学学习.1895 年任都灵大学教授.他是多个学术机构的成员.1908 年当选为世界语研究所所长.

佩亚诺对 20 世纪数学的发展有重要贡献,其著作《算术原理新方法》完成了对自然数的公理化处理,提出了自然数五大公理,即佩亚诺公理,然后定义各种运算,逐步扩展数系,依次定义整数、有理数、无理数等.为了使推理方便有力,曾引进了大量的数学符号:如用"∈"表示属于、"⊃"表示蕴涵、"N_0"表示自然数集、"a^+"表示 a 的后续自然数等,对符号逻辑的发展有较大影响.他还为欧氏几何建立过公设体系.在分析方面,佩亚诺介绍了较进步的容度概念,使容度理论的限度得到突破,并将面积概念严密化,给出充满空间的曲线等反例.此外,他在维数理论的研究中亦有贡献.

范　因(Fine,Herry Burchard,1858—1928) 美国数学家.生于宾夕法尼亚州钱伯斯堡(Chambersburg),卒于新泽西州普林斯顿(Princeton).早年他就学于普林斯顿大学,毕业后到德国莱比锡和柏林等地留学.1891 年任教授,1903 年任普林斯顿大学教务长,1909 年任系主任.他是美国数学会的组建人之一,并于 1911—1912 年任主席.范因主要从事牛顿逼近论的研究(1916),还涉及微分方程及代数数系等问题.范因写了好几本教科书,以简明扼要、深入浅出见长,其中《范氏大代数》有多种中文译本,被作为中学教科书达半个多世纪之久.

安贝尔(Humbert, Marie - Georges, 1859—1921) 法国数学家.生于巴黎,卒于巴黎.早年他在巴黎综合工科学校学习,毕业后任矿山工程师,后在巴黎的几所大学任教.1885 年获博士学位,1893 年任法国数学会主席,1901 年被选为法国科学院院士.他先后担任综合工科学校和法兰西学院的教授.安贝尔的主要贡献在代数曲线和代数曲面理论、数论等方面.他对代数曲线和代数曲面的理论及它们之间的关系进行了十分深入的研究,从理论上给出曲面几何和曲线几何的区别.他还以几何方法来研究连分数,在数的几何方面的工作完善了埃尔米特(Hermite,C.)的研究.

卡约里(Cajori,Florian,1859—1930) 瑞士-美国数学家、数学史家.生于瑞士图西斯(Thusis)附近的圣艾尼昂(St. Aignan),卒于美国伯克利.他 16 岁移居美国,1883 年毕业于威斯康星大学,1894 年获博士学位,先后任图兰大学、科罗拉多学院教授.1918 年以后任伯克利加利福尼亚大学数学史教授.卡约里的主要著作有《数学史》、《初等数学史》、《数学符号史》和《物理学史》等.

切萨罗(Cesàro,Ernesto,1859—1906) 意大利数学家.生于那不勒斯,卒于托雷安农齐亚(Torre Annunziata).经历不详.他 1886 年成为数学教授.切萨罗兴趣广泛,论著甚丰,各种出版物达 259 种.1878 年解决过拓扑学方面的问题;1883 年发表了《算术的各种问题》;1896 年出版内蕴几何学的奠基作《内蕴几何学教程》,得到"切萨罗曲线"等结果,并讨论了曲面和多维空间的性质.此外,他在符号代数、数论、概率论、微分几何、非欧几何等方面的成果也常为人所引用.

沙图诺夫斯基(Шатуновский, Самуил Иосифович,1859—1929) 俄国数学家.生于大兹纳缅卡(Великая Знаменка),先后在圣彼得堡工学院、桥梁道路工程学院和圣彼得堡大学学习.后来一直在敖德萨大学工作.他是敖德萨数学学派的创始人之一.

沙图诺夫斯基的主要贡献在代数学、数论和数学分析等方面,而他最感兴趣的是数学论证问题.他研究了广义的极限概念,并给出了一种定义,他的定义在现代拓扑学和分析中起着重要作用.他曾撰文明确指出,"排中律"形式转移到无穷过程在逻辑上是行不通的.他的工作实质上给出了伽罗瓦理论的一种新结构.此外,他还发表了许多很有价值的初等数学论文.

胡尔维茨(Hurwitz,Adolf,1859—1919) 德国数学家.生于希尔德斯海姆(Hildesheim),卒于瑞士苏黎世.早年他在慕尼黑技术大学和柏林大学学习,1880 年获博士学位,先后在格丁根大学、柯尼斯堡大学、苏黎世多科工艺大学任教.

胡尔维茨的主要贡献在代数、数论、函数论、级数论等方面.他探讨了模函数理论以及重要的数论课题——判别式为负的二元二次型的类数的关系,发展了类数公式中狄利克雷级数的变换理论;他还研究了双纽线函数的展开式,亏格大于 1 的代数黎曼面的性质,以及复变函数、超越函数、贝塞尔函数、差分方程理论、等周问题等课题.著作有《四元数数论讲义》(1919)、《广义函数与椭圆函数论讲义》(1922)等.

赫尔德(Hölder,Otto Ludwig,1859—1937)

德国数学家.生于斯图加特(Stuttgart),卒于莱比锡.早年他在柏林大学学习,1882年获博士学位,先后在格丁根大学、蒂宾根大学、柯尼斯堡大学和莱比锡大学任教.1927年当选为巴伐利亚科学院通讯院士.赫尔德的主要贡献在数学分析、函数论、级数论、群论、几何学、数学基础等方面.他提出了后来以他的名字命名的体积密度连续性条件;研究了其幂级数在收敛圆周上的点发散的解析函数;最早把傅里叶系数定义为非正常积分的新形式;得到了在数学分析中有广泛应用的赫尔德不等式;还得到了在群论中有重要意义的定理.在几何学和数学基础方面,著有《几何学中的观点和思想》(1900)、《数学方法》等著作.

沃尔泰拉(Volterra,Vito,1860—1940) 意大利数学家.生于安科纳(Ancona),卒于罗马.1878年入比萨大学,成为贝蒂(Betti,E.)的学生;1882年获博士学位.次年任比萨大学教授,1892年接替贝蒂的教授职位,同年任都灵大学教授.1900年成为罗马大学教授.曾参加第一次世界大战,并参与了武器的研制.

沃尔泰拉对现代微积分学的发展有重要贡献.研究课题涉及数学物理、积分方程、积微分方程、泛函分析、集合论、弹性理论和天体力学等领域.他是积分方程一般理论的创始人,建立了求解第二类积分方程的方法,并指出第一类方程是含 n 个未知数的 n 个线性代数方程,当 n 趋于无穷时的极限形式.他还给出波动方程的解法;研究并发展了弹性后效理论,由此得到了积微分方程的构造法.他引进泛函微分的一般概念,其研究工作推动了泛函的抽象理论的发展.他还建立了泛函方程的特征理论;泛函分析中有许多术语以其名字命名.他最重要的著作是《泛函、积分方程和积分微分方程理论》.1954—1962年,出版了他的《数学论文集》(5卷).1931年,由于拒绝向墨索里尼(Benitomussolini,B.)宣誓效忠而被迫离开罗马大学,第二年他辞去了在意大利科学机构中的一切职务.以后主要生活在国外.

莫 利(Morley,Frank,1860—1937) 英国数学家.生于英格兰伍德布里奇(Woodbridge),几乎一生都在美国度过,但始终保留着英国国籍.他早年就学于剑桥大学,1898年获博士学位,后任约翰斯·霍普金斯大学教授.莫利的主要贡献在几何学方面.1899年,他发现了欧几里得几何学中关于三等分角线的一个新奇定理:如果画出一个三角形的每个顶角的两条三等分角线,则相邻的三等分角线就相交于一个等边三角形的顶点.

怀特海(Whitehead, Alfred North, 1861—1947) 英国逻辑学家、数学家、哲学家.生于拉姆斯盖特(Ramsgate),1884年毕业于剑桥大学三一学院,1905年获博士学位.先后在剑桥大学三一学院、伦敦大学和哈佛大学任教,罗素(Russell,B. A. W.)曾是他的学生.他还在多所大学获博士学位,并被选为伦敦皇家学会会员.

怀特海的主要贡献在数理逻辑和哲学方面.他和罗素是数学基础三大学派之一的逻辑主义学派的创始人.他们的观点是:逻辑是可靠的,全部数学可以从逻辑推导出来,因而是逻辑的一种延拓.他们两人合作撰写的《数学原理》(1910—1913),对逻辑主义学派的基本观点进行了论述,现已成为重要的历史文献.他们的观点遭到了许多人的批评,而逻辑主义者也没能从纯粹逻辑推出全部数学.尽管如此,他们的工作还是大大推进了数理逻辑这门学科的发展.此外,他在代数学、射影几何等方面也做出了一定的贡献.

本迪克松(Bendixson,Ivar Otto,1861—1935) 挪威数学家.生于瑞典斯德哥尔摩,经历不详.他曾任斯德哥尔摩大学的教授.本迪克松的主要贡献在微分方程理论和集合论等方面.他是微分方程定性理论的创始人之一.1900年以后,他对由法国数学家庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)所开创的微分方程解的拓扑性质进行了研究,建立了关于方程 $Xdx+Ydy=0$(X,Y 是 x,y 的多项式)具有有限个极限环的定理,称为本迪克松定理.他还研究了产生极限环的各种情形及其性质、孤立奇点的分类等问题.在常微分方程的定性理论中,有著名的本迪克松球变换和本迪克松准则等.他的主要研究结果发表在1901年的论文《由微分方程定义的曲线》中.

布拉利-福尔蒂(Burali - Forti,Cesare,1861—1931) 意大利数学家.生于意大利阿雷佐(Arezzo),卒于都灵(Turin).早年在比萨大学学习.布拉利-福尔蒂的主要贡献在数理逻辑、相对论、向量分析等方面.1897年,他在评论康托尔超限序数理论时指出,所有序数的序列是良序的,它具有的序数应是所有序数的最大者,于是这个序数大于所有的序数.这就是所谓的最大序数悖论.布拉利-福尔蒂以提出这一悖论而出名.

科 尔(Cole,Frank Nelson,1861—1926) 美国数学家.生于阿什兰(Ashland),卒于纽约.曾在德国随克莱因(Klein,(C.)F.)学过两年数学.他先后任教于哈佛大学、密歇根大学和哥伦比亚大学,写过数论和群论方面的专著.1903年,他以证明 $2^{67}-1$ 为合数闻名于世.科尔是当时美国数学会的领导人之一,该会于1929年以他的名字设立了数学奖.

希 思(Heath,Thomas Little,1861—1940) 英国数学史家.生于林肯(Lincoln),卒于萨里(Surrey).早年在剑桥大学三一学院学习,1885年成为该校的研究员.他长期在财政部工作,1926年退休.

1912年当选为伦敦皇家学会会员，后来任皇家学会理事会成员、英国科学院研究员. 1922—1923年，任伦敦数学会主席.

希思是研究古希腊数学的权威，撰写了大量著作，其中有《希腊数学史》(1921)、《希腊数学史手册》(1931)、《欧几里得几何原本》(13卷)(1908)等.《欧几里得几何原本》(13卷)曾多次印刷，是现在《几何原本》标准的英译注释本，这部著作可以看作是两千多年来研究《几何原本》的历史总结.

恩格尔(Engel，Friedrich，1861—1941) 德国数学家. 生于德国的开姆尼茨(Chemnitz)附近，卒于吉森(Giessen). 早年在莱比锡和柏林学习，1883年获博士学位，先后在莱比锡、格赖夫斯瓦尔德(Greifswald)和吉森等地任教.

恩格尔是李(Lie，M. S.)的得力助手与合作者，曾合著《变换群理论》(1888—1893). 他还收集编校了李的文章，研究了李的微分方程理论. 另外，他还编辑出版了格拉斯曼(Grassmann，H. G.)的著作. 除此之外，他还研究了非欧几何的历史，并将罗巴切夫斯基(Лобачевский，Н. И.)的主要俄文著作译成了德文.

亨泽尔(Hensel，Kurt，1861—1941) 德国数学家. 生于柯尼斯堡，卒于马尔堡(Marburg). 早年在波恩大学、柏林大学学习，曾得到利普希兹(Lipschitz，R. O. S.)、外尔斯特拉斯(Weierstrass，K. (T. W.))和克罗内克(Kronecker，L.)等名师的指导. 1884年获博士学位. 1901年受聘为马尔堡大学教授. 曾担任《纯粹与应用数学杂志》的编辑.

亨泽尔的主要贡献在函数论、代数学、数论等方面. 在函数论中，有关于代数函数域的算术基础的克罗内克-亨泽尔法则. 他还证明了矩阵的最小多项式的惟一性，提出了 p 进数的概念，并发展为一种系统的理论. 著作有《单变量代数函数论》(1902)、《代数数论》(1908)和《数论》(1913)等.

希尔伯特(Hilbert，David，1862—1943) 德国数学家. 生于东普鲁士首都柯尼斯堡(第二次世界大战后属苏联，并改名为加里宁格勒)，卒于格丁根. 1880年入柯尼斯堡大学，1885年获哲学博士学位，并通过了教师资格考试. 后曾到莱比锡、巴黎等地游学. 1886年任柯尼斯堡大学讲师，1892年任副教授，1893年任教授. 1895年应克莱因(Klein，(C.)F.)之邀赴格丁根大学任教授，1930年退休. 在他与克莱因的努力下，格丁根在20世纪初到第二次世界大战前的这段时间内，成为了国际数学中心.

希尔伯特是20世纪的伟大数学家之一，对数学有多方面的重要贡献. 1885年左右，他开始对不变式理论的有限基问题(即哥丹尔问题)的研究，用全新的方法证明了有限基的存在性，后又构造出了有限基. 1897年，他发表的一份关于数论的报告，把代数数论融为一体，是一份重要的数学文献. 在代数数域方面，他发展了模剩余理论. 1909年，他证明了有一个世纪之久的华林定理. 他在1899年出版的《几何基础》一书中，第一次给出了欧几里得几何的完备的公理体系. 这是一本经典之作，为公理化方法奠定了基础. 从1902年开始的10年间，他对积分方程问题进行了系统的研究，建立了无限维理论，现称为希尔伯特空间理论，当时他自己称之为"谱理论". 他把谱分解理论从完全连续的二次型推广到了所谓有界二次型. 他曾把积分方程理论应用到气体动力学理论和初等辐射理论等. 在研究积分方程问题的同时，他还在变分法和狄利克雷原理方面做出了贡献，解决了黎曼曲面上流的基问题，证明了庞加莱(Poincaré，(J.-)H.)和克贝(Koebe，P.)关于单值化的基本定理. 他有关变分法的思想对变分法后来的发展有重大影响. 他还在重力与电磁学统一场理论领域解决了不少问题，是该领域的先驱者之一. 1922年开始，他对一般数学基础进行了系统的研究. 1900年，他在巴黎举行的国际数学家大会上提出的23个问题，有力地促进了20世纪数学的发展，现在其中有些问题已被解决，有些尚未有结果. 1904年，他曾获第三届国际罗巴切夫斯基数学奖，1910年获匈牙利科学院第二届波尔约(Bolyai，J.)数学奖.

克内泽尔(Kneser，Adolf，1862—1930) 德国数学家. 生于格吕索(Grüssow)，卒于布雷斯劳. 早年在罗斯托克大学和柏林大学学习，1884年获博士学位. 相继在多帕特大学、帕林矿冶学院、布雷斯劳大学任教，并当选为普鲁士科学院和俄国科学院通讯院士. 克内泽尔的主要贡献在几何学、分析学、函数论等方面. 他研究了空间曲线理论，运用变分理论讨论了分解曲线族及其包络的问题. 他引入的一些变分学术语，如"极值曲线"、"强极值"、"弱极值"等，至今仍在使用.

施图迪(Study，Eduard，1862—1930) 德国数学家. 生于科堡(Coburg)，卒于波恩. 早年在耶拿大学、斯特拉斯堡大学、莱比锡大学和慕尼黑大学学习，1884年获博士学位. 先后在慕尼黑大学、马尔堡大学、格丁根大学、格赖夫斯瓦尔德大学和波恩大学任教. 施图迪的主要贡献在几何学和不变量理论方面. 他系统构造了某些复空间中的解析几何；运用不变量理论，推导出球面三角学和其他数学分支中的许多公式. 著作有《动力几何》(1903)等.

奥卡涅(Ocagne，Philbert Maurice d'，1862—1938) 法国数学家、数学史家. 生于巴黎，卒于勒阿弗尔(La Havre). 早年在巴黎综合工科学校学习，1912年受聘为该校几何学教授，1922年当选为法国科学院院士. 奥卡涅的主要贡献在数学应用方面，在

微分几何、画法几何、射影几何和图解静力学、近似计算等方面都做出了贡献.特别是在实用几何学方面,他深入研究了图解演算和算图系统化理论,引入了共线点图解算法,成为图算法学科的开创人.奥卡涅共发表论著200多篇(部),其中《图算法论》(或《诺谟图论》)一书,被译成多国文字.他对数学史也颇感兴趣,曾发表过多篇有关论文.

卡利埃(Charlier,Carl Wilhelm Ludwig,1862—1934) 瑞典天文学家、数学家.生于厄斯特松德(Östersund),毕业于乌普萨拉大学.曾在乌普萨拉和斯德哥尔摩工作,1897—1929年任隆德大学教授和隆德市天文台台长.卡利埃的主要贡献在天体力学和星系天文学方面.他研究了脱罗央群小行星的运动,特别是在1908年提出了等级式宇宙模型,并且根据这种模型解释了一些天文现象.在数学方面他主要研究了概率论与数理统计,1905年,他得到随机变量和的分布函数的级数表达式,称为卡利埃级数,这种级数表达式是在切比雪夫(Чебыщев,П.Л.)、埃尔米特(Hermite,C.)用多项式逼近函数的一般思想的基础上建立起来的.

里夏尔(Richard,Jules Antoine,1862—1956) 法国数学家.生于法国谢尔的布莱,卒于安德尔的沙托鲁.曾先后在图尔、第戎、沙托鲁等地的公立中学任教.1901年在巴黎理学院获博士学位.

里夏尔对几何学和集合论基础进行过深入的研究,1905年提出了有名的里夏尔悖论,后来经过罗素(Russell,B.A.W.)等人简化(1906)仍称里夏尔悖论,用现代的形式简述如下:每一个正整数都可以用若干个字母来描述,现将正整数分为两组,第一组是可以用不多于100个英文字母描述出来的数;第二组是至少要用101个字母才能描述的数,显然第二组数的集合非空,这个集必有一个最小数可用不到100个字母就描述出来了,于是产生矛盾.

菲尔兹(Fields,John Charles,1863—1932) 加拿大数学家.生于安大略省哈密尔顿(Hamilton),卒于该省多伦多.1880年就学于多伦多大学,1887年获约翰斯·霍普金斯(Johns Hopkins)大学博士学位.1889年任美国阿勒格尼(Allegheny)大学教授,1902年执教于多伦多大学.1907年当选为加拿大皇家学会会员.

菲尔兹在代数函数论中有一定贡献,1906年证明了黎曼-罗赫定理等.但他的主要成就在于数学事业的组织管理.他第一个在加拿大推行了研究生教育;全力主持筹备了1924年多伦多国际数学家大会;建议设立国际性数学奖,该建议于1932年在苏黎世国际数学家大会上通过.为了纪念他的功绩,这项奖被定名为"菲尔兹奖",它对数学事业的发展起了重要的推动作用.

克雷洛夫(Крылов,Алеясей Николаевич,1863—1945) 苏联数学家、力学家、船舶制造家.生于维夏格(Висяг).1890年毕业于海洋学院,并留校任职.在该校克雷洛夫工作长达50年,在此期间还在圣彼得堡综合技术学校和其他大学兼职.1916年被选为俄国科学院院士.

克雷洛夫在船舶理论方面取得了重要的成果,并开创了许多新颖的具有实际意义的研究课题.在炮兵学和外弹道学方面,他也进行了卓有成就的研究,制造了一系列船舶和炮兵仪器.在数学和力学方面,他同样做了大量的工作,他把在物理学和各种技术部门中所遇到的近似计算加以系统研究,并建立了近似计算的严密科学理论.他制造了俄国第一台能够进行微分方程积分法的积分仪(1904).他还对牛顿(Newton,I.)、欧拉(Euler,L.)、高斯(Gauss,C.F.)等学著的经典著作进行了深入的研究,发表了一系列关于牛顿、拉格朗日(Lagrange,J.-L.)、切比雪夫(Чебыщев,П.Л.)等数学家生平的作品.他的主要论著均被收入《克雷洛夫文集》(1936—1956)和《克雷洛夫选集》(1958)中.

塞格雷(Segre,Corrado,1863—1924) 意大利数学家.生于萨卢佐(Saluzzo),卒于都灵.1883年在都灵大学获博士学位.1888年任高等几何教授,次年成为都灵研究院成员.塞格雷长期担任《纯粹与应用数学年刊》编辑.曾讨论了线性变换下不变的几何性质,给出了一套在三维空间探索高维空间性质的方法,并创立了直线新体系.1890年研究黎曼曲面性质,建立了二重复形理论,后来论述微分几何中的一些问题,得到了"塞格雷线"等结果.

格拉韦(Граве,Дмитрий Александровцч,1863—1939) 苏联数学家.生于吉利洛夫(Кирипов,今沃洛格达州(Вологодскаг оьласти)内),卒于基辅.1885年毕业于圣彼得堡大学.1889年取得硕士学位,1897年获博士学位.1897—1899年在哈尔科夫大学工作,1899—1939年在基辅大学工作.1919年被选为乌克兰科学院院士.

格拉韦是俄国第一个代数学派的创始人.他的所有创造活动都受到圣彼得堡数学学派思想的影响.在他的博士论文中,研究并解决了制图投影问题,求出了球向平面等势射影的所有可能(计11种),证明了子午圈与纬圈射影成为圆或直线,还证明了切比雪夫(Чебыщев,П.Л.)提出的"地球表面任何部分向平面(地图)上的最佳投影在图形的边界上都具有相同比例"的定理.在代数与数论中,他简化了伽罗瓦理论的叙述,还借助于泛函数阐明了理想理论,得到了用根式可解的五次方程的某些类型.十月革命之后,格拉韦积极参加苏联科学文化的建设和高等学校的改革活动.在这些年代里,他主要从事

应用数学和力学方面的研究，并取得了一定的成就．格拉韦撰写了大量的专著和教材，其中最重要的有《群论》、《椭圆函数论初步》、《数学简明教程》、《保险事业的数学》等．

班勒卫(Painlevé，Paul，1863—1933)　法国数学家、政治家．生于巴黎，卒于巴黎．早年在巴黎大学和格丁根大学学习，1887 年获博士学位．先后任教于巴黎理学院、巴黎综合工科学校、法兰西学院和巴黎高等师范学校．1900 年当选为法国科学院院士．他曾获得多项数学奖．

班勒卫的主要贡献在代数曲线和代数曲面理论、微分方程的奇点理论等方面．他研究了代数曲线和代数曲面的有理变换问题，引入了双一致变换．他成功地研究了代数微分方程的奇点理论，由形如 $y''=f(x,y,y')$ 的二阶方程的解引出的新的超越函数，被称为班勒卫超越函数．他还将其数学成果应用于分析力学，推广了关于 n 体问题的结果，并修正了某些错误结论．

班勒卫对新兴的航空技术颇感兴趣，他是 1908 年双翼飞机创纪录飞行的一个乘客．他还热心于政治活动，1910 年被选为国民议会议员，其后还任公共教育部长、议长，1917 年、1925 年两次当选为法国总理．

斯捷克洛夫(Стеклов，Владимир Андреевич，1864—1926)　苏联数学家．生于下诺夫戈罗德(Нижный новгород，今高尔基城)，早年在莫斯科大学和哈尔科夫大学学习，是李亚普诺夫(Ляпунов，A. M.)的学生．1896 年成为教授．1902 年获博士学位．1912 年当选为圣彼得堡科学院院士．1919—1926 年任苏联科学院副院长．

斯捷克洛夫主要从事数学物理和微分方程论的研究．他在数学物理中的研究课题有：热传导问题、转动物体的平衡问题和静电学中的一些问题；首先引进了正交函数系的封闭性概念，研究了函数展开为已知的正交函数的问题；建立函数平滑化的特殊方法，称为斯捷克洛夫函数法．他在微分方程论、数学分析、弹性理论和流体力学等方面的研究也取得了重要成果．发表论著近 150 种．他是苏联数学物理学派的创始人，圣彼得堡数学学派的优秀代表．十月革命后，他领导组建了苏联科学院物理数学研究所，后来又分为了三个研究所，其中的一个研究所就是以他名字命名的．

奥斯古德(Osgood，William Fogg，1864—1943)　美国数学家．生于波士顿，卒于贝尔蒙特(Belmont)．毕业于哈佛大学，后又到格丁根大学、埃尔朗根大学深造，1890 年获博士学位．奥斯古德一直在哈佛大学任教，直至 1933 年退休．退休后曾应邀到北京大学讲学两年．

奥斯古德的主要贡献在分析数学方面，他研究了连续函数序列的收敛性、微分方程理论、变分法、单连通区域映射的有关问题，以及填满空间的曲线等．1903 年，他给出了外面积不等于零的平面曲线的例子．奥斯古德发表了大量论著，其中有两部微积分学教程还被译成中文出版．

屈尔沙克(Kürschák，József，1864—1933)　匈牙利数学家．生于匈牙利的布达(Buda)，卒于布达佩斯．1886 年毕业于布达佩斯工科大学，1890 年获博士学位．此后一直在该校任教，1900 年成为教授．1914 年被选为匈牙利科学院院士．

屈尔沙克为赋值论的建立做出了贡献，利用“赋值”成功地推广了绝对值的概念，证明了任何赋值域能靠添加新元素而扩充为一个代数封闭的“完全”域．在变分学中，他研究了微分方程在切触变换下的不变性；给出了二阶微分表达式属于多重积分变分的微分方程的充分必要条件．屈尔沙克培养了许多学生，有些学生后来成了优秀的数学家或物理学家，冯・诺伊曼(von Neumann，J.)就是其中的一个．

闵科夫斯基(Minkowski，Hermann，1864—1902)　德国数学家．生于俄国阿利克索塔赫(Алексотах)，卒于格丁根．8 岁时随父迁居德国．早年在柯尼斯堡大学学习，在那里他结识了希尔伯特(Hilbert，D.)，并成为挚友．1885 年，他获数学博士学位，曾先后在波恩、柯尼斯堡、苏黎世和格丁根等地的大学任数学教授．1883 年荣获巴黎科学院数学大奖．

闵科夫斯基的主要贡献在数论和相对论等方面．在代数数论(有理系数的二次型理论)方面做出了重要贡献．他用几何方法研究数论，使问题的证明简单明了，这方面的代表作有《数的几何》(1896)．他还用几何方法对连分数理论和 n 维空间的凸性理论进行研究，引进了空间距离的新定义，为赋范空间理论的建立铺平了道路．他与物理学家爱因斯坦(Einstein，A.)共同奠定了相对论的基础．他首次用数学方法揭示出爱因斯坦狭义相对论的实质，给出了四维时空的概念．著作有《空间与时间》(1907)等．

韦西奥(Vessiot，Ernest，1865—1952)　法国数学家．生于马赛，卒于萨瓦省．早年在巴黎高等师范学校学习，1892 年获博士学位．先后在里尔、图卢兹、里昂、巴黎等地的大学任教．曾任巴黎高等师范学校校长．

韦西奥的主要贡献在于把连续群的概念应用到微分方程的研究上，推广了皮卡(Picard，(C.-)É.)的结果，论证了对于微分方程的一组 n 个无关解，存在具有常系数的变换群．他发展了德拉什(Drach，J. J.)的关于线性有理变换群的研究成果，同时推广了嘉当(Cartan，É.)在微分方程积分法方面的结果．他

把这些研究结果应用到天体力学、波的传播和相对论等方面.在第一次世界大战期间,他还被指派研究过弹道学问题.还编写过一些实用的教科书.在任巴黎高等师范学校校长期间,他同几位物理学家创建了新的实验室.

科捷利尼科夫(Котельников, Александр Петрович, 1865—1944) 苏联数学家、力学家.生于喀山(Кавань),中学毕业时因学习成绩优秀而获银质奖章,后来进入喀山大学学习.先后在基辅、喀山和莫斯科等地的高等学校任教授.

科捷利尼科夫的主要贡献是把四元数理论和复数理论应用于几何学和力学.他的工作奠定了非欧几里得空间中向量运算的基础.他还为罗巴切夫斯基几何提出了重要的释义.在他的力学教科书中首先应用了向量运算.1930—1939年,担任《茹科夫斯基全集》的主编.1934年,苏维埃联邦共和国授予他功勋科学家的称号.

阿达马(Hadamard, Jacques, 1865—1963) 法国数学家.生于凡尔赛,卒于巴黎.1888年毕业于巴黎高等师范学校.1892年获博士学位,1909—1937年任法兰西学院数学教授.

阿达马的工作涉及数学的多个分支.在解析函数论方面,他研究了泰勒级数的解析延拓理论,在1892年的论文中,将总体概念以及若干新概念引入了函数论,以后成为函数论的基础.其著作《泰勒级数及其解析延拓》产生了很大影响.在此基础上,他研究黎曼ζ函数,解决了长期未果的有关素数分布的著名问题(1896);还建立了整函数的最大模定理;引入拟解析性的概念和问题.他还研究了偏微分方程理论中的许多实质性问题,例如,阐述了偏微分方程中定解问题的提法是“适定的”概念,指出对于拉普拉斯方程、狄利克雷问题是适定的;对于双曲型方程,柯西问题是适定的.在他的《线性微分方程中的柯西问题讲义》中,还出现了“基本解”的概念.阿达马对谓词演算也进行过研究,并建议以“泛函”一词来代替“线函数”.1903年,他给出了用某种连续函数定义的线性泛函的一般表达式.他在初等数学方面也有许多建树,其《初等几何讲义》在中学颇为流行.

阿达马在国内外享有较高的声望.他曾于1897年在瑞士苏黎世召开的第一届国际数学家会议上提出数篇有关集合论基本概念和分析学的重要论文.1912年,他当选为巴黎科学院院士,还是美国全国科学院、伦敦皇家学会、苏联科学院等多个科学机构的成员.1936年,他曾应邀来中国,在清华大学讲学,主要讲授偏微分方程方面的内容.

博尔托洛蒂(Bortolotti, Ettore, 1866—1947) 意大利数学家、数学史家.生于波伦亚(Bologna),卒于波伦亚.早年在波伦亚大学求学,后到法国巴黎深造.先后在摩德纳大学、波伦亚大学任教,主讲微积分和解析几何.1900年成为教授.

博尔托洛蒂的主要贡献在拓扑学、差分学、连分数理论、函数的阶、无限算法的收敛性、级数论和广义积分等方面.他对数学史也颇有研究,深入研究了鲁菲尼(Ruffini, P.)的数学手稿,并校订了其著作.还研究过斐波那契(Fibonacci, L.)、费罗(Ferro, S.)、卡尔达诺(Cardano, G.)和塔尔塔利亚(Tartaglia, N.)等人的著作,还曾对亚述、巴比伦和埃及等民族的数学成就有过客观的评价.

弗雷德霍姆(Fredholm, Erik Ivar, 1866—1927) 瑞典数学家.生于斯德哥尔摩,卒于斯德哥尔摩.1885年就学于技术学院,1888年在斯德哥尔摩大学成为数学家米塔-列夫勒(Mittag-Leffler, (M.) G.)的学生.1906年任该校教授,后成为瑞典科学院和法国科学院院士和通讯院士.他主要从事方程理论研究,给出了一般常系数椭圆型偏微分方程的基本解,并在积分方程的研究中以解决“弗雷德霍姆方程”受到关注,因此获巴黎科学院奖.

瓦莱·普桑(Vallée-Poussin, Charles-Jean-Gustave-Nicolas de la, 1866—1962) 比利时数学家.生于卢万(Louvain),卒于卢万.毕业于蒙斯(Mons)耶稣学院.1892年任卢万大学教授.先后被选为比利时皇家科学院院士、巴黎科学院通讯院士.

瓦莱·普桑的主要贡献在微分方程、数论、函数逼近论、三角级数论等方面.1896年,他证明了著名的素数定理,解决了困扰数学家达一个世纪的难题.他还推进了关于ζ函数的研究;对$\pi(x)$与对数积分$\mathrm{li}x$间的差做了上估计;在函数逼近论方面,他运用奇异积分方法,得到了用指定次数的多项式逼近函数的很好的结果;在三角级数方面,证明了惟一性定理,推导出收敛性检验法等.他的主要著作有《分析教程》等.

陶　伯(Tauber, Alfred, 1866—约1942) 捷克数学家.生于斯洛伐克的普雷斯堡(Pressburg),卒于德国德尔辛斯塔特(Theresientadt).1884年进入维也纳大学学习,1888年获博士学位.先后在维也纳大学、维也纳工业大学、维也纳福尼克斯保险公司工作.

陶伯的主要贡献在函数论、特殊函数论、位势论、线性微分方程论、保险数学等方面.最重要的论文是《无穷级数论的一个定理》(1897).1897年,他证明了关于幂级数的阿贝尔极限定理在某些附加条件下,其逆也成立.这个结果后来被称为陶伯定理,所述附加条件称为陶伯条件.此外,他还写过一些保险数学的论文.

布　朗(Brown, Ernest William, 1866—1938)

数学家、天体力学家.国籍不详.生于英国赫尔(Hull),卒于美国纽黑文(New Haven).布朗 1897 年获博士学位,先后在哈弗福德(Haverford)大学和耶鲁大学任教.1928—1931 年任美国天文学会主席,并曾获多所大学荣誉博士学位.还曾被选为美国全国科学院院士.

布朗是近代月球运动理论的奠基人.由对月球运动的研究给出了地球自转速度的均匀方程.著作有《月球运动新理论》(1897—1905)、《行星理论》(与他人合著,1903)等.

韦埃克(Ver Eecke,Paul,1867—1959) 比利时数学家、数学史家.生于梅嫩(Menin),卒于贝尔赫姆(Berchem).他是比利时数学会、比利时科学史协会、国际科学史学会的会员.

韦埃克从青年时期开始钻研古希腊数学,特别是阿基米德(Archimedes)的著作.1921 年,他将阿基米德全集译成法文出版.其后,又把许多其他的希腊数学著作译成法文,并为之作引言和注释.此外,他还把斐波那契(Fibonacci,L.)的《平方数》书由拉丁文译成法文,1952 年在布鲁日出版;撰有论文《用历史的观点考察古尔丁定理》等.他还对科学史,特别是数学史的研究做出了一定的贡献.

博　歇(Bôcher,Maxime,1867—1918) 美国数学家.生于美国马萨诸塞州的波士顿,卒于坎布里奇.他于 1883 年到哈佛大学学习数学和自然科学,1891 年获博士学位,1904 年任哈佛大学教授.1909—1910 年任美国数学会主席.博歇的主要贡献在线性微分方程、高等代数和函数理论方面.著作有《势论的级数展开》、《施图姆方法讲义》、《高等代数引论》等.

沃罗诺伊(Вороной,Георгий Феодосьевич,1868—1908) 俄国数学家.生于茹腊夫卡(Журавка),1889 年毕业于圣彼得堡大学并留校工作.1894 年被聘为华沙大学教授.1897 年获博士学位.1907 年当选为圣彼得堡科学院通讯院士.

沃罗诺伊主要研究数论.他在 1897 年提出的连分数算法至今仍不失其优越性.他对三次不定方程一般理论、数的几何和多面体几何等方面也做出重要贡献.他和德国数学家闵科夫斯基(Minkowski,H.)共同创立了数的几何这门学科.与晶体学家费奥多罗夫(Фёдоров,E.C.)的工作一起推动了多面体理论的发展,使之成为独立的数学分支.对解析数论中的一个经典问题得到十分准确的结果.著作有《简单平行多面体的研究》(1908—1909)和《渐近函数论的一个问题》(1903)等.

博尔德希维兹(Bortkiewcz(or Bortkewitsch),Ladislaus Josephowitsch,1868—1931) 德国统计学家、经济学家.生于俄国圣彼得堡,卒于柏林.1890 年毕业于圣彼得堡大学法律系,后又学政治经济学和统计学.1891—1892 年在法国斯特拉斯堡和德国格丁根学习,1893 年获格丁根大学博士学位.1895—1897 年在斯特拉斯堡任不支薪讲师;1897—1901 年任职于圣彼得堡;1901 年在柏林大学任统计学和政治经济学教授,直至去世.还曾被选为瑞典科学院院士、英国皇家统计学会会员.

博尔德希维兹的工作主要在统计理论、数理统计、数理统计与概率在精算科学和政治经济学中的应用等方面.他是顺序统计学的先驱者,以用泊松分布建立的稀有事件现象的模型而著称.他对数理统计学其他方面的贡献,包括对放射性的统计分析、游程理论、极值的分布性质等.他在 1898 年出版的《小数定律》专著中,阐述了泊松分布的普遍性,同时表述了小数定律,即当样本很大时,以成功概率出现的小且变化的成功概率之二项采样数据的趋势是不变的.他对离差理论等也有重要贡献;在人口理论、精算科学和政治经济学方面的工作,现在仍具有重要价值.他曾被认为是数理统计及其在统计中应用方面的"欧洲大陆方向"的代表,曾是西欧能够把概率论与数理统计和统计联系起来的惟一学者.

豪斯多夫(Hausdorff,Felix,1868—1942) 德国数学家.生于布雷斯劳一个犹太血统的家庭,早年在莱比锡、弗赖堡、柏林等大学学习.1902 年以后任莱比锡大学、格赖夫斯瓦尔德大学和波恩大学教授.第二次世界大战期间,希特勒(Hitler,A.)疯狂迫害犹太人.他于 1935 年被勒令退职,其著作禁止出版,他本人也被列入黑名单.由于不堪忍受法西斯的迫害,1942 年 1 月,他在波恩举家自杀身亡.

豪斯多夫在集合论、拓扑学、连续群论、泛函分析、数论等方面都取得很大成就,尤其在集合论和拓扑学方面的贡献更为突出.他研究了集的连通性概念,提出了一般度量空间和拓扑空间的集合理论.他引入了一套公理并建立起拓扑空间理论.还解决了波莱尔集的基数问题,建立了多维空间的测度理论,称为豪斯多夫测度;研究了有序集理论,首次证明了措恩(Zorn)引理.在数学分析和代数学方面也有一些贡献.主要著作有《点集论纲要》(1913)、《集论》等.此外,豪斯多夫还是一位作家,写过许多诗歌和剧本.

佐默费尔德(Sommerfeld,Arnold Johannes Wilhelm,1868—1951) 德国物理学家、数学家.生于柯尼斯堡(Köenigsberg,后为苏联加里宁格勒(Калининград)),卒于慕尼黑.1891 年毕业于柯尼斯堡大学,并留校工作.1898 年成为教授.曾在格丁根大学、克劳斯塔尔矿业研究院、亚琛大学和慕尼黑大学工作.

佐默费尔德在物理学方面主要研究了原子结构

和原子光谱的理论.他在数学方面最重要的贡献是把单复变函数理论应用于边值问题,特别是应用于衍射现象的研究.1895年,他对折射现象建立了严密的数学理论,得到了柱面函数(贝塞尔函数)的积分表达式.他把贝塞尔方程特解之间的区别转化为复平面上积分曲线的差异来研究.他还发表了大量论著.曾被选为多国科学院的院士和学术团体的成员.

卡 甘(Каган, Вениамин Фёдорович, 1869—1953) 苏联数学家.生于立陶宛,1892年毕业于基辅大学.1904年到敖得萨大学任教,1907年获纯粹数学博士学位.1923年任教授,同年到莫斯科大学工作.

卡甘的主要贡献在几何学和张量分析方面,在1905—1907年,他编著出版了两卷集的《几何学原理》.书中提出了欧几里得空间公理体系,包括对公理的无矛盾性和独立性的详细分析.他的公理体系与希尔伯特(Hilbert,D.)所建立的体系有所不同,他是以作为运动群不变量的距离概念为依据的,他的公理体系在意义上与黎曼(Riemann,(G.F.)B.)及李(Lie,M.S.)的公理体系相接近.在张量计算方面,他建立了所谓次射影的空间.这是对罗巴切夫斯基空间的推广.他可称为是苏联张量微分几何学学派的创始人.

恰普雷金(Чаплыгин, Сергей Алексеевич, 1869—1942) 苏联数学家、力学家.生于拉年堡(Раненбург,现在的恰普雷金城).茹科夫斯基(Жуковский, Н. Е.)的学生.1890年毕业于莫斯科大学,1890年获博士学位,同年成为莫斯科大学教授.1918年到茹科夫斯基空气动力中心做研究所工作.1929年被选为苏联科学院院士.

恰普雷金的主要贡献在水力学、理论力学、气体力学和数学等方面.在数学上,他研究微分方程、复变函数论在弹性平面理论中的应用等.他在微分方程积分法中提出一种近似解法,现称为恰普雷金法.他还研究了变分法中的有关问题,并取得一定成果.恰普雷金的科学成就得到了苏联政府的高度评价.早在1900年,圣彼得堡科学院就授予他荣誉金质奖章,以奖励他在固体于液体中的运动理论和理论力学方面的研究成绩.苏联科学院还设立了以他的名字命名的奖.

嘉 当(Cartan, Élie Joseph, 1869—1951) 法国数学家.生于法国伊泽尔的多洛米约,卒于巴黎.1891年毕业于巴黎高等师范学校,并通过了教师资格考试,1894年获博士学位.后曾任教于蒙彼利埃大学(1894—1896)、里昂大学(1896—1903)、南锡大学(1903—1909).1909年起任教于巴黎大学,1912年成为教授,1940年退休.1931年被选为法国科学院院士,1947年被选为伦敦皇家学会外籍会员,他还是美国全国科学院外籍院士.

嘉当是20世纪的杰出数学家之一,对现代数学的发展有重要影响.他的工作涉及群论、微分方程理论与几何等.1894年,他给出了复数域上单李代数的完整分类,1898年,他给出了任意李代数是半单的充分必要条件是其二次型的秩与李代数的维数相等.他还得到了实数域和复数域上结合代数的主要结构定理.1913年,他在一般线性表示理论方面引入了权的概念及所有权和根的序关系,证明了序关系的最高权惟一确定不可约表示,并继而建立了复单李代数所有不可约线性表示的分类.在这过程中,他发现了正交李代数的旋表示,并在1938年出版的《旋量理论》一书中用几何观点进一步发展了旋量理论,这在物理学中有重要应用.1914年,他对实数域上的单李代数进行了分类,给出了实单李代数的实线性表示.1927年,他还以局部微分几何的观点研究了群流形,证明了群上存在着三种仿射联络.他还研究了李群拓扑,发展了研究李群整体性质的新方法.1929年,他还确定了紧李群的高维贝蒂数.在微分方程方面,他一直致力于外形式的应用,后被称为"嘉当外形式法",他还引入了高阶外微分形式.1902—1909年间,他发展了普法夫方程理论.他第一次给出了任意微分方程组一般解概念的严格定义,并给出了存在性定理,用开拓法确定了所有奇异解(其证明1955年由仓西式武(Kuranishi,M.)给出).他还把微分方程组理论应用到无限变换群理论,从而开辟了一个新的数学分支.他还用他的微分方程理论联系广义相对论与统一场论进行了分析研究,第一次用挠率而不是用曲率引入了黎曼空间概念,后来成了爱因斯坦(Einstein,A.)统一场论的基础.1920年,他在微分几何的研究中引入了移动框架法,为经典微分几何学注入了新的活力.1938年和1939年,他证明了当黎曼空间有不变的正曲率时,存在着有三种不同主曲率的等参数超曲面簇,但只能在空间维数为4、7、13或25时才能出现,而且最后一簇即为有52个参数的例外单李群;第一次用几何观点理解这类群.他提出的联络概念,在更高的观点下统一了克莱因(Klein,(C.)F.)和黎曼(Riemann,(G.F.)B.)的思想,对现代微分几何有着极深刻的影响.他的外微分形式,后来成了积分几何中不可缺少的工具.1937年,他曾获国际罗巴切夫斯基数学奖.他曾出版过10多本专著,发表过学术论文200余篇,主要论文均收入了他的三卷六册的《文集》(1952—1955)中.

富特温勒(Furtwängler, Friedrich Pius Philipp, 1869—1940) 奥地利数学家.生于德国埃尔策(Elze),卒于维也纳.就学于格丁根.毕业后,先后

在格丁根、亚琛、维也纳大学任教. 富特温勒的主要贡献在代数学和数论方面. 他深入研究了割圆域的算术、幂剩余符号的互反律、希尔伯特范数剩余符号等;证明了类域论的四个基本定理(1907)、主理想定理(1930);提出了类域塔(class field tower)问题. 1912 年,他改进了费马大定理的一个判定准则. 此外,他还对大地测量学做出了重要贡献.

叶戈洛夫(Егоров,Дмитрий Фёдорович,1869—1931) 苏联数学家. 生于莫斯科,1891 年毕业于莫斯科大学. 1893 年开始在该校工作,1901 年获得博士学位,1903 年晋升为教授. 1923—1931 年任莫斯科数学会主席. 1929 年被选为苏联科学院院士;曾还是法国数学会外籍会员.

叶戈洛夫的主要成就在实变函数论、微分几何、积分方程论、变分学等方面. 在实变函数中,叶戈洛夫发现了关于收敛的可测函数列的一个重要定理,后称为叶戈洛夫定理,1911 年首次发表在法国巴黎科学报告中. 它的发现成为莫斯科学派进一步研究实变函数论的新起点. 叶戈洛夫还是一位出色的教育家,他的许多学生,例如卢津(Лузин,Н. Н.)、斯捷潘诺夫(Степанов,В. В.)、普里瓦洛夫(Привалов,И. И.)、彼得罗夫斯基(Петровский,И. Г.)等,后来都成了著名数学家.

费　尔(Fehr,H. 1870—1954) 瑞士数学家、教育家. 生卒地不详. 1899 年获博士学位. 1900—1945 年任日内瓦大学数学教授,主讲代数学和高等几何. 费尔参与创办了国际数学杂志,并担任编辑. 他还是瑞士数学会创始人之一. 在 1908 年召开的第四届国际数学家代表大会上,他和克莱因(Klein,(C.)F.)被授权组织国际数学教育委员会. 在以后的 40 多年中,他一直担任国际数学教育改革委员会的秘书长.

林德勒夫(Lindelöf,Ernst Leonhard,1870—1946) 瑞典-芬兰数学家. 生于赫尔辛基,卒于赫尔辛基. 早年在瑞士、法国、德国等地就学. 1902 年任教授. 1907 年任《数学学报》杂志编辑. 林德勒夫主要从事微分方程和解析函数论的研究. 他著书以结论清晰、论证严谨和形式优雅而著称. 著作有《库默尔微分方程的积分法》(1890)、《残数计算》(1905)等,并还撰写有教育学方面的论著.

法　诺(Fano,Gino,1871—1952) 意大利数学家. 生于曼图亚,卒于维罗纳(Verona). 1888 年就学于都灵大学,学习期间就将克莱因(Klein,(C.)F.)著名的埃尔朗根纲领译为了意大利文. 1901 年任教授. 法诺主要从事 n 维空间的射影几何与代数几何的研究,对直线几何、代数曲面、流形、非欧几何及微分方程理论的发展都做有贡献. 此外,他还证明了三维空间中存在无理对合等结果.

波莱尔(Borel,Émile,1871—1956) 法国数学家. 生于阿韦龙(Aveyron)圣阿夫里克(Saint - Affrigue),卒于巴黎. 早年在巴黎高等师范学校学习,1894 年获博士学位,以后留在该校任教. 1911 年任巴黎高等师范学校校长,1927 年任庞加莱研究所所长. 还曾任法国国民议会会员和海军部长;还被当选为法国、苏联等国科学院的院士.

波莱尔的主要贡献在现代数学分析方面. 他引进了近代实变函数理论、测度论、丢番图近似、解析函数值分布理论、可数集概念和可和性级数理论等. 他首先把康托尔集合论思想应用于函数论,得到了有限覆盖定理和"可数集的测度为零"等重要结果. 1896 年,他因首次证明皮卡定理而引起数学界的轰动,他的工作为复值函数理论的推广提供了方法. 此外,他还对对策论进行了大量的研究. 现代数学中的许多术语都冠以他的名字. 20 世纪 20 年代,波莱尔还曾来中国访问. 他一生共发表论文 300 多篇,其专著大多收集在《函数论》(1897—1922)专集中.

尤　尔(Yule,George Udny,1871－1951) 英国统计学家. 生于苏格兰,卒于英格兰剑桥. 他曾在伦敦大学学院学工程学. 1893 年开始转向统计领域,并在伦敦大学学院讲授统计学,1899 年任职于伦敦城市和吉尔德斯(Guilds)研究所,1912 年任剑桥大学讲师,后任高级讲师,1931 年退休. 1922 年被选为伦敦皇家学会会员. 1924—1926 年曾任英国皇家统计学会主席.

尤尔的主要贡献在相关理论、分布理论、随机过程,以及文学词汇统计等方面. 他曾在电波和电磁理论方面做过工作. 1897 年和 1899 年,他还曾对回归和相关的统计理论做过基础性工作. 1902—1909 年,他在伦敦大学学院的讲稿,形成了其名著《统计理论入门》的基础. 该书在很长一段时间内是仅有的一本有关统计的综合性书籍,到 1950 年为止,已相继出版到了第 14 版. 在剑桥大学期间,他引入了相关图,并为自回归级数理论打下了基础. 他还与人合作给出了偶然分布理论的基础. 他在 1927 年发表的有关太阳黑子的论文是研究振荡时间序列的基础文献. 晚年,他对各类词在各种书籍中出现的频率进行了调查研究,并于 1944 年出版了《文学词汇统计》一书. 他还为部分相关分布的费希尔求导铺平了道路. 现在在统计文献中有尤尔过程和尤尔分布. 尤尔还曾于 1911 年,获皇家统计学会的盖伊金质奖章.

加廖尔金(Галёркин,Борис Григорьевич,1871—1945) 苏联数学家、工程师. 生于波洛茨克(Полоцк),1899 年毕业于圣彼得堡工学院. 1934 年当选为苏联建筑研究院院士,1935 年当选为苏联科学院院士. 加廖尔金多年研究结构力学和弹性理论中最困难的问题,并用现代数学方法给出处理. 在解

弹性理论中的微分方程时，他提出了有效的积分法；他应用边值问题的近似解法成功地解决了变分法、数学物理和函数方程等方面的一些问题.他曾担任过苏联最大的水力发电站的设计和施工顾问，领导过全苏建筑工程技术学会.1934年，苏维埃联邦共和国授予他功勋科学家的称号.

施泰尼茨(Steinitz，Ernst，1871—1928) 德国数学家.生于西里西亚(Silesia)，卒于基尔(Kiel).1894年获博士学位，先后在布雷斯劳工学院(1910—1920)和基尔大学(1920—1928)任教.施泰尼茨的主要贡献在近世代数方面.他对抽象域进行了综合研究，证明了对于每个域k，存在一个惟一的代数封闭域k'，使得k'是k的代数扩张.他还研究了伽罗瓦方程理论在域中的有效性问题.著作有《域的代数理论》(1910)等.

策梅罗(Zermelo，Ernst Friedrich Ferdinand，1871—1953) 德国数学家.生于柏林，卒于弗赖堡.就学于哈雷和弗赖堡.1894年获博士学位，1906年成为教授.在格丁根、苏黎世、弗赖堡等地任教.

策梅罗的主要贡献在集合论、变分学、概率论在统计物理中的应用等方面.他首先把康托尔(Cantor，G. F. L. P.)的集合论加以公理化.1904年，他证明了"每一个集合在某种重新排列下都能够良序化"的定理，现称为策梅罗定理.为证明这个定理，他引入了一个特殊的公理——选择公理.这一公理的使用对进一步研究集合论起到了推动作用.策梅罗提出的集合论的公理化由弗伦克尔(Fraenkel，A. A.)完成，被称为策梅罗-弗伦克尔集合论公理体系.这种理论以后又被伯奈斯(Bernays，P. I.)和哥德尔(Gödel，K.)进一步改进和简化，称为伯奈斯-哥德尔集合论公理体系.

罗 素(Russell，Bertrand Arthur William，1872—1970) 英国哲学家、数学家、逻辑学家.生于英格兰蒙茅斯郡特里莱克(Trelleck)，卒于威尔士的普拉斯彭林(Plas Penrhyn).1890年入剑桥大学三一学院，先学数学，后转学哲学，1894年毕业，一直在该校任教.1908年成为伦敦皇家学会会员，1916年因持和平主义观点反对第一次世界大战被学院除名，1918年曾还被监禁半年.1920年8月，曾应邀来中国北京、上海、武汉等地讲学.他很热爱中华文化.

在数学方面，罗素主要从事数理逻辑和数学基础的研究.以他姓氏命名的"罗素悖论"，曾对20世纪初的数学基础发生过重大影响.他与怀特海(Whitehead，J. H. C.)合著的《数学原理》(三卷)，企图建立逻辑主义数学体系，把整个数学归结为逻辑学.他是数学基础中逻辑主义学派的代表人物.

在哲学方面，罗素最初是康德主义者和黑格尔派的客观唯心主义者.20世纪初转到主观唯心主义立场，提出逻辑原子论，要求从相当于逻辑上原始材料出发，以这个材料作为基本元素，由此构造出整个世界.在教育观点上鼓吹自由教育，认为教育的基本目的应该是培养"活力、勇气、敏感、智慧"四种品质，更多地发展个人主义.

在政治态度上，罗素是一位著名的和平主义者.他在第一次世界大战中，反对政府措施，倡导和平，曾被监禁.在第二次世界大战中积极开展和平运动，1955年与爱因斯坦(Einstein，A.)等科学家曾签署了禁止原子武器的宣言，晚年曾谴责美帝国主义在侵略越南战争中的暴行.终生为反战努力，为人道主义而奋斗.1950年获得世界诺贝尔和平奖.

罗素的主要著作有《数学原理》、《哲学问题》、《心的分析》、《物的分析》、《哲学大纲》、《西方哲学史》、《教育与美好生活》等.

布利克弗尔特(Blichfeldt，Hans Frederick，1873—1945) 丹麦-美国数学家.生于丹麦伊拉尔(Illar)，卒于美国帕洛阿尔托(Palo Alto).少年时随父母移居美国，就学于斯坦福大学，以后又到德国莱比锡大学深造，成为著名数学家李(Lie，M. S.)的学生.在李的指导下，完成了论文《三维空间的一类变换群》，并获得博士学位(1900).1912年当选为美国数学会的副主席.他主要研究群论，对线性齐次群的阶、有限直射群及特征根等问题的研究都颇有成果.此外，他在数论、丢番图分析、数的几何、线性方程组的近似整数解等方面也做出了贡献.著作有《有限直射群》、《有限群理论及其应用》等.

列维-齐维塔(Levi - Civita，Tullio，1873—1941) 意大利数学家、物理学家.生于帕多瓦，卒于罗马.早年就学于帕多瓦大学，1902年任该校教授.1918年到罗马讲授高等分析.列维-齐维塔一生论著多达200余篇，主要涉及力学、电磁学和原子物理学.著作有《动力方程变换》(1896)、《绝对微分计算》(1925)和与里奇(Ricci，C. G.)合著的《绝对微分法及其应用》(1900).它们给出了该算法的系统设想，为张量分析、拓扑学乃至广义相对论的解决提供了工具.此外，他在弯曲空间中的平行概念(1917)是以他的名字命名的.

卡拉西奥多里(Carathéodory，Constantin，1873—1950) 希腊数学家.生于柏林，卒于慕尼黑.原籍希腊.1902年到格丁根学习，两年后获博士学位，1924年任慕尼黑大学教授.著作《实变函数论》(1918，中译本1957)，发展了实变函数论体系；《变分法与一阶偏微分方程》(1935)推进了拉格朗日(Lagrange，J. - L.)有关问题的解法；他还在《函数论》(1950)中对保角表示、边界对应、点集测度等理论进行了论述.卡拉西奥多里还多年任《数学年刊》

(德)的编辑工作.

库利奇(Coolidge, Julian Lowell, 1873—1954) 美国数学家. 生于马萨诸塞州布鲁克林(Brook-line), 卒于坎布里奇(Cambridge). 1904年在德国波恩获博士学位, 1918年任哈佛大学教授. 库利奇著有《数学概率引论》(1925)、《非欧几何》(1909)、《复域几何》(1924)、《平面代数曲线》(1931)等著作. 晚年他致力于数学史的研究, 写了三本流传很广的专著《几何方法史》(1940)、《二次曲线与二次曲面史》(1943)、《业余爱好者的数学》(1949).

施瓦茨席尔德(Schwarzschild, Karl, 1873—1916) 德国天文学家、数学家. 生于美因河畔的法兰克福(Frankfurt am Main), 相继在维也纳、慕尼黑、格丁根、波茨坦等地工作. 曾被选为柏林科学院院士. 施瓦茨席尔德是现代理论天体物理学的创始人之一, 在恒星大气理论、恒星内部结构理论、应用天体物理学、恒星动力学和相对论等方面都做出了重大贡献. 他把许多数学方法应用于天文学, 研究了恒星统计的积分方程理论, 给出了有关方程的全部解法. 他还建立了辐射平衡的数学理论, 制成恒星大气辐射平恒模型.

惠特克(Whittaker, Edmund Taylar, 1873—1956) 英国数学家. 生于兰开复郡(Lancashire), 卒于爱丁堡. 1895年毕业于剑桥大学三一学院, 并留校工作. 1905年被选为伦敦皇家学会会员. 1912—1946年为爱丁堡大学教授, 1939—1944年为爱丁堡皇家学会会员.

惠特克的主要贡献在数学物理、数值分析、解析动力学和相对论等方面. 他早期的论文是关于微分方程方面的, 在1902年发表的论文中, 得到了三维空间拉普拉斯方程最一般的解法. 他提出了一种超几何方程(以他的名字命名), 这种方程的解称为惠特克函数, 它是贝塞尔函数的特殊情形. 他前后发表了10篇有关相对论的论文, 给出在弯曲的时空连续体中距离的定义, 推广了电磁学中一般相对论的公式等. 1903年, 他编著的《现代分析》一书流传甚广. 他还研究了解析动力学中许多基本课题. 在专著《解析动力学》(1904)中, 系统阐述了与哈密顿方程有关的理论. 他在爱丁堡大学组建了数学实验室, 并开设了数值分析讲座. 他把讲稿整理成《观测演算》, 其内容新颖, 独具一格. 此外, 他还撰写过关于自然哲学史的一些著作.

普勒梅利(Plemel, J., 1873—1967) 南斯拉夫数学家. 生于格拉德(Grad), 早年在柏林和格丁根学习, 后来到苏联切尔诺夫策大学工作. 1957年以后在南斯拉夫科学院工作, 并被选为南斯拉夫科学院院士, 还是多个科学机构的成员. 普勒梅利的主要贡献在复变函数论、微积分方程、代数和数论等方面. 他研究过黎曼曲面理论, 并建立了"普勒梅利公式". 此外, 在变分学方面他也做出了一定贡献.

贝　尔(Baire, René Louis, 1874—1932) 法国数学家. 生于巴黎, 卒于尚贝里(Chambéry). 早年在巴黎高等师范学校学习, 以后赴意大利深造, 1899年获博士学位, 先后在蒙波利埃理学院、法兰西学院、第戎理学院任教. 1922年当选为法国科学院通讯院士. 贝尔的主要贡献在集合论、实变函数论、数学分析等方面. 他的工作对法国数学的发展有着重要的影响. 他定义了所谓贝尔函数类, 即规定连续函数为0类函数, 0类函数序列的极限(但非0类函数)为1类函数, 0类及1类函数序列的极限函数(但非0也非1类函数)为2类函数. 依此类推, 可定义n类函数. 贝尔函数类的引入, 扩大了实变函数的研究范围.

迪克森(Dickson, Leonard Eugene, 1874—1954) 美国数学家、数学史家. 生于艾奥瓦的独立城(Independence), 卒于得克萨斯州的哈灵根(Har-lingen). 早年在得克萨斯大学和芝加哥大学学习, 1896年获博士学位, 随后到巴黎和莱比锡留学. 1910—1939年任芝加哥大学教授. 1916—1918年任美国数学会主席. 还留任美国全国科学院院士.

迪克森的主要贡献在代数和数论方面. 他推广了伽罗瓦(Galois, E.)和若尔当(Jordan, M. E. C.)等人在有限群研究中的结果. 在有限域论、线性结合代数理论、不变量理论与数论的关系等方面也做出了重要贡献. 此外, 他对数论史也颇有研究, 1919—1923年出版了三卷本的巨著《数论史》.

丘普罗夫(Chuprov (Tschuprow), Alexamder Alexamdrovich, 1874—1926) 俄国统计学家. 生于俄国, 卒于瑞士日内瓦. 1896年毕业于莫斯科大学物理数学系, 后到德国学习政治经济学, 曾就学于柏林大学. 1897—1901年在巴黎大学学习, 并完成了博士学位论文. 1902—1916年任教于圣彼得堡工学院. 1909年, 莫斯科大学授予他博士学位. 1917年赴斯堪的纳维亚, 晚年在德国德累斯顿度过.

丘普罗夫主要研究数理统计、人口统计和农业经济学. 他在1909年出版的《统计理论概要》一书中, 因其强调逻辑方法和数学方法在统计学上的应用而影响了俄国统计学界很多年. 它包括了概率论的一些基本原理, 着重于以大数定律为基础对客观概率的频数进行解释; 该书还包括了统计试验序列的稳定性理论. 在斯堪的纳维亚期间, 他扩展了离差理论. 这方面的工作曾导致了统计学界对样本矩的期望的广泛研究, 并把离差理论应用于样本调查理论. 他的工作还传播了统计理论中的现代"随机"观点, 导出了样本统计的采样分布等. 他还从大数定理导出了估计量的一致性的概念. 他的工作统一了俄

国的概率思潮、经德国人改进过的思潮和英国生物统计学派等的不同统计思想. 另外,他对斯堪的纳维亚地区的统计学发展也有过重要影响.

哈托格斯(Hartogs,Friedrich,M.,1874—1943) 比利时数学家. 生于布鲁塞尔(Brussel). 哈托格斯的主要贡献在复变函数论方面,1906 年,他在假定存在偏导数的条件下,证明了多变量复值函数的全纯性,这一结果被称为哈托格斯全纯性定理. 他的工作揭示了多复变量解析函数与单复变量情形的差异,为多复变量解析函数的研究奠定了基础. 在复变函数论中,以他的名字命名的还有函数域、正则定理、开拓定理以及著名的哈托格斯-洛朗级数. 除此以外,他还证明了集合论的良序定理(1915).

维莱特纳(Wieleitner,Heinrich,1874—1931) 德国数学家、数学史家. 生于因河畔瓦瑟堡(Wasserburg am Inn),卒于慕尼黑. 早年在慕尼黑学习,大部分时间在慕尼黑工作. 1929 年被选为国际科学史学会会员. 维莱特纳的主要贡献在代数曲线论和数学史方面. 他一生共发表了 150 多篇(部)论著,主要论著有《高阶平面代数曲线论》(1905)、《现代数学是怎样诞生的》(2 卷,1924—1925)、《数学史》(2 卷,1911—1923)和《数学史原始资料》(4 卷,1927—1929)等.

布拉米奇(Bromwich,Thomas John I'anson,1875—1929) 英国数学家. 生于伍尔弗汉普顿(Wolverhampton),卒于北汉普顿(Northhampton). 早年在剑桥大学圣约翰学院学习. 1902 年成为教授,1906 年当选为伦敦皇家学会会员. 1909 年获理学博士学位. 1911—1919 年任伦敦数学会秘书,1919—1920 年任该学会副主席.

布拉米奇在应用数学和纯粹数学方面都做出了重要贡献,著名数学家哈代(Hardy,G. H.)称他为"应用数学家中最杰出的纯粹数学家,同时又是纯粹数学家中最杰出的应用数学家". 著作有《无穷级数引论》(1908)、《二次型及其用不变因子进行的分类》(1906)等.

高木贞治(Takagi,Teiji,1875—1960) 日本数学家. 生于岐阜. 初中毕业后,进入京都著名的第三高等学校(即高中). 在东京大学数学系时,深受狄利克雷(Dirichlet,P. G. L.)的整数论和德国数学家韦伯(Weber,H.)的代数学的影响. 1897 年东京大学毕业后,第二年赴德国柏林求学,随后转入格丁根,得到了克莱因(Klein,(C.)F.)、希尔伯特(Hilbert,D.)等数学大师的指导. 1901 年回国,1903 年在东京大学获得学位,1904 年起一直任东京大学教授. 1960 年,高木贞治在长期贫病生活中去世.

高木贞治是日本近代数学的开创者. 他在国外主要从事代数数论、变分法和数理方程等方面的研究,并取得了重要成果. 回国后他转向"克罗内克青春之梦"(1857 年克罗内克提出的"用复数乘法可以得到虚二次域上的阿贝尔扩张"的著名猜想)的研究,并由此创立类域论,彻底解决了这个问题. 1920 年,他在国际数学家大会上宣读了这一成果,引起了全世界的关注,这是日本数学家第一次取得世界水平的成果. 他的 26 篇论文收集在《高木贞治文集》(1973)中,主要是代数数论的研究成果.

高木贞治还是一位杰出的教育家,为提高日本数学教育水平做出了重要贡献,他编写了大量的教科书,如《新撰算术》、《解析概论》、《代数学讲义》等,在日本都影响很大. 此外,他对数学史也颇有研究,著有《近世数学史谈》.

勒贝格(Lebesgue,Henri Léon,1875—1941) 法国数学家. 生于博韦(Beauvais),在博韦读完了中学. 1894—1897 年,进入巴黎高等师范学校攻读数学,受到了波莱尔(Borel,(F.-É.-J.-)É.)的思想影响,毕业后回南锡(Nancy)任中学教师. 1902 年获巴黎大学理学院博士学位. 1910 年起先后任巴黎大学和法兰西学院教授. 1922 年被选为巴黎科学院院士. 第二次世界大战期间,因病在巴黎去世.

勒贝格是"勒贝格积分"的创始人. 他从研究一种所谓"病态"函数出发,终于导致积分学的一场革命,为近代分析学开辟了新途径. 然而,从他 1902 年发表第一篇论文开始,他的研究成果便遭到许多学者的反对,称他的"病态函数"是"脱离实际"、"令人厌恶"的东西,使他承受了极大的精神压力. 可是进入 20 世纪 30 年代,勒贝格积分理论日趋成熟,并在概率论、谱理论、泛函分析等方面获得广泛应用,声望越来越高. 勒贝格亦成为 20 世纪最有影响的分析学家之一. 此外,勒贝格在点集论、测度论、拓扑学和三角级数等方面都有重要贡献. 晚年致力于数学教育与初等几何的研究.

菲舍尔(Fischer,Ernst Sigismund,1875—1956 另一说 1959) 德国数学家. 生于维也纳,就学于柏林、维也纳、格丁根等地. 先后在捷克的布尔诺、德国的埃尔朗根、科隆等地任教授. 菲舍尔的主要贡献在函数论和泛函分析方面. 他引进了平均收敛的概念,并得到了"平方可积函数在平均收敛意义下是完备的"这一重要结果,称为里斯-菲舍尔定理. 他还研究了希尔伯特空间中线性算子. 对于特征元素的特征值问题,给出在有穷维空间的二次形式下,寻求第 n 个特征值的直接方法.

维塔利(Vitali,Giuseppe,1875—1932) 意大利数学家、力学家. 生于拉韦纳(Ravenna),卒于博洛尼亚. 1899 年毕业于比萨师范学校,曾在热那亚的中学任教. 1923 年受聘为摩德纳大学无穷小分析教授. 还先后当选为都灵科学院(1928)、山猫科学院

(1930)和博洛尼亚科学院(1931)院士. 维塔利的主要贡献在经典分析、函数论、泛函分析和几何学等方面. 他最早研究可测函数的性质，引入了绝对连续函数的概念，建立了著名的维塔利覆盖定理、解析函数列的极限函数的解析性的定理、积分与极限符号可交换的定理等.

阿奇博尔德(Archibald,Raymond Clare,1875—1955)　美国数学史家. 生于加拿大新斯科舍(Nova Scotia)科尔切斯特(Colechester). 1896 年毕业于柏林大学，次年获硕士学位. 1900 年在斯特拉斯堡大学获博士学位，1923 年获哈佛大学博士学位. 以后在各大学任教. 阿奇博尔德著作甚丰，包括人物评传、初等数学教学法、数学史文献等. 他是美国数学史学会的创建人之一，作过几家数学杂志的编辑. 其著作《数学史大纲》流传颇广.

施密特(Schmidt,Erhard,1876—1959)　德国数学家. 生于多帕特(Dorpat)，卒于柏林. 早年在柏林大学、格丁根大学学习. 1905 年在希尔伯特(Hilbert,D.)指导下获博士学位. 曾任柏林大学等几所德国大学的教授.

施密特在分析方面有很多贡献，尤以泛函分析方面成就最大. 他曾引用施瓦尔茨(Schwartz,L.)在势论中所开拓出来的方法，将希尔伯特的积分方程方法简化. 他的主要贡献是在 1907 年，将含非对称核的积分方程的特性函数之观念一般化. 此外，在泛函方面，施氏与法国数学家弗雷歇(Frechet,M.-R.)在抽象泛函理论上有突出成就，他们将无限多变数列$\{x_i\}$当作无限多维空间里的点，将数延拓至函数. 复数模

$$\left(\text{nor } m|2| = \left\{\sum_{p=1}^{\infty} z_p\bar{z}_p\right\}^{\frac{1}{2}}\right)$$

也是施氏提出的概念，并且证明了一般的华氏定理：若 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 是 n 个相互垂直的元素，

$$w = \sum_{p=1}^{n} z_p,\text{则 } |w|^2 = \sum_{p=1}^{n} |z_p|^2.$$

他还提出了希尔伯特空间的封闭子空间的概念. 1907 年曾与弗雷歇共同认为：平方可加函数空间与希尔伯特的数列空间有几何上的完全对应，其观点对大数学家冯·诺伊曼(von Neumann,J.)产生了极大影响.

科瓦莱夫斯基(Kowalewski,Hermann Waldemar Gerhard,1876—1950)　德国数学家. 生于波莫瑞(Pommern)，1898 年获莱比锡大学博士学位，此后在波恩、布拉格、德累斯顿、慕尼黑等大学任教授. 1901 年，他把切萨罗(Cesòro,E.)的自然几何著作从意大利文译成德文，并对它进行了深入的研究. 在行列式理论、群论、积分方程理论和斯蒂尔杰斯积分等方面也做出过贡献. 著作有《行列式理论入门》(1925)等.

蒙泰尔(Montel,Paul Antoine,1876—1975)　法国数学家. 生于尼斯(Nice). 巴黎大学教授. 1937 年被选为巴黎科学院院士. 蒙泰尔的主要贡献在解析函数论和拓扑学方面. 在解析函数论中，他引进了“正规函数族”的概念，给出了解析函数族是正规族的条件的“蒙泰尔定理”. 在线性拓扑空间中，他建立了所谓“蒙特尔空间”，简称“M 空间”. 他的主要著作有《正规解析函数族及其应用》和《单叶和多叶函数》. 根据他所做出的贡献，法国许多大学和其他国家的一些大学都授予他荣誉博士称号.

布利斯(Bliss,Gilbert Ames,1876—1961)　美国数学家. 生于芝加哥，卒于哈维(Harvey). 早年在芝加哥大学学习，1900 年获博士学位，相继在明尼苏达、芝加哥、密苏里、普林斯顿和格丁根等地的大学和研究所工作. 布利斯主要研究变分理论，他的研究工作对美国数学的发展有一定影响. 著作有《基本存在定理》(1913)、《变分学》(1925)、《代数函数》等. 此外，他还被选为多个学术团体成员，在 1921—1922 年曾任美国数学会主席.

戈塞特(Gosset,William Sealy(“Student”)),1876－1937)　英国统计学家. 生于英格兰坎特伯雷，卒于英格兰比肯斯菲尔德. 1899 年获牛津大学的化学学位后，任职于爱尔兰都柏林一家啤酒商行，从事数学工作. 商行于 1906—1907 年安排他到伦敦大学学院生物统计实验室学习一年. 他的一生主要是在啤酒商行度过.

戈塞特的贡献主要在采样分布、试验设计和农业统计等方面. 任职于啤酒商行后，戈塞特因商行要求开始研究原料质量、生产条件与成品质量的关系. 由此他探索了小样本统计的确切误差概率，这是当时尚未研究的领域. 在伦敦大学学院他学习了相关理论和皮尔逊频率曲线系统，为他发展统计技术和分析小样本数据打下了基础. 1908 年他以“学生”(student)笔名发表了有名的“中数的概差”一文，正确地猜测了正态样本的样本方差分布 S^2，并证明了 S^2 与这种样本的均值是不相关的，还提出了 t 分布. 他的工作是以小样本为基础的. 当时大样本理论已由高斯(Gauss,C.F.)完成，但在实践中大样本很难经济地获得，因此没有精确的估计理论. 他的工作是正态分布中统计分析的基础. 这种统计量采样分布也是推断的基础，为方差分析铺平了道路. 1921—1925 年间，他曾与费希尔(Fisher,R.A.)合作汇编、校正、出版了 t 分布表. 在啤酒商行工作时，还促使他进行了农业试验方面的工作，开始了有名的平衡设计的研究. 1942 年伦敦生物统计出版社出版了他的文集.

威尔辛斯基(Wilczynski,Ernest Julius,1876—

1932） 德国-美国数学家．生于德国汉堡，卒于美国科罗拉多州丹佛(Denver)．1897 年在柏林大学获博士学位．1898 年起先后在加利福尼亚大学、伊利诺伊大学、芝加哥大学任教，1914 年成为教授．

威尔辛斯基是现代射影微分几何的创始人．一般的微分几何研究几何图形的局部度量性质，而射影微分几何研究几何图形在射影变换下的不变量的局部性质．1900 年以后，他给出了一些新方法，使曲线射影微分几何理论更加深刻，并把这些方法推广到曲面问题上，研究了由两个二阶齐线性微分方程表示的直纹面．他的工作具有射影微分几何的现代形式．他一生共发表 77 种论著，其中最重要的是《曲线和直纹曲面的射影微分几何》．他和斯劳特(Slaught，H. E.)合著的《威斯两氏大代数》，有中译本(商务印书馆，1934)．此外，他还曾任美国数学会副主席、美国数学协会会员，并担任过美国数学会会刊的副主编．

哈　代(Hardy，Godfrey Harold，1877—1947) 英国数学家．生于英国克兰利，卒于剑桥，终生未婚．曾就学于温切斯特学院和剑桥大学三一学院，1900 年通过荣誉学位考试，并被选为剑桥大学三一学院研究员．1906—1919 年任剑桥大学三一学院数学讲师．1919 年被选为牛津大学新学院萨维尔几何教授．1928—1929 年任美国普林斯顿大学和加利福尼亚理工学院访问教授．1931 年回剑桥大学任纯粹数学教授，并再次成为剑桥大学三一学院研究员，直至去世．1910 年被选为伦敦皇家学会会员；还曾是多家外国科学院的荣誉院士．他曾两次任伦敦数学会主席(1926—1928，1939—1941)，并于 1917—1926 年、1941—1945 年任数学会秘书长．

哈代是 20 世纪上半叶英国分析学派的代表人物与领袖，他对分析与数论等领域有重要贡献．他在发散级数与陶伯定理方面曾有重要成果．1908 年出版的《纯粹数学教程》是第一本用英文写成的有关数、函数、极限等的大学教科书，对英国大学的数学教育有重大影响．1915 年，他引入了 H^p 函数类，后被证明是完备的赋范空间，并被称为哈代空间，即 H^p 空间．1910 年，他开始了与李特尔伍德(Littewood，J. E.)长达 35 年的合作，曾联名发表了论文近百篇，在丢番图逼近、堆垒数论和黎曼 ζ 函数、不等式、级数与一般积分、三角级数等领域进行了合作研究．他们在华林问题上首次用圆法取得了突破．1921 年，他们在 ζ 函数的研究中给出了渐近函数方程．1922—1926 年，他们证明了充分大的奇数可表示为三个素数之和，而且还得到了渐近表示公式．他们在 20 世纪 30 年代引入了极大函数的概念，现称为哈代-李特尔伍德极大函数．它可以用来控制傅里叶分析中的某些算子，在分析数学的发展中曾起过很大作用，而且还被应用到了其他数学分支．1913 年哈代发现了印度数学家拉马努金(Ramanujan，S. A.)，并为其在剑桥安排了工作，两人进行了合作研究．1918 年，他们在整数分拆的研究中给出了 $P(n)$ 的母函数 $f(x)$ 的变换公式，$P(n)$ 为表示 n 的所有不同分拆的个数．1914 年，哈代在黎曼猜想方面证明了在直线 $\mathrm{Re}s=1/2$ 上，$\zeta(s)$ 有无限多个零点，后来又和李特尔伍德合作给出了更严格的结果．他曾于 1920 年获伦敦皇家学会奖章，1940 年获该学会西尔维特奖章，1947 年又获其科普利奖章，就在授予他奖章的那天，他去世了．他一生单独或与人合作共发表论文 300 余篇，还著有《狄利克雷级数一般理论》(1915；与里斯(Riesz，M.)合作)、《不等式》(1934；与李特尔伍德和波伊亚(pólya，G.)合作)、《傅里叶级数》(1944；与人合作)、《发散级数》(1949)等 10 多本专著．

兰　道(Landau，Edmund，1877—1938) 德国数学家．生于柏林，卒于柏林．早年在柏林大学学习，1899 年获博士学位，并留在母校工作．1909 年任格丁根大学教授．20 世纪 30 年代初，他遭遇纳粹政府的迫害，被剥夺在德国教学的权利．1935 年以后，应邀到英国、比利时各大学任教，并被选为多国学术团体的成员．

兰道的主要贡献在单变量解析函数论、解析数论和自然数的公理化等方面．1903 年，他用一种新的、更简单的方法证明了高斯(Gauss，C. F.)提出的素数定理，并使之应用于代数数域上．其著作《素数分布论讲义》(1909)首次系统阐述了解析数论的内容，具有较高的学术价值．另一部著作《分析基础》从佩亚诺(Peano，G.)的自然数公理出发，建立了整数、有理数、无理数、复数的算术．兰道的著作以简洁、精练著称，被称为兰道风格．

哈梅尔(Hamel，Geory，Rarl Wilhelm 1877—1954) 德国数学家、力学家．生于迪伦(Düreh)，就学于亚琛工业大学、柏林大学．1901 年获格丁根大学博士学位，后任教于捷克的布尔诺(Brno)及亚琛、柏林、蒂宾根、慕尼黑等地．哈梅尔的主要贡献在理论力学和流体运力学方面．在数学中，他对常微分方程理论、泛函分析(摄动论)和函数论也有一定贡献．在特殊函数方程中，他研究了加性函数方程：

$$f=(x+g)=f(x)+f(y).$$

著作有《积分方程》(1937)等．

伯恩施坦(Bernstein，Felix，1878—1956) 美籍德国数学家．生于德国哈勒，卒于瑞士苏黎世．曾从康托尔(Cantor，G. F. L. P.)、希尔伯特(Hilbert，D.)和克莱因(Klein，(C.)F.)学习，1907 年获博士学位，1911 年任教授．曾参与创办了德国数理统计学会，并任理事．1934 年移居美国，1940 年入美国

籍，在哥伦比亚、纽约等多所大学任教.

伯恩施坦在纯粹数学和应用数学方面都有许多贡献. 1897 年，他证明了集合论的基本定理——集合的等价定理. 由此定理出发，可建立基数理论. 他还研究了集合论在其他领域的一些应用. 在数论、拉普拉斯变换、凸函数和等周问题等方面也有贡献. 在应用数学方面，他用数学方法处理遗传问题，也取得了一定成就.

格罗斯曼(Grossmann，Marcel，1878—1936) 匈牙利-瑞士数学家. 生于布达佩斯，卒于苏黎世. 早年在巴塞尔上学，后到苏黎世工业学院深造，1907 年任教授，1912 年获苏黎世大学博士学位.

格罗斯曼是物理学家爱因斯坦(Einstein，A.)的同学，爱因斯坦在创立广义相对论时遇到数学上的困难，格罗斯曼将意大利数学家使用的绝对微分几何介绍给他，使广义相对论思想得到完美的表述. 他还发现了万有引力定律表示为绝对微分几何的形式. 为了纪念他的贡献，从 1975 年开始举行纪念格罗斯曼的国际会议，第三届于 1982 年在上海举行.

利赫滕斯坦(Lichtenstein Leon，1878—1933) 波兰数学家. 生于华沙，先后在柏林、明斯特和莱比锡等地工作. 利赫滕斯坦的数学研究涉及位势理论、保角映射、椭圆型方程理论、非线性积分方程和积分微分方程等方面. 在不可压缩液体动力学方面，他也做出了贡献. 著作有《高阶非线性积分方程和积分微分方程讲义》(1931)等.

弗雷歇(Fréchet，Maurice - René，1878—1973) 法国数学家. 毕业于巴黎高等师范学校，是阿达马(Hadamard，J. (- S.))的学生和助手. 1910 年以后在普瓦捷、斯特拉斯堡大学、巴黎大学先后任教，并被选为多家科学院的院士、多国学术机构的成员. 他曾多次获得各种奖励，特别是荣获了法国的荣誉团勋章.

弗雷歇的主要贡献在泛函分析、拓扑学、概率论和微积分等方面. 他提出了抽象空间的第一个定义. 1906 年，他引进了泛函的一般概念. 他利用康托尔集合论的完整思想，对函数空间概念加以一般化，然后引进一类函数空间，建立导集、闭集、完全集、紧集、列紧集等一系列概念. 他把泛函定义为一个集合 E 上的实值函数，又成功地给出了泛函的连续性和可微性的定义，证明了关于泛函的多个定理，还对泛函的集合和序列引进一致收敛、紧致性和等度连续等概念. 他的研究工作奠定了抽象空间的理论基础. 在建立线性泛函和算子的抽象理论中，他也做出了有影响的研究工作. 另外，弗雷歇还是抽象空间拓扑理论的创始人. 泛函分析中起重要作用的性质都是拓扑性质，他对这两个学科的研究是互相渗透的. 在抽象拓扑中，他建立了度量空间、致密性、完备性、可分离性等重要概念. 为了纪念他的成就，一类拓扑空间就称为弗雷歇空间. 他的著作有《抽象空间》(1928)、《概率论的现代理论研究》(Ⅰ，1937；Ⅱ，1938)等.

克拉索夫斯基(Красовский，Феодосий Николаевич，1878—1948) 苏联数学家、天体测量学家. 生于加利奇(Галич)，卒于莫斯科. 1900 年毕业于莫斯科测绘学院，1900—1903 年在普尔科沃天文台学习，1902 年以后在莫斯科测绘学院工作. 1939 年当选为苏联科学院通讯院士. 克拉索夫斯基把数学方法应用于测绘工作，领导了测定地球椭球体(称为克拉索夫斯基椭球体)体积的工作，得到的结果是长半轴为 6378245 米，偏率为 1 : 298. 3. 从 1946 年起，当时的苏联和东欧各国将此结果用于了大地测量与制图工作.

武卡谢维奇(Łukaszewicz，Józef，1878—1956) 波兰数学家、逻辑学家. 生于利沃夫，卒于都柏林. 1902 年在利沃夫大学获理学博士学位，1911 年任教授，1915 年到华沙大学执教. 武卡谢维奇为波兰逻辑学派的兴起，做了奠基性的工作. 他用现代方法重新处理了古典逻辑和中世纪的逻辑理论，推进了演绎科学方法论和数理逻辑的研究. 他的代表作有《从现代形式逻辑的观点看亚里士多德(Aristotle)的三段论法》等.

富比尼(Fubini，Guido，1879—1943) 意大利数学家. 生于威尼斯，卒于美国纽约. 曾在比萨上过学. 从 1901 年起先后在热那亚大学和都灵大学讲授数学分析. 1939 年移居美国，任职于普林斯顿高等研究院.

富比尼是意大利多产的数学家之一，论述涉及几乎所有数学分支，出版了有关线性微分方程、偏微分方程、多复变解析函数和单调函数等方面的专著；研究过变分学、积分化简、概率分析和函数级数等问题；建立了判定连续群的准则；对非欧几何和微分几何中的许多问题均有论述. 1919 年获王室授予的奖金. 1928 年起，任《纯粹与应用数学年刊》编辑. 此外，他在物理学中也有贡献，对动力学、电学、波的理论提出过精辟见解.

塞维里(Severi，Francesco，1879—1961) 意大利数学家. 生于意大利阿雷佐(Arezzo)，卒于罗马. 就学于都灵大学，于 1900 年获博士学位. 曾任都灵、波伦亚、比萨等大学助理教授；1904 年任帕马大学几何教授；1922 年任罗马大学教授，1923—1925 年任校长. 1939 年任新建的阿尔塔数学研究所所长，1950 年由意大利政府任命为终生所长. 1957 年被选为法国科学院通讯院士.

塞维里在代数几何领域做出了重要贡献，他是意大利代数几何学派的重要人物之一. 他曾证明了

舒伯特在19世纪建立的“数的守恒”原理，并证明了这一原理存在的条件.这一工作在20年后曾激励了包括霍奇(Hodge，W.V.D.)、周炜良、范·德·瓦尔登(Van der Waerden，B.L.)在内的一些数学家在这方面的进一步研究.他还引入了代数簇不变量的阶的重要概念，在代数簇方面还做了不少其他基础工作，并建立了不正则性理论.在等价系列和系方面，他推广了给定簇的任意子簇的线性等价理论，并对有理等价、代数等价、簇之间的代数对应等做了基础研究.他把皮卡(Picard，(C.-)É.)的三类在代数曲面上的积分化成了范式，并找到了某些线性微分方程在曲面上可积的条件.他在函数论领域也做了不少工作，研究过双调和函数并解决了相关的狄利克雷问题.他一生曾发表(出版)过400多篇(部)有关数学、科学史、教育与哲学的文章(专著)，他的数学论文由林琴科学院集成7卷本，从1971年开始陆续出版.

卡迈克尔(Carmichael，Robert Daniel，1879—1967)　美国数学家.生于古德沃特(Goodwater)，1911年获普林斯顿大学博士，先后任教于印第安纳、伊利诺伊等大学.卡迈克尔的主要贡献在数论、积分法和运算微积分等方面.在数论中，他求出了新的完全数，提出了著名的卡迈克尔假设：欧拉函数$\Phi(n)$的每一个函数值至少取两次.1911年，他利用逐步逼近法研究差分方程，取得了一定成果.1919—1920年，他得到了关于斯蒂尔杰斯积分更普遍的分部积分法公式.在关于运算微积分的论文中，他叙述了符号算法的原则，总结了英国数学家在这一领域中的基本成就.

哈　恩(Hahn，Hans，1879—1934)　奥地利数学家.生于维也纳，卒于维也纳.就学于斯特拉斯堡、慕尼黑，在维也纳取得博士学位(1902).1917年任波恩大学教授.

哈恩的主要贡献在变分法、函数论、泛函分析和傅里叶积分等方面.他是最早提出测度和积分的抽象理论的学者之一，其中有不少公式、定理等是以他的名字命名.在实变函数中，他指出了连续弧作为点集可以有局部连通的连续统的特征，并称之为佩亚诺连续统.他和波兰数学家巴拿赫(Banach，S.)所建立的线性泛函开拓定理在线性空间理论中起着重要的作用.在无限表示论中有著名的维塔利-哈恩定理.著作有《实函数论》(1921)等.

里　斯(Riesz，Frigyes，1880—1956)　匈牙利数学家.生于杰尔(Györ)，卒于布达佩斯.早年在苏黎世工业学校、布达佩斯大学和格丁根大学学习，并获哲学博士学位.他长期从事教学和科研工作，受聘在科洛斯堡大学和布达佩斯大学工作.1936年当选为匈牙利科学院院士.

里斯的主要贡献在泛函分析方面.他研究了L^p函数空间，为巴拿赫空间理论做了大量基础性的工作，还把泛函分析应用于遍历理论，做出了许多有价值的贡献.泛函分析中有著名的里斯-菲舍尔定理和里斯表示定理，后者是泛函分析发展的里程碑.代表作有《泛函分析讲义》(合著，1952).他在积分方程理论、勒贝格积分、射影几何、复变函数、逼近理论、点集拓扑等方面也有著述.他还参与了创办波尔约数学会和《数学科学文献》刊物.其弟里斯(Riesz，M.，1886—1969)也是著名数学家，在分析数学和数学物理方面皆有建树.

费耶尔(Fijér，Leopold 或 Lipót，1880－1959)　匈牙利数学家.生于匈牙利珀斯(Péce)，卒于布达佩斯.1897年入布达佩斯大学，1902年获博士学位，1899—1900年还曾到柏林大学学习.1902—1905年任教于布达佩斯大学；1905—1911年任教于科洛茨瓦(现为罗马尼亚克罗杰(Cluj))；1911年起任布达佩斯大学高等分析教授，直至去世.在1912年举行的国际数学家大会上，他曾担任会议副主席.1908年被选为匈牙利科学院通讯院士，1930年成为院士.波尔约数学会成立，他任数学会的名誉主席.

费耶尔的工作主要在调和分析方面.1900年他给出了傅里叶级数在$(c,1)$上可和性的经典定理，即费耶尔定理；1903年引入了适用于傅里叶级数求和的算术平均求和法，现称费耶尔求和法.这些不仅为正交展开理论给出了新的方向，而且通过应用，成了现代一般发散理论和奇异积分理论的起点.1910年他还建立了研究适用于各类发散现象的傅里叶级数奇异性的新方法.费耶尔对逼近理论和函数的构造理论也有重要贡献.1918年他解决了与任意若尔当曲线有关的关于复拉格朗日插值的龙格问题，后来还在实的拉格朗日插值和埃尔米特插值方面引入了一些新的方法.费耶尔与他人合作在复分析方面的成果对整函数的研究曾产生了重要影响.1922年，他还与里斯(Riesz，F.)合作证明了保形映射基础定理.1970年，在布达佩斯出版了他的两卷本文集.

洛特卡(Lotke，Alfred James，1880—1949)　美国生物数学家、人口统计学家、统计学家.生于奥地利莱伯格(现为乌克兰的利沃夫)，卒于美国新泽西州雷德班克.洛特卡在获得英格兰伯明翰大学科学学位后，曾去德国莱比锡大学和美国康奈尔大学学习生物课程.此后，曾在化学公司、美国专利局和美国国家标准局任职.1911—1914年任《科学美国人》副刊主编，后又到约翰斯·霍普金斯大学任职.1924年起任职于纽约的大城市人寿保险公司统计局.1938—1939年任美国人口协会主席，1942年任美国统计协会主席.

洛特卡主要研究人口统计、统计学及生物种群

动力学.他曾发展了人口理论的解析方法,给出了出生率、死亡率及年龄分布函数,使有关人口预测的模型比以前更接近实际.他还以沃尔泰拉(Volterra,V.)1926年的数学工作为基础,表述了两个竞争种群的增长规律,把该过程表示成两个链的微分方程.他对用数量表示的生物学上的变化采取了文化意识的观点,还提出过不少工业对生态影响的思想.在《物理生物学原理》(1925)一书中,他用数学物理的观点讨论了整个生物世界,这是一本该领域的重要著作.该书1956年再版时,改名为《数理生物学原理》.另外,他在《生物群的解析理论》(1934)一书中,充分阐述了他对人口变化与发展的观点,对现代人口理论有着重要影响.

伯恩斯坦(Бернштейн, Сергей Натанович, 1880—1968) 苏联数学家.生于敖德萨(Одесса),卒于莫斯科.1899年毕业于巴黎大学,后又进入巴黎综合工科学校学习.1904年在巴黎获得博士学位.1907年成为教授,并在哈尔科夫大学任教.1933年以后,在列宁格勒综合技术学校、列宁格勒大学、苏联科学院数学研究所工作.1929年当选为苏联科学院院士.

伯恩斯坦的主要贡献在多项式逼近理论、偏微分方程论和概率论等方面.伯恩斯坦及其学生的开创性工作奠定了函数构造论的基础,极大的推进了切比雪夫所创立的多项式逼近理论.他创立了一种求解二阶偏微分方程边值问题的新方法(伯恩斯坦方法),并以解决希尔伯特第19问题(1904)及试解第20问题(1908)而著称于世.在概率论方面,他最早提出(1917)并发展了概率论的公理化结构,建立了关于独立随机变量之和的中心极限定理,研究了非均匀马尔可夫链.他还用随机微分方程对概率论试行研究.

伯恩斯坦在变分法、泛函分析,以及现代数学的其他分支,也有很多成果.他的主要论著均收集在《伯恩斯坦文集》(1952—1964)中.

佩　龙(Perron, Oscar, 1880—1975) 德国数学家.生于弗兰肯塔尔(Frankenthel).慕尼黑大学的博士.毕业后相继任慕尼黑、蒂宾根、海德堡等大学的教授.在位势理论中,佩龙提出一种研究狄利克雷问题上、下函数的方法,这种方法1939年又由布雷洛(Brélot, M. E.)改进,现称佩龙-布雷洛方法.在积分论中,佩龙推广了积分概念,引进所谓佩龙积分和佩龙-斯蒂尔杰斯积分.在常微分方程论方面,他研究了某些类型方程解的渐近性态和稳定性.佩龙还研究了正规偏微分方程组的解法.著作有《无理数》、《连分数》等.

维布伦(Veblen, Oswald, 1880—1960) 美国数学家.生于衣阿华的迪科拉,卒于缅因州布鲁克莱恩.1898年获衣阿华大学学士学位,1900年获哈佛大学硕士学位,1903年获芝加哥大学博士学位,后留校任副教授2年;1905—1932年任教于普林斯顿大学,开始5年曾任校长,后任一般教授;1932—1950年任普林斯顿高等研究院教授.1923—1924年曾任美国数学会主席;1950年被选为当年召开的国际数学家大会主席.

维布伦主要研究射影几何和微分几何.在他和杨(Young, J. W.)合写的两卷本《射影几何》(Vol. Ⅰ, 1910; vol. Ⅱ, 1918)中,阐述了射影几何的公理法,去掉了当时蒙在几何学上的某种模糊性,对该领域的发展产生了较大影响.他在1922年出版的《拓扑学》一书,曾是10多年时间中惟一的一本以书的形式处理庞加莱(Poincaré, (J.-)H.)的先驱思想的著作,并发展了这一分支.他在微分几何方面曾做过广泛的研究,在他与怀特海(Whitehead, J. H. C.)合作的《微分几何基础》(1932)一书中,给出了第一个全局可微流形的定义,后经惠特尼(Whitney, H.)的改进,现已成为标准定义.另外,他还研究过旋量等.除学术研究之外,他还为美国数学会的发展做出过重要贡献.在普林斯顿高等研究院成立以后,他作为该研究院的第一个数学教授,为建立数学研究所(school)也付出了不少精力,使其成为了有国际影响的数学研究中心之一.

布劳威尔(Brouwer, Luitzen Egbertus Jan, 1881—1966) 荷兰数学家.生于荷兰奥弗希,卒于布拉里克姆(Blaricum).早年在阿姆斯特丹大学学习,1907年获博士学位,1912年成为教授.曾当选为德国、美国、英国等多国学术团体的成员.

布劳威尔是数学基础研究中直觉主义学派的创始人和主要代表人物.他把数学思维理解为一种创造性程序,声称数学基础只可能建立在这个程序上,数学必须受到基本的直觉的限制.这一基本思想最初出现在他的博士论文中,后来他又发表一系列论文加以论述.他最惊人的主张是不承认排中律,不准用反证法证明一命题为真.他的理由是:你没有构造出来,你就不能说"存在".这些观点最初不为大家所接受,现在大多数数学家都能理解构造性观点的重要性.此外,他在拓扑学和群论方面也有一定的贡献.

托尔曼(Tolman, Richard Chace, 1881—1948) 美国物理化学家、数学物理学家.生于马萨诸塞州的西牛顿(West Newton),卒于加利福尼亚州的帕萨迪纳(Pasadena).托尔曼曾在马萨诸塞理工学院学习化学工程学,1910年获得博士学位.先后在加利福尼亚大学、伊利诺伊大学、加州理工学院任教.1923年被选为美国全国科学院院士.第二次世界大战期间,被任命为美国国防研究委员会副主席和美

国战时联合政策委员会顾问.托尔曼在统计力学、热力学、宇宙学等方面都做出过贡献,他曾把数学方法用于诸学科中.1909年,他同别人合作撰写出了关于狭义相对论的著作,这是在该领域中第一部由美国人自己撰写的专著.

卡　门(Kármán,Theodore Von,又译冯·卡门,1881—1963)　匈牙利-美国数学家.近代空气动力学的奠基人之一.生于布达佩斯,卒于德国亚琛.1902年毕业于布达佩斯皇家工学院,1908年在普朗特(Prandtl,L.)的指导下,获德国格丁根大学博士学位.1929年定居美国,1936年人美国籍.他曾任多所大学教授;还参与创建了美国加利福尼亚理工学院空气动力学研究中心,并任主任.他培养了一大批空气动力学专家(如中国的钱学森等),多次被授予国家勋章等.

卡门的主要贡献在数学物理方面,以他的名字命名的有卡门势理论、卡门条纹;在薄层理论中,有卡门非线性方程.卡门一生发表了大量论著,有《工程中的数学方法》(1940)等.

特普利茨(Toeplitz,Otto,1881—1940)　德国数学家.生于德国布雷斯劳,早年在布雷斯劳大学学习,1905年获博士学位.先后在格丁根大学、基尔大学、波恩大学工作.1938年,由于其犹太血统而倍受迫害,迁居耶路撒冷,在希伯来大学任教,1940年在该地去世.特普利茨深入研究了无穷线性型、双线性型、二次型以及相伴无限矩阵等课题,并把所得结果广泛应用于分析学各领域.他对算子理论、凸空间理论和发散级数论等方面都颇有研究.他还曾探讨过有关数学史的课题,如希腊数学与哲学的关系等.著作有《无穷小分析的发展》等.

斯内德克(Smedecor,George Waddel,1881—1974)　美国统计学家.生于田纳西州孟菲斯,卒于马萨诸塞.曾获亚拉巴马大学和密歇根大学数学和物理学位.1913年任衣阿华州立大学数学助理教授,后很快升任教授.1933年任该校统计实验室主任,1947年退休.曾任美国统计协会主席.

斯内德克在方差分析与协方差分析、应用采样、数据分析、试验统计、统计方法等方面都卓有贡献.他曾多年担任生物与农业科学顾问,加上他个人的多年实验与从事统计方法的教学实践,使他成为改进统计的科学方法的先驱者之一.1937年,他出版了《统计方法在生物与农业实验中的应用》,后又与科克伦(Cochram,W. G.)合作将其增扩为《统计方法》(1980年第7版).该书使他成为国际统计学界的特别知名人物.该书第7版不仅英文版发行达20余万册,并还被译成了西班牙文、法文、日文等多种文字出版.1981年的《科学引文索引》记录了对该书的引用条目达3000条.他还在夜阿华大学为发展统计教育,特别是统计研究生教育做了大量工作.为了纪念他,衣阿华大学专门设立了斯内德克博士研究生奖,美国统计协会也设立了斯内德克奖.他还曾获得美国统计协会的威尔克斯纪念奖章.

巴纳赫维奇(Banachiewicz,T. A.,1882—1954)　波兰天文学家、数学家.生于华沙,卒于克拉科夫(Kraków).1904年毕业于华沙大学.1910—1915年在喀山附近的恩格加尔德托夫天文台工作,1915年任塔尔图大学副教授.1909年回国,任克拉科夫大学教授、校长.巴纳赫维奇主要从事天体力学的研究,他改进并发展了测定行星和彗星椭圆形轨道的高斯法.在数学方面,他主要从事矩阵理论的研究.他提出了"克拉科维矩阵",从而化简了天文学、大地测量学和天体力学方面的计算.他提出的矩阵理论也适用于自动化理论的数学研究.他一生共发表了数学、天文学、天体力学和大地测量学方面的论著230多篇(部).

韦德伯恩(Wedderburn,Joseph Henry Maclagen,1882—1948)　苏格兰-美国数学家.生于苏格兰福法尔(Forfar),卒于普林斯顿.早年在爱丁堡大学学习,1905—1908年在爱丁堡大学任教,在此期间编辑了《爱丁堡数学会文集》.1908年获科学博士学位,以后到普林斯顿大学任教.1912—1928年任《数学纪事》的主编.

韦德伯恩是迪克森和穆尔学派的代数学家.这一学派最杰出的成果就是韦德伯恩定理(1905):任何有限除环都是交换环.结合代数的基本定理之一,称为韦德伯恩-阿廷定理.1908年,他证明了关于半单代数结构的定理.1914年,他举出了第一个非交换环的例子.在群论中也有十分重要的韦德伯恩定理.他一生共发表38种论著,有《矩阵教程》、《超复数系》等.

谢尔品斯基(Sierpiński,Wactaw,1882—1969)　波兰数学家.生于华沙,卒于华沙.早年他在华沙大学学习,是沃罗诺伊(Вороной,Г. Ф.)的学生.1906年获博士学位.曾在利沃夫和华沙等地任教.第二次世界大战期间,他与苏联数学家卢津(Лузин,Н. Н.)等有过交往.1919年任华沙大学教授.1952年当选为波兰科学院院士,并担任过该院副院长.他还是荷兰、捷克斯洛伐克等多个外国科学院的院士,并得到阿姆斯特丹大学、巴黎大学和布拉格大学等多所学校的名誉学位.

谢尔品斯基是波兰数学学派的创始人之一.曾参与创办了《数学基础》杂志.他的主要贡献在集合论、数论、拓扑学和实变函数论方面.他一生共发表论著700多篇(部),有《连续统假设》(1934)、《关于方程的整数解》(1961)、《初等数论》(1964)等.

诺　特(Noether,Amalie Emmy 1882—1935)

德国女数学家.生于埃尔朗根的一个犹太数学世家,父亲马克思·诺特(Noether,Max)为埃尔朗根大学数学教授.诺特15岁时毕业于埃尔朗根女子中学,曾当过中学外语教师.1900年,考入埃尔朗根大学旁听(当时的大学均不准女生在校注册),选修数学、历史和外语.1903年,她转入格丁根大学继续钻研数学,并得到了闵可夫斯基(Minkowski,H.)、布卢门塔尔(Blumenthal)、克莱因(Klein,(C.)F.)和希尔伯特(Hilbert,D.)等名家的指导.1904年,返回埃尔朗根大学专攻数学.1907年获数学博士,导师为哥尔丹(Gordan,P.A.),论文题目是《三元双二次型不变量的完备系》.1916年,应希尔伯特邀请,到格丁根大学任"私人讲师",1919年,终于成为了格丁根大学的第一名女子讲师.1922年,她以自己的数学才能获得了教授称号,随后领导了一个数学讨论班,取得了一系列的重要成果.1928年,应亚历山德罗夫(Александров,А.Д.)等人的邀请,到莫斯科讲学一年.1932年受到在苏黎世召开的国际数学家大会的隆重欢迎,诺特的学术声誉达到了顶点.1933年,希特勒(Hitler,A.)上台后,她被迫迁居美国,在布林马尔学院任教,并去普林斯顿高等研究所讲学.1935年4月14日,诺特死于癌症.

诺特一生主要从事抽象代数的研究,共发表论文37篇.1921年,她的经典性论文《环中的理想论》的发表,标志着抽象代数现代化的开端,同时带出了一批有影响的数学人才.她还为爱因斯坦广义相对论给出了一种纯粹数学的严格方法,提出统一的数学概念,促进了相对论和基本粒子物理学的发展.此外,她在拓扑学的研究中亦有重要成果.

诺特终身未婚,将自己的全部精力奉献给了科学事业,为女性登上抽象科学高峰树立了榜样.

克赖希克(Kraitchik,M.B.1882—1957) 比利时数学家.生于俄国明斯克(Минск),先后在列日、布鲁塞尔和美国纽约工作.克赖希克是研究趣味数学的专家.他编写的数论课本和趣味算术问题大汇编(包括古典的和现代的问题)在西欧有很大影响.他还创办了一种趣味数学杂志.在他的倡导下,召开了两次关于趣味数学的国际会议(1935年,布鲁塞尔;1939年,巴黎).

贝特曼(Bateman,Harry,1882—1946) 英国数学家、物理学家.生于英国曼斯特,卒于美国加利福尼亚州的帕萨迪纳(Pasadena).毕业于剑桥大学三一学院,曾在英国的利物浦大学和曼彻斯特大学任教.1910年,移居美国,在布林马尔(Brynmawr)大学和约翰斯·霍普金斯大学工作,1913年获博士学位.他还是伦敦皇家学会会员和美国全国科学院院士,1935年又当选为美国数学会副主席.

贝特曼的主要贡献在偏微分方程、积分方程及其在物理学中的应用等方面.他很注意用特殊函数和积分求解偏微分方程.晚年,他将这些特殊函数和积分整理成册,给需要者带来很大方便,其中贝特曼展开式和贝特曼函数都颇为有名.此外,他还研究过洛伦茨(Lorentz,H.A.)和爱因斯坦(Einstein,A.)的电磁方程不变性问题.

贝　尔(Bell,Eric Temple,1883—1960) 英国-美国数学家、数学史家.生于英国阿伯丁(Aberdeen),卒于美国加利福尼亚州的沃森维尔(Watsonville).贝尔在英国受的高等教育,1902年去美国,在斯坦福、华盛顿和哥伦比亚大学继续深造.毕业后,他先后在芝加哥、哈佛等大学任教.1931—1933年任美国数学会主席.他的主要贡献在数值函数、解析数论、多周期函数、丢番图分析和数学史等方面.他撰写的《算术释义》曾获得博歇奖,其他著作,如《数学家》、《数学的发展》等在数学史上也有一定的价值.

米泽斯(Mises,Richard Martim Edler Von,1883—1953) 奥地利应用数学家、数理统计学家.生于奥地利莱姆伯格,卒于美国波士顿.1901—1906年在维也纳工业大学学习数学、物理和机械工程学.毕业后曾任捷克布尔诺大学助教.1908年,在维也纳获博士学位.1909年,任斯特拉斯堡大学应用数学副教授.第一次世界大战期间,他曾参加奥匈空军,任飞行员、技术教员和飞行理论教师工作.1919年任德国德累斯顿工业大学应力分析、流体与空气动力学教授,后又任柏林大学应用数学教授.1933年,德国纳粹上台,他离职应邀到土耳其伊斯坦布尔大学组织数学教育.1939年移居美国,到哈佛大学先任讲师,但很快即任空气动力学与应用数学教授.1921年,他在柏林创办了《应用数学与力学杂志》,后还任《应用力学进展》的主编.他还是欧洲与美国数个科学院的院士.

米泽斯是20世纪应用数学领域的大数学家之一.他对理论与实用统计分析、概率、几何、空气动力学、流体动力学等领域都有贡献.他早期的工作主要致力于阐述严格力学原理基础上的观察,使其清晰化,并得到理解,对20世纪上半叶应用数学的发展有重要影响.在他去世前不久,他的研究工作涉及到分析的有关课题及作图几何学、概率统计理论以及哲学等.他最大的贡献是在概率论的基础方面.他建立了"集体"("Kollektiv")的基本概念,这是一个经验序列(或总体)的理论模型,其中包括了极限频率存在性及其不变性.他把相对频率的极限值称为概率,并把一个集体中的所有极限频率的集合称为分布.因此米泽斯的概率论是一种频率理论,但没有构成随机过程理论,其长处在今天仍是概率论和观察大量随机事件规律之间的纽带.历史上曾对他的"集体"概念及"集体"中相对频率极限值的存在性、"不

规则性"有异议.经过长期讨论,现代数学方法证实了一个序列的相对频率极限值的存在性与其随机特性有联系,并证明了用不规则性的同时实现可定义一种与米泽斯的概率定义有关的收敛形式.他还把其概率方法推广到统计,讨论了分布函数的极限、统计函数的大数定律.1938年,他推广了经典极限定理.1918年,他还引入了特殊圆分布的一种,现称为米泽斯分布.

凯恩斯(Keynes,John Maynard,1883—1946) 英国经济学家、数学家.生于英国剑桥,卒于苏萨克斯(Sussex)的费尔(Firle).1905年毕业于剑桥大学,1906年以第二名的成绩考人国家行政机关.不久去印度公司服务,两年后回到剑桥大学参加经济学系的工作.同时,还受聘于皇家委员会,协理有关印度方面的财金与流通问题.1913年出版了《印度的通货和财政》一书.1915年任职于英国财政部,1919年作为英方的主要代表,出席了在巴黎举行的国际和平会议.他是伦敦皇家学会会员及其他科学文化机构的成员;曾还担任英国上议院议员.他在数学方面著有《概率论》(1921),在经济学方面著有《就业、利息和货币通论》(1936).

黑林格(Hellinger,Ernst,1883—1950) 德国-美国数学家.生于斯特利高(Striegau),卒于美国芝加哥.早年在海德堡大学、格丁根大学和布雷斯劳大学学习,1907年获博士学位.先后在格丁根大学、马尔堡大学、法兰克福大学任教.第二次世界大战期间,他因遭受纳粹政府迫害,1939年移居美国.1944年入美国籍,在伊利诺伊州西北大学任教.黑林格的主要贡献在分析学、数学史等方面,他研究了具无穷变元的二次型的正交不变量,建立了希尔伯特-黑林格二次型理论.他还引人了一类新的积分——黑林格积分.此外,他还编辑出版过希尔伯特(Hilbert,D.)、克莱因(Klein,(C.)F.)的一些著作.

卢　津(Лузин,Николай Николаевич,1883—1950) 苏联数学家.生于托木斯克(Томск),1901年进莫斯科大学学习.1905年后,两次出国留学.在巴黎和格丁根接触了当时欧洲的一批著名学者,这对他后来的学术生涯产生了重要影响.1914年,他在大学里开设了实变函数论的选修课,并举办专门化讨论班.1915年,他完成的学术论文《积分与三角级数》,包含了对以后函数可测性与测度理论的发展有决定影响的重要结果.1916年,他获得博士学位.1922年以后,他一直在莫斯科大学工作.1928年,他当选为在意大利博洛尼亚召开的国际数学家大会的副主席.1929年,他当选为苏联科学院院士.后来,他还领导了苏联科学院斯捷克洛夫数学研究所函数论研究室的工作.

卢津的主要贡献在函数论方面.1916—1920年,他和苏斯林(Суслин,М.Я.)、亚历山德罗夫(Александров,П.С.)共同创建了新的数学理论——描述性函数论.以后,他用了几十年的时间研究这一理论及数学论证问题,直至逝世.他还为经典分析和微分几何的应用做出了贡献.代表作《解析集合论及其应用》是对他及其学生们多年研究工作的总结.他撰写的微积分学教材,曾在国内外流行了20多年.

当儒瓦(Denjoy,Arnaud,1884—1974) 法国数学家.生于欧什(Auch),1922年成为巴黎大学教授.1931年任法国数学会主席,1942年当选为巴黎科学院院士,1962年任巴黎科学院院长.除此之外,他还是多国科学院和学术团体的成员.

当儒瓦的主要贡献在实变函数论方面.他解决了有关原函数的经典问题,推广了黎曼积分和勒贝格积分,引进了以他的名字命名的当儒瓦积分.他还严格地证明了具有完备、处处间断的奇点集合有界函数的结构定理.此外,他对复变函数论、拟解析函数论、拓扑学和连续统理论等方面也做出了重要的贡献.他所建立的环面上的微分方程定性理论已由其他数学家发展和普及.关于三角级数绝对收敛性的当儒瓦定理也很著名.

伯克霍夫(Birkhoff,George David,1884—1944) 美国数学家.生于密歇根,卒于坎布里奇.1907年在芝加哥大学获博士学位.毕业后,在威斯康星、普林斯顿、哈佛等大学任教.1925年任美国数学会主席,1937年任美国科学发展协会主席.

伯克霍夫在渐近逼近、微分方程、差分方程、施图姆-刘维尔理论和广义黎曼问题等方面都有贡献.1912年,著名数学家庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)在研究三体问题时提出一个重要的几何定理,并宣称在一般情形下不能证明.伯克霍夫在1913年证明了这个定理,立即轰动了世界.他还推广了冯·诺伊曼(von Nenmann,H.)的工作,建立了强形式的遍历定理,这在近代分析中有广泛的应用.继爱因斯坦(Einstein,A.)之后,他提出了自己的引力理论.他开创的美学的数学理论已广泛地应用于美术、音乐和诗歌等方面,并促进了这些学科的发展.著作有《相对论和近代物理学》、《动力系统》、《基础几何学》等.

黑　利(Helly,Eduard,1884—1943) 奥地利数学家.生于维也纳,毕业于维也纳大学.1921—1938年在该校工作.1938年迁居美国,任新泽西州两所学院的教授,并在伊利诺伊工学院兼职.黑利的主要贡献在拓扑学和泛函分析方面.他建立的黑利选择原理和关于函数弱收敛性的黑利定理在泛函分析中有大量的应用.1913年,他发现了关于凸集交集的定理,后被应用于拓扑学和函数逼近问题.在拓扑向量空间中有著名的闵科夫斯基-黑利方法.他还

研究了黎曼-斯蒂尔杰斯积分，得到在该积分符号下取积分函数极限值的定理，也称为黑利定理.

莱夫谢茨(Lefschetz，Solomon，1884—1972) 美国数学家. 生于莫斯科，卒于普林斯顿. 在巴黎长大，1905 年移居美国，1912 年入美国籍. 1911 年获克拉克大学数学博士学位. 1911—1913 年任教于内布拉斯大学；1913—1925 年任教于堪萨斯大学，1919—1923 年任副教授，1923—1925 年任教授；1924—1925 年任普林斯顿大学访问教授，后留在该校任教，1925—1928 年任副教授，1928 年开始任教授，1945 年任数学系主任，1953 年退休. 1925 年，他被选为美国全国科学院院士. 1935—1936 年任美国数学会主席. 1945—1947 年为墨西哥国立大学交流教授. 莱夫谢茨从普林斯顿大学退休后，曾到过墨西哥城，并在那里建立了一个数学学派. 此外，他还是巴黎科学院外籍院士、英国伦敦皇家学会会员.

莱夫谢茨的贡献主要在代数几何、代数拓扑和微分方程等领域. 他在代数曲面簇的一般超越理论、高维簇研究方面都有重要贡献. 1923—1942 年间，他主要研究代数拓扑，他在不动点理论、对偶性理论等方面都有重要的成果，并创立了相交理论. 1942 年以后，他主要研究微分方程，并得到了二维系统在孤立临界点附近所有通过临界点的解析曲线等. 他还对控制论进行了研究. 他曾于 1919 年获巴黎科学院博尔迪恩奖，1921 年获美国数学会博歇纪念奖，1956 年获林琴科学院费尔特兰尼利国际奖，1964 年获美国国家科学奖章. 著作有《拓扑学》(1930)、《代数几何讲义》(1936—1937；Part Ⅱ，1937—1938)、《代数拓扑》(1942)、《微分方程，几何理论》(1962；中译本，1965，上海科学技术出版社)、《非线性自动控制系统的稳定性》(1964)等.

戈卢别夫(Голубев，Владимир Васильевцч，1884—1954) 苏联数学家、力学家. 生于谢尔吉耶夫(Сергиев)，1908 年毕业于莫斯科大学，1917 年获纯粹数学博士学位，同年任教授. 1932 年以前在高等学校任教，1932 年起在茹科夫斯基空军研究院工作. 戈卢别夫主要研究解析函数论和微分方程的解析理论，现解析函数论中有“戈卢别夫-普里瓦洛夫定理”. 他得到了某些非线性微分方程的积分法，在边界层理论中，有以他的名字命名的积分变换. 他还深入研究了微分方程的定性理论，他把数学方法广泛应用于空气力学，并取得了重要的成果. 他的主要著作有《微分方程解析理论讲义》(1950；中译本，1956，高等教育出版社)、《单值解析函数 · 自同构函数》(1961). 此外，他还撰写了一些有关科学史方面的著作.

普朗谢雷尔(Plancherel，Michael，1885—1967) 瑞士数学家. 生于弗里堡(Freiburg)，曾就学于格丁根大学和巴黎大学. 毕业后，先后在弗里堡大学、弗里堡理工科大学、苏黎世理工科大学任教. 在函数论方面，他得到了重要的普朗谢雷尔定理，这是调和分析中的重要结果之一. 他还研究了群的酉表示，建立了普朗谢雷尔公式和普朗谢雷尔测度. 在积分几何中，他提出了关于极限球面的重要定理.

托内里(Tonelli，Leonida，1885—1946) 意大利数学家. 生卒地不详. 他先后在波伦亚(Bologna)、罗马和比萨等地的大学任教授，其主要贡献在变分学方面. 他最早研究了变分学中的直接方法. 他试图以积分的极小曲线存在性定理代替微分方程的存在性定理. 在其著作《变分法基础》中，阐明了这种观点. 他引进了泛函的下半连续性的概念，研究了曲线的集合，给出了一些曲线的极限存性定理，还研究了通常的含参变量的积分和非参变量积分. 他还导出了变分法的标准形式问题的四个典型的必要条件，证明了在所考虑的曲线类中存在一条曲线使积分达到极大值，建立了有关绝对极值和相对极值的定理. 此外，托内里还在三角级数、实变函数论、积分方程等方面得到了一些结果.

李特尔伍德(Littlewood，John Edensor，1885—1977) 英国数学家. 生于英格兰罗切斯特，卒于剑桥. 毕业于剑桥大学三一学院. 1907—1910 年任曼彻斯特大学讲师；1910 年起任教于剑桥大学三一学院，1927 年开始任教授，直至 1950 年退休. 1916 年被选为伦敦皇家学会会员，1948 年成为瑞典和丹麦科学院、1950 年成为荷兰科学院外籍院士. 1925 年起为格丁根科学院通讯院士，1957 年被选为巴黎科学院通讯院士. 1941—1943 年任伦敦数学会主席，曾还获剑桥大学等多所大学荣誉博士.

李特尔伍德是 20 世纪初形成的英国分析学派的重要人物之一. 从 1912 年开始，他曾与哈代(Hardy，G. H.)进行了长达 35 年的合作. 他们在丢番图逼近及其应用、陶伯定理、调和分析、黎曼 ζ 函数、可加数论问题、不等式等方面都有重要贡献. 他们用圆法研究了黎曼猜想. 1931—1940 年间他和佩利(Paley，R. E. A. C.)合作创立了 $L^p(p>1)$空间中傅里叶级数的理论，现称为李特尔伍德-佩利理论. 该理论在近代调和分析中起着重要作用. 他还在阿贝尔逆定理、积分函数、三角多项式、微分方程等多方面做有贡献. 他 20 世纪 50 年代在天体力学方面的工作曾在 1960 年获伦敦数学会高级贝维克奖；他还曾在 1929 年获伦敦皇家学会皇家奖章；1943 年获西尔维斯特奖章，1958 年又获科普利奖章，都是由皇家学会授奖；1938 年还获伦敦数学会德 · 摩根奖章. 著有《实变函数论基础》(1926；1956 年修订后第三版)、《不等式》(中文，科学出版社，1952)、《实与复分析中的某些问题》(1968)等专著. 他的论文除与

哈代合作的收入了《哈代文集》外，都收入了《李特尔伍德文集》(2卷，1982)中.

施派泽尔(Speiser, Andreas, 1885—1970) 瑞士数学家.生于巴塞尔(Basel)，卒于巴塞尔.早年就学于柏林大学、伦敦大学、巴黎大学，在格丁根大学获博士学位.1911年后，任教于法国斯特拉斯堡大学及瑞士苏黎世大学、巴塞尔大学.施派泽尔的主要贡献在近世代数，特别是群论方面.在伽罗瓦理论中，有希尔伯特-施派泽尔定理.著有《有限群论》(1923)等著作.

特恩布尔(Turnbull, Herbert Westren, 1885—1961) 英国数学家、数学史学家.生于英国伍尔弗汉普顿(Wolverhampton)，卒于威斯特摩兰.1907年通过剑桥大学数学荣誉学位考试，1909年获史密斯奖.曾任教于剑桥大学、利物浦大学，1913—1915年，任教于香港大学.1921年起，任圣·安德鲁斯大学数学教授，直至1950年退休.1932年被选为伦敦皇家学会会员.

特恩布尔在不变式理论方面有重要贡献.1928年出版的《行列式、矩阵和不变式理论》一书是当时英国这一领域较有影响的教科书.但他的工作仅在古典代数理论方面.另外，他对数学史的研究也较有建树，1929年出版的《大数学家》是一本极好的教材.他退休以后，曾从事17世纪的数学史研究，并在英国皇家学会支持下，于1959—1961年出版了三卷本的《牛顿通信集》；1945年又出版了《牛顿的数学发现》.他还曾获基思奖章和爱丁堡皇家学会的冈宁奖.

布 伦(Brun, Viggo, 1885—1978) 挪威数学家.生卒地点不详.早年就学于奥斯陆、格丁根、巴黎等地，并获博士学位.曾当选为挪威科学院院士.曾在特隆赫姆(Trondheim)和奥斯陆等地大学任教授.布伦的主要贡献在数论方面.他建立的布伦筛法与厄拉托塞双重筛法相类似；他得到了关于孪生素数的定理和著名的布伦-蒂奇马什定理(不超过x且与q同余l的素数个数的函数$\pi(x,q,l)$的定理).撰写有《厄拉托塞筛法与哥德巴赫定理》(1920)等专著.在组合分析中，他引进了排列数的更一般的定义.1962年，他还出版了一本论述古代挪威计算技巧的著作.

哈 尔(Haar, Alfréd, 1885—1933) 匈牙利数学家.生于布达佩斯，卒于塞格德(Szeged).1903年赢得第一届厄特弗什(Eötvös)数学竞赛奖.次年留学格丁根，1909年在希尔伯特(Hilbert, D.)主持下通过博士论文答辩.1917年任教授.1920年，哈尔参与创办了《数理科学》杂志.早年从事分析理论研究，发现了有关正交系的一些奇异性质；后来研究群论，给出群的“哈尔测度”定义，1932年证明了每一局部紧群均具有不变测度，这一定理已成为近世代数学和拓扑学的基石.

外 尔(Weyl, Claude Hugo Hermann, 1885—1955) 德国数学家.生于汉堡附近的埃尔姆斯霍恩，老年因心脏病突发卒于苏黎世.1904年入格丁根大学学习，按德国惯例，1905—1906年到另一大学(慕尼黑)学习一年，1908年获格丁根大学博士学位，1910年成为该校不支薪讲师.1913—1926年，任瑞士苏黎世工业大学教授；1926—1927年受聘于格丁根大学.1928—1929年，任美国普林斯顿大学客座教授.1930年回格丁根接替希尔伯特(Hilbert, D.)的教授职位，1933年，任格丁根数学研究所所长；同年应邀赴美任新成立的普林斯顿高等研究院数学教授，直到1951年退休为荣誉教授.

外尔的研究工作涉及分析、数论、典型群理论及其在量子力学中的应用、统一场论等多个数学与理论物理领域，为20世纪的数学发展做出了重要贡献.早期他研究奇异积分方程问题及其在微分方程的特征值问题上的应用.1911年开始，他的兴趣转向广泛的数学领域，首先研究了黎曼曲面.1913年他撰写出版了《黎曼曲面的概念》一书.在书中，他讨论了流形拓扑，给出了曲面和黎曼曲面的定义，奠定了黎曼曲面的拓扑基础，还证明了曲面上的微分与一维闭链的对偶性.1914年，他又研究了实数(mod 1)一致分布问题，给出了一致分布的一个充分必要条件，现称为外尔原理，建立了估计指数和

$$S=\sum_{n=1}^{N}\mathrm{e}^{2\pi i(f(n))}$$

的外尔不等式.该不等式后来成了黎曼ζ函数估计中的基本工具.他到苏黎世后，曾与爱因斯坦(Einstein, A.)共事，因此受其影响，对广义相对论并通过它对微分几何进行了系列研究，并于1918年出版了《空间、时间、物质》一书.书中他广泛地介绍了广义相对论，并结合讨论了有关哲学问题，提出了最初的引力与电磁的“统一场理论”.他在这方面的工作对微分几何有重要影响.他在n维流形上确定了无限小仿射结构，而且发现了使道路的全体不变的系数变换就是仿射联络的射影变换，促进了射影微分几何的快速发展，并澄清了李代数的几何理论.1925—1926年，他较集中地研究了半单李群的表示理论，在李群的整体研究方面有重要贡献，统一了半单李代数表示方面的整体与无限小的观点.1927年，他和彼得(Peter, F.)合作建立了紧群理论.他在紧李群的酉表示方面也有重要贡献.他还和冯·诺伊曼(von Neumann, J.))等弄清楚了殆周期函数理论与群表示的关系，特别是拓扑群上殆周期函数与紧群表示理论间的关系.此外，他还在数理逻辑方面有重要贡献.后来曾与其儿子合作研究了亚纯函数，

并合著了《亚纯函数与解析曲线》(1943). 他还著有《典型群》(1939)、《代数数论》(1940)等多种专著. 他的论文全部收入了《外尔文集》(I — Ⅳ)(1968).

沃　森(Watson, George Neville, 1886—1965) 英国数学家. 生于英格兰威斯沃特, 卒于英格兰利明顿. 1904 年入剑桥大学三一学院学习, 1908 年毕业. 1910 年获史密斯奖, 并成为剑桥大学三一学院的研究员. 1914 年任伦敦大学学院助理讲师, 1915 年升为助理教授. 1918 年起任伯明翰大学教授, 1951 年退休. 1932—1933 年任英国数学协会主席; 1933—1935 年任伦敦数学会主席, 1935—1936 年任伦敦数学会副主席. 1919 年被选为伦敦皇家学会会员, 1949 年还成为爱丁堡皇家学会会员.

沃森曾在复变函数方面有重要贡献. 工作涉及出自差分方程、微分方程、数论、特殊函数和渐近展开等问题. 他在 1915 年出版的《现代分析教程》一书(与其老师威塔克(Whittaker, E.)合作)中, 阐述了很多出自应用的特殊函数的性质. 他 1922 年出版的《贝塞尔函数论》一书, 书中所用的很多符号已成为标准, 该书中还包括了大量的表格, 其中相当一部分是他自己计算后编列出来的. 在第二次世界大战期间, 该书曾被英国政府部门的科学机构广泛使用, 以致供不应求. 1928 年到第二次世界大战这段时间内, 他曾应邀整理编辑了印度数学家拉马努金(Ramanujan, S. A)的笔记(开始与人合作, 主要工作由他完成), 在书中他补充了不少定理的证明. 在这期间他还在奇异模(Singular moduli)方面大大推广了拉马努金的成果, 并给了模拟 θ 函数(mock theta function)以恰当的基础, 他还给出了以他名字命名的变换. 沃森曾于 1912 年获丹麦皇家科学院金质奖章, 1946 年获伦敦皇家学会的西尔维斯特奖章, 1947 年获伦敦数学会德・摩根奖章. 他一生曾发表数学论文 150 多篇, 出版专著和教科书 3 本.

泰　勒(Taylor, Geoffrey Ingram, 1886—1975) 英国数学家. 生于伦敦, 卒于剑桥. 早年就读于剑桥大学, 1911 年获硕士学位. 1910 年成为剑桥大学三一学院的研究人员. 第一次世界大战期间曾从事战时工作, 并参加过皇家空军. 1919 年返回剑桥任教, 1923—1951 年任皇家学会在剑桥大学的研究教授, 1951 年退休. 1944 年被封为爵士.

泰勒主要研究应用数学, 1919 年提出了用相关系数描述湍流的思想, 1921 年发表了连续运动的扩散理论. 1923—1927 年, 他研究了与金属强度有关的问题. 1923 年给出了由表面测量确定内部应变的几何, 并与人合作发现了应变与结晶轴的关系. 1934 年, 他建立了一个数学模型, 对金属结晶研究有重要意义, 后来被人发展成了金属结构错位理论. 1935 年, 他用对射思想阐述了给定时刻的湍流. 1940 年当有人问他在一点突然释放出大量能量的力学效果时, 他就猜测一定有人发现了释放核能的方法, 并于 1941 年给出了表示这种能量释放时所产生的冲击回波的数学解. 这一工作当时属机密, 到 1950 年才发表, 这时苏联的谢多夫(Седов, Л. И.)和美国的冯・诺伊曼(von Neumann, J.)等人也发现了同样的解. 该解可由不同测量点所测得的冲击压力估计出一个原子弹爆炸时所产生的能量. 后来, 他还在流体动力学、电磁力学等方面做过不少研究工作. 他曾先后于 1933 年和 1944 年获伦敦皇家学会皇家奖章和科普利奖章. 1960—1971 年, 出版了他的四卷本科学论文集.

莱　维(Lévy, Paul - Pierre, 1886—1971) 法国数学家. 生于巴黎, 卒于巴黎. 1904—1906 年就学于巴黎综合工科学校, 是阿达马(Hadamard, J. (-S.))的学生, 毕业后曾任工程师, 后从事研究与教学工作, 并任教于圣艾蒂安矿业学校、巴黎矿业学校. 1913—1959 年, 在巴黎综合工科学校任教, 1920 年聘为教授. 1964 年被选为法国科学院院士.

莱维的主要贡献在泛函分析、概率计算、随机过程等领域. 他以泛函分析研究开始其学术生涯, 但很快就转向概率计算. 在后一领域他发现了很多重要工具, 其中有特征函数, 即分布函数的傅里叶变换, 曾对特征函数进行了分类, 开辟了概率的不定可除律的广泛领域, 发展了可稳定、半可稳定及拟稳定律等概念. 他给出了分布律的莱维距离, 并在随机拓扑, 特别是随机序列领域取得了许多基础性成果. 他引入了分布的集中函数. 1938 年开始, 他系统地研究了布朗运动, 倡导了研究随机过程的概率方法. 他和维纳(Wiener, N.)一起发现了现被称为维纳-莱维过程的一种布朗运动过程; 还发现了弧正弦律. 他在概率论领域还建立了独立增量过程的一般理论. 他 1948 年出版的《随机过程与布朗运动》一书, 是随机过程理论方面的一本经典著作. 他还研究过马尔可夫链、马尔可夫过程、鞅、对策论、数学哲学等. 他的专著有《随机变量的加法理论》(1937)、《泛函分析的具体问题》(1951)等. 现已出版了他的 6 卷本文集.

比伯巴赫(Bieberbach, Ludwig, 1886—1982) 德国数学家. 生卒地不详. 1914—1920 年, 他在法兰克福大学工作, 后成为柏林大学教授.

比伯巴赫的主要贡献在函数论、微分方程理论、几何学等方面. 他对单位圆内全纯函数族进行了定量的研究, 建立了系统的理论. 1916 年, 他基于各种畸变定理中的极值函数, 提出了一个著名的猜想, 称为比伯巴赫猜想: 在单位圆内, 单叶解析函数的系数 $|a_n| \leqslant n$ 对所有 n 都成立. 许多学者对这一猜想研究了几十年, 终于在 1984 年为美国的布朗基

(Branges,L. de)所解决. 比伯巴赫还研究了保角映射的某些问题,证明了某些类型的 n 连通域保角映射到 n 叶圆盘的可能性等. 他在解决希尔伯特第 18 问题(用全等多面体构造空间)中做出了杰出贡献. 他研究几何作图可能的条件,证明了如果用直角尺和圆规,则三等分任意角和立方体倍积问题作图是可能的. 著作有《函数论教程》(1930—1931)和《几何作图理论》(1952)等.

施坦因豪斯(Steinhaus,Hugo Dyonizy,1887—1972) 波兰数学家. 生于亚斯罗,卒于弗罗茨瓦夫. 1906 年入利沃夫大学学习哲学和数学,后到德国格丁根大学学习,从师于希尔伯特(Hilbert,D.)和克莱因(Klein,(C.)F.). 1911 年获博士学位. 1916—1941 年任教于利沃夫大学,1920 年为副教授,1923 年晋升为教授. 从 1945 年起,他定居弗罗茨瓦夫,并任弗罗茨瓦夫大学数学、物理与化学系主任,弗罗茨瓦夫数学会首任主席. 1929 年,他和巴拿赫(Banach,S.)创办了《数学研究》杂志,两人同任主编. 另外,他还曾任波兰科学院数学研究所机关刊物《数学的应用》的主编.

施坦因豪斯和巴拿赫(Banach,S.)在利沃夫创立了有名的波兰数学学派,1945 年,他又在弗罗茨瓦夫形成了一个数学中心. 他的研究工作涉及分析、概率论等,早期他曾研究三角级数及傅里叶级数. 他第一次给出了系数趋于 0,处处发散的三角级数的例子,还给出了在一个区间内收敛,而在另一区间发散的例子. 他在正交级数方面也有重要贡献,并与他人合作著有《正交级数论》(1937). 1927 年,他还和巴拿赫合作证明了共鸣定理,即巴拿赫-施坦因豪斯定理. 1923 年,他还第一次以测度论为基础用公理处理法讨论了掷硬币问题. 他是研究概率论中独立随机变量收敛性的先驱者. 此外,他还为数学在医学、供电、经济、技术等方面的应用做了不少工作. 他还是一位科普作家,著有多部数学通俗读物,其中以《数学万花镜》(第二版,1950;中译本,开明书店,1952)一书最为著名,曾被译成了 14 种文字出版.

玻　尔(Bohr,Harald,1887—1951) 丹麦数学家. 生于哥本哈根,卒于哥本哈根. 他是著名物理学家玻尔(Bohr,Niels Henrik David)的弟弟. 早年在哥本哈根大学学习,以后到格丁根大学、剑桥大学和牛津大学深造,与兰道(Landau,E. G. H.)、哈代(Hardy,G. H.)、李特尔伍德(Littewood,J. E.)等著名数学家关系甚密. 1910 年获博士学位,1915 年成为教授.

玻尔主要研究狄利克雷级数理论. 他在 1910 年的博士论文中,探讨了切萨罗(Cesàro,E.)求和方法在狄利克雷级数中的应用,并将算术、几何和函数理论结合起来进行研究,在函数的分布理论方面取得了成果. 他在殆周期函数理论方面的工作对数学界有一定影响. 他还与兰道合作,在黎曼 ζ 函数方面做出贡献,得到了玻尔-兰道定理(1914).

埃文斯(Evans,Griffith Conrad,1887—1973) 美国数学家. 生于波斯顿,卒于加利福尼亚州沃尔纳特克里克. 早年在哈佛大学学习数学、物理、哲学,1907 年获学士学位,1910 年获博士学位,后又到欧洲学习了 2 年. 1912—1934 年,任教于赖斯学院,1934—1955 年,任教于伯克利加利福尼大学,1954 年退休成为荣誉教授. 1933 年被选为美国全国科学院院士;1939—1940 年,曾任美国数学会主席.

埃文斯主要研究积分与泛函方程、调和函数及位势理论. 1916 年,他在二阶偏微分方面用定义域上一阶积分表达式代替了二阶偏微分表示式,并推导了相应的格林定理. 1919 年,作为完全可加的点集函数,他引入了质量的概念,1923 年,他与人合作用此概念给出了圆和球面的广义泊松积分的充分必要条件. 1929 年,他又与人合作解决了光滑曲面上新类型的狄利克雷和纽曼边值问题. 1929 年,凯洛格(Kellogg,O. D.)给出了被称为凯洛格引理的一个猜想:如果 F 是一个正容量的有界集,它包含一个正则的边界点. 1933 年,埃文斯用完全可加集函数证明了此猜想. 1935 年,他还发表了有关位势与正质量的内容广泛的专题报告. 1940 年,他还证明了在以给定的容量为零的空间简单曲线为边界的曲面中,存在一个容量最小的曲面. 后来他又推广了这类问题. 此外,他还在经济学领域的动态经济学等方面发表了不少文章. 著作有《数理经济学引论》(1930)、《泛函及其应用》(1964)等.

斯米尔诺夫(Смирнов, Владимир Иванович, 1887—1974) 苏联数学家. 生于圣彼得堡,1910 年毕业于圣彼得堡大学. 相继在圣彼得堡交通道路工程学院、圣彼得堡大学、苏联科学院地震研究所和数学研究所工作. 1936 年获博士学位. 1943 年当选为苏联科学院院士.

斯米尔诺夫的主要贡献在复变函数论、弹性理论和泛函分析等方面. 他的许多研究课题是与索伯列夫(Соболев,С. Л.)合作进行的,他们建立了解决具平面边界的弹性介质中波动问题的新方法,引进了具有正测度的欧几里得空间中共轭函数的概念. 他在偏微分方程、变分学、应用数学和数学史等方面的研究也取得了重要成果. 最著名的著作是 5 卷集的《高等数学教程》,它实际是一部数学百科全书,在苏联国内重印达 20 多次,并荣获斯大林奖. 这部著作有多种译本流行. 他还领导了物理数学史委员会的工作,以及由他创立的列宁格勒数学学派、列宁格勒大学数学和力学研究所的工作. 他精心培养的许多学生,后来都成了优秀的数学家.

安德森(Anderson, Oskar Johann Viktor, 1887—1960) 统计学家、计量经济学家.国籍不详.生于俄国明斯克,卒于德国慕尼黑.早年在喀山大学和圣彼得堡大学学习数学、物理、经济与法律.毕业后相继在喀山高等商业学校、保加利亚瓦尔纳高等商业学校、德国基尔大学任教,后又任慕尼黑大学数理统计教授.曾获维也纳大学和德国曼海姆高等经济学校等荣誉博士学位.他还是德国、英国、美国及国际性的7个统计学会的成员.

安德森的主要贡献在统计学和经济学方面,是中欧的知名统计学家.他的研究工作涉及概率论、调查采样、微量差分法、时间序列分析、经济计量学等.他是现代采样调查的先驱者之一.他在俄国统计学派和英美统计学派之间架起了桥梁.他在统计与经济的文献学方面曾做出了重要贡献.1957年,他给出了“社会统计概率”的定义.1913—1917年,他作为俄国的代表参加了土耳其斯坦农业采样调查.他对1926年保加利亚农业样本数据调查及1936年农业土地及产量样本调查有极重要的影响,他还强调了采样数据必须以概率模型为基础.他对微量差分法有重要贡献,并曾受到一些知名统计学家的注意,在应用计量经济学中曾被普遍应用.

安德森还曾是计量经济学会的发起人之一.他在20世纪30年代和40年代曾对计量经济学做出过重要贡献.1931年,他以统计观点验证了钱的数量理论.他在1935年关于农业和工业价格发散运动的工作,对农业经济计量学有着重要意义.他对生产指数和生活消费指数以及链指数等指数理论也有重要贡献.1955年和1966年,他提出了相关系数与自相关系数测试的非参数方法以使相关与回归理论适用于社会科学.他还用德文写过多种有关统计理论的教科书.他的研究工作和编写的教材在德国和使用德语的国家有着深远的影响.

薛定谔(Schrödinger, Erwin, 1887—1961) 奥地利学者.生于维也纳,1910年毕业于维也纳大学.曾在奥地利、德国、瑞典、美国工作.1956年返回家乡,任维也纳大学教授.薛定谔的主要贡献在数学物理、相对论和原子物理等方面.他是量子力学的创始人之一.他提出了量子力学的基本方程,被称为薛定谔方程.他还给出了各种特殊情况下的解法.由他发展起来的数学形式主义和他所引进的波动函数是研究量子力学及其应用的有力的数学工具.1933年,薛定谔获诺贝尔物理学奖.

斯托伊洛夫(Stoilow, Simion G., 1887—1961) 罗马尼亚数学家.生于布加勒斯特,早年在巴黎大学数学系学习.回国后在布加勒斯特和切尔诺夫策的各大学工作.1916年获博士学位.1923年成为教授.1945年当选为罗马尼亚科学院院士.曾任罗马尼亚科学院物理数学科主任和罗马尼亚科学院数学研究所第一任所长.

斯托伊洛夫主要研究复数域内的偏微分方程理论、实变函数的一般理论、拓扑学、解析函数的拓扑理论等.他还研究了零测度集的分类.在他所著的《解析函数论的拓扑原理教程》(1938)中,他给出了解析函数的拓扑性质,奠定了这一新的数学分支的基础.他还以十分有效的方法解决了解析函数论的第二个基本问题——确定黎曼面的覆盖面的问题.他的工作对拓扑学和复变函数论都有重要意义.

黑　克(Hecke, Erich, 1887—1947) 德国数学家.生于波森(Posen),卒于丹麦的哥本哈根.早年在布雷斯劳大学、柏林大学和格丁根大学学习,1910年获博士学位.他是希尔伯特(Hilbert, D.)和克莱因(Klein, (C.) F.)的助手.1915年受聘为巴塞尔大学教授,1919年成为汉堡大学教授.他还担任过几种数学杂志的编辑,曾被选为多个学术机构成员.黑克的主要贡献在解析数论方面.特别是他研究了复乘积的性质、代数数域上广义的狄利克雷L级数、椭圆函数理论、二次域等课题.

戈　多(Godeaux, L. A., 1887—1975) 比利时数学家.生于莫尔朗韦(Morlanwelz),早年就学于列日大学.1920—1925年任军事学校教授,1925—1928年任列日大学教授.戈多在不同的数学领域中共发表论著700多篇(部),以射影几何、代数几何和数学史方面的工作最为突出.他曾获多种奖励,包括巴黎科学院授予的庞斯列奖.

波伊亚(pólya, George, 1887—1985) 美籍匈牙利数学家.生于匈牙利布达佩斯,卒于加利福尼亚帕洛阿托.早年就学于布达佩斯厄特沃什·洛兰德大学,1912年获博士学位.1912—1913年在格丁根大学进修.1914—1940年在苏黎世联邦工学院任教,初任数学助理教授,1920年升副教授,1928年升教授,同年任系主任.1940年到美国,在布朗大学和史密斯学院任客座教授;1942年到斯坦福大学任教,1953年退休.1947年被选为巴黎科学院几何通讯院士;1974年被选为美国艺术与科学学院院士;1976年被选为美国全国科学院院士.除此之外,他还是匈牙利科学院、国际哲学科学院、纽约科学院院士.

波伊亚的研究工作涉及分析、根的位置、概率、数论、应用数学、数学方法、问题解决及组合论等多个领域.他在概率论中的分布的傅里叶变换与收敛性、随机走动、瓮方案等方面,分析中的幂级数的系数序列与级数所确定的解析函数间的联系、一般解析理论等方面,都做出了贡献.在组合论中他的枚举定理,解决了一类非常一般的组合问题,有着深远影响.波伊亚在一生中的后50多年中,他在数学教育

与数学教师的培训方面做了大量的工作，特别是20世纪50年代开始，他在这方面的论著和讲学成了美国乃至世界范围内在数学教育方面的一个强有力的声音.有人评价“他在这方面的工作及思想是对现实世界的冲击；他的工作是在关系到理解与教授数学思想实质的问题上有科学性进步的基础”.他的《怎样解题》(1945；中译本，1982，科学出版社)是第一本阐述在数学教育中如何进行启发式教育的图书.自出版以来不仅销售已过百万册，而且已被译成17种文字出版.他和塞格(Syegö，G.)合作的《分析原理与问题》(1924)也是一本很有影响的图书，它是有关分析方面的一本学术性著作，其写作风格也是启发式的.他还曾制作过两部数学教育方面的影片：《让我们教猜想》(1968)和《猜想和证明》(1972).1963年，他曾获美国数学协会的杰出数学服务奖.他还著有《数学与猜想》(1954，两卷本；中译本，1984，科学出版社)、《数学发现》(1962，两卷本；中译本，1979，1981，内蒙古人民出版社)等书.在1972年和1975年，还出版了他的两卷本文集.

拉马努金(Ramanujan，Srinivasa Aaiyangar，1887—1920) 印度数学家.生于马德拉斯(Madras)省坦焦尔(Tanjore)县贡伯伐纳姆(Kumbakonam)附近的一个小村镇里，家境十分贫寒.他是在亲友的资助下读的书.他7岁入中学，对数学有特殊的运算能力和惊人的记忆力，15岁(1903年)时，他借到一本卡尔(Carr)著的《纯粹数学纲要》深受启发，开始研究方阵，然后研究几何，后来转向代数.他还曾当过会计，尽管生活飘泊不定，但他始终没有放弃数学的学习和研究.1911年，他在印度数学会的学报上发表了第一篇论文，题目是《关于伯努利数的一些性质》，引起了学术界的注意.1913年，他将自己的研究成果寄给英国数学家哈代(Hardy，G. H.)，受到哈代的重视.1914年应哈代的邀请到剑桥大学三一学院从事研究工作.在哈代的指导下，他先后在英国、法国、德国等国家的著名刊物上发表了38篇论文和注记.1918年，他还被选为伦敦皇家学会会员.1920年患肺病死于印度，年仅33岁.

拉马努金主要从事解析数论的研究，他独立地发现了ζ函数的性质；还曾得到一系列重要的数学结论，有的直接关系着当代数学难题的解决.虽然一些数学结论，他只是凭直观和归纳得出，缺乏严格的证明，但他的结果却闪烁着智慧的光芒.伯恩特(Berndt，B. C.)在1985—1996年间先后出版了五卷本《拉马努金笔记》，为数学界提供了难得的文献资料.

贝尔奈斯(Bernays，Paul Isaak，1888—1977) 瑞士数学家、逻辑学家.生于伦敦.希尔伯特(Hilbert，D.)的学生.1945年以后在苏黎世工作.伯奈斯的主要贡献在数学基础和数理逻辑方面.他和哥德尔(Gödel，K.)共同改进和简化了冯·诺伊曼(von Neumann，J.)对集合论的公理化的形式构造，他们对冯·诺伊曼利用函数概念而不用类的概念做出的集合论的公理体系加以整理，得到类的概念，被称为伯奈斯-哥德尔集合论.他还与希尔伯特共同研究了所谓“证明论”或元数学，并合著了《数学基础》一书.

桑索内(Sansone，Giovanni，1888—1979) 意大利数学家.生于西西里岛，早年就学于比萨高等师范学校，后在该校和佛罗伦萨大学任教.桑索内的主要贡献在几何学、数论、特殊函数、正交级数论和微分方程论等方面.1912—1974年间，他共发表论著159篇(部)，其中有《实数域的微分方程》(两卷，1948—1949)、《非线性微分方程的定性理论》(合著，1963)、《非线性微分方程》(合著，1956)等.

库　朗(Courant，Richard，1888—1972) 德国数学家.生于波兰东部卢布林的一个犹太商人家庭，曾在布雷斯劳读中学.1907年到格丁根大学求学，第二年希尔伯特(Hilbert，D.)选中库朗接替匈牙利籍数学家哈尔(Haar，A.)的工作，作为自己的助手.1910年获博士学位.1914—1918年在德军服役.1920年任蒙斯特大学教授，同年接替克莱因(Klein，(C.)F.)的职位出任格丁根大学数学物理教授.1924年，库朗继承克莱因的遗志，负责筹备格丁根数学研究所，1929年研究所正式成立，他主持日常工作.以后外尔(Weyl，(C. H.)H.)、诺特(Noether，E.)等一大批数学名家相继来到格丁根工作.希特勒(Hitler，A.)上台后，库朗倍受纳粹政府迫害，1934年被迫移居美国.第二次世界大战期间，他在纽约州立大学领导了一个应用数学小组(简称AMP)，从事军事数学方面的研究，1947年扩充为数学和力学研究所，使纽约大学成为吸引世界数学家的名校之一.1972年，库朗在研究所内逝世，该所正式命名为库朗应用数学研究所.

库朗一生撰写有大量论文和著述.第二次世界大战前，他的一系列论文，主要是论述微分方程特征值、极小曲面等纯粹数学问题，他的《数学物理方法》成为了20世纪的数学名著.第二次世界大战期间及战后，他转向了应用数学研究，他领导的AMP在水下声学及爆破、导弹弹道、喷气机的喷咀设计等方面，共完成194项成果.

库朗还是一个卓越的科学攻关组织者，从德国到美国，他用自己的才智组建了有历史意义的两个数学研究所，培养出大批学者.他的著作还有《狄利克雷原理、保角映射和最小曲面》(1950)、《一般函数论和椭圆函数》、《微积分学教程》等.

莫德尔(Mordell，Louis Joel，1888—1972) 美

国数学家. 生于美国费城,卒于英国剑桥. 1907年到英国剑桥圣约翰学院深造. 1913—1920年任伦敦伯克贝克学院讲师. 1920—1922年任曼彻斯特技术学院讲师. 1922—1945年任教于曼彻斯特大学,1923年晋升为教授. 1929年成为英国公民. 1945—1953年任剑桥大学教授,1953年退休. 1924年被选为伦敦皇家学会会员,还是挪威奥斯陆、瑞典乌普萨拉、意大利波伦亚等科学院的外籍院士. 1943—1945年任伦敦数学会主席.《算术学报》、《数论杂志》一创刊,他即为首任主编.

莫德尔的主要贡献在数论领域的不定方程、数的几何、解析数论等方面. 1912年,他给出了不定方程 $y^2=x^3+k$ 的一系列新结果,并因此获剑桥大学史密斯奖. 他还发现了三个变量的方程的很多解,且成了后来很多工作的起点. 在不定方程方面,他还在1922年证明了有限基定理,后经韦伊(Weil,A.)推广,现称为莫德尔-韦伊定理. 同年他给出了"在亏格大于1的代数曲线上仅有有限个有理点的"莫德尔猜想". 此猜想在1983年被法尔廷斯(Faltings,G.)所证实,并因此获1986年菲尔兹奖. 他第一次利用给定维模形式空间的有限维数把一个整数表示成固定的 n 个整数的平方和,并给出了表示数的公式的主部模形式. 他还给出了高斯和的一个简单的解析证明. 在曼彻斯特期间,他在三角和与特征和的估计以及三次曲线、三次曲面与超曲面方面做了不少工作,并都取得了很好的成果. 1940年,他在数的几何方面对非凸 k 域得到了最好的可能结果. 他还证明了8个变量二次型的类数公式,推广了迈耶在二次型方面的一个经典定理. 他曾于1941年获伦敦数学会德·摩根奖章,1946年获高级贝维克奖,1949年获伦敦皇家学会西尔维斯特奖章. 他一生共发表学术论文270篇,著有《丢番图方程》(1969)等专著.

查普曼(Chapman,Sydney,1888—1970) 英国数学家、物理学家. 生于英格兰兰开夏郡埃克尔斯,卒于美国博尔德. 1908年获曼彻斯特大学数学学士和物理硕士学位,1912年获理学博士学位,1914年获剑桥大学数学硕士学位. 1910—1914年、1916—1918年任职于格林威治天文台. 1914—1916年、1918—1919年在剑桥大学教数学. 1919—1924年在曼彻斯特大学、1924—1946年在伦敦帝国学院、1946—1953年在牛津大学国王学院,任应用数学教授. 1946年被选为美国全国科学院外籍通讯院士.

查普曼1912—1917年推广了马克斯韦尔(Maxwell,J.C.)给出的气体动力学理论,发现了气态热扩散. 他曾研究过地磁场和磁暴、地球和太阳的大气层、大气层低层与高层的扩散等问题,并都做出了贡献. 他早期在剑桥大学时,曾研究过非收敛级数和积分等纯粹数学问题和气体理论. 他曾表述过理想化的"查普曼电离层",后来被无线电物理学家在电波传播及其他问题的研究中广为使用. 他对地面与星际电磁学、电离层、极光等知识领域都有理论贡献. 他曾于1964年获皇家学会科普利奖章等. 著有《非一致气体的数学理论》(1939;与人合作)等多种专著.

亚尼谢夫斯基(Janiszewski,Zygmunt,1888—1920) 波兰数学家. 生于华沙,卒于利沃夫(Lvov). 早年曾在苏黎世大学、慕尼黑大学、格丁根大学和巴黎大学求学,1911年获博士学位. 1913年开始在利沃夫大学任教,1918年为华沙大学教授.

亚尼谢夫斯基是华沙数学学派及其刊物《数学基础》的创建人之一,他为发展波兰的数学事业做了大量有价值的工作. 其数学研究在集合论、拓扑学、解析函数论等方面. 1912年,他叙述了第一条无弧段的曲线,即没有直线段的同胚象;他还研究了弧、平面及一般连续统的拓扑性质,并建立了有关的定理.

杰克逊(Jackson,Dunham,1888—1946) 美国数学家. 生于布里奇沃特(Bridgewater),1908年毕业于哈佛大学,1911年获德国格丁根大学博士学位. 1919年起成为明尼苏达大学教授. 曾任美国数学会副主席、主席. 杰克逊的主要贡献在函数逼近论方面. 他建立了内插三角多项式一致收敛的定理和有关近似值的定理. 著作有《逼近论》(1930)和《傅里叶级数和正交多项式》(1941).

弗里德曼(Фридман,Александр,Александрович,1888—1925) 苏联数学家、力学家. 生于圣彼得堡,1910年毕业于圣彼得堡大学. 1913年取得纯粹数学和应用数学硕士学位. 1915—1917年在飞行员军事学校任教官. 1918—1920年任彼尔姆(Пермь)大学教授. 1920年以后在物理气象中心站工作,并在圣彼得堡各大学兼课.

弗里德曼在中学时代所发表的数论文章曾得到希尔伯特(Hilbert,D.)的赞扬. 在大学一年级时又以数论的研究获金质奖章. 1916—1917年发表了关于大气涡流的研究结果. 在1922和1924年,他的两篇关于宇宙学的论文中指出:宇宙的几何特征在大范围内随时间而变化. 弗尔德曼还是一位杰出的飞行员,1925年6月,与飞行家费多谢延科(Федосеенко)乘气球飞上了7400米的高空,打破了当时飞行的最高纪录.

亚历山大(Alexander,James Waddell,1888—1971) 美国数学家. 生于新泽西州,1910年毕业于普林斯顿大学,1915年获博士学位. 1933年以后任普林斯顿高等研究院教授,并被选为美国全国科学院院士.

亚历山大的主要贡献在拓扑学方面.他的工作发展了同调论,推广了庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)的对偶定理.他证明了多面体的对偶原理,这一原理为苏联数学家庞特里亚金(Понтрягин,Л.С.)等进一步发展.亚历山大还得到了曲面连续映射中的不动点和贝蒂数的不变性的结果,证明了两个三维流形可以有相同的贝蒂数、挠系数和基本群,但却不是同胚的.亚历山大在关于纽结理论、三维空间一般拓扑、代数几何和函数论等方面的研究结果也很重要.

马祖尔克维奇(Mazurkiewicz,Stefan,1888—1945) 波兰数学家.生于华沙,卒于华沙近郊.1913年获博士学位.1915年任教授.马祖尔克维奇参与创办了波兰学派及其代表刊物《数学基础》,并在点集拓扑学和概率论等方面做出了奠基性贡献,得到欧几里得平面的拓扑结构,大数定律的证明,建立了随机变量一般可分空间等成果.他撰写的《概率论基础》曾毁于第二次世界大战,后来他又抱病重写,于1956年出版.

普劳德曼(Proudman,Joseph,1888—1975) 英国应用数学家、海洋学家.生于英格兰兰开夏郡,卒于英格兰多塞特郡.1910年获利物浦大学数学和物理学士学位,后又进剑桥大学三一学院学习纯粹数学与应用数学,于1913年和1917年获学士和硕士学位.1913年任利物浦大学讲师,并于1916年获该校理学博士学位.1915—1921年为剑桥大学三一学院研究员.1919年起任利物浦大学首位应用数学教授,并任潮汐研究所所长,1933年改任海洋学教授,1940—1946年任副校长,1954年退休.

普劳德曼在海洋潮汐动力学方程的研究方面有重要贡献.他发展了解决所涉及到的微分方程的方法.他还研究了更一般的海洋学方面的动力学方程,特别是风暴海浪传播方面的方程.曾因这方面的工作于1946年获美国全国科学院阿加西斯奖章,1957年获伦敦皇家学会休斯奖章.在确定潮汐振动的理论分布的过程中,1917年,他把微分方程变换成了拉普拉斯型方程,并于1928年给出了特殊情况的解.1920年发表了他对潮汐观测所做的调查分析的报告.他还研究过潮汐和风暴巨浪的联合传播等.著作有《动态海洋学》(1953)等.

维特根斯坦(Wittgenstein,Ludwig Josef Johann,1889—1951) 奥地利哲学家、数学家.生于维也纳,卒于英国剑桥.在曼彻斯特大学和剑桥大学三一学院学习,是罗素(Russell,B.A.W.)的学生.1929年取得博士学位.在维也纳、挪威、爱尔兰等地任教,1939年成为剑桥大学教授.

维特根斯坦主要研究数理逻辑、数学基础和集合论中的课题.他发展了怀特海(Whitehead,J.H.C.)和罗素的逻辑思想,其著作《逻辑哲学论文》(1922)被译为多国文字出版.逻辑术语"同语反复"(tautology)是由他引进的.

哈姆布格尔(Hamburger,Hans Ludwig,1889—1956) 德国数学家.生于柏林,卒于科隆.早年就学于柏林、格丁根,1914年获博士学位.1924年任科隆大学教授,1947—1953年任土耳其安卡拉大学教授.哈姆布格尔的主要贡献在偏微分方程论、微分几何、希尔伯特空间中的线性变换、黎曼ζ函数和斯蒂尔杰斯积分概念的发展等方面.他还研究了所谓力矩问题,提出了以他名字命名的有关方法.1921—1922年,他指出黎曼ζ函数具有的若干重要性质.

斯捷潘诺夫(Степанов,Вячеслав Васильевич,1889—1950) 苏联数学家.生于斯摩棱斯克(Смоленск),1912年毕业于莫斯科大学,同年出国留学.1928年获博士学位.1943年任莫斯科数学会副主席.1946年当选为苏联科学院通讯院士.

斯捷潘诺夫主要研究微分方程理论和函数论.他是苏联微分方程定性理论学派的创始人之一,其专著《微分方程定性理论》(与涅梅茨基合著)对常微分方程理论的发展曾起了重要作用.他还把微分方程理论应用于力学.在实变函数论方面,他研究了重要函数类的性质.他和卢津(Лузин,Н.Н.)、叶戈洛夫(Егоров,Д.Ф.)等人为使莫斯科的数学家形成一个团结、统一的科研集体做出了不懈的努力.他还培养了一批优秀的学生和继承人.他的著作有《微分方程教程》等.

别列赞斯卡娅(Березанская,Елизавета Савельевна,1890—1969) 苏联女数学家.生于迈科普(Майкоп),1914年毕业于圣彼得堡别斯图热夫(Бестужев)女子学校.她的主要贡献在数学教育方面.她编写的《算术习题集》(1933)在苏联教育界被视为标准教材使用;另一部重要著作《算术教学法》(1934)曾是苏联中小学教师必备的教学指南,曾被译为多种文字出版.她还研究了八年级代数和分析课的教学法.1964年,当她74岁高龄时,出版了她的最后一部著作《八年制中学数学教材中的立体几何问题》.为表彰她为国家所做出的贡献,苏联政府授予了她"人民教育优秀工作者"的称号.

希 尔(Hill,Lester Sanders,1890—1961) 美国数学家.生于纽约,卒于纽约.早年在哥伦比亚大学学习,1926年获耶鲁大学博士学位.曾在纽约的亨特(Hunter)学院和法国比亚里茨(Biarritz)的美军大学任职.希尔以研究密码和密码分析的数学方法著称.在第二次世界大战期间,他首先将矩阵理论和线性变换方法应用于密码的制作,并取得了重要的成果.这些材料对于模数代数编码系统的发展很有价值.但一直未发表,也许是作为机密保存着.

费希尔(Fisher,Ronald Aylmer,1890—1962)

英国统计学家、遗传学家. 生于英格兰米德尔塞克斯,卒于澳大利亚阿德雷德. 1909 年人剑桥大学学习数学和物理,毕业后任教. 1919 年到罗萨姆斯泰德试验站作统计工作. 1933 年任伦敦大学学院优生学教授. 1943—1957 年任剑桥大学遗传学教授, 1957 年退休,但直到 1959 年委任了他的继承人后,才离任赴澳大利亚. 1929 年成为皇家学会会员; 1952 年被封为爵士. 他创办了第一本统计学杂志——《生物统计学》.

费希尔是现代统计学的主要奠基人之一,对统计学有很多贡献,给出了很多现代统计学的基础性概念,他引入了解消假设和显著性检验的概念. 他是假设检验理论化的先驱. 20 世纪 20 年代,他提出了三个重要抽样分布之一的 F 分布;还提出了极大似然法,并借助随机化的手段,成功地把概率模型引入了实验领域,建立了方差分析法;开创并发展了试验设计法. 他还用统计方法研究了遗传学和优生学,并获得了许多重要成果. 1955 年获伦敦皇家学会的科普利奖章. 著作有《研究人员用的统计方法》(1925;第 13 版,1958)、《试验设计》(1935;第 7 版,1960)、《生物、农业和医学研究用统计表》(1938;第 6 版,1963;与人合作)等.

杰龙涅(Делоне, Борис Николаевич, 1890—1873) 苏联数学家. 生于圣彼得堡,1913 年毕业于基辅大学. 先后在基辅大学、基辅综合技术学院、列宁格勒大学和莫斯科大学工作,1932 年以后在苏联科学院斯捷克洛夫数学研究所工作.

杰龙涅的数学研究涉及代数、几何和数论的交叉学科. 他建立了具有负判别式的二元三次方程的理论,证明了借助于"递增算法"可以求出这类方程的整数解. 在数的几何中,他研究得出一系列重要的结果. 例如,解决了根据点之间的距离定义二维格子的问题,还得到了所谓的"空球法". 他的研究在数学晶体中不但有理论意义,也有实用价值. 此外,杰龙涅还研究了高斯(Gauss,C. F.)的几何理论、数学机器原理和本国数学史,并取得了一定成果. 著作有《解析几何学》和《负定二次型的表示》(1927),后者曾获得苏联教育人民委员奖励. 他的《数学机器简明教程》有中译本出版(高等教育出版社,1958).

贝西科维奇(Besicovitch, Abram Samoilovitch, 1891—1970) 英国数学家. 生于俄国亚速海边的别尔江斯克,卒于剑桥. 1912 年毕业于圣彼得堡大学. 1917 年任彼尔姆大学数学教授,1920 年任列宁格勒教育学院教授. 1924 年到哥本哈根随玻尔工作一年. 1926—1927 年任英国利物浦大学讲师. 1927 年起任教于剑桥大学,任大学及三一学院讲师,后成为三一学院研究员,1950 年晋升为数学教授,1958 年退休. 1934 年被选为伦敦皇家学会会员.

贝西科维奇研究掛谷(Kakeya)问题、殆周期函数、豪斯多夫测度、几何测度论、表面面积、实分析和复变函数等,在殆周期函数等方面有重要贡献. 1919 年左右,他给出了贝西科维奇构造法,构造了一个包含所有方向上单位线段,具勒贝格平面零测度的紧平面集,这个集后被称为贝西科维奇集,并因此在掛谷问题上取得了重要成果. 在 1925—1926 年间,他证明了与里斯-菲舍尔定理类似的定理对玻尔或斯捷潘诺夫殆周期函数不成立,并定义了一类使与里斯-菲舍尔定理类似的定理成立的殆周期性(后来记为 B^2 殆周期性). 他曾用豪斯多夫测度的性质,作为 $\Delta f/h^s$ 的上、下极限定义了实函数的 S 导数($S<1$), $\Delta f=f(x+h)-f(x)$. 他还在积集等方面做了许多研究工作,并取得了不少重要成果. 在平面的线性测度子集的结构方面也有成果. 他曾于 1930 年获剑桥大学亚当斯奖,1950 年获伦敦数学会德·摩根奖章,1952 年获伦敦皇家学会西尔维斯特奖章. 著作有《殆周期函数》(1932;1955 年重印)等.

普里瓦洛夫(Привалов, Иван Иванович, 1891—1941) 苏联数学家. 生于下罗莫夫(Нижний Ломов),1913 年毕业于莫斯科大学. 先后在萨拉托夫大学、莫斯科大学和莫斯科空军工程学院工作. 1918 年获博士学位,同年成为教授. 1939 年当选为苏联科学院通讯院士.

普里瓦洛夫的主要贡献在函数论和微分方程等方面. 他和卢津(Лузин, Н. Н.)共同得到了许多著名结果. 他们应用实变函数论中的方法研究了解析函数的边界性质,解决了某些边界问题. 他们还提出了关于柯西积分的卢津-普里瓦洛夫惟一性定理,证明了柯西积分的基本引理和奇异积分的定理. 他的工作奠定了俄国单叶函数理论研究的基础. 代表作有《复变函数引论》等.

穆斯赫利什维利(Мусхелишвили, Николай Иванович, 1891—1976) 苏联数学家. 生于第比利斯(Тбилис),1914 年毕业于圣彼得堡大学,并留校工作. 1920 年回到第比利斯,在当地的大学、工学院任教,1922 年成为教授. 1934 年获博士学位. 1939 年被选为苏联科学院院士. 1942—1972 年任格鲁吉亚科学院院长,1972 年以后任名誉院长. 穆斯赫利什维利把解析函数论方法广泛地应用于弹性理论,所创立的方法对进一步发展弹性理论、微分方程理论和数学物理方法产生了重大影响. 他的主要著作有《弹性数学理论的某些基本问题》(1933)、《奇异积分方程》(1947)等. 此外,他还为高等学校编写了一系列教科书.

弗伦克尔(Fraenkel, Adolf Abraham, 1891—1965) 德国数学家. 生于慕尼黑,卒于耶路撒冷. 先后在慕尼黑、马尔堡和柏林等地的大学读书,1916

年成为马尔堡大学讲座教师，1922 年任教授. 1919 年弗伦克尔出版的《集论导引》，改进了数学家策梅罗(Zermelo，E. F. F.)已有的形式集合论结果，对其定义和基础加以限制或强化，形成了著名的 Zermelo - Fraenkel(ZF)公理体系，使数学基础得到进一步巩固，影响深远. 他还从事数学史研究，著有《高斯时代数的概念与代数》(1920)、《格奥尔格·康托尔》(1930)等.

别尔纳斯基(Biernacki，Mieczystaw，1891—1959)　波兰数学家. 生于卢布林(Lublin). 1929 年以后在波兹南(Poznan)大学工作. 他积极参加组建卢布林大学的工作，并任该校的数学教授. 1946 年当选为波兰科学院通讯院士. 别尔纳斯基的主要贡献在解析函数论方面，特别是研究了单重(叶)或 P 重(叶)函数理论. 另外，他对经典多项式理论、微分方程论也有一定的贡献. 他编写的两卷集微分几何教科书曾流行一时；著作还有《多叶函数》等.

卡纳普(Carnap，Rudolf，1891—1970)　德国-美国哲学家、逻辑学家、数学家. 生于德国伍伯塔尔(Wuppertal)，早年就学于耶拿大学，1921 年获博士学位. 1926—1931 年任教于维也纳大学，1931—1935 年成为布拉格大学自然哲学教授. 1935 年赴美国，1941 年入美国籍. 1936—1952 年任美国芝加哥大学教授，1954—1962 年任加利福尼亚大学教授. 卡纳普还被选为美国全国科学院院士及多个学会成员. 他的主要贡献在数学基础及数理逻辑方面，他提出了著名的卡纳普法则. 在哲学方面，他是逻辑实证主义的代表人物.

维诺格拉多夫(Виноградов，Иван Матвеевич，1891—1983)　苏联数学家. 生于米洛留普镇(Милолюб)，1914 年毕业于圣彼得堡大学并留校工作. 先后在彼尔姆大学、列宁格勒大学、列宁格勒综合技术学校和苏联科学院斯捷克洛夫数学研究所(1932 年后任所长)工作. 1920 年晋升为教授.

维诺格拉多夫的主要贡献在解析数论方面. 他建立了最有效的解析数论方法之一，即三角和方法. 他深入地研究了这种和式的性质及其模数的估计，利用这种方法得到一整类经典数论问题的基本结果. 1937 年，他证明了“任何一个充分大的奇数都能表示为 3 个素数之和”的结果，推动了“哥德巴赫猜想”问题的研究. 为此在 1941 年获得苏联一等国家奖. 他的方法经典化之后，被许多学者应用于不同的数论领域. 他一生共发表论著 140 多篇(部)，其中关于数论方面的教科书多次出版，在国内较为流行，如《数论基础》、《解析数论的新方法》等. 专著还有《最简整序变量中的三角和方法》(1976)等. 他还是多国科学院的外籍院士或荣誉院士，以及一些国家的学术团体机构成员.

施米特(Шмидт，Отто Юльевич，1891—1956)　苏联数学家、天文学家、地球物理学家. 生于莫吉廖夫(Могилев)，1913 年毕业于基辅大学. 1916—1951 年先后在基辅大学、莫斯科林学院和莫斯科大学任教. 1920 年晋升为教授. 1934 年被选为乌克兰科学院院士，1935 年被选为苏联科学院院士. 1929—1941 年任苏联大百科全书的主编. 1939—1942 年任苏联科学院副院长. 他还组织了北极地带研究所，并担任了第一任所长.

施米特的主要成就在群论方面. 1916 年，他发表了专著《抽象群论》. 书中不仅阐述了理论问题，而且指出了这一代数领域进一步发展的方向. 1927 年，他证明了群的直积分解的同构性定理. 1930 年，他在莫斯科大学组织了群论讨论班. 这一组织后来成为苏联代数学家的一个活动中心. 他晚年从事宇宙起源问题的研究，提出了关于地球起源的有趣问题.

巴拿赫(Banach，Stefan，1892—1945)　波兰数学家. 生于波兰克拉科夫，卒于里沃夫. 1910 年进里沃夫工业学院学习之前主要靠自学，1914 年因第一次世界大战中断学业. 1916 年与施坦因豪斯(Steinhaus，H. D.)相识，从此巴拿赫开始了他的研究生涯，并且两人进行了合作研究，还在里沃夫形成了以他们两人为中心的数学学派. 1920 年，他向里沃夫大学提交学位论文，并获得博士学位. 1920—1922 年任里沃夫工业学院助教. 1922 年通过里沃夫大学讲师资格考试，并成为该校“编外教授”，1927 年成为正式教授. 1929 与施坦因豪斯创办了《数学研究》，并同任主编. 1939 年任波兰数学会主席. 1939—1941 年任里沃夫大学校长. 1924 年成为波兰科学院通讯院士. 他还是乌克兰基辅科学院通讯院士. 德军占领期间，他曾在一个生产防伤寒疫苗的研究所做寄生虫饲养员，并曾被德军短期关押. 波兰解放后，他回到了里沃夫大学.

巴拿赫的主要贡献是建立了赋范空间的概念，现称为巴拿赫空间，他 1922 年正式发表的博士论文中首次提出了这一概念. 他成功地在一般情况下把几何与代数方法用于线性分析问题. 1922—1923 年，他又得到了压缩映射的不动点定理、开映射定理. 他在 1929 年给出了完备赋范线性空间上泛函延拓定理的推广. 他 1932 年出版的《线性算子理论》和冯·诺伊曼(von Neumann，J.)的谱理论是泛函分析成为一个独立的数学分支的标志. 该书中讨论的弱收敛问题是局部凸拓扑线性空间理论的先导. 在该书中，他还给出了完备赋范线性空间上连续线性算子值域或是第一纲集，或是全空间，以及闭图像定理等重要结果. 他还在实变函数论、集合论、一般群论等方面有重要贡献. 他曾与他人合作得到了数列

和函数序列的广义极限理论、一般正交级数理论，还曾与塔尔斯基(Tarski，A.)合作提出了一个悖论.第二次世界大战前，他与乌拉姆(Ulam，S. M.)等人在苏格兰咖啡馆讨论数学问题的记录形成了“苏格兰书”，现保存在华沙巴拿赫国际数学中心.他曾于1932年获里沃夫城市奖，1939年获波兰科学院奖.1967年，波兰科学院数学研究所出版了他的文集.

莫尔斯(Morse，Harold Marston，1892—1977) 美国数学家.生于缅因州(Maine)沃特维尔(Waterville)，1914年毕业于科尔比(Colby)学院，1917年获哈佛大学博士学位.1935—1962年任普林斯顿高等研究院教授.

莫尔斯的主要贡献在于把拓扑学方法应用于变分学、常微分方程理论和复变函数论等数学分支.在大范围变分法中，莫尔斯把由庞加莱(Poincaré，(J.-)H.)和伯克霍夫(Birkhoff，G. D.)所创立的理论发展成为现代的形式.近年来，莫尔斯理论被进一步推广和精密化，并应用于微分拓扑学和微分几何学而得到了各种重要的结果.他的主要著作有《大范围变分法》、《全局分析和微分拓扑中的临界点理论》、《复变函数论中的拓扑方法》等.

拉德马赫尔(Rademacher，Hans，1892—1969) 德国数学家.生于汉堡附近，卒于纽约.1910年人格丁根大学学习，1916年获博士学位.1919—1925年任教于柏林大学、汉堡大学.1925年被聘为布雷斯劳(现波兰弗罗茨瓦夫)大学教授.1934年应邀到美国宾夕法尼亚大学任访问教授，1935年被聘为正式教授，直至1962年退休.后又到纽约大学任教两年，1964年到纽约的洛克菲勒大学任教授，直至去世.1935年《算术学报》创刊，他为首任主编，后一直任编委.

拉德马赫尔对实分析与测度论、复分析、数论、几何和数值分析等多个数学分支都有贡献.1922年，他引入了正交函数系(现称为拉德马赫尔函数)，在工程上称为开关函数，有较大的理论和应用价值.1924年，他改进了布伦(Brun，V.)于1920年给出的筛法.他在整数分拆方面也有重要成果，1937年得到了分拆函数的级数表达式.在数论领域中，他还在模形式、戴德金和、素数的几何分布、黎曼ζ函数等方面都有重要发现.他还著有《解析数论讲义》(1954－1955)、《戴德金和》(1972；与人合作)等10多种专著.1974年，马萨诸塞理工学院出版社出版了两卷本《拉德马赫尔文集》.

卡莱曼(Carleman，Torsten，1892—1949) 瑞典数学家.生于乌普萨拉(Uppsala)，1916年获博士学位.1923年任隆德大学教授，1924年任斯德哥尔摩大学教授，1927年继承米塔-列夫勒(Mittag-Leffler，(M.)G.)任数学研究所领导人，并任《数学学报》编辑.卡莱曼的主要贡献在函数论、积分方程论和谱理论方面.在这些理论中，还以他的名字命名了一些定理、法则、不等式、积分核、正交多项式等.在解析函数论中他首先给出了$C(Mn)$是拟解析函数族的充分必要条件，并建立了著名的当儒瓦-卡莱曼定理.他还发表了大量论著，如《拟解析函数》(1926)等.

威尔科克逊(Wilcoxon，Frank，1892—1965) 美国统计学家.生于爱尔兰的科克，卒于美国佛罗里达的塔拉哈西.1917年获宾夕法尼亚军事学院学士学位，1921年获密歇根大学化学硕士学位，1924年获康奈尔大学物理化学博士学位.1925—1941年在博伊斯·汤普逊研究所从事植物和杀虫剂等研究；1941—1943年在拉文纳军械设备控制实验室工作；1943—1957年任职于美国氨腈公司，1957年退休.1957—1960年任职于斯坦福研究实验室.1960年到佛罗里达州立大学从事研究与教学工作，直至去世.

威尔科克逊在统计学方面的主要贡献是：统计、秩检验、多重比较、序列秩、析因设计和生物测定法等.1945年，他引入了他的双序测试.此工作曾导致了非参数统计，激励了非参数方法的广泛发展.这种统计方法的引入极大地影响了应用统计学在社会科学领域的应用.他是非参数序列方法的开创者，并领导发展了不少序列秩方法.1964年，在他与他人合作出版的《某些快速近似统计法》小册子中，阐述了多重比较法的性质等，为广泛传布非参数多重比较法起了重要作用.他还与他人合作导出了分数析因设计.另外，他在化学的杀真菌剂反映、植物生长、杀虫剂研究等方面也有成就.他是戈登化学与化工统计研究会议的领袖人物，并曾任其主席.

朱利亚(Julia，Gaston Maurice，1893—1978) 法国数学家.生于阿尔及利亚.巴黎高等师范学校、综合工科学校和巴黎大学的教授.他的主要贡献在复变函数论方面，其中有以他的名字命名的函数、定理和其他术语(最著名的有亚纯函数的“朱利亚方向”)等.朱利亚曾获过巴黎科学院奖，其论著有《复变函数论的发展》(1933)、《单连通面内的保角表示》(1931)等.

勒夫纳(Loewner，Charles，1893—1968) 捷克-美国数学家.生于拉尼(Lany)，卒于美国斯坦福.1917年在希拉格大学获博士学位，1928年任教授.1939年移居美国.他致力于数学研究和教学50年.勒夫纳的突出成就是在1923年证明了复变函数论中，单叶函数$n=3$时，比伯巴赫猜想成立.另外，他在李群、半群、泛函分析等领域均有创建.

切　赫(Cech，Eduard，1893—1960) 捷克数学家，生于波希米亚(Bohemia)，卒于布拉格.早年就学于布拉格大学，1923年任布尔诺(Brno)大学教

授.1928年,他致力于拓扑学研究,1937年发表《列紧空间》一文,建立了紧致空间的包络理论,使之成为了一般拓扑学的有力工具,并派生出泛函分析的许多分支.他的贡献还有拓扑连续空间理论、维数理论、微分几何理论等.此外,他在中学教材的编写方面也很有建树.

马哈拉诺比斯(Mahalanobis,Prasanta Chandra,1893—1972) 印度数理统计学家.生于印度加尔各答,卒于加尔各答.马哈拉诺比斯在加尔各答获物理学士学位以后,赴英国剑桥大学学习.1914年通过数学荣誉学位Ⅰ考试,1915年通过自然科学荣誉学位Ⅱ考试,并被选为高级研究人员.后回国任教于加尔各答的管辖区学院,并被聘为教授,直至1947年退休.马哈拉诺比斯曾是英国皇家学会会员.1931年,他还创立了印度统计学会,并任主席.从1949年直至去世,他还任印度政府统计顾问.

马哈拉诺比斯主要研究数理统计学和经济规划.1930年引入了D^2统计量,后来称为马哈拉诺比斯距离,它在分类问题中有广泛应用.他在20世纪30年代和40年代,主要从事气象统计、与后来发展起来的运筹学有关的问题、场试验误差及大样本调查等课题的研究.他1944年引入的试验调查概念是序贯分析的先驱,并给出了估计方法.他还引入了最优调查设计和子样本相互贯串网络的概念.他发展了采样设计中的价格函数和方差函数.他还于1950年,在印度统计学会中建立了一个全国采样调查部,从事全印度社会经济与人口统计数据的采集工作,使之在印度的经济规划与经济发展中起了重要作用.这个调查部后来归入了政府的规划部.他及他建立的印度统计学会对印度的一代统计学家有着深远影响.他还对物理学、印度哲学(尤其是与多值逻辑有关的问题)、孟加拉文学等有兴趣.马哈拉诺比斯还曾获印度最高国民奖——帕德马·维伯赫尚奖.他一生著述颇丰,前后发表学术论文200余篇.

默纳汉(Murnaghan,Francis Dominic,1893—1976) 美国数学家.生于爱尔兰泰伦(Tyrone)县.早年曾在都柏林大学学院学习应用数学,1913年和1914年获爱尔兰国立大学学士和硕士学位,1916年获美国约翰斯·霍普金斯大学博士学位.1916—1918年任教于赖斯学院.1918—1948年任教于约翰斯·霍普金斯大学,在1928—1948年任数学系主任.1948—1955年在新建的巴西航空工业学院任教,并帮助建立了一套数学教学课程.1955—1963年任华盛顿戴维·泰勒示范区域应用数学顾问.1942年被选为美国全国科学院院士.

默纳汉对应用数学领域的大范围形变理论以及群论有重要贡献.他曾证明了工程弹性理论中有关应力与张力关系的胡克定律在形变较大时不成立,并给出了大形变胡克定律的正确表述.在群论方面,他研究过对称群和一般线性群.他给出了一个简化计算任意个符号对称群的不可约表示特征的公式,并给出了对称群不可约表示的克罗内克积不可约分量的分析.他还分析了一般线性群、n维旋转群和$2n$维对称群的不可约表示的克罗内克积,并把这些工作总结,撰写成了《群表示理论》(1938)一书.此外,他还著有《流体动力学》(1932;与人合作)、《弹性固体的有限形变》(1951)等专著.

里　特(Ritt,Joseph Fels,1893—1951) 美国数学家.生于美国纽约,卒于纽约.1913年在华盛顿大学获文学学士学位,1917年在哥伦比亚大学获博士学位.曾还当选为美国全国科学院院士.1938—1940年担任美国数学会副主席.里特的主要贡献在微分方程的代数理论和初等函数理论方面,他的工作揭示了微分方程的通解和奇解的关系.

阿南达-劳(Ananda-Rau,K.,1893—1966) 印度数学家.生于马德拉斯,卒于马德拉斯.1914年毕业于马德拉斯大学.1915年到英国剑桥大学学习,1918年获史密斯奖.1919年回国任马德拉斯管区学院数学教授,后曾任院长,1948年退休.他还是印度科学院院士.

阿南达-劳在一般级数,特别是一般狄利克雷级数的可和性、复变函数、偶数个平方的和表示数等领域都有贡献.如在狄利克雷级数中的陶伯型定理方面有重要成果,曾弥补了哈代(Hardy,G.H.)在证明李特尔伍德猜想方面的缺憾,并首先发表了李特尔伍德猜想的证明.他还证明了一些一般狄利克雷级数在横坐标上可和性的逆定理.

克拉默(Cramér,Harald,1893—1985) 瑞典数学家、统计学家.生于斯德哥尔摩,卒于斯德哥尔摩.1912年,入斯德哥尔摩大学学习,1917年获博士学位,并留校任教.后供职于保险公司,1920年任保险统计师.1929年斯德哥尔摩大学首创保险统计数学与数理统计学院,他被聘为第一位教授,并任院长,直至他1958年退休.1950年,他被选为斯德哥尔摩大学校长,1958年,他又任全瑞典大学系统的主管官员,直到1961年.他还曾任瑞典保险统计学会主席(1935—1964)和名誉主席(1964年以后)、瑞典和丹麦等多国科学院院士、美国艺术与科学学院名誉院士.1984年,他还被选为美国全国科学院外籍院士.在1940—1963年,他连任《斯堪的那维亚保险统计杂志》的主编.

克拉默早期研究解析数论,1922年曾证明了一些算术函数的一类新型的平均值关系.1925年转向概率的数学理论,并对保险风险问题进行了深入研究.他在中心极限定理、渐近展开、随机过程、风险理论和数理统计等方面都有重要贡献.1937年,他得

到了有关“大偏差问题”的渐近展开基本定理. 1933 年和 1950 年,他在随机过程方面得到的结果,推广了有关“赌徒破产”问题的经典结果,在保险风险的实际问题上有着重要应用. 1942 年,他还证明了平稳随机过程谱表示的一个基本定理. 他和印度统计学家拉奥(Rao,C. R.)在 1945 年和 1946 年给出的克拉默-拉奥不等式,已成为寻求一致最小方差无偏估计的重要工具之一. 他在 1945 年出版的《统计的数学方法》一书中,以严格的概率论为基础,阐述了统计推断方法,在数理统计的发展史上曾起过重要作用. 该书曾被各国广泛用作教科书,1960 年中国也出版了中译本. 他曾获英国皇家统计学会金质盖伊奖章和罗马林琴科学院的保险统计数学奖. 另外,他还著有《随机变量和概率分布》(1937;1970)、《概率论基础》(1955)、《一类随机过程的结构与统计问题》(1971)等专著.

奥斯特洛夫斯基(Ostrowski, Alexander Markovic, 1893—1986) 瑞士数学家. 生于俄国基辅,卒于瑞士卢加诺. 早年就读于德国马尔堡,后转到格丁根大学,曾做过克莱因(Klein,(C.)F.)的助手,1920 年获博士学位. 1921—1922 年任教于汉堡大学和格丁根大学,后到英国牛津大学和爱丁堡大学做研究工作,1927 年被聘为瑞士巴塞尔大学教授,1958 年退休.

奥斯特洛夫斯基的工作涉及纯粹数学和应用数学的多个分支,并做了许多有深远影响的贡献. 他在博士论文中解决了与希尔伯特第 18 问题有关的问题. 他在赋值理论、埃尔米特矩阵、ζ 函数、拟解析函数和函数方程与函数不等式等方面都做过基础性工作. 他在 1929 年得到了“每一个可加的,在正测度集的一边有界的实函数是线性函数”的结果,该结论至今尚未有实质性改进. 20 世纪 30 年代后期和 50 年代,他的研究工作转向了数值计算,工作涉及到数值保形映射、矩阵方程理论和矩阵计算等. 他在迭代过程、稳定性和巴拿赫空间中方程的“数值”解等方面曾做过基础性工作. 著作有《方程与方程组的解》(1960),第二版改成了《欧几里得与巴拿赫空间中的方程解》(1973). 他所撰写的论文全部收入了他的《数学文集》(1—6,1983—1985)中.

赖德迈斯特(Reidemeister, Kurt Werner Friedrich, 1893—1971) 德国数学家. 生于不伦瑞克,卒于格丁根. 早年就学于弗赖堡-慕尼黑和格丁根等大学,1920 年毕业. 1921 年到汉堡大学任助教,并于同年获该校博士学位. 1923 年任维也纳大学副教授. 1925 年任柯尼斯堡大学教授. 1934 年任马堡大学教授,1955 年转到格丁根大学.

赖德迈斯特在几何基础和组合拓扑等领域做有重要贡献. 他是 20 世纪 20—30 年代,国际上研究纽结理论的少数数学家之一. 他 1932 年出版的《纽结理论》曾在以后的几十年中被认为是该领域中的标准性著作. 他还在 1935 年首次引入了赖德迈斯特挠率,这是一个可以用来区分很多微分结构(如流行上的纽结与光滑结构等)的不变量. 他还按克莱因(Klein,(C.)F.)的“埃尔朗根纲领”的思想写了一本教材,根据与群的关系对各类几何进行了分类. 他早期曾在代数数论等方面进行过工作,在数学史领域也曾有过论著,还曾考察过古希腊的数学思想和一般数学哲学理论.

布洛赫(Bloch, André, 1893—1948) 法国数学家、物理学家. 生于贝桑松(Besancon),经历不详. 他曾在图卢兹(Toulouse)和巴黎工作. 布洛赫的主要贡献在复变函数论和数学物理方面. 他最早研究亚纯函数集合的值分布问题. 1924 年,他证明了关于全纯函数保角映射的一个重要定理(布洛赫定理),其中引进了布洛赫常数,被认为是复变函数论中最重要的常数之一;后又从布洛赫定理出发,证明了关于超越整函数的一个重要定理. 他在物理学方面也有重大贡献,并获 1948 年的巴黎科学院奖.

内　曼(Neyman, Jerzy, 1894—1981) 美国数理统计学家. 生于俄国宾杰里,卒于美国伯克利. 1923 年获波兰华沙大学数学博士学位. 1923—1924 年任教于波兰华沙大学和克拉科夫大学;1934—1938 年任教于英国伦敦大学学院;1938 年起任教于美国伯克利加利福尼亚大学,1941 年起任统计学教授及统计实验室主任. 1947 年任美国统计协会副主席;1949 年任数理统计学会主席;1962 年任美国科学促进协会副主席. 1963 年被选为美国全国科学院院士,1979 年成为伦敦皇家学会外籍会员.

内曼研究数理统计学及假设检验与估计在遗传学、医学诊断、农业试验的统计处理等方面的应用,对不确定性决策的方法论,即仅用随机的实验或观测结果作决策的方法方面有重要贡献. 他给出了一种他自己称之谓“行为主义统计学”的统计方法,并以此为基础建立了“置信区”理论,改进了原先处理这类问题时的“置信度量”的精确性. 因为原来计算置信度量的贝叶斯公式需要事先任意选定的概率,故置信度量带有一定的主观性,而内曼的方法具有可证明的合理的频次性质. 自此方法在 20 世纪 30 年代出现以来,已被用到了天文学、物理、生物学及医学等领域的很多问题中. 他还与皮尔逊(Pearson, K.)合作在统计测试方面第一次表述了显式法,引入了“择一假设”类,并在 1928 年引入了广义似然比准则. 1966 年曾获英国皇家统计学会盖伊金质奖章,他是获此奖章的第一位非英国人;1969 年获美国国家科学奖章. 他曾写过两本概率统计方面的教材,曾主编过 1949 年第一次和 1961 年第二次伯克

利数理统计与概率研讨会会议录.曾出版过《内曼早期统计论文选》(1967)和《内曼与皮尔逊联名统计论文集》(1967).

芬斯勒(Finsler,Paul,1894—1970) 瑞士数学家、天文学家.生于德国海尔布隆(Heilbronn),曾获格丁根大学博士,后任教于苏黎世大学,1944年成为教授.芬斯勒主要研究非黎曼几何学.他建了一种以坐标及其微分的更一般函数来表示的测度,称为芬斯勒测度.一个具有芬斯勒测度的微分流形,称为芬斯勒空间.他最早以芬斯勒测度来代替黎曼测度.在芬斯勒空间中建立所谓的芬斯勒几何,这是对黎曼几何的一种推广.此外,他在数学基础方面也颇有建树.

切博塔廖夫(Чеботарёв,Николай Григорьевич,1894—1947) 苏联数学家.生于卡明涅茨波多尔斯基(Каменец-Подольский),1916年毕业于基辅大学并留校任教.1921—1927年,在敖得萨大学任教.1927年取得物理数学博士学位,同年被聘为喀山大学教授.1929年被选为苏联科学院通讯院士.1943年以后任喀山物理数学会主席.

切博塔廖夫在代数数论、伽罗瓦理论、李群、丢番图近似和整解析函数等方面都取得过重要成果.1924年,他解决了关于素数集合无限性的弗罗尼乌斯问题,得到了关于素数和算术级数的狄利克雷定理的重要推广.1930年,第一次给出关于豫解式理论的普遍定理.他发表了大量的论文和著作,其中有《伽罗瓦理论》和《李群论》等.他的著作译成中文的有《代数学》、《代数学引论》和《代数函数论》.切博塔廖夫建立了喀山数学学派,为喀山数学的发展做出了贡献.苏联科学院设立了切博塔廖夫奖;喀山大学的数学和力学研究所后来也以他的名字命名.在1949—1950年,还为他出版了切博塔廖夫全集(1—3卷).

希 尔(Hille,Einar,1894—1980) 美国数学家.生于纽约,卒于加利福尼亚的欧文.1911年入斯德哥尔摩大学,1913年毕业,1918年获博士学位,并于1915—1916年和1919—1920年任教于该校.1921—1922年任教于哈佛大学.1922—1932年任教于普林斯顿大学,1927年升任副教授.1933—1962年任耶鲁大学数学教授.曾被选为美国全国科学院院士、斯德哥尔摩皇家科学院院士.1947—1948年任美国数学会主席.1929—1933年任《数学纪事》杂志主编;1937—1943年任《美国数学会汇刊》主编.此外,他还曾任教于斯坦福、芝加哥、乌普萨拉等多所大学.

希尔的主要贡献在算子半群理论领域,他是该理论的奠基人之一.他从1936年开始研究解析半群,1939年给出了线性算子半群方面的第一个重要结果.他1948年出版的《泛函分析与半群》发展了半群解析理论,其中一个主要结果是他和日本数学家吉田耕作相互独立地发现的,现称为希尔-吉田耕作定理.该书还促进了半群理论在偏微分方程研究中的应用.他对李半群理论也有贡献.此外,他还对常微分方程和偏微分方程、积分方程理论、傅里叶级数和遍历理论等都有重要贡献.他曾获美国瑞典工程师学会埃里克松金质奖章.著作有《解析函数论》(1959;1962)、《分析》(1964;1966)、《复数域上的常微分方程》(1976)等.

辛 钦(Хинчин,Александр Яковлевич,1894—1959) 苏联数学家、教育家.生于康德罗沃(Кондрово),1916年毕业于莫斯科大学,并留校工作,1919年成为教授.1932—1934年任莫斯科大学数学和力学研究所所长.1935年获得物理学博士学位.1939年被选为苏联科学院通讯院士,1944年被选为俄罗斯联邦教育科学院院士.

辛钦是苏联概率论学派的创始人之一.在极限定理方面他曾取得重要的结果:发现了重对数规律.给出了平稳随机过程的定义,并奠定了它的理论基础.他还把概率论的方法广泛地应用于统计物理学,并研究了质量管理中的数学方法.在分析数学中,辛钦引进了渐近导数的概念,推广了当儒瓦积分,研究过可测函数的结构,并把函数的度量理论应用于数论和概率论中.在数论方面,他取得了一系列重要的结果,特别是对丢番图近似理论的研究尤为突出.在连分数的度量理论中,他建立了许多新的原理.辛钦共发表关于数学和数学史的论著150多篇(部).他的许多著作都涉及到数学的哲学问题.此外,他还对高等和中等学校的教育改革做出了贡献.他的主要著作有《数学分析简明教程》、《连分数》、《费马定理》、《数论的三颗明珠》、《公用事业理论的数学方法》等.

斯特罗伊克(Struik,Dirk Jan,1894—2000) 美国数学史家.生于荷兰鹿特丹(Rotterdam),1922年毕业于莱顿大学.1917—1924年,在代尔夫特高等技术学校任教.1924年后,相继去意大利、德国和美国工作,1934年入美国籍.1940年任马萨诸塞理工学院教授.斯特罗伊克主要研究张量微分几何和数学史.他编撰的《数学简史》(1948)内容简练通俗,并尝试着以马克思主义的观点论述问题.这本《数学简史》被译成多种文字在世界各国出版.此外,他还编写了关于微分几何简史、微分几何中的新方法和论述美国科学发展的著作.

苏斯林(Суслин,Михаил Яковлевич,1894—1919) 苏联数学家.生于克腊萨夫卡(Красавка),1917年毕业于莫斯科大学,后留校工作.苏斯林在短暂的一生中,为现代数学的发展做出了杰出贡献.

他是现代集合描述论的创始人之一. 1916 年,他首先定义了解析集的概念(与波莱尔集不同),建立了这种理论的主要内容. 他生前只发表过一篇短评,但具有非常重要的意义. 德国数学家豪斯多夫(Hausdorff,F.)和苏联数学家卢津(Лузин,Н. Н.)都在他们的著作中介绍了苏斯林的工作.

霍普夫(Hopf,Heinz,1894—1971) 瑞士数学家. 生于德国的布雷斯劳(今波兰弗罗茨瓦夫),卒于瑞士措刊孔. 早年就学于柏林大学、海德堡大学. 1925 年获柏林大学博士学位,同年又到格丁根大学学习. 1927—1928 年,在普林斯顿大学做研究工作. 1931 年被聘为瑞士苏黎世高等工业学院教授,直至 1965 年退休. 美国全国科学院和意大利林琴科学院外籍院士. 1955—1958 年任国际数学联盟主席.

霍普夫的工作很大一部分与代数拓扑有关. 他在 20 世纪 30 年代的工作是后来的球同伦研究的先驱. 在柏林大学时,他证明了布劳威尔映射度是映射 $S^n \to S^n$ 的惟一同伦不变量,得到了布劳威尔-霍普夫定理. 1925 年到格丁根后,受诺特(Noether,E.)影响较大,他第一个把诺特的概念框架应用于同调论,证明了欧拉-庞加莱公式的推广. 1931 年,他证明了存在映射 $f:S^3 \to S^2$,f 被称为霍普夫映射,也就是著名的霍普夫纤维化或主霍普夫丛. 这在同伦论发展史上具有重要意义. 他还定义了霍普夫不变量,并证明了上面映射的不变量为 1. 1935 年,他又推广了上面映射,得到了映射 $f:S^{2n-1} \to S^n$,并对这种映射进行了同伦分类,证明了当 $n=4,8$ 时,所有映射不变量相等. 后被人证明,当 $n=2,4,8$ 时,霍普夫不变量都为 1. 这时映射就成为以 S^{2n-1} 为全空间,以 S^n 为底空间的纤维丛的映射. 他首次证明了本质,但是零调的映射的存在性,且基本性质不能用诱导同调同态来检验. 1941 年,他建立了 H 空间,并在研究 H 空间的同调以及上同调时,又建立了霍普夫代数. 现在霍普夫代数已是现代代数的一个重要组成部分,并是代数拓扑学的常用工具. 此外,他在拓扑和微分几何的其他很多方面也做出了重要贡献. 他曾和亚历山德罗夫(Александров,А. Д.)进行过长期的合作,1935 年,他俩合著的《拓扑 Ⅰ》一书,对拓扑学的发展起了很大的推动作用. 1969 年,他还获国际罗巴切夫斯基数学奖. 他的主要论著均收入了他 1964 年出版的《文选》中.

维　纳(Wiener,Norbert,1894—1964) 美国数学家. 生于美国哥伦比亚的密苏里,在欧洲讲学期间,卒于瑞典的斯德哥尔摩. 维纳 14 岁时获塔夫茨大学学士学位,1913 年以数理逻辑的学位论文获哈佛大学博士学位,后又到剑桥大学和格丁根大学学习深造. 1919 年前,曾任教于哈佛大学和缅因大学. 1919 年起,任教于马萨诸塞理工学院,1924 年任助理教授,1929 年任副教授,1932 年任教授. 1960 年退休. 1933 年被选为美国全国科学院院士. 1934 年任美国数学会副主席. 1935—1936 年,曾到中国,在清华大学讲学.

维纳是发展所谓半严格科学数学方法的先驱者,控制理论的创始人. 他早期曾研究勒贝格积分. 他在广义调和分析领域、在随机过程、遍历理论、霍普夫-维纳积分方程、非线性与线性预报、滤波问题与线性滤波器、通讯理论等多个领域都做出了重要贡献. 1920 年,他曾以测度论为基础表述了布朗运动的数学理论,开辟了一个全新的研究领域,并导出了概率论与其他数学分支的各种联系. 1924 年左右,他曾研究并解决了势论和狄利克雷问题中的一些重要问题. 1925 年在有关波的方面有深刻的发现;同时还在向量和微分空间方面有重要发现,并给运算微积分建立了可靠的数学基础. 1928 年,他给出了一般陶伯定理. 他在对连续性运动的分析中建立了以使用随机方法为基础的一些方法. 经典的牛顿物理预先假定了导致严格结果的一组严格条件,这种方法在带有一定随机性的情况下就不适用了. 维纳给出了一种由加进条件变异性假设和由追踪未来的分析结果(即所谓预报)的连续反馈所表征的方法,这是他最大的发现. 第二次世界大战时,他曾用这种方法为空军设计了高炮火力控制装置. 1932 年,他曾和生理学家合作研究过数理生理学,这对他后来发展控制论的思想有重要影响. 第二次世界大战期间,他还曾探索过编码和解码方法,并因此对自动计算发生了兴趣,他和冯·诺伊曼(von Neumann,J.)等人一起成了此领域的先驱者. 这一兴趣促使他对反馈理论进行了深入的研究,并对通讯流进行了统计分析. 1948 年,他的《控制论》一书出版,这是控制理论正式形成的标志. 在此书中,他对这一新的学科进行了广泛的数学分析. 他的工作对通讯科学、机械控制设备及生命体控制理论等学科的发展都起了重要作用. 他曾于 1933 年获美国数学会博歇奖,1963 年获美国国家科学奖章. 另外,他还著有《复域中的傅里叶变换》(1934;与佩利(Paley,R. E. A. C.)合作)、《傅里叶积分及其某些应用》(1933)、《平稳时间序列的外推、内插和光滑化》(1949)等学术专著和自传性著作. 1964 年出版了《维纳文选》,他的数学研究论文均收入了《数学论文集》(1977),1980 年还出版了其中译本.

塞　戈(Szegö,Gabor,1895—1985) 美国数学家. 生于匈牙利昆赫杰斯(Kunhegyes),卒于美国加利福尼亚州斯坦福. 1918 年获维也纳大学博士学位. 他在欧洲时期,曾任教于布达佩斯技术学校、德国柏林大学和柯尼斯堡大学等. 1934 年到美国任教于华盛顿大学. 1938 年起任教于斯坦福大学,

1938—1958年任数学系主任，1960年退休为荣誉教授.他还被选为美国艺术与科学学院、维也纳科学院、匈牙利科学院的院士.

塞格主要研究分析学，涉及到数学分析、正交函数、微分方程、特殊函数等方面.在正交多项式逼近方面有重要贡献.他的《正交多项式》自1939年出版以来，影响较大，曾于1959年、1967年分别出了第二版、第三版，1975年还重印一次.该书是该领域的一本标准参考书.塞格和波伊亚(pólya,G.)进行了长期的合作.1931年，他们计算了集合容量方面关于R^2和R^3内特殊的k与α核$r^{-\alpha}$的$D(k)$与$R(k)$.他还曾在斯坦福大学建立了一个数学中心.他还和波伊亚等人分别合作出版了《数学分析中的定理与问题》(1925；中译本，上海科技出版社，第一卷1981，第二卷1985)、《数学物理中的偏微分方程》(1930)、《数学物理中的等周不等式》(1951)、《动力系统、稳定性理论及其应用》(1967)等影响较大的专著.1982年还出版了他的《文集》(1—3).

弗里施(Frisch，Ragnar，1895—1973)　挪威数理经济学家.生于奥斯陆，卒于奥斯陆.弗里施出生于一个金银匠的家庭里，青年时代曾受过这方面训练，并于1920年获金匠证书.同时在母亲支持下就读于奥斯陆大学，选学经济学，1919年获学士学位.后曾到法国、德国、英国、意大利、美国等学习研究生课程.1925年回奥斯陆大学任经济学助理教授，并于1926年以数理统计的学位论文获博士学位.1928年任副教授，1931年任社会经济学与统计学教授，并任奥斯陆大学经济研究所所长，1965年退休.1930年创办了一个国际性的数理经济与统计方面的协会，取名“计量经济学会”，并任该学会杂志《计量经济学》主编30余年.弗里施还是伦敦皇家统计学会会员、美国艺术与科学学院院士.

弗里施曾因发展并应用动态模型分析经济过程，而于1969年获首次颁奖的诺贝尔经济科学纪念奖.他用动态方法表述了循环理论，并在统计假设检验方法方面有重要贡献.1926年，他重新表述了消费需求理论，从表征消费者试图使效用极大化的少数几条公理出发，用数学方法推导了其预报理论.他还用同样的数学方法和公理推理，重新表述了讨论生产者或商业行为的生产理论.他坚持在研究工作中使用定量方法和他的假设统计检验，并坚持这些统计分析方法必须以严格的经济理论为基础.他的生产理论为后来的新经典主义经济学提供了基础.1929年，他揭示了当观察到的发展由复杂的内部相关变化而产生时，如货物与服务的供应与需求问题，建立经济学中的因果关系的困难性，他强调了时间与随时间的变化.这是创造动态分析模型的先驱性工作，对这领域后来的工作有重要影响.他创造了“计量经济学”这一术语.1933年在分析商业循环时，他第一次使用了描述个别经济行为的“微观经济学”，与描述整个国家经济行为的“宏观经济学”.他的动态宏观经济模型证明了非常事件或随机冲击，如战争、原料市场的恐慌或进口原材料的大幅度涨价等是如何产生经济波动的.第二次世界大战后，他还研究了经济规划，并促进了线性与非线性规划模型的创建.除挪威与北欧外，他还为印度、埃及等国家的经济发展提供顾问，给出了帮助经济规划的决策模型.他还曾于1955年获哈佛大学顺彼得奖，1961年获意大利国家科学院费尔特纳利奖.著作有《线性规划原理》(1954)、《宏观经济与线性规划》(1956)、《生产理论》(1965)、《经济规划研究论文集》(1976)等.

拉　多(Radó，Tibor，1895—1965)　匈牙利数学家.生于布达佩斯，卒于美国佛罗里达州的新士麦那比奇(New Smyrna Beach).早年他在布达佩斯技术大学学习土木建筑.20岁参加对俄战争被俘，1920年逃脱回国，进入塞格德大学学数学，1922年取得博士学位后，在塞格德大学和布达佩斯数学研究所工作.1929年移居美国，他仍在大学和研究所从事教学与科研工作.曾担任过《美国数学杂志》编辑和美国科学促进协会副主席.拉多的主要贡献在保角映射、实变函数、变分法、偏微分方程、测度论、积分论、点集和代数拓扑、曲面论、逻辑学、递归函数和图灵程序等方面.

皮尔逊(Pearson，Egon Sharpe，1895—1980)　英国统计学家.生于伦敦，卒于英格兰米德赫斯特.1919年毕业于剑桥大学三一学院.1921—1923年任伦敦大学学院应用统计系讲师，1933—1935年任高级讲师，1935—1960年任教授，1960年退休.1966年，他被选为伦敦皇家学会会员；1932—1977年任英国标准协会统计顾问.

皮尔逊的工作主要涉及统计技术应用、统计理论、质量控制、运筹学与统计教育等方面.1925—1926年开始，他曾和内曼(Neymen，J.)合作，发展了内曼-皮尔逊假设检验方法.他们采纳了在应用统计中用概率术语表达的方法，使其适用于传统的假设检验和估计外，还能应用到判别式分析中的其他问题.1926年开始，他还与戈塞特(Gosset，W.S.)合作，在强健性方面进行了研究，并取得了重要成果.他还与他人合作修改编辑了他父亲皮尔逊(Pearson，K.)的《统计学家和生物统计学家用表》，并自己计算设计了正规样本分布范围、皮尔逊曲线百分点等新表.第二次世界大战期间，他在质量控制的统计方法方面做了不少工作，并参与了运筹学的研究.他是1948年成立的英国运筹学俱乐部(英国运筹学会的前身)的创始成员.1932—1933年，他在

英国皇家统计学会建立工业与农业研究部的过程中曾起了积极的作用. 皮尔逊曾于 1955 年获英国皇家统计学会的盖伊金质奖章. 他著有《统计方法在工业标准化和质量控制中的应用》(1936). 此外, 他还编辑整理出版了其父 1921—1933 年在伦敦大学学院的讲稿《十七世纪和十八世纪的统计史》(1979).

沃尔什(Walsh, Joseph Leonard, 1895—1973) 美国数学家. 生于华盛顿, 卒于马里兰的科里奇帕克. 1916 年获哈佛大学理学士学位, 1920 年获博士学位. 从 1921 年起任教于哈佛大学, 1935 年升为教授, 1937—1942 年任该校数学系主任, 1966 年退休. 1942—1946 年曾到海军服役, 任军职. 1966 年直至去世, 任马里兰大学教授. 1936 年被选为美国全国科学院院士. 1937 年任美国数学会副主席, 1949—1950 年任主席.

沃尔什最重要的工作是在单复变量函数的插值与逼近领域. 他证明了用各种方法度量的多项式最好逼近的收敛度, 因而把很多定理统一了起来. 1935 年, 他在多项式与有理函数逼近方面发展了适度舍取理论, 该理论对正交多项式与正交有理函数有重要作用. 1954 年, 他发现了一种多连通区域的新的经典映射, 1963 年发现了具有某些自由极点的有理函数逼近. 他在相当长的一段时间内, 在各种多项式的零点的几何理论方面, 做了很多重要的工作. 在正交展开领域, 沃尔什在 1923 年引入了一组有类似于三角函数展开性质的方形波函数, 现称为沃尔什函数. 它在现代通讯工程和其他应用科学中已成为重要的数学工具. 他著有《复域中多项式逼近》(1935)、《复域中有理函数插值法及逼近》(1965 年第四版)、《解析与调和函数临界点的位置》(1950)等 7 本专著.

霍特林(Hotelling, Harold, 1895—1973) 美国数理统计学家、数理经济学家. 生于明尼苏达的富尔达, 卒于北卡罗利纳的查珀尔希尔. 1919 年毕业于华盛顿大学新闻专业, 曾从业新闻, 但他同时学习数学, 1921 年获华盛顿大学科学硕士学位, 1924 年以拓扑方面的论文获普林斯顿大学哲学博士学位. 后任教于斯坦福大学. 1931 年任哥伦比亚大学经济学教授. 1946 年起, 任北卡罗利纳大学教授, 直至去世. 1936—1937 年, 曾任计量经济学会主席; 1941 年, 曾任数理统计学会主席. 他还是伦敦皇家学会荣誉会员. 1970 年, 他被选为美国全国科学院院士, 1973 年又被选为罗马林琴科学院院士.

霍特林的主要贡献在计量经济学、多元分析和统计推断等领域. 他是多元分析领域的领袖人物, 在向量值随机变量的处理中, 他引入了一些基本概念与工具. 1931 年, 他推广了一元正态理论的 t^2 统计, 提出了 T^2 统计, 后被称为霍特林 T^2 统计. 他在主分量和典型相关等概念的发展过程中, 也起了十分重要的作用. 第二次世界大战期间, 他在哥伦比亚大学组织了一个有名的统计研究组为军事服务, 并发展了序贯方法理论. 他还是现代不完全竞争和福利经济的最早研究者之一. 他的需求理论在税收与福利经济方面已成为经典. 他是改革需求理论基础并推广其应用的少数人之一. 现在在经济学领域有霍特林引理和霍特林法则.

奈望林纳(Nevanlinna, Rolf, 1895—1980) 芬兰数学家. 生于芬兰约恩苏, 卒于赫尔辛基. 早年就学于赫尔辛基大学, 师从林德勒夫(Lindelöf, E. L.), 1919 年获博士学位, 后曾任中学教师. 从 1922 年起, 他任教于赫尔辛基大学, 1926 年任教授, 1936—1937 年曾任格丁根大学访问教授, 1941—1945 年任赫尔辛基大学校长. 1946—1963 年任苏黎世大学客座教授, 同时为荣誉教授. 1963 年退休, 返回了赫尔辛基. 1959—1962 年, 他曾任国际数学联盟主席. 1948 年成为芬兰科学院院士, 1975 年被选为芬兰科学与文学学院荣誉院士. 此外, 他还是德国科学院(1938)、格丁根科学院(1967)的荣誉院士; 瑞典皇家科学院(1967)、丹麦科学院(1967)的外籍院士; 1967 年, 他还成为法兰西学院的通讯院士, 1970 年成为匈牙利科学院院士, 并曾获多所大学的荣誉学位.

奈望林纳早期在亚纯函数方面有重要贡献. 1922 年, 他在解析函数的边界性质方面证明了: 若 $f(Z)\in N$, $f(Z)\neq 0$, 则 $f(Z)$ 几乎处处有非切向边界值 $f(e^{i\varphi})$, 且 $\log|f(e^{i\varphi})|\in L'[0,2\pi]$. 1925 年, 他在亚纯函数的研究中建立了两个基本定理. 他这方面的工作使值分布理论出现了新面貌, 并开始了值分布的近代理论, 即奈望林纳理论. 这是 20 世纪数学发展中的一个重大成就. 1935 年, 他开创了调和测度方面的研究, 并做出了重要贡献. 从 1940 年开始, 他把闭黎曼曲面上的阿贝尔积分理论推广到了开黎曼曲面上, 并进行了系统的研究, 后来他还在相对论、微分几何及几何基础等方面做有贡献. 晚年他研究了数学教学改革, 并有多篇论著. 1958 年, 他曾获国际维赫里(Wihuri)科学与艺术奖, 获芬兰白玫瑰大十字勋章等. 他著有《单值化》(1953; 中译本, 科学出版社, 1960)、《解析函数》(1970; 原版为德文, 1935)、《皮卡-波莱尔定理与亚纯函数理论》(1929)等多本专著.

威尔森(Wilson, Rowland, 1895—1980) 英国数学家. 生于哈利法克斯, 卒于萨塞克斯. 1921 年, 他同时获得牛津大学学士和硕士学位, 后任斯旺西大学学院助理讲师, 1929 年升为讲师, 1942—1957 年升任教授、数学系主任. 1955 年获牛津大学理学博士学位. 1957—1961 年任斯旺斯大学学院纯粹数

学系教授、系主任.后还任两年院长.1961年退休.

威尔林主要研究经典分析.他曾在平面C内或一个圆盘内正则或亚纯的函数理论方面有重要成果,其中涉及边界奇点的位置与类型、泰勒级数中小系数的密度、数量级的估计、指标函数、最强增长的方向等.1957年,按幂级数展开中出现的奇点,他给出了最强增长方向的分类.他还与他人合作检验了函数在正则圆盘边界上的奇点与泰勒展开小系数密度的关系,证明了对于在一个正则圆盘边界上有两个或多于两个奇点的函数,在其泰勒级数中的小系数的密度一般是小的,只有在奇点间存在特殊关系时才会大.1930年前后,他还曾对帕德表和帕德逼近进行过深入的分析研究.另外,他早期还曾研究过循环数系的基本性质、结合线性代数和代数几何等.

库　克(Cooke,Richard George,1895—1965) 英国数学家.生于伦敦,卒于伦敦.库克在伦敦读完中学后,即从事化学分析工作,同时读夜大,1917年获东伦敦学院学士学位.1918年,他到哈姆市立学院任助理讲师,1923年任讲师,并被承认为伦敦大学教师.在此同时,他仍坚持读夜校,1921年获硕士学位,1928年获伦敦大学学院博士学位.1926年任伯克贝克学院数学讲师,1947年任伦敦大学学院纯粹数学高级讲师,1960—1962年任伯克贝克学院院长,1962年退休.

库克在单复变函数理论、无限矩阵理论方面有重要贡献.他建立了一个把不完整β函数表示为不完整ν函数的分式.在吉布斯现象及吉布斯比方面也有重要工作.他曾给出了无限矩阵有惟一左右逆的充分条件;还引入了正规序列到序列变换的"绝对等价"的概念,给出了这种性质存在的充分必要条件.他1950年出版的《无限矩阵序列空间》是综合阐述无限矩阵已知代数性质以及它们在可和性、希尔伯特向量空间和相关的序列空间应用的第一本专著,曾被广泛引用,后还被翻译成俄文出版.此外,他还在泛函分析方面做了不少工作.著作有《线性算子》(1953)等.

库拉托夫斯基(Kuratowski,Kazimierz,1896—1980) 波兰数学家.生于华沙,卒于华沙.早年就读于苏格兰格拉斯哥大学和华沙大学,1927年获华沙大学博士学位.1927—1933年,任利沃夫工业大学教授.1934—1966年,任华沙大学教授.1945年成为波兰研究院成员,1952年成为波兰科学院院士.1946-1953年,任波兰数学会主席.1948—1967年,任波兰科学院数学研究所所长.1957—1968年,任波兰科学院副院长.1963—1966年,任国际数学联盟副主席.他还是苏联科学院和奥地利、阿根廷、巴勒莫科学院的外籍院士;爱丁堡皇家学会外籍会员;匈牙利、德国、意大利科学院荣誉院士.他还曾任《基础数学》、《波兰科学院通报》等杂志主编.

库拉托夫斯基的研究工作涉及集合论、点集拓扑、单变量实变函数论、图论等.1922年,他曾借助于闭包算子给出了拓扑空间的一般定义.他是波兰数学学派的重要人物之一,在点集拓扑领域做了不少重要工作.他还和塔尔斯基(Tarski,A.)一起研究过射影集合论与逻辑的关系.他曾在1951年获国家一等科学奖和公共教育部奖,1979年获国家特别奖.著作有《拓扑Ⅰ,Ⅱ》(Ⅰ,1933;Ⅱ,1950)、《集合论》(1952;与人合作)、《集合论与拓扑引论》(1955)等.

亚历山德罗夫(Александров,Павел Сергеевич,1896—1982) 苏联数学家.生于俄罗斯的博戈罗德斯克(Богородск),1917年毕业于莫斯科大学.1921年起在莫斯科大学工作,1929年晋升为教授.1932—1964年,任莫斯科数学会主席.1953年被选为苏联科学院院士.

亚历山德罗夫是现代拓扑学的奠基者之一.他的研究工作开始于集合论和函数论,后转向拓扑学.他和乌雷松(Урысон,П.С.)共同创立并发展了紧与列紧空间理论,引入了一系列基本概念和拓扑结构,建立了本质映射定理和同调维数论,并由此导出了一系列对偶性原理的基本规律.例如,他们得到的定理和性质有:任何一个一般拓扑空间都与一个简单的几何图形——多面体相近似;图形与集合的拓扑性质与其余集的拓扑性质有关等.亚历山德罗夫的著作有《组合拓扑学》(1947)、《群论导引》(1951)、《非欧几何是什么?》(1950)、《集与函数的泛论初阶》(1948)、《拓扑对偶定理(第一部分):闭集》等.他早年与霍普夫(Hopf,E.)合著的《拓扑学》流传很广.

怀尔德(Wilder,Raymond Louis,1896—1982) 美国数学家.生于马萨诸塞州帕默,卒于加利福尼亚州圣巴巴拉.1920年和1921年获布朗大学学士和硕士学位,1923年获得克萨斯大学博士学位.1924—1926年,任俄亥俄州立大学助理教授.1926年任密歇根大学助理教授,1947年晋升为教授,1967年退休.1969年以后任圣巴巴拉加利福尼亚大学访问教授.1950—1951年,曾任美国数学会副主席,1955—1956年,任主席.1965—1966年,任美国数学协会主席.1963年,他被选为美国全国科学院院士.

怀尔德主要研究拓扑.在20世纪早期,拓扑学界曾有"求闭$(n-1)$维流形在E^n中满足的条件"这一问题.1928年怀尔德给出了E^3中2维球面的充分必要条件;同时还证明了如果M是E^n中的$(n-1)$维流形,M的补域对所有的维数r是r维一致局部连通的.1933年把此推广到包含E^3中一般2维闭流形的情形.1934年又推广到n维情况,并发现

了 n 维广义闭流形的概念. 后来他又用 n 维广义闭流形代替欧氏空间作为嵌入空间. 另外,他还对数学史与数学基础有过研究,并著有《数学基础引论》(1952). 此书对数学界有广泛影响. 1973 年,他曾获美国数学协会福特奖和杰出服务奖. 他的著作还有《流形的拓扑》(1949)和《数学概念演变初探》(1968)等.

西格尔(Siegel,Carl Ludwig,1896—1981) 德国数学家. 生于柏林,卒于格丁根. 1915 年入柏林大学,1920 年在格丁根大学获博士学位,1921—1922 年留校任教,并作库朗(Courant,R.)的助手. 1922 年任教于法兰克福大学,1930 年兼任格丁根大学客座讲师. 1940 年赴美到普林斯顿高等研究院,1945—1951 年任教授. 1951 年回格丁根大学任教授,1960 年退休. 1968 年被选为美国全国科学院外籍通讯院士;还是哥本哈根、格丁根、奥斯陆、斯德哥尔摩等科学院院士.

西格尔在数论、多复变函数论等多个领域做出了贡献. 1929 年,他用丢番图逼近理论和阿贝尔簇理论建立了西格尔整数点定理. 1939 年,他证明了有关狄利克雷 L 函数的定理,现被称为西格尔-狄利克雷函数定理. 他在二次域、超越数的代数独立性、不连续群等方面也都得到了重要成果. 1935—1950 年间他建立了多复变函数的自守函数论. 在基本域紧致的情况下,他曾证明了:任一自守函数都可以写成自守形式之商;任意 $n+1$ 个自守函数都是代数相关的,可以选择 $n+1$ 个自守函数,使任何自守函数都能表示成它们的有理函数. 他还构造了一批有重要意义的基本域. 他还和其他人一起证明了天体力学中有关三体问题的几何图形渐近地接近拉格朗日特解的图形,而且碰撞方向一定,在一般情况下不能解析开拓. 1978 年,他获得首次颁发的沃尔夫数学奖. 他的著作有《多复变数解析函数》(1949;中译本,1960,科学出版社)、《复函数论中的若干问题》(1969)等,他的论文收入了《西格尔文集》(4 卷)(1966—1979)中.

阿克曼(Ackermann,F. Wilhelm,1896—1962) 德国数学家、逻辑学家. 生卒地不详. 早年从师希尔伯特(Hilbert,D.),后来在明斯特任教授. 他在数理逻辑方面取得了重要成就. 阿克曼主要研究证明论或元数学(metamathematics). 他与希尔伯特合著的《理论逻辑基础》(1928;中译本,1958 年,科学出版社),系统地阐述了他们在数理逻辑方面的研究成果. 他的著作还有《判定问题的可解类型》(1954)等.

纽　曼(Newman,Maxwell Herman Alexander,1897—1984) 英国数学家. 生于伦敦,早年就学于剑桥大学圣约翰学院,1921 年通过数学学位考试. 1922—1923 年在维也纳学习;1923 年被选为圣约翰学院的研究员,这一职位保持到 1945 年. 1927 年被聘为剑桥大学讲师;1928—1929 年在普林斯顿大学、1937—1938 年在普林斯顿高等研究院作访问研究. 1942 年参加了政府的编码与密码学院机器解译德军密码小组,直到第二次世界大战结束. 1945 年到曼彻斯特大学任数学教授,1964 年退休. 1939 年被选为伦敦皇家学会会员. 1950—1951 年任伦敦数学会主席. 1959 年任英国数学协会主席. 1962 年还曾应邀在国际数学家大会上作演讲.

纽曼是组合拓扑的先驱者之一,也是从事组合拓扑研究的第一位英国数学家. 他改进了组合移动的概念,产生了组合流形间的等价关系,并给出了组合移动的基本性质. 1937 年,他和怀特海(Whitehead,J. H. C.)通过一系列移动构造得到了与三维开胞腔不同胚的流形. 在这过程中得到的一系列空间,称为野生空间(或病态空间). 他在 1942 年发表的关于抽象组合论的文章是今天理论计算机科学的基础,特别是简约系统理论. 他还解决过希尔伯特第五问题中一种非常特殊的情况,使后来的研究中出现了"具纽曼性质的空间"的概念. 他对数理逻辑也有贡献. 1955 年曾获伦敦皇家学会西尔维斯特奖章,1962 年获伦敦数学会德·摩根奖章. 著作有《平面点集拓扑原理》(1939).

波斯特(Post,Emil Leon,1897—1954) 波兰-美国数理逻辑学家. 生于波兰奥古斯图夫(Augustów),卒于纽约. 1917—1920 年在哥伦比亚大学学习. 1920 年获哲学博士学位.

波斯特是现代证明论和现代机器计算理论的创始人之一,在数理逻辑和数学基础方面做出了重要贡献. 他证明了罗素(Russell,B. A. W.)和怀特海(Whitehead,J. H. C.)所提出的命题演算的相容性和完备性,系统地运用真值表法则,并引入了多值真值表. 1936 年,他与图灵(Turing,A. M.)几乎同时引进了一种理想的计算机器,即"图灵机",定义了可计算函数的概念. 1947 年,他又证明了关于半群的字问题的递归不可解性. 此外,他在分析学方面也做出了一定的贡献. 1918 年,他成为了美国数学会会员,也曾是美国符号逻辑协会的会员.

哈特里(Hartree,Douglas Rayner,1897—1958) 英国数学家、物理学家. 生于剑桥,卒于剑桥. 早年在剑桥大学学习,后被选为该校圣约翰学院的研究员. 1926 年获博士学位. 先后在曼彻斯特大学、剑桥大学任教,第二次世界大战期间调往后勤部工作. 哈特里主要研究数值分析方法,并应用于多电子原子的原子波函数的计算,以及弹道学、大气物理学、流体动力学等领域. 他还用科学手段为反法西斯战争服务. 此外,他对机器计算也颇有研究,曾制造出英国第一台微分分析仪.

特里科米(Tricomi,Francesco Giocomo,1897—1978) 意大利数学家.生于那不勒斯,1918年获博士学位.曾在帕多瓦、罗马工作.1925年任佛罗伦萨大学和都灵大学教授.特里科米的主要贡献在微分方程论和积分方程等方面.他深入研究了二阶微分方程解的性态.他研究了下列类型的偏微分方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

证明了这类方程某种边值问题解的存在惟一性定理,后以他的名字命名了这种类型方程.还研究了积分方程的数值解法.著有关于二阶线性偏微分方程、积分方程和微分学方面的著作,如《论二阶混合型偏微分方程》(1923)等.

道格拉斯(Douglas,Jesse,1897—1965) 美国数学家.生于纽约,1916年以优异的成绩毕业于纽约市立学院.1920年获博士学位.1926—1930年,他访问了国内许多数学中心,接触了当代许多数学家,这对他以后的数学研究起到了很好的激励作用.1930年以后,他先后在马萨诸塞理工学院、普林斯顿高等研究院、哥伦比亚大学和纽约市立学院工作.

道格拉斯的主要贡献在变分学方面.他解决并推广了普拉托(Plateau,J. A. F.)的极小曲面问题,这是以往大数学家们试图解决而未能解决的问题.由于这一杰出贡献,道格拉斯荣获了1936年第一次颁发的菲尔兹奖.以后他又转向了研究变分问题的逆问题.1941年,他解决了三维空间变分问题的逆问题.此外,他对群论也做有贡献,解决了所有由两个元素生成的有限群的每个元素的表示形式问题.他发表专著与论文数十篇,有《高拓扑结构的最小曲面》(1939)等.

皮特曼(Pitman,Edwin James George,1897—) 澳大利亚统计学家.生于澳大利亚墨尔本,早年在墨尔本大学学习,并获学士和硕士学位.1922—1923年,任新西兰大学代理数学教授.1924—1925年,任墨尔本大学数学与物理助教.从1926年起,任塔斯马尼亚大学数学教授,直至1962年退休.皮特曼曾到过美国多所大学访问讲学.1954年,他被选为澳大利亚科学院院士.1958—1959年,曾任澳大利亚数学会主席;1960年任国际统计学会主席.

皮特曼主要研究统计推断和概率分布的特征函数等.1939年,他在有关位置与纯量参数的推断的文章中,发展了费希尔(Fisher,R. A.)有关样本构型估计条件方面的思想,并应用不变性概念形成了非常有效的方法.他在统计推断的很多中心问题上,做出了重要贡献,并给出了不少重要的基本概念.1979年,他出版的专著《统计推断的某些基础理论》,给出了统计推断所需要的一些数学结果.后来他又在概率论方面做了许多重要工作,在区域概率分布特征函数的行为领域得到了和的极限分布的性质.1980年,他又在亚指数分布方面给出了新的结果和方法.1977年,澳大利亚统计学会设立了一个统计学方面的高级勋章——皮特曼奖章,并且将它的第一枚奖章授予了皮特曼本人.

萨克斯(Saks,Stanistaw,1897—1942) 波兰数学家.生于华沙,卒于华沙.毕业于华沙大学,在华沙技术大学任教.1921年获博士学位,1940年任教授.萨克斯主要研究实变函数的可微性、复分析理论和积分理论,1933年,他出版的《积分理论》已成为经典著作之一.1938年,他还参与编写出版了《解析函数》,这本专著荣获了当年的波兰科学院奖.1942年,他遭纳粹当局逮捕,同年越狱时遇难.

乌雷松(Урысон, Павел Самуилович. 1898—1924) 苏联数学家.生于敖德萨(Одесса),1919年毕业于莫斯科大学,并留校担任了卢津(Лузин, Н. Н.)的助教.他曾在莫斯科第一大学数学和力学研究所工作,并兼任莫斯科第二大学的教授.

乌雷松在拓扑学方面有重要贡献,是维数论的创始人之一.他得到了拓扑空间和度量空间一般理论中的一系列基本结果.他与亚历山德罗夫(Александров, А. Д.)共同引进了绝对闭空间和局部紧空间的概念,并研究了这些空间的拓扑性质.在积分方程论、复变函数论和几何中的凸体理论等方面他都颇有研究.但他的科学生涯却只有5年,26岁时在英国的海边游泳时被巨浪吞没.

阿 廷(Artin,Emil,1898—1962) 奥地利数学家.生于维也纳,卒于汉堡.早年在维也纳大学和莱比锡大学学习,1921年获博士学位,1926年任汉堡大学教授.1937—1958年,移居美国,任教于多所大学.

阿廷在代数、群论、数论、几何学、拓扑学、特殊函数论、复变函数论等方面都有重要贡献.他推广了狄利克雷L函数,导出了有关的函数方程,1927年,他基本解决了希尔伯特第九问题;还推广了结合环代数理论;对右理想引入了带有极小条件的环,称为阿廷环.许多现代数学的概念都联系着阿廷的名字.他的主要著作有《Y函数引论》(1931)、《伽罗瓦理论》(1942)等.

海 丁(Heyting,Arend,1898—1980) 荷兰数学家.生于阿姆斯特丹,早年就学于阿姆斯特丹大学.后留校任教,1948年晋升为教授.海丁是布劳威尔(Brouwer,L. E. J.)(直觉主义的创建者)的继承人之一.他发展了数学基础研究中的直觉主义学派的理论,并在此基础上建立了二值符号逻辑.这一逻辑规律,像其他多值逻辑规律一样,不接受三重和双重否定规律.他还和其他人共同构造了直觉主义的谓词演算.他的著作有《数学基础研究》(1934)、《直

觉主义》(1956)等.

哈　塞(Hasse,Hermut,1898—1979)　德国数学家.生卒地不详.毕业于格丁根大学,1921年获博士学位.1934年成为格丁根大学教授兼数学研究所所长.他还曾在哈雷(Halle)、马尔堡(Marburg)、格丁根和柏林等地工作.他是阿廷(Artin,E.)和诺特(Noether,E.)学派的代数学家.

哈塞的主要贡献在代数和数论方面.可换域理论和代数数域理论中的许多概念和结果都是用他的名字来命名的.他首先发展了局部类域论,研究了上同调群和类域论的关系.在代数数域中,他研究了对于幂剩余记号的互反律、范数剩余及其记号、希尔伯特范数记号、代数数域的算术等课题,并有以他的名字命名的一种 ζ 函数.哈塞在第二次世界大战期间,从1940年起在法西斯德国海军的研究机构中,从事应用数学研究.第二次世界大战后被解职.1948年在柏林大学恢复教授职位.

贝恩克(Behnke,Heinrich A. L.,1898—1979)德国数学家.生于汉堡,1927年以后任明斯特大学教授.贝恩克的主要贡献在解析函数论及其在数学物理中的应用等方面.他和斯坦(Stein,K.)等根据解析函数的存在定理证明了有关黎曼的覆盖面定理.在多复变量解析函数方面,他研究了全纯域问题和解析自同构问题.著作有《多复变量函数论》(1934,合作)、《单复变量解析函数论》(1962,合作)等.

托马斯(Thomas,Tracy Yerkes,1899—　)美国数学家.生于伊利诺伊阿尔顿,1921年获赖斯学院学士学位,1923年获普林斯顿大学数学博士学位.1923—1926年,曾在芝加哥、哈佛、普林斯顿等大学继续学习.1926—1938年,在普林斯顿大学先后任数学助理教授和副教授.1938年,任洛杉矶加利福尼亚大学数学教授.1944年,任印第安那大学教授、数学系主任,1956—1969年,为该校杰出服务数学教授.1941年,被选为美国全国科学院院士.

托马斯扩展了连续媒介结构中运动曲面上不连续性的通常相容性条件理论,这种理论可确定传播过程中不连续性的强度的变化.他曾对冲击波进行过大量研究,如冲击的稳定性与不稳定性、冲击波的一致性关系、奇异冲击方向、冲击后弯曲体的压力等.他还研究过结晶中的错位速度等,曾参照直角坐标系推导了一组三次结晶体的应力——应变关系方程,这种关系式可用于确定弹性的切变和三次结晶中可能存在的纵向波.他还以一组非线性应力——应变关系为基础表述了结晶中错位速度的理论.他早期研究纯粹数学,涉及途径仿射几何学、途径射影几何学、相对二次微分形式的微分不变式、李群理论基础、仿射连通空间的度量表示等多个方面.著有《广义空间的微分不变式》(1934)、《张量分析与微分几何概念》(1961)等专著.

曼德尔勃罗伊(Mandelbrojt,Szolem,1899—1983)　数学家.国籍不详.生于波兰华沙,1923年获巴黎大学博士学位.先后在里尔(Lille)、克莱蒙费朗(Clermont - Ferrand)和巴黎等地工作.曾任巴黎科学院院士.他的主要贡献在函数论和级数论方面.研究课题涉及拟解析函数类、幂级数、无穷阶可微函数理论、傅里叶级数、狄利克雷级数等方面.1954年和1963年,他分别得到傅里叶变换和狄利克雷级数的奇点之间的有趣关系.著作有《由泰勒级数所表示的解析函数的奇点》(1932)、《傅里叶级数和拟解析函数类》(1935)等.

扎里斯基(Zariski,Oscar,1899—1986)　美国数学家.生于俄国库勃林,卒于美国坎布里奇.1918—1920年,就读于基辅大学.1921年,到意大利比萨大学学习,半年后转到罗马大学,1924年获博士学位.1924—1927年,留校做博士后研究.1927年,到美国约翰斯·霍普金斯大学任教,至1945年.1936年入美国籍.1946—1947年,任伊利诺伊大学研究教授.1947年起,任哈佛大学教授,1969年退休.1943年,被选为美国全国科学院院士;1948年,被选为美国艺术与科学学院院士;1960—1961年,任美国数学会副主席,1969—1970年任主席.

扎里斯基的贡献主要在代数几何领域,特别是参与了重建代数几何基础的工作.早期研究代数、数论等,1927—1935年,转而研究代数簇拓扑,特别是基本群.当时人们认为所有具固定个结点的固定度平面曲线属于一个代数簇,但他发现了具有固定度和固定个奇点的曲线可能属于若干个簇,并给出了例子.1939年,他给出了代数曲面奇点解消的纯代数证明.1944年,他第一次证明了三维代数簇奇点的解消.他还引入了正规簇和簇的正规化概念,现已成为代数簇理论的基础.1940年,他首次证明了任意维(特征 $p=0$)代数簇局部单值化的存在性,并导致他引入了在簇 V 上的拓扑,现称为扎里斯基拓扑.他在1935年出版的专著《代数曲面》是他重建代数几何的开始.他逐步把抽象代数思想引入了代数几何,最终与范·德·瓦尔登(Van der Waerden,B. L.)和韦伊(Weil,A.)一起重建了代数几何的基础.他到哈佛大学以后,使该校成了世界代数几何的中心.1944年曾获美国数学会科尔奖,1965年获美国国家科学奖章,1981年获美国数学会斯蒂尔奖,并于1982年获沃尔夫数学奖.他还著有《代数曲面理论引论》(1969)和其他一些专著.1972—1979年,出版了他的四卷本文集.

诺伊格鲍尔(Neugebauer,Otto,1899—1990)美国数学史学家.生于奥地利因斯布鲁克,卒于美

国.1926年毕业于格丁根大学.1930—1933年任教于格丁根大学,因反对纳粹被解职,1933年移居丹麦,1934—1938年任丹麦哥本哈根大学数学教授,1939年到美国任布朗大学数学教授,1947年任数学史教授.他还是德国《数学文摘》和美国数学会的《数学评论》的创办者和主编之一.

诺伊格鲍尔是著名的古代和中世纪数学与天文学史学家,是古巴比伦数学史的权威.在他的领导下释译了不少巴比伦楔形文字的原始资料.1931年在他的建议下,施普林格出版社创办了《数学文摘》,他坚持《数学文摘》的原则是尽快给出文章的文摘而不考虑原来文章的发表先后.到丹麦后,他仍继续负责主编《数学文摘》.1938年,施普林格出版社在当时德国政府的压力下,要他按纳粹的原则编辑,遭到了他的拒绝,因而导致他和其他大多数编辑人员被解职,使数学界失去了资料可靠的文摘来源.1940年,《数学评论》创刊,他是三位主编之一,并为《数学评论》建立了独特的风格.1979年,因他在创办和编辑《数学文摘》和《数学评论》方面的出色工作,获美国数学协会的杰出服务奖.著作有《古代数学史教程》(1934)、《数学楔形文字释译》(1935)、《古代的精确科学》(第二版,1957)等.

蒂奇马什(Titchmarsh,Edward Charles,1899—1963)　英国数学家.生于英格兰纽伯力,卒于牛津.早年就学于牛津大学,曾师从罗素(Russell,B. A. W.)和哈代(Hardy,G. H.),1922年获学士学位,后获硕士学位.1923—1929年任伦敦大学学院高级讲师,1929—1931年任利物浦大学教授,此后一直任剑桥大学几何教授,他主讲分析学.1928年和1935—1937年,任伦敦数学会副主席,1945—1947年任主席.1931年被选为伦敦皇家学会会员.

蒂奇马什的工作涉及到分析的很多方面.他对傅里叶级数与傅里叶积分、积分方程、单复变量整函数、黎曼ζ函数、二阶微分方程的特征函数等都有重要贡献.他曾把傅里叶变换中的普朗歇尔定理从L^2推广到L^p,$p>1$,相当于傅里叶级数的豪斯多夫-杨定理.1939年,他开始研究微分算子理论,1946年出版了专著《与二阶微分方程相联系的本征函数展开》(Ⅰ,1946;Ⅱ,1958;中译本第一册,上海科技出版社,1964)的第一部分,完成了外尔-斯通-蒂奇马什有关微分算子的理论,引起了国际上一些数学家对微分算子谱理论的注意.1936年,他曾验证了ζ函数在0与1468之间有1041个零点,且都在$\sigma=1/2$上.他的著作把已有的知识做了系统化,并改进了已知结果的证明,在数学界的影响较大.他所著的《函数理论》(1932)一书,曾是当代数学家学习解析函数理论和勒贝格积分的极好教材.

蒂奇马什曾于1953年获伦敦数学会的德·摩根奖章,1956年获贝威克奖;1955年还获得伦敦皇家学会西尔维斯特奖章.他一生曾发表过学术论文近130篇,出版过专著及教材6本.

博赫纳(Bochner,Salomon,1899—1982)　美国数学家.生于奥匈帝国的克拉科夫(现属波兰),卒于美国休斯敦.早年就学于柏林大学,1921年获该校博士学士.1924—1926年,在哥本哈根大学、剑桥大学、牛津大学边工作、边学习.1927—1933年,任慕尼黑大学讲师.1933年到美国任普林斯顿大学副教授.1938年人美国籍.1946年成为该校教授,1968年退休.以后又任赖斯大学教授,并任系主任多年,1979年再次退休.1950年被选为美国全国科学院院士.1957—1958年,任美国数学会副主席.

博赫纳在概率论、傅里叶分析、多复变函数、调和分析、复流形等领域都卓有贡献.1932年给出了博赫纳积分,不久还引入了"抽象"殆周期函数,1961年又引入了殆自守函数.1932年还给出了博赫纳正定函数定理.他是施瓦尔茨分布理论的先驱者,引入了函数的广义傅里叶变换.1936年,他还首先引入了多重傅里叶级数的球和,现已成为研究多重傅里叶展开的收敛问题和逼近问题的重要工具.在多复变函数领域,他在1943年用"博赫纳-马丁内利"核证明了对于具连通边界的有界域,边界上的全纯函数可以延拓到该域的整个内部.在概率论领域,他于1946年引入了一类一般形式的随机过程的傅里叶变换,把加性集合函数随机化,得到了维纳微分空间和同类型的其他平稳随机过程.1979年,他获得美国数学会斯蒂尔奖.著作有《多复变量》(1948;与人合作)、《调和分析与概率论》(1956)、《傅里叶积分》(1959)等.

克鲁尔(Krull,Wolfgang,1899—1971)　德国数学家.生于巴登-巴登(Baden - Baden),在波恩工作.他是诺特(Noether,E.)、阿廷(Artin,E.)所创立的德国代数学派的代表人物,对诺特环和一般交换环论的发展做出了重要贡献.1926年,他建立了带算子阿贝尔群和群的线性表示两个概念的关系,这一问题后来为诺特进一步发展.1928年,他发展了无限伽罗瓦扩张理论,建立了以他的名字命名的克鲁尔拓扑,同年他还把有限半单模的一般理论推广到任意半单模上,后来他又引进了局部环的理论.1932年以后,他开始研究一般赋值论及局部环理论.他的主要专著有《理想理论》(1935;1968第2版)等.

柳斯捷尔尼克(Люстерник,Лазаль Аронович,1899—1981)　苏联数学家.生于兹杜尼斯卡-伏拉(Здуньска - Воля),1922年毕业于莫斯科大学.1931年以后在莫斯科大学工作.1935年获博士学位.1946年当选为苏联科学院通讯院士.柳斯捷尔尼克

是莫斯科数学学派的代表人物.早期研究拓扑学在大范围变分法中的应用.他利用有限差分法解决了狄利克雷问题,后来又与其他学者共同解决了著名的关于闭测地线的庞加莱问题.20世纪30年代,他转向研究线性和非线性微分方程的特征值问题.他与他的学生共同研究分析学中的拓扑方法达20年之久.1943—1946年,他得到大范围变分法的最一般结果.20世纪40年代以后,他还研究了计算机科学,并取得一定成果.此外,他还编著了大量高等学校的教科书.

绍德尔(Schauder,Juliusz Pawel,1899—1943) 波兰数学家.生于利沃夫(L'vov,今属波兰),就学于利沃夫的卡齐米日(Kazimierz)大学,1923年在施坦因豪斯(Steinhaus,H.D.)的指导下取得博士学位,以后留校工作.第二次世界大战期间遭受纳粹迫害,1943年牺牲.

绍德尔曾与巴拿赫(Banach,S.)一起从事研究工作,他的数学研究受到了法国数学家阿达马(Hadamard,J.(-S.))和苏联数学家伯恩斯坦(Бернштейн,С.Н.)的影响.他在泛函分析、拓扑学、积分论、椭圆及双曲型偏微分方程等方面都做了大量工作.他把布劳威尔(Brouwer,L.E.J.)关于欧氏空间中凸紧集到自身的连续映射的不动点定理推广到线性赋范空间中的凸紧集、巴拿赫空间中的凸紧集、局部凸的线性拓扑空间中的凸紧集到自身的连续映射上.他的这些结果有广泛的应用.1934年,他和法国数学家勒雷(Leray,J.)合作,应用不动点定理证明了微分方程解的存在性定理.现代数学文献中多处出现绍德尔的名字:与双曲型方程相关的绍德尔能量不等式、紧算子理论中的里斯-绍德尔定理,关于微分算子内正则性的绍德尔估计等.此外,他在拓扑学中也得到了一些十分著名的结果.

伯格曼(Bergman,Stefan,1899—1977) 美国数学家.生于波兰琴斯托霍瓦,卒于美国.1931—1933年任伯林大学讲师.1933年获柏林大学数学博士学位.1934—1937年任苏联托木斯克等大学教授.1939—1940年和1951—1952年任美国马萨诸塞理工学院讲师,1940—1941年任耶西瓦学院讲师,1941—1945年任布朗大学讲师,1945—1951年任哈佛大学讲师.1952—1974年任斯坦福大学教授,1974年退休.他还是美国艺术与科学学院院士.

伯格曼研究纯粹数学与应用数学,涉及流体力学、多复变函数理论、偏微分方程、可压缩流体理论等,以多复变函数及以他名字命名的伯格曼射影和1922年引入的伯格曼核函数等研究成果最为有名.在多复变解析函数方面,他还研究了度量问题,1936年给出了这类函数的柯西积分公式.1949年,他曾建立了特里科求方程的奇异初值问题的积分表达式.著作有《核函数和共形映射》(1950;中译本,科学出版社,1958)、《核函数与数学物理中的椭圆微分方程》(1953;与人合作)等.

科林伍德(Collingwood,Edward Foyle,1900—1970) 英国数学家.生于英国诺森伯兰郡,卒于诺森伯兰郡.1929年获剑桥大学硕士学位,1929年获博士学位,并留校任教至1937年,1959年又获该校理学博士学位.1939年成为诺森伯兰郡郡长.第二次世界大战期间,曾任海军扫雷部的海军科学家.1942年任美国与英国海军的联络官,1943年成为英国海军部水雷设计处主任科学家.1955年开始任达勒姆大学理事会主席,直至去世.这期间他还曾兼任医学卫生部门管理官员.科林伍德1962年被封为爵士,1965年被选为伦敦皇家学会会员.还曾任过伦敦数学会主席.

科林伍德研究整函数与亚纯函数、聚值集理论等.他引入了亏的概念,1924年证明了亏值或是渐近的,或是代数临界点的极限.他对亚纯函数的第二基本定理也有重要贡献,得到了整函数的一般情况的一个不等式.1952年,他与其他学者合作对聚值集进行了系统而开创性的研究,特别是对单位圆内的亚纯函数的聚值集,并得到了一些有趣的结果,建立了几个重要定理.他还在辻适(Tsuji)函数方面有重要成果.著作有《聚值集理论》(1966;与人合作)等.

伯基尔(Burkill,John Charles,1900—1993) 英国数学家.出生地不详.曾在美国和印度工作.伯基尔的主要贡献在经典分析和实变函数论方面.他推广了黎曼积分与勒贝格积分.在佩龙(Perron,O.)(1914)、当儒瓦(Denjoy,A.)(1921)等人之后,引入了伯基尔积分的概念(1951),在积分概念的发展中起到了推动作用.著作有《勒贝格积分》等.

霍夫曼(Hofmann,Joseph Ehrenfried,1900—1973) 德国数学家.生于慕尼黑.1957年获吉森大学荣誉博士学位,同年当选为民主德国科学院通讯院士.1963年当选为巴黎国际科学史研究院院士.1967年成为比利时科学史学会的外籍会员.霍夫曼编著的《数学史》(1953)内容简单扼要,行文流畅易读,深受读者欢迎.

克洛斯特曼(Kloosterman,Hendrik Douwe,1900—1968) 荷兰数学家.生于荷兰北部弗里斯兰(Friesland)的阿赫特卡斯佩伦(Achtkarspelen).莱顿大学博士,阿姆斯特丹科学院院士.先后在德国莱比锡、美国密歇根、荷兰莱顿等地工作.克洛斯特曼的主要贡献在实变函数论和数论方面.在拟解析函数类和数论中有著名的所谓"克洛斯特曼和",这是在1926年他研究方程 $ax_1{}^2+bx_2^2+cx_3^2+dx_4^2=n$ 时提出来的,它开辟了堆垒数论新的研究领域.

赞格蒙(Zygmund,Antoni,1900—1992) 美国数学家.生于波兰华沙,卒于美国芝加哥.1919年入华沙大学,1923年获博士学位.1922—1929年,任教于华沙工业学校,其中1926—1929年还任华沙大学不支薪讲师.1929—1930年,在英国牛津大学和剑桥大学做研究工作.1930—1939年,任维尔诺大学教授.1940年,到美国霍利奥克山学院任教授.1945—1947年,任宾夕法尼亚大学教授.1947年入美国籍,并在芝加哥大学任教授,直至1980年退休.1961年被选为美国全国科学院院士,同时还是波兰科学院、阿根廷布宜诺斯艾利斯国家科学院、西班牙马德里皇家科学院、意大利巴勒莫国家科学院院士.曾获华盛顿大学、巴黎大学等多所大学荣誉学位.1954—1955年,曾任美国数学会副主席.

赞格蒙的贡献主要在分析领域.早期兴趣主要在古典分析方面,特别是在调和分析、实变和复变以及概率计算在分析中的应用等.在英国期间,受哈代(Hardy,G.H.)及李特尔伍德(Littewood,J.E.)影响,研究了傅里叶分析中的有关问题.他和马钦凯维奇(Marcinkiewicz,J.)等给出了$L^p(0,2\pi)$空间中函数的傅里叶级数的特征性质.20世纪50年代,他和考尔德伦(Calderón,A.P.)合作建立了奇异积分理论.这一理论的出现标志着调和分析进入了一个新时期,有关结果对R^n中的傅里叶分析问题和实变理论都有重要意义,在偏微分方程理论方面也有重要应用.他的工作还对李群和离散算子理论等有重要影响.他还建立了强有力芝加哥分析学派.他曾在1979年获美国数学会斯蒂尔奖,1986年获美国国家科学奖章,还曾于1939年获波兰科学院奖.著作有《三角级数》(1935;1959年第二版增扩为二卷本)、《解析函数》(1966年第二版;与萨克斯(Saks,S.)合作)、《测度与积分》(1977;与人合作)等.

彼得罗夫斯基(Петровский,Иван Георгиевич,1901—1973) 苏联数学家.生于谢夫斯克(Севск),1927年毕业于莫斯科大学.1930年以后在该校工作,1933年成为教授.1935年获物理数学博士学位.1946年当选为苏联科学院院士.1951年以后任莫斯科大学校长.

彼得罗夫斯基在偏微分方程理论、常微分方程定性理论、代数几何学、概率论、积分方程、函数论及拓扑学等多个领域都做出了贡献.他深入研究了实数域内微分方程组的奇点、积分曲线的性态、柯西问题解对初值的依赖性等课题.他把偏微分方程组分为椭圆、双曲和抛物三种类型并进行研究,这些工作使他荣获了1946年的国家奖.此外,他还研究了数学物理中的许多课题.

彼得罗夫斯基为高等学校的数学教育做出了重要贡献,编著了大量的数学教科书.他撰写的《偏微分方程讲义》、《积分方程论讲义》和《常微分方程讲义》,同在1952年获斯大林奖.

布饶尔(Brauer,Richard Dagobert,1901—1977) 美国数学家.生于德国柏林,卒于美国波士顿.1926年获柏林大学博士学位.1927年任教于柯尼斯堡大学.1933年纳粹控制了德国以后,移居美国.1933—1934年,在肯塔基大学任教.1934—1935年,在普林斯顿高等研究院做外尔(Weyl,(C.H.)H.)的助手.1935—1948年,任教于加拿大多伦多大学.1948—1952年,任密歇根大学教授.1952年起,任哈佛大学教授,1971年退休.1945年被选为加拿大皇家学会会员,1954年被选为美国艺术与科学学院院士,1955年被选为美国全国科学院院士,1964年成为格丁根自然科学院通讯院士.1957—1958年,任加拿大数学大会(加拿大数学会前身)主席,1959—1960年,任美国数学会主席.此外,还曾获多所大学荣誉学位.

布饶尔是20世纪的著名代数学家之一.在连续群表示、单群和分裂域、模表示和数论等方面都有重要贡献,特别是单代数理论和非半单代数正则表示方面.早期主要研究群表示理论和代数结构.他和诺特(Noether,E.)的合作促使两者之间建立了联系,他们还揭示了分裂域与单代数的极大子域之间的密切关系.后来引入了现称为域上的布饶尔群的概念.1931年,他还和哈塞(Hasse,H.)、诺特合作证明了迪克森猜想,即代数数域上的中心单代数是循环的,同时还给出了表征数域上中心可除代数的一组完整的数值不变量.1935年开始了有限域上有限群表示的研究,建立了特征P的域上的有限群表示理论,发现了表征特征标的定理,并证明了阿廷L级数是亚纯的.1954年提出了用对合(群的二阶元素)的中心化子的结构分类单群的布饶尔纲领,这种方法与其他观点相结合,大大促进了有限单群的分类研究.另外,他还在类域理论方面有重要成果.1949年获美国数学会柯尔奖,1971年被授予美国国家科学功勋奖章.他一生共发表论著128篇(部),其论文被收入了三卷本的《R.布饶尔文集》.

科 钦(Кочин,Николай Евграфович,1901—1944) 苏联数学家、力学家、地球物理学家.生于圣彼得堡,1923年毕业于圣彼得堡大学.1924—1934年,在列宁格勒大学工作.1935年获博士学位.1938年以后,到莫斯科大学工作,并在苏联科学院力学研究所兼职.1939年,当选为苏联科学院院士.科钦的科学研究涉及动力气象学、气体动力学、空气流体动力学、数学和理论力学等方面.他把数学方法,特别是积分方程论、常微分方程论、矩阵理论和复变函数论中的方法广泛应用于各学科中,成效卓著.他还编写了大量的教科书和专著.

安德罗诺夫(Андронов, Александр Александрович, 1901—1952) 苏联物理学家、数学家. 生于莫斯科, 1925 年毕业于莫斯科大学, 同年获物理数学博士学位. 1931 年开始任高尔基大学教授. 1946 年当选为苏联科学院院士. 安德罗诺夫的主要贡献在振动论与自动控制论方面. 他运用数学方法研究自振理论, 解决了一系列无线电技术和自动控制论中的非线性问题, 对微分方程定性理论也颇有研究. 著作有《振动理论》(1959, 与他人合作)等.

安德罗诺夫还是一位积极的社会活动家. 1969 年, 苏联科学院设立了安德罗诺夫奖.

玻　色(Bose, Raj chandra, 1901—1987) 美国统计学家、组合数学家. 生于印度中央邦, 卒于美国科林斯堡. 1922 年获德里印度学院学士学位, 1924 年获数学硕士学位, 1927 年在加尔各答大学获第二个硕士学位(纯粹数学). 1930 年任加尔各答阿苏托什学院数学讲师, 1933 年任职于印度统计研究所, 1941 年任加尔各答大学统计系讲师, 1945 年任系主任. 1949 年赴美国北卡罗利纳大学任教授, 1971 年退休. 后到科罗拉多州大学任数学与统计学教授. 1971—1972 年, 曾任数理统计学会主席, 1976 年成为美国全国科学院院士.

玻色主要研究数理论统计和组合数学. 他曾为多元分析的分布理论做过基础性工作, 与他人合作引入了可表示为矩阵形式的 t 坐标概念, 1938 年得到了"学生化"D^2 分布. 他曾用有限域和有限几何理论构造了平衡不完全设计. 他在 1939 年发表的"平衡不完全设计的构造"已成为经典, 并被广为引用. 1939 年, 他还与人合作发展了非常一般的部分平衡设计. 1940 年, 他还与他人合作发展了由仿射有限空间点表示的正交对称因子试验的一般混杂理论. 他连续进行了各种设计的研究达 18 年之久. 1955 年, 他还在编码理论方面发展了有名的玻色-乔德赫里(Bose-Chaudhuri)编码, 并导致了一种误差校正码的产生. 1782 年, 欧拉(Euler, L.)曾猜想不能构造出 $4n+2$ 阶的互相正交的拉丁方. 1959 年, 他与其学生合作证明了欧拉猜想是不对的. 此外, 他还在存储问题、结合代数和强正则图等方面都做出了贡献.

诺维科夫(Новиков, Пётр Сергеевич, 1901—1975) 苏联数学家. 生于莫斯科, 1925 年毕业于莫斯科大学, 是卢津(Лузин, Н. Н.)的学生. 1934—1960 年, 在苏联科学院数学研究所工作. 1935 年获物理数学博士学位. 1960 年成为教授, 同年被选为苏联科学院院士.

诺维科夫的主要贡献在集合论、数理逻辑和代数学等方面. 在他读研究生时就解决了有关描述集合论的难题之一. 为了解决集合论的一些重要问题, 他又转向数理逻辑的研究, 并取得了一定的成果. 他还深入研究了连续统理论, 以及与其相近的映射集合的蕴度和可测性问题. 1952 年他指出, 存在具有有限生成元和有限个定义关系的群, 对这些群来说, 没有一种算法能解字问题, 于是他证明了字问题一般不可解. 对于字问题不可解群的存在性, 早在 1912 年就有人提出来加以研究, 它曾引起许多数学家的重视并成为群论的中心问题之一. 诺维科夫及其学生们开辟了新的很有意义的研究领域, 他们得到的结果使数学家摆脱了繁琐的运算. 在代数领域, 诺维科夫和他的学生阿江(Адян, С. И.)解决了重要的伯恩赛德(Burnside, W.)问题. 他们证明了存在具有两个生成元的无限周期群, 对伯恩赛德问题予以否定的回答. 他在拓扑学、函数论和数学物理等方面也做出了一定的贡献. 他十分重视数学教育工作, 早年曾在中学和师范学校任教. 他领导了函数论和数理逻辑的研究班, 创建了苏联数理逻辑学派. 他还为高等学校编写了大量的教科书. 他的许多学生后来成为了优秀的学者.

弗里德里希斯(Friedrichs, Kurt Otto, 1901—1983) 美国数学家. 生于德国基尔, 卒于美国. 1925 年获格丁根大学博士学位. 1925—1937 年, 曾先后在格丁根大学、亚琛技术大学和不伦瑞克理工学院任教. 1937 年移居美国, 任教于纽约大学. 从 1943 年开始, 任库朗数学科学研究所应用数学教授, 1953—1967 年, 先后任副所长和所长, 1973 年退休. 1968—1969 年, 任美国数学会副主席. 1958 年被选为美国艺术与科学学院院士, 1959 年被选为美国全国科学院院士, 曾还是格丁根科学院和慕尼黑科学院通讯院士.

弗里德里希斯的研究工作涉及数学物理、偏微分方程、弹性力学与流体力学等倾向于应用数学的问题. 他首先把希尔伯特空间算子的几何理论应用到了偏微分算子. 1934 年关于对称椭圆算子半有界扩张的工作, 开始了二阶椭圆方程研究的泛函方法. 他还引入了对称线性双曲微分方程, 证明了其初始值问题解的存在性. 他还研究过连续谱算子, 并引入了与前向波算子和后向波算子一致的一对算子. 1972 年获美国全国科学院应用数学和数值分析奖, 1977 年获美国国家科学奖章. 他还撰写出版了《超音速流与冲击波》(1947; 1976 年再版; 与库朗合作)、《量子域理论的数学》(1953)、《电磁理论的数学方法》(1974)等多种专著.

拉　斯(Rasch, Georg, 1901—1980) 丹麦数学家、统计学家. 生于丹麦欧登塞, 卒于丹麦莱索(Laeso. 早年就学于哥本哈根大学, 1925 年毕业, 1930 年成为科学博士, 后从事应用数学工作数年. 1935—1936 年, 访问伦敦大学学院, 深受费希尔

(Fisher,R. A.)影响.回国后在丹麦国家血清实验室工作,并建立了生物统计部,1940—1956年任其主任.同时,在哥本哈根大学兼任教职,1961年任该校统计系主任.他还是丹麦爵士.

拉斯早期研究数学,他的博士论文与矩阵计算及其在微分与差分方程理论中的应用有关,后做过数据分析及统计学方面的工作.从英国回丹麦后,他把数理统计介绍到了丹麦,后来为统计学在理论及应用方面的发展做了不少工作,曾影响了一代丹麦统计学家.他在统计方面的工作主要是结合心理测试等进行的.根据智商与能力测试所得信息,他发展了以特征特性模型为基础的更精确的方法,到20世纪60年代,他又将其做了进一步发展,现称为"拉斯模型".在1960年出版的《某些智商与成就测试的概率性模型》一书中,他又给出了新的模型,并给出了新的统计方法论.后来他又把注意力投向了测量社会科学的更一般的理论.他的成就在于运用数学技术在理论框架下分析数据,严格地表述概念,按统计方法建立有关模型.

塔尔斯基(Tarski,Alfred,1902—1983) 美籍波兰数学家、逻辑学家.生于华沙,卒于美国加利福尼亚伯克利.1923年获华沙大学博士学位,1926年任华沙大学讲师.1929年到美国哈佛大学作合作研究,在1939年移居美国.1942年到伯克利加利福尼亚大学任讲师,1964年晋升为教授,1968年退休.1944—1946年,任符号逻辑协会主席.1965年被选为美国全国科学院院士;1966年被选为英国科学院通讯院士.曾还是皇家荷兰全国科学与文学院院士.

塔尔斯基是华沙逻辑学派的主要代表人物,其贡献也主要在逻辑学方面.在形式逻辑的真实概念和判断中学欧几里得几何基础理论中任何命题真与不真的方法等方面的工作都是开创性的.在逻辑学的几乎所有分支,特别是模型理论、集合论、代数逻辑等方面都有贡献.他的研究工作还涉及到泛代数、布尔代数、格论、分析和几何(特别是几何的基础及元数学)等学科.他在23岁时就发现了著名的巴拿赫-塔尔斯基悖论.他还认为逻辑从来就不是孤立于数学主体的无味、抽象、公式主义的一种复杂事业,而是对理解数学科学的语言和推理的研究.他一生发表过300多篇论文和《无变项集合论的形式化》(1987;与他人合作)等7种专著.从1986年开始,出版了他的四卷本文集.

霍普夫(Hopf,Eberhard,1902—1983) 美国数学家.生于奥地利萨尔茨堡,卒于美国印第安纳.1925年获柏林大学博士学位,1929年获大学授课资格.1926—1930年,在天文研究所工作.1930—1932年,在美国哈佛大学和英国剑桥大学学习.1932—1936年,任马萨诸塞理工学院助理教授.1936—1944年,任莱比锡大学数学教授.1944—1947年,任慕尼黑大学数学教授.1947年,任纽约大学库朗研究所访问教授.1949年起,任印第安纳大学教授,后为研究教授.1972年退休.他是德国萨克森科学院和巴伐利亚科学院院士.1951—1981年,任《印第安纳大学数学杂志》主编.

霍普夫对纯粹数学与应用数学的多个领域都有基础性贡献,特别是偏微分方程、变分法、积分方程、流体动力学、遍历理论、拓扑动力学和理论天体物理学等.1931年,他和维纳(Wiener,N.)合作给出了一类给定在半无穷区间上的带差核的奇异积分方程的解法,现在此方法称为维纳-霍普夫方法,该类方程称为维纳-霍普夫方程.这一工作对算子理论和系统理论的发展很有影响,是今天理论工程的基本数学工具.1943年,他建立了现称为霍普夫分歧的基础,现已发展成了研究流体力学、固体力学和化学中数学问题的有力工具.霍普夫极大值原理是现代椭圆微分方程理论的基石之一.他的关于非齐次边界条件纳维-斯托克斯方程的弱解的存在定理是一个突破,曾在20世纪50年代引起了对纳维-斯托克斯方程的大量研究.1948年,他给出了解显示湍流行为的粘性流体系统的模拟例子,在湍流理论中影响很大.1950年,他首先用"粘性消去法"严格证明了单个拟线性方程初值问题解的大范围存在性.1981年,他曾获美国数学会斯蒂尔奖.著作有《辐射平衡中的数学问题》(1964).

扎兰凯维奇(Zarankiewicz,Kazimierz,1902—1959) 波兰数学家.生于琴斯托霍瓦(Czestochowa),卒于英国伦敦.1919年就学于华沙大学数学系.1923年获博士学位.1948年任教授,兼任波兰数学会华沙分会主席,并参与了几种杂志的编辑工作.他对拓扑学中的割点与延拓理论(1927,1932,1951)、图论(1953)、复变函数论中的核论及应用(1934,1938,1956)和数论中的三角形数(1949,1954)等均有贡献.另外,他还积极参与了国际宇航联盟活动.

狄喇克(Dirac,Paul Adrien Maurice,1902—1984) 英国数学家、物理学家.生于英国布里斯托尔,1921年获布里斯托尔大学学士学位,1926年获剑桥大学博士学位.他曾进行过广泛的访问,并曾于1929年任美国威斯康星大学和芝加哥大学、1931年任普林斯顿大学的访问讲师.1932年起,任剑桥大学数学教授,但其中1947—1948年和1958—1959年,曾还是普林斯顿高等研究院成员,1969年退休.1971年,又担任美国佛罗里达州立大学物理教授.1930年曾被选为伦敦皇家学会会员,1949年,曾被选为美国全国科学院外籍通讯院士.

狄喇克在数学物理,特别是在量子力学方面做

出了重要贡献. 量子论是从电磁辐射问题开始的,但经过了很长时间才由狄喇克于 1927 年建立了电磁场本身的量子论,并引入了二次量子化方法. 同时他又给出了描述电子性质的抽象数学理论,首先对观察到的电子性质做了严格说明,并因此于 1933 年获诺贝尔物理奖. 他引入了第一个广义函数 $\delta(x)$:当 $x \neq 0$ 时,$\delta(x)=0$,而

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = 1.$$

现称狄喇克函数或狄喇克分布. 用它可以清楚而方便地描述点质量、点电荷、偶极子、瞬时打击力、瞬时源等物理量. 后来施瓦尔茨(Schwartz, J. T.)用泛函分析观点为广义函数建立了一整套理论,现已广泛地应用于数学、物理、力学,以及分析数学的其他许多分支. 他在哈密顿系统方面也有贡献,1935 年证明了:设

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = f_i(y_1, y_2, \cdots, y_n) \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

令 $H = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n$,则哈密顿系统为

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

这样,哈密顿系统理论的研究,在引入余切空间(y_1, y_2, $\cdots$, y_n)以后,只需研究一般的一阶正规型微分方程系统. 1936 年,他还给出了一个普遍波方程.

狄喇克曾于 1939 年、1952 年还先后获得伦敦皇家学会皇家奖章、科普利奖章. 著有《量子力学原理》(1930;中译本,1964)、《量子理论的发展》(1971)、《希尔伯特空间中的旋量》(1974)等多本专著.

法瓦尔(Favard, Jean Aimé, 1902—1965) 法国数学家. 生于佩拉-拉诺尼耶尔(Peyrat - La - Nonière),早年在巴黎高等师范学校学习,并获科学博士学位. 后任巴黎大学(1941)和巴黎综合工科学校(1954)教授. 法瓦尔的主要贡献在实变函数论(法瓦尔覆盖问题)和三角级数论等方面. 他还研究了多项式近似法中的近似度和连续模问题,给出了有关的 Jackson 定理中正系数的最佳值. 著作有《空间与维数》、《局部微分几何教程》等.

瓦尔德(Wald, Abraham, 1902—1950) 统计学家. 生于罗马尼亚克卢日,在印度讲学期间因飞机失事身亡. 少年时,中小学的知识靠自学,后入克卢日的地方大学学习,毕业后到维也纳,于 1927 年又在维也纳大学学习,1931 年获博士学位. 后从事经济工作,曾任职于奥地利商业循环研究所. 1938 年,为躲纳粹势力迫害去了美国,到哥伦比亚大学从事研究工作. 1941 年成为经济学助理教授,1943 年升为副教授,1944 年升为教授. 1946 年,任新建的数理统计系教授和系主任.

瓦尔德的主要贡献在数理统计领域. 在他到美国之前,他的工作主要在几何和数理经济学领域,并已有所建树. 在极小值原理及其与不稳定经济的关系,以及经济统计领域的随机差分方程等方面都有重要贡献. 这些成果在经济工作中都有较大的实用意义. 他最受称赞的贡献是 1950 年他给出的统计决策理论. 早在 1939 年,他就给出了决策空间、权、风险函数、极小极大解等概念,并对先验分布计算了贝叶斯解,证明了极大极小的风险函数在一定约束下是常数. 他在 1950 年出版的《统计决策函数》一书中,对这一理论做了一般阐述. 他把决策或行动等内容也纳入了统计的范围,这是数理统计学上的一项革新,有较大的实际意义. 在第二次世界大战期间,他还给出并发展了序列概率比检验. 他提出了若干不同的渐近最佳检验序列的概念,研究了检验的各种最佳性质,证明了最佳检验的存在性. 他 1947 年出版的《序贯分析》一书是数理统计中序贯分析分支的基础. 他还在概率论的公理化方面做过早期的基础工作,给出过强大数定律的推论等. 20 世纪 40 年代,他和霍特林(Hotelling, H.)曾把哥伦比亚大学发展成了数理统计的中心. 他的重要论文均收入了《瓦尔德统计与概率文选》(1955)内.

列别杰夫(Лебедев, Сергей Алек - сеевич, 1902—1974) 苏联数学家. 生于高尔基城,早年在莫斯科高等技术学校学习. 毕业后先后在全苏电工学院、乌克兰科学院电工研究所、莫斯科理工学院、苏联科学院精密力学和计算技术研究所工作. 1945 年、1953 年先后被选为乌克兰科学院、苏联科学院院士. 列别杰夫的主要贡献在射影几何、电子计算机的应用、能源系统的稳定性理论和电工学等方面. 在他领导下,研制了苏联第一台具有程序控制的小型电子计算机(1951)和电子速算机(1952)等,为苏联的电子计算机技术的发展做出了重大贡献. 著作有《计算技术及其应用》等.

威格纳(Wigner, Eugene Paul, 1902—1995) 美国数学物理学家. 生于匈牙利布达佩斯,卒于美国普林斯顿. 1925 年获柏林工业大学化工工程博士学位,1926 年留校任助教. 1927—1928 年,任格丁根大学助教. 1928 年,回到柏林工业大学任不支薪讲师. 1930 年,赴美国任普林斯顿大学数学物理讲师,1931—1937 年,任教授(在 1931—1933 年期间,每年有半年,在柏林工业大学任教),后曾任威斯康星大学教授. 1938 年,回普林斯顿大学任数学物理教授. 第二次世界大战期间,任职于设在芝加哥大学数学系的“冶金实验室”,从事原子弹的设计研制工作. 1971 年,从普林斯顿大学退休. 1945 年当选为美国全国科学院院士.

威格纳被称为 20 世纪伟大的物理学家. 他曾于

1963 年获诺贝尔物理奖.他对物理学的很多领域都有贡献,是量子力学的创始人之一.特别以对量子力学的对称性从物理学和数学上所作的分析而著称.他曾用群理论对该性质进行过深入系统的研究,并取得了重要成果.1931 年,他出版了《群论及其在原子光谱的量子力学中的应用》,书中他对置换群、旋转群或其覆盖群 $SU(2)$ 做了系统阐述,特别是对这些群的表示理论.他还推导了张量算子矩阵元素的威格纳-埃卡特公式.他构造了一类非齐次洛伦茨群的不可约酉表示,1938 年发表了他在这方面的基础性文章,后来这类群作为 $SL(2,C)$ 及 $SL(2,R)$ 有了很大的发展.此外,他还在固态物理、物理化学、核工程等方面做出了重要贡献.他还曾获功勋奖章(1946)、美国原子能委员会的费米奖(1958)、马克斯·普朗克奖章(1961)、美国国家科学奖章(1969)等.

格勒奇(Grötzsch,Herbert,1902—) 德国数学家.生地不详.哈雷(Halle)大学教授.格勒奇的主要贡献在复变函数论方面.1928 年,作为保角映射的推广,他引进了拟保角映射概念.他研究了拟保角映射与保角映射之间的类似点,求出了平面上给定的两个长方形之间使微椭圆的长轴和短轴之比的上确界达到最小的拟保角映射,即求出了最接近保角映射的拟保角映射.他还研究了多连通域的保角映射,指出了无限连通情形与有限连通情形有本质的差别.他的工作对复变函数论的发展起到了重要作用.

范·德·瓦尔登(Van der Waerden,Bartel Leendert,1903—1996) 荷兰数学家、数学史家.生于阿姆斯特丹,1926 年获阿姆斯特丹大学博士学位.先后在哥罗宁根(Groningen)、莱比锡、阿姆斯特丹、苏黎世等地的各大学任教.

范·德·瓦尔登的主要贡献在代数、代数几何、群论方法在量子物理和数理统计中的应用等方面.他撰写的《近世代数》(上、下册,1930—1931)对代数学的发展起了重要影响,它的出版标志着"抽象"代数的初创时期已经结束.这部著作从某种程度上确定了后来代数研究的特点和方向.其修订本后来改名为《代数学》(1955),增加了许多新的研究成果.范·德·瓦尔登还是一位数学史家,他对古埃及、巴比伦和希腊的数学和天文学颇有研究.著作有《代数几何导论》(1939)、《量子力学中的群论方法》(1932)、《科学的觉醒》(1954)和《代数学史》(1985)等.

拉姆齐(Ramsey,Frank Plumpton,1903—1930) 英国数理逻辑学家.生于剑桥,卒于剑桥.早年在剑桥大学学习,毕业后被选为国王学院研究员.

拉姆齐的主要贡献在数理逻辑、代数曲线论、概率论和经济学中的数学理论等方面.他研究了怀特海(Whitehead,J. H. C.)和罗素(Russell,B. A. W.)关于数理逻辑方面的工作,指出其可约性公理并非是自明的,并重新解释了命题函词.他还指出了逻辑悖论间的重要差别.他在 1930 年发表的题为"形式逻辑中的一个问题"的重要论文中,研究了寻求决定逻辑公式相容性的一般法则,为此他运用了一个精美的组合定理,构成了现代组合数学中的拉姆齐定理,这个定理在图论和计算机科学方面获得了广泛的应用.

温特纳(Wintner,Aurel,1903—1958) 美国数学家.生于匈牙利布达佩斯,卒于美国马里兰州.1920 年入布达佩斯大学,但因家庭经济状况不佳,中途退学.1929 年获莱比锡大学哲学博士学位.1929—1930 年,作为国际教育委员会的研究人员在意大利罗马和丹麦哥本哈根做研究工作.从 1930 年直至去世,在美国约翰斯·霍普金斯大学任教,1946 年晋升为教授.1936—1944 年,曾任《美国数学杂志》副主编,1944—1958 年,任主编.

温特纳在分析的很多分支都做出了重要贡献,特别在动力系统周期解的存在性方面.1925 年证明了希尔存在定理,1931 年从数学角度验证了天体力学中的自然收尾原理.在 1929 年的博士论文中,他曾系统地处理了希尔伯特空间理论,但因所用方法比较过时,没受到重视.他首先注意到了殆周期函数与某些天文方程之间的关系.1949 年,他用多变量解析函数的正规族给出了解析函数的隐函数定理的精密化.后期他还在微分方程和微分几何方面做了不少工作.他一生曾发表了 430 多篇论文,出版了《天体力学的解析基础》(1941)和《概率分布的傅里叶变换》(1947)等 9 本专著.

柯尔莫哥洛夫(Колмогоров, Андрей Николаевич 1903—1987) 苏联数学家.生于坦博夫(Тамъов),1925 年毕业于莫斯科大学.1930 年开始任母校教授,1935 年获博士学位,1939 年当选为苏联科学院院士.曾任《苏联大百科全书》第二版数学学科的主编,还是多国科学院和学术团体的成员.

柯尔莫哥洛夫是 20 世纪最有影响的数学家之一.他的数学研究开始于实变函数论,在三角级数收敛性、测度论、积分概念的推广、集合上的一般算子理论等多方面都取得了重要结果.1956 年,他研究了一个多元函数用较少变量的(多元)函数表示的可能性问题,取得较大进展.1957 年,其学生阿诺尔德(Арнольд,В. И.)证明了三元函数能表示为二元函数,对于连续函数的情形解决了希尔伯特第 13 问题.

柯尔莫哥洛夫还是现代概率论的开拓者之一.1925 年以后,他与辛钦(Хинчин,А. Я.)共同把实变函数论的方法应用于概率论,建立了在测度论基础上的概率论的公理化体系,奠定了近代概率论的基

础. 1930 年以后,他着重研究了应用于具连续时间变量的马尔可夫随机过程的解析方法,发展了"马尔可夫过程"的理论与应用. 此外,他在数理逻辑、拓扑学、力学、微分方程、泛函分析、信息论和数学语义学等方面也做出了重要贡献. 他还从事数学史、哲学、数学论证等方面的研究. 他培养了大批优秀的学生,一些学生后来成了苏联著名的数学家. 他相继共发表论著 230 多篇(部),并还多次获得各种奖励和荣誉勋章,特别是获得了 1980 年的沃尔夫数学奖.

奥尔利兹(Orlicz, Wladyslaw, 1903—1990) 波兰数学家. 生于克拉科夫地区,卒于波兹南. 早年就学于卡济米尔兹(Kazimierz)大学,1922—1929 年,在该校任助教,1928 年获博士学位. 1929—1931 年,在德国格丁根大学学习. 1931—1937 年,任利沃夫大学助教、助理教授. 1937 年,任波兹南大学副教授. 第二次世界大战时期,他在利沃夫为波兰抵抗力量进行地下教学活动. 1945 年返回波兹南大学,1948 年晋升为教授. 同年还成为刚组建的国家数学研究所(后为波兰科学院数学研究所)成员. 1974 年退休. 1962 年起,任《数学研究》杂志主编,直至去世. 1956 年,被选为波兰科学院通讯院士,1961 年成为院士.

奥尔利兹是波兰利沃夫泛函分析学派的创始人之一,也是巴拿赫学派最后去世的一位代表人物. 他在正交级数、实分析、度量局部凸空间、萨克斯空间、多项式算子、巴拿赫空间中的无条件收敛、算子插值、模空间等方面都做出了重要贡献. 现有奥尔利兹空间、奥尔利兹范畴定理、奥尔利兹-佩蒂斯定理等. 1963 年,他曾到北京讲学,并用中文出版了《线性泛函分析》(1963)一书. 他曾获波兰科学院科佩尼克斯(Copernicus)奖章、国家教育委员会奖章等. 1988 年出版了二卷本《奥尔利兹文集》.

丘 奇(Church, Alonzo, 1903—1995) 美国数学家、逻辑学家. 生于华盛顿市,毕业于普林斯顿大学. 1927 年获博士学位. 曾执教于普林斯顿大学等校,1967 年起任哲学与数学教授. 丘奇还是美国艺术与科学学院院士、英国科学院院士.

丘奇的主要贡献在数理逻辑和算法理论方面. 1933 年以来,他与美国数学家克林(Kleene, S. C.)用 λ 记号定义了 λ 可定义函数的概念,提出了可构造序列理论,引进了部分递归函数的概念. 他们的工作发展了一般递归函数理论,后来他们又考查了能行可达序列的集合,并为寻求能行可计算函数的表述做出了努力. 丘奇的工作对英国数学家图灵(Turing, A. M.)产生过积极的影响. 他的著作有《数理逻辑引论》等.

霍 奇(Hodge, William Vallance Douglas, 1903—1975) 英国数学家. 生于苏格兰爱丁堡,卒于英格兰剑桥. 1923 年毕业于爱丁堡大学,同年到剑桥大学圣约翰学院学习. 1926—1931 年,任教于布里斯托尔大学. 1930—1933 年,在圣约翰学院做研究工作. 1933 年被聘为剑桥大学讲师,1936 年又被聘为该校几何学教授,1958 年任剑桥大学彭布罗克学院院长,1970 年退休. 1938 年,他被选为英国皇家学会会员,并于 1944—1946 年任理事会成员;还被选为爱丁堡皇家学会会员. 1959 年,他又被封为爵士,同年还曾被选为美国全国科学院和美国艺术与科学学院外籍院士. 1947—1949 年,他同时任伦敦数学会和剑桥哲学会主席,1955 年任英国数学协会主席,1954—1958 年,任国际数学联盟副主席. 1958 年,他还任国际数学家大会主席.

霍奇的数学工作主要在与复域上代数簇有关的积分理论. 他发展了德·拉姆(de Rham, G.-W.)的上同调理论,创立了调和积分论,并发现了它们与代数几何的关系. 他在 20 世纪 30 年代把黎曼曲面上的调和函数理论推广到了高维的紧致复流形,并证明了紧复流形的一个基本定理,即霍奇定理,并由此创立了调和微分形式理论,现称霍奇理论. 该理论进一步揭示了分析与拓扑之间的关系,对现代流形上分析的整体研究有深刻影响. 该理论在紧李代数和同调理论方面也有应用. 晚年他主要用层理论进行与代数簇有关的积分的一些研究,包括与阿蒂亚(Atiyah, M. F.)合作对簇上第二类代数积分的详细研究. 他曾于 1937 年获亚当斯奖,1952 年获伦敦数学会贝维克奖,1959 年又获该学会德·摩根奖章;1957 年和 1974 年分别获英国皇家学会的皇家奖章和科普利奖章. 著作有《调和积分理论及其应用》(1941)、《代数几何方法》(1947, 1952, 1954;与佩多(Pedoe, D.)合作)等.

马 勒(Mahler, Kurt, 1903—1988) 英国数学家. 生于德国克雷菲尔德的一个犹太家庭,卒于澳大利亚堪培拉. 1923 年入格丁根大学学习,1927 年获法兰克福大学博士学位,后做过几年研究工作. 1933 年希特勒(Hitler, A.)上台后,移居英国,任教于曼彻斯特大学,直至 1963 年. 1940 年被授予理学博士学位,1944 年任讲师,1947 年任高级讲师,1952 年任教授. 1946 年入英国籍,成为英国公民. 1963 年到澳大利亚堪培拉高等研究所任教授,同时任教于澳大利亚国立大学. 1968 年从研究所退休,后应邀到美国俄亥俄州立大学任职,1972 年回堪培拉. 1948 年,被选为伦敦皇家学会会员,1965 年,被选为澳大利亚科学院院士.

马勒主要研究丢番图逼近、超越数和数的几何. 1927—1933 年,他发展了超越理论的新方法,给出了超越数的分类,并开创了 p 进域上的丢番图逼近. 特别是 1953 年证明了,对任意一对整数 p 和 q

$\geqslant 2, |\pi - p/q| > q^{-42}$. 1937 年证明了小数 0.123456789101112 13…是超越数. 20 世纪 40 年代初，他发展了 n 维空间中一般集合的数的几何，并给出了紧性定理. 此外，他还在转移定理、二次型和多项式等方面也取得了不少成果. 他曾于 1950 年获伦敦数学会高级贝维克奖，1971 年又获该学会德·摩根奖章，1977 年获澳大利亚科学院莱尔奖章. 他一生共发表论文 200 多篇，并著有《超越数讲义》(1976)、《P 进数及其函数引论》(1973；1981 年增订版改名为《P 进数及其函数》)等.

莫尔斯(Morse，Philip McCord，1903—) 美国物理学家、数学家. 生于路易斯安那州什里夫波特. 1926 年获凯斯学院学士学位，1929 年获普林斯顿大学博士学位. 1931 年起任职于马萨诸塞理工学院，初为物理系助理教授，1934 年任副教授，1939 年任教授. 从 1955 年起任该校计算中心主任，1958 年起又任运筹学中心主任，1969 年退休. 1951—1952 年，任美国运筹学会首任主席. 1950—1951 年，任美国声学学会主席，1972—1973 年，任美国物理学会主席. 1934 年，被选为美国艺术与科学学院院士；1955 年，被选为美国全国科学院院士.

莫尔斯在物理领域的量子力学、天体物理学、声学等方面都有重要贡献. 研究天体物理时，他曾把量子力学和统计力学结合计算了高温、高压下气体混合的不透明度. 他在数学领域的贡献主要在运筹学和特殊函数方面. 第二次世界大战期间，莫尔斯曾组织领导了一个科学家小组，分析反潜战术，并帮助提高他们的效率，这就是美国海军运筹学组，在战争中它曾发挥了重要的作用. 他们对此进行过理论研究，用几何与概率方法最优化了潜艇的搜索. 他曾因组织与指导该组而获美国总统功勋奖章. 1951 年，他与金博尔(Kimball，G. E.)合作出版了《运筹学方法》一书. 他在书中给出了推广型兰彻斯特方程常系数时的解，并给出了运筹学的一个定义. 后来他还研究了排队论和运筹学在交通运输及图书馆运行等方面的应用. 他还曾获多项奖，1965 年获伦敦运筹学会银质奖章，1973 年获美国声学学会金质奖章，1974 年获美国运筹学会金博尔奖等. 除了多种物理专著外，他还著有《排队、存储、维修》(1958)、《图书馆能行性》等.

斯 通(Stone，Marshall Harvey，1903—1989) 美国数学家. 生于纽约，在访问印度期间因突发病，卒于马德拉斯. 早年就学于哈佛大学，1922 年大学毕业，分别于 1924 年、1926 年获硕士、博士学位. 1925—1927 年，任教于哥伦比亚大学. 1931—1933 年，任耶鲁大学副教授. 1927—1931 年、1933—1946 年，在哈佛大学任教，1937 年晋升为教授. 1946 年起，任芝加哥大学教授，其中 1946—1952 年任系主任. 1968 年退休. 同年，任阿默斯特马萨诸塞大学数学教授，1980 年第二次退休. 1938 年，他被选为美国全国科学院院士，也是美国艺术与科学学院院士. 他还曾参与重建国际数学联盟，并于 1952—1954 年任主席. 1944—1945 年，曾任美国数学会主席.

斯通的主要贡献在泛函分析和算子理论方面. 他早期研究正交展开理论，1929 年开始了对泛函的研究. 他和施密特(Schmidt，E.)互相独立地引入了自伴算子的概念，他还证明了无界自伴算子谱定理. 他表述并证明了量子力学中的单参数酉群表示定理，该定理不仅在量子力学中很重要，而且是非紧局部紧群酉表示理论中的早期重要成果. 1934—1935 年，他给出了斯通布尔代数表示定理，发现了布尔代数与一般拓扑的关系. 这一理论在解决拓扑和逻辑问题时都很有作用. 他还用这种方法，独立于切赫(Čech，E.)解决了给定空间的紧化问题，现有切赫-斯通紧化定理. 在 20 世纪 30 年代末、40 年代初，他给出了紧空间上连续函数环的抽象特征. 从 1945 年开始，他十分关注数学教育问题. 在芝加哥大学期间，他领导了大学本科和研究生数学教材现代化活动. 20 世纪 50 年代，他又开始关心中学数学教育的基础改革问题，并在 1956—1966 年间的一系列国际数学教育会议上，发挥着他自己的重要作用，他的这些积极活动也曾对欧美国家产生了积极影响. 1982 年，他获得了美国国家科学奖章. 他的著作有《希尔伯特空间中的线性变换及其在分析中的应用》(1932)等.

伯恩鲍姆(Birnbaum，Zygmunt William，1903—) 美国数理统计学家. 生于波兰利沃夫，早年就学于利沃夫大学，1925 年获法学博士学位，1929 年获数学博士学位. 1929—1931 年，在德国格丁根做研究工作，后任维也纳保险公司精算师 1 年，1932 年任该公司利沃夫办事处的主任精算师. 1937 年移居美国，任纽约哥伦比亚大学生物统计研究助理 2 年. 1939—1950 年，任华盛顿大学数学系助理教授、副教授. 1950 年起任教授，1974 年退休. 他曾任道格拉斯飞机制造公司等多个企业与机构的顾问. 1963—1964 年，任数理统计学会主席. 1967—1970 年，任《数理统计年刊》主编.

伯恩鲍姆开始接触统计时，1961 年与他人合作首次对凝聚结构理论给出了系统的处理，该理论是现代系统可靠性理论的基础. 他在概率不等式、采样调查、小样本统计的数值表、材料寿命的统计理论、多部件系统的可靠性理论等方面都取得了重要成果. 1962 年，他在推断方法及原理方面表达了辅助统计量中的充分性、条件性，以及似然性原理，并证明了充分性和条件性原理两者一起等价于似然性. 该工作被认为是这方面的基础性工作. 伯恩鲍姆曾

于1983年获美国统计协会的威尔克斯纪念奖章.他还著有《概率与数理统计引论》(1962)等专著.

冯·诺伊曼(von Neumann,John,1903—1957) 匈牙利-美国数学家.生于布达佩斯一个犹太血统家庭.自幼聪慧,才智过人.10岁进入大学预科班,19岁写出了第一篇论文,1926年同时获得苏黎世"化学工程"文凭和布达佩斯数学博士学位.1926—1930年,先后担任柏林大学、汉堡大学助教.1930年,首次赴美任普林斯顿大学客座讲师;1933年,任普林斯顿高级研究院数学教授,当时年仅30岁.第二次世界大战时,他积极参加反战活动和许多重要的军事科学计划及工程项目.从1940年起,他是阿伯丁弹道实验研究所顾问成员,1941年成为海军兵工局顾问,1943年担任制造原子弹的顾问.战后仍为海军武器实验室(1947—1955)和空军特种武器设计(1950—1955)成员,在1953—1957年间,还担任了原子能委员会顾问.1947年获美国海军杰出服务勋章,1956年又由总统授予自由勋章.1957年因癌症卒于华盛顿.

冯·诺伊曼的科学活动遍及纯粹数学、应用数学、力学、经济学、气象学、理论物理学、计算机科学以及脑科学等领域,他是20世纪上半叶最杰出的数学家之一.他的著作和论文多达150余篇.在第二次世界大战前,主要以集合论、量子力学、算子理论和测度论等纯粹数学的研究闻名于世.1933年,他解决了希尔伯特第五问题.战时和战后则转向应用数学的研究,其成就主要在两个方面:

1.进行了电子计算机研究,亲自参与制造了第一台高速电子数字计算机(1946年制成),并把它用于核武器设计和天气预报等方面.

2.创立了对策论,并应用于经济领域.

冯·诺伊曼的主要著作有《量子力学的数学基础》(1932)、《对策论与经济行为》(1944;合著,)、《计算机与人脑》(1958)等.

布雷洛(Brélot,Marcel Emile,1903—1987) 法国数学家.生于卢瓦尔河畔新堡(Châteauneuf - Sur - Loire),早年就学于巴黎高等师范学校,1931年获博士学位.毕业后先后在巴黎、阿尔及尔(Algiers)、波尔多(Bordeaux)工作,1953年又回到巴黎.布雷洛主要研究调和与次调和函数的渐近构造理论和位势理论.著作有《经典位势理论基础》(1959)和《位势论教程》(1960)等.此外,他在统计学、拓扑学等方面也有重要著述问世.他曾三次获巴黎科学院奖(1939年、1945年、1952年).

怀伯恩(Whyburn,Gordon Thomas,1904—1969) 美国数学家.生于得克萨斯州刘易斯维尔,卒于弗吉尼亚州夏洛茨维尔.早年就学于得克萨斯大学,1925年和1926年分别获化学学士和硕士学位,1927年获数学博士学位.1929—1930年,他在维也纳大学做研究工作,后任教于得克萨斯大学和约翰斯·霍普金斯大学.1934年起,任弗吉尼亚大学教授,直至去世.在1934—1966年期间,任数学系主任.他曾参与创办了《数学评论》,并曾任《美国数学会汇刊》编委主任.1953—1954年,任美国数学会主席.1951年,被选为美国全国科学院院士.

怀伯恩的研究工作在几何拓扑中闭联集静态结构理论、集合在连续形变或变换时的动态发展,以及经典函数论中的拓扑方法等领域有重要影响.他发现了闭联集的基本结构性质与其割点及局部割点有关,还发现了闭联集的割点,特别是局部连通的闭联集,可以产生一个把闭联集分为循环元的一个分割,以致当把超集看作为一个单位时,使结构可假设为一个简单的无圈型,即闭联集不包含闭通道或闭曲线.这样整个结构类问题就马上变为可解.他与其他人还建立了循环元的可加定理.他还研究了开集映射的结构不变性和发展性,取得了重要成果.他还用拓扑方法建立了单复变量解析函数的一些拓扑和解析性质.他曾在1939年获美国数学协会查文尼特奖.著有《解析拓扑》(1942;1964年第四版)、《拓扑分析》(1958)等专著.

霍　尔(Hall,Philip,1904—1982) 英国数学家.生于伦敦,因肺炎卒于剑桥.1925年获剑桥大学英王学院学士学位,1929年获硕士学位.后一直任教于剑桥大学,但在1941—1945年期间,曾在政府的编码与密码学校工作.1949年,任代数高级讲师,1953—1967年,任纯粹数学教授,1967年退休.曾在1942年被选为伦敦皇家学会会员.1955—1957年,任伦敦数学会主席;1964—1967年,任《代数杂志》主编.

霍尔的主要贡献在群论领域.他曾是位有影响的代数学家,但一生发表论文不多,仅40多篇,无专著出版.他的思想主要通过讲学、通讯和他的学生影响数学界,在有限群理论中,他有不少贡献.1928年,他发现了一个有限可解群的重要定理,在有限群理论中有霍尔子群.他还发展了有限可解群的一般结构理论.1956年,他与其他学者合作对p可解群进行了深入研究,发现了G的西洛p子群长度p的界.这一发现在汤普森(Thomson,W.)和费特(Feit,W.)证明所有奇数阶群都是可解的猜想中起了重要作用.1933年,他为正则p群理论做出了贡献,并给出了交换子演算的基本法则,发现了群的研究与李环的一种联系.1954年,开始对有限生成可解群的各种可能的有限性进行了系统研究,给出了两类特殊的有限生成群之间的比较.在单群研究中,他1959年给出了泛可数局部有限群,1963年第一次构造出了一类非严格单群,1974年证明了每一个

可数群可以作为子群嵌入某个无限生成的单群. 他曾于 1961 年获伦敦皇家学会西尔维斯特奖章,1965 年获伦敦数学会德·摩根奖章,还曾于 1958 年获伦敦数学会高级贝维克奖.

麦克沙恩(McShane, Edward James, 1904—1989) 美国数学家. 生于新奥尔良,卒于弗吉尼亚州夏洛茨维尔. 1925 年获图兰大学工程与理学两个学士学位,1927 年获理学硕士学位,1930 年获芝加哥大学博士学位. 1930—1932 年,为全国科学研究委员会研究人员. 1932—1933 年,在格丁根大学做博士后研究,后任普林斯顿大学助理教授. 1935 年起,任弗吉尼亚大学数学教授,1974 年退休. 1948 年,被选为美国全国科学院院士. 1953—1954 年,任美国数学协会主席;1950—1951 年,任美国数学会副主席,1959—1960 年任主席.

麦克沙恩主要研究变分法、积分理论、控制论、随机微积分等. 在 20 世纪 30 年代后期,他为变分法中的一大类单重积分问题提供了存在性定理和必要条件. 他在这方面的工作为控制论中的庞特里亚金极大值原理和后来发展起来的凸分析与非光滑分析提供了基础. 他 1944 年出版的《积分》一书是当时用英文介绍勒贝格积分的重要著作. 他曾在量子力学和量子域理论的数学基础方面做过不少工作. 20 世纪 60 年代和 70 年代,他在随机微积分方面进行了深入的研究. 他推广了维纳(Wiener, N.)关于布朗运动的数学模型,得到了通过定义时间连续函数集的测度构造模型的结果. 他还和其他一些学者对工程学文献中在解释"白噪声"方面的混现象给出了澄清. 他编撰出版了《保序映射与积分过程》(1953)、《随机微积分与随机模型》(1974)等多种专著.

赫维茨(Hurewicz, Witold, 1904—1957) 波兰数学家. 生于罗兹(Lodz),早年在家乡求学,1926 年在维也纳获博士学位. 1927—1928 年,在荷兰阿姆斯特丹大学工作. 以后移居美国,在北卡罗来纳大学任职;1945 年以后,在马萨绪塞理工学院工作. 赫维茨的主要贡献在维数论方面. 1935 年,他在群的同伦理论之分类问题上做有贡献,推广了非不变测度空间上的伯克霍夫遍历理论. 著作有《维数论》(1941 合著)等.

嘉 当(Cartan, Henri Paul, 1904—) 法国数学家. 生于法国南锡,1923 年入巴黎高等师范学校学习,1926 年大学毕业,1928 年获博士学位. 1929—1931 年,任里尔大学讲师;1931—1940 年,任斯特拉斯堡大学教授;1940—1969 年,任巴黎大学教授;1969—1975 年,任南巴黎大学教授. 1967—1970 年,任国际数学联盟主席. 1965 年,被选为法国科学院通讯院士,1974 年成为院士. 1971 年,被选为伦敦皇家学会外籍会员,1972 年,被选为美国全国科学院外籍院士. 此外,他还是日本、波兰、马德里及北欧国家等近 10 家科学院、皇家科学院的院士或荣誉院士.

嘉当是法国布尔巴基学派的创始人之一. 在复变函数、代数拓扑、位势理论及同调代数等方面都做出了重要贡献. 他在复变函数论从单变量向多变量发展的过程中起了重要作用. 他在 20 世纪 30 年代给出了全纯自同构的惟一性定理、有界域全纯自同构群的李群性质. 1932 年,他还证明了全纯域与全纯凸域的等价性的嘉当-苏伦定理. 他在 1944 年关于解析函数的理想的研究中得到的成果,同日本冈洁关于具有不定域的理想的研究,发展成了解析凝聚层理论. 20 世纪 50 年代初,他和塞尔(Serre, J. P.)在对施泰因流形的研究中引入了层系数的上同调理论,给出了多复变函数论中的嘉当定理,即施泰因流形上的凝聚解析层上的定理 A 和 B. 在第二次世界大战后的 15 年内,他领导的著名的嘉当讨论班,对代数拓扑的发展起了重要的促进作用. 在讨论班上引入的新方法,形成了同调代数的基础. 1954 年,他和塞尔曾在上同调运算方面取得了重要成果. 此外,他还引入了"滤子"等概念. 他是法国第三级荣誉勋位的获得者. 1980 年还获沃尔夫数学奖. 著作有《同调代数》(1956;与艾伦伯格(Eilenberg, S.)合著)等. 他的主要论著均收入了三卷本的《嘉当文集》(1979)中.

卢 伊(Lewy, Hans, 1904—1988) 美国数学家. 生于德国布雷斯劳(现波兰弗罗茨瓦夫),因患白血病卒于美国伯克利. 1926 年获格丁根大学博士学位. 1927—1933 年,留校任教. 1933 年移居美国,任布朗大学副教授,直至 1935 年. 1936 年,到伯克利加利福尼亚大学任讲师,后晋升为教授. 1972 年退休,任荣誉教授. 他曾到罗马大学(1929—1930)和巴黎大学(1930—1931)进行学习研究. 他还曾是美国全国科学院和罗马林琴科学院院士;1985 年,又被选为美国艺术与科学学院院士.

卢伊在变分法、偏微分方程和流体动力学等领域内有较大影响. 差分法是解偏微分方程初值问题的主要数值方法. 1928 年,他与库朗(Courant, R.)和弗里德里希斯(Friedrichs, K. O.)合作,给出了判别差分法中哪些差分格式不收敛的 CFL 条件,也称库朗条件. 1957 年,他给出了一个光滑线性偏微分方程无解的例子

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}+i\frac{\partial u}{\partial x_2}-2i(x_1+x_2)\frac{\partial u}{\partial x_3}=f,$$

其中 u 为复值未知函数. 他指出可选取 $f\in C^{\infty}(R^3)$,使上述方程在任何非空子集中既无经典解,也无分布解. 这一例子影响很大,有力地促进了对时变系数方程的深入研究. 希尔伯特第十九问题

是问:正则变分问题的解是否一定解析.卢伊把变量推广到复域,且把方程看作为双曲型偏微分方程,从而简化了第十九问题.他在蒙日-安培方程和空腔理论等方面曾做过许多工作,早期曾研究过变分不等式.他曾于1979年获美国数学会斯蒂尔奖,1985年获沃尔夫数学奖.

怀特海(Whitehead,John Henry Constantine,1904—1960) 英国数学家.生于印度马德拉斯;在美国普林斯顿访问期间,因心脏病突发病逝.早年曾就读于牛津大学巴利奥尔学院.毕业后曾任职于证券经纪商行.1928年回牛津大学从事数学研究,1929—1932年,到普林斯顿大学做研究工作,1932年获博士学位.1941—1945年,曾任职于英国海军部和外交部.1944年,被选为伦敦皇家学会会员.1947年,成为牛津大学数学教授.1953—1955年,任伦敦数学会主席.

怀特海的研究工作涉及微分几何、复形与流形、同伦理论、代数拓扑与经典拓扑.他的主要贡献是发展了同伦理论,并在牛津建立了一个重要的拓扑学派.1940年左右,他发展了组合拓扑学中的一个分支,即通过线性映射研究多面体的组合结构.1941年,他引入了型同伦运算中的怀特海积,1950年又引入了怀特海群,该群是映射中的重要不变量怀特海挠率的核心.早期他还曾对路线几何学进行过重要的研究.在他与维布伦(Veblen,O.)合作的《微分几何基础》(1932)一书中,用公理法第一次给出了微分流形的定义.他还和他人合作证明了任意维微分流形都可三角剖分,且对其$C^r(r\geqslant 1)$三角剖分主猜想成立.他的学术论文收入了四卷本的《怀特海数学著作》(1962—1963)中.

施尼雷尔曼(Шнирельман, Лев Генрихович,1905—1938) 苏联数学家.生于戈梅利(Гомель),毕业于莫斯科大学,并一直留母校工作.1929年获博士学位,同年成为教授.1933年当选为苏联科学院通讯院士.

施尼雷尔曼的数学研究涉及到代数、拓扑学、分析的拓扑方法和定性方法等方面.在加性数论中,他取得了哥德巴赫问题的重要进展,还证明了广义华林定理.在他的这些研究工作影响下,产生了数论的一个新分支——数字序列的度量理论.1938年,撰文《赋范代数域》中的函数,建立了有关的理论.他还研究了闭合曲线的某些几何性质,与柳斯捷尔尼克(Люстерник,Л. А.)首先解决了庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)于1908年提出的关于闭合大地测量线的问题.为了确定变分问题解的个数,他引入了闭集范畴的重要概念.还推广了库朗(Courant,R.)所提出的求最大值的极大极小方法,并在线性方程理论中得到了新的应用.

博 灵(Beurling,Arne Karl - August,1905—1986) 美国数学家.生于瑞典哥德堡,卒于普林斯顿.早年就学于乌普萨拉大学,并于1933年获博士学位.1937—1954年,任乌普萨拉大学教授.1952年移居美国,1954年成为普林斯顿高等研究院教授,直至去世.还曾是美国艺术与科学学院院士、瑞典皇家科学院院士、瑞典皇家科学学会会员.

博灵主要研究复分析、调和分析和位势理论,是现代分析的创始人之一.1933年,他引入了极值曲线和保形不变式的概念.他1940年的文章是全纯函数边界行为现代理论的开始.1938年,他给出了傅里叶代数谱半径公式的第一个证明,同时还给出了陶伯定理的第一个余项公式,这是特征值分布的基础.他意识到了收缩及其与位势理论关系的重要性,并与德尼合作把这个概念发展成了狄利克雷空间理论,现已是概率的重要基础.他还和阿尔福斯(Ahlfors,L. V.)合作把拟保形映射从1维推广到2维.他还曾引入了内积函数.他对位移算子不变子空间的特征化和聚值集理论做出了重要贡献.他曾于1937年和1946年获瑞典科学院奖,1961年获摄尔修斯金质奖章,1963年获耶西瓦大学科学奖.为向他表示敬意,斯德哥尔摩的米塔-列夫勒研究所,曾在1976—1977年度举办了"博灵年"的学术活动.著作有《保角不变式》(1952;与阿尔福斯合著)等.1989年还出版了《博灵文集》.

莱 默(Lehmer,Derrick Henry,1905—1991) 美国数学家.生于伯克利,卒于伯克利.1928年和1930年获布朗大学硕士学位和博士学位.1930—1933年,在加利福尼亚理工学院、斯坦福大学和普林斯顿高等研究院做研究工作.1934—1940年,任伯克利大学助理教授.1940—1944年,任伯克利加利福尼亚大学助理教授,1946—1948年任副教授,1949年起任教授,直至1972年退休.在1954—1957年期间,莱默在加利福尼亚大学曾任系主任;1951—1953年,还曾任设在洛杉矶加利福尼亚大学的标准局数值分析研究所所长.

莱默的贡献主要在数论领域,他也是一位计算数学家.他对卢卡斯函数、连分式、伯努利数与多项式、丢番图方程、数值方程、解析数论、模形式、筛法以及计算技术等都有研究.他曾解决过数论中的不少问题,如大整数的分解与是否素数的检验,并发现了伪平方数.他曾提出一个整数分解的新的分解算法.他第一个用电子计算机对黎曼ζ函数的根进行了大规模计算,得到了临界线上前1万个零点,后又增加到2万5千个零点.他在素数密度和分析函数方面也有重要成果.著作有《数论表指南》(1941)和《$b^n\pm 1$的因式分解》(1983;与人合作)等.

斯托克(Stoker,James Johnston,1905—1992)

美国数学家.生于宾夕法尼亚州邓巴,卒于纽约.1927年和1931年,先后获卡内基理工学院学士和硕士学位;1935年,获苏黎世高等工业大学博士学位.1928—1937年,任卡内基理工学院助理教授.1937年起,任纽约大学数学教授;1958年,任该校库朗数学科学研究所所长.1962年,被选为美国全国科学院院士.

斯托克主要从事数学在各种数学物理和工程问题上应用的研究,特别是数学在弹性、线性振动、流体力学、河流与航道的水流,以及结构设计等方面的应用.他在河流和大型水库的洪峰和一般流量的计算方面有重要贡献.19世纪法国数学家曾给出了此问题的数学表示式,但这些微分方程不能解.斯托克发现这些方程与气体动力学的方程相似,并认为第二次世界大战期间发展起来的用计算机解气体动力学方程的方法,稍加修改后也许能解这河流洪峰的问题.于是他借用库朗数学科学研究所的计算机,计算了俄亥俄河上一段604公里河流3星期的流量情况,并取得了成功.后来他又为密西西比河等其他几条河流以及水库等,解决了洪峰计算问题,有效地控制了洪水灾害.1957年,他曾获美国物理学会海涅曼奖.他的著作有《机械与电气系统中的非线性振动》(1950)、《非线性弹性》(1968)、《微分几何》(1969)等.

尼科利斯基(Никольский, Сергей Михайлович, 1905—) 苏联数学家.生于塔利察(Талица),1929年毕业于叶卡捷琳诺斯拉夫卡(Екатеринославский)国民教育学院.1930—1940年,在第聂伯罗彼得洛夫斯基大学工作.1940年,到苏联科学院数学研究所工作.1947年成为苏联科学院院士.尼科利斯基的主要贡献在泛函分析、函数论、微分方程、积分方程、变分法数值近似法等方面.20世纪60年代,他曾在函数逼近论的定量研究方面做了许多精深的研究工作.他前后共发表论著120多种,其中有《多复变函数近似法》、《数学分析教程》、《用多项式逼近实变函数》等.

博苏克(Borsuk, Karol, 1905—1982) 波兰数学家.生于华沙,毕业于华沙大学,是谢尔品斯基(Sierpiński, W.)的学生.1930年获博士学位,以后留校工作.曾被选为波兰科学院院士及副院长.博苏克的主要贡献在拓扑学方面.他是收缩核理论的创始人,收缩核理论是现代拓扑学中最重要的分支之一,处于一般拓扑学和代数拓扑学的边缘.他还研究过同伦群,定义了从拓扑空间 X 到 n 维球面 S^n 映射类的和(1936),由此得到的群被称为博苏克上同伦群.他在组合几何方面也做了一些工作,其中的一个基本问题,称为博苏克问题.著作有《收缩核理论》等.

布斯曼(Busemann, Herbert, 1905—1994) 美国数学家.生于德国柏林,卒于美国.1931年获格丁根大学数学博士学位.1931—1933年,留校任助理教授.1933—1936年,任哥本哈根大学讲师.1936—1939年,在普林斯顿高等研究院任助理教授.1939—1940年,任教于约翰斯·霍普金斯大学.1940—1945年,任教于伊利诺伊大学.1945—1947年,任史密斯学院助理教授.1947—1970年,任南加利福尼亚大学教授,1970年退休.1964年成为皇家丹麦科学院院士.

布斯曼的工作涉及微分几何、凸性、几何基础、一般空间等.他用纯几何方法发展了芬斯勒几何.1942年,他曾对芬斯勒空间给出了一种表征.他还讨论了曲率和测地线等.综合几何的研究比较困难,但他在这方面也卓有成就.1955年,他给出了整体微分几何的综合方法以及它与几何基础和变分法的联系.1985年,他曾获苏联科学院罗巴切夫斯基奖.著作有《芬斯勒空间和几何基础中的度量法》(1942)、《测地线几何学》(1955)、《最新综合微分几何学》(1970)等.

阿尔贝特(Albert, Abraham Adrian, 1905—1972) .美国数学家.生于芝加哥,卒于芝加哥.早年在芝加哥大学学习数学,分别于1926年、1927年、1928年获学士、硕士、博士学位.1928—1929年,在普林斯顿大学做研究工作.1929—1931年,任教于哥伦比亚大学.1931年回芝加哥大学,1941年升任教授,1958—1962年任数学系主任,1962年任物理科学部主任.1943年,被选为美国全国科学院院士.

阿尔贝特主要研究代数学.1928年在他的博士论文中,证明了所有次数为4的可除代数都是叉积.1932年,他又证明了次数为4的非循环可除代数的存在性.他和另一些代数学家发展了单结合代数的直积理论.他和哈塞(Hasse, H.)、布饶尔(Brauer, R.(D.))、诺特(Noether, E.)等证明了中心是代数数域的每一个可除代数是循环代数.纯黎曼矩阵的乘法代数是代数数域具有某些特殊性质的可除结合代数.1934年,他确定了这些代数的严格结构,并证明了乘法代数为这类代数,其元素是所有代数数的纯黎曼矩阵存在的关键.阿尔贝特为此于1939年获美国数学会的科尔奖.1941年,他开始了对非结合代数结构的研究,给出了若尔当代数的一般结构理论,后来又给出了例外若尔当可除代数的一种构造法.他构造了一些重要类的有限非结合可除代数.著有《代数结构》(1939)、《有限射影平面引论》(1968;与人合著)、《四元数代数的张量积》(1972)等多种专著及教科书.

施佩纳(Sperner, Emanuel, 1905—1980) 德国数学家.生卒地不详.先后曾在柯尼斯堡、施特拉

斯堡、弗赖贝格、波恩等地工作. 1945年以后,任汉堡大学教授. 施佩纳的主要贡献在近世代数(有施佩纳代数、施佩纳格等)和一般拓扑学(有施佩纳空间)等方面. 著作有《矩阵论教程》(1932;合著)和《解析几何与代数学引论》(1931—1935;合著)等,后者包括了近世代数、矩阵论和射影几何等方面的内容.

弗勒登塔尔(Freudenthal, Hans, 1905—1990) 荷兰数学家、数学教育家. 生于德国卢肯瓦尔德,卒于荷兰乌得列支. 1923—1930年,就读于柏林和巴黎,1931年获博士学位. 1930—1946年,任教于荷兰阿姆斯特丹大学. 1946年起,任荷兰乌得列支大学教授,直至1975年退休. 在1966—1970年,任国际数学教育委员会主席. 他曾于1971年创办了乌得列支数学教育发展研究所(现为该大学数学教育研究组),并任所长. 他还曾是荷兰皇家科学院院士,也曾任过荷兰数学会主席、《数学教育研究》杂志主编.

费勒登塔尔曾对拓扑和李群理论做有贡献. 他在端理论(1931)、同纬映象定理(1937)、里斯空间的谱定理(1936)、实半单李群拓扑的代数表征(1941)等方面的工作和1954—1956年间在半单李群特征方面的工作,以及与例外单李群有关的几何等方面的成果,对近半个世纪的数学有重要影响. 但从1955年开始,他转向了数学教育的研究,并对国际数学教育的发展做出了重要贡献. 在他担任国际数学教育委员会主席期间,他组织召开了第一届国际数学教育大会. 现在国际数学教育大会已成为国际数学教育界每四年一次的重要集会,对国际数学教育有着重大影响. 同时,他还创办了《数学教育研究》杂志. 他还进行了长期的数学教育试验实践和理论研究,对数学教育理论有重要创见. 在1973年出版的《作为教育任务的数学》(中译本,1995,上海教育出版社)一书中,阐述了他对数学和数学教育的各种基本观点. 他提出学习数学的惟一正确方法是实行“再创造”,教师的任务就是引导和帮助学生去进行这种再创造工作,而不是把现成的知识灌输给学生. 他的关于数学教学方法的这一基本思想对国际数学教育界有广泛的影响. 此外,他还曾对数学史进行过研究. 在数学教育方面,他还著有《除草与播种——数学教育的序言》(1978)和《数学结构的教学现象学》(1983)等.

莫伊西尔(Moisil, Grigore Constantin, 1906—1973) 罗马尼亚数学家. 生于土耳恰(Tulcea),在布加勒斯特工作. 罗马尼亚科学院院士,罗马尼亚科学院自动化委员会主席. 1948年,任罗马尼亚数学会主席. 莫伊西尔的研究工作涉及自动化中的数学理论、微分方程的变换群理论和数理逻辑. 他的主要著作有《自动化装置的代数理论》(1959)等.

戈卢津(Голузин, Геннадий, Михайлович, 1906—1952) 苏联数学家. 生于托尔若克(Тожрок),1929年毕业于列宁格勒大学,以后一直在该校工作. 1936年获博士学位. 戈卢津的主要贡献在复变函数论方面,他建立了平面区域之间的单值保角映射. 在单叶函数理论中得到了一系列重要结果,他给出了旋转定理的最后形式,准确估计出在保角映射下曲线切线所旋转的角度,他还证明了 n 截线定理. 1933年,他和克雷洛夫(Крылов, В. И.)证明了:若 $f(z)\in H^1$ (H^p 为哈代函数族,$0<p\leqslant+\infty$),则 $f(z)$ 在圆内的值可通过圆周的一个正测度集 E 上的边界值表示. 他的主要著作有《复变函数的几何理论》、《单叶函数论中的一些问题》等.

哥德尔(Gödel, Kurt, 1906—1978) 美国数理逻辑学家、哲学家. 生于布尔诺,卒于美国普林斯顿. 1930年获维也纳大学博士学位,1933—1938年,曾任该校不支薪讲师. 1933—1934年,曾访问普林斯顿高等研究院,1938年起,一直在该研究院任职,1953年晋升为教授,1976年退休. 1955年,被选为美国艺术与科学学院和美国全国科学院院士;1968年,被选为伦敦皇家学会外籍会员;1972年,被选为不列颠科学院外籍院士. 曾获耶鲁、哈佛等多所大学的荣誉学位.

哥德尔在维也纳大学先学物理,后转学数学和数理逻辑,40岁左右开始研究哲学. 他在博士论文中证明了一阶逻辑的完备性,特别是一阶谓词演算的完备性. 他1930年开始研究了证明分析相容性问题,1931年给出了著名的不完备性第一定理:数论或分析或集合论中每一个形式体系如果相容,则是不完备的. 他引入了一个给出适合于发展数论的形式体系的一般方法. 该定理说明用希尔伯特“元数学”证明算术公理相容性的不可能,给了希尔伯特第二问题一个否定的解答(但数学相容性问题尚未解决). 同年,他又推广了第一定理,得到了不完备第二定理:如果对数论充分的一个形式体系是相容的,其相容性命题可由该体系的一个语句来表达,但不能在该体系内证明. 1935年,他得到了他的集合论模型,并证明了集合论公理在该模型中成立. 因此如果其他集合论公理是相容的,加进选择公理不会破坏相容性. 他还用可构造集合得到了康托尔连续统假设的相容性的一个证明. 1938年,他又证明了广义连续统假设在他的由可构造组合组成的集合论模型中成立. 1940年,他证明了如果无选择公理的ZF是相容的,则把选择公理和广义连续统假设加到ZF中所得到的系统也是相容的. 他在哲学方面也有不少成就. 1951年,曾获爱因斯坦奖;1975年,曾获美国国家奖章. 著作有《选择公理和具有集合论公理的广义连续统假设的相容性》(1940)等.

韦　伊(Weil, André, 1906—1998) 美国数学

家. 生于巴黎，1928 年获巴黎大学理学博士学位. 1930—1931 年，任印度阿里格尔穆斯林大学教授. 1933—1940 年，任法国斯特拉斯堡大学教授. 1941 年，移居美国，在黑弗福德学院等任教，1945—1947 年，任巴西圣保罗大学教授. 1947—1958 年，任芝加哥大学教授. 1958 年，成为普林斯顿高等研究院教授. 1976 年退休为荣誉教授. 韦伊还是巴黎科学院院士、伦敦皇家学会外籍会员、美国全国科学院院士. 1950 年、1954 年和 1978 年他曾 3 次应邀在国际数学家大会上作报告.

韦伊对数学有多方面贡献，曾与扎里斯基(Zariski，O.)、范·德·瓦尔登(Van der Waerden，B. L.)等重建了代数几何的基础. 20 世纪 40 年代开始，他为抽象代数几何和阿贝尔簇现代理论奠定了基础，使代数几何和数论得到了迅速发展. 他在代数曲线方面的工作影响广泛，除数学外还对基本粒子物理、弦理论有影响. 他的另一重要贡献是证明了有限域上单变量代数函数域同余 ζ 函数的黎曼假设. 1949 年，他还给出了关于有限域上代数簇的同余 ζ 函数的某些猜想，这些“韦伊猜想”对代数簇拓扑的发展有着深刻的影响，后被德利涅(Deligne，P.)所证明. 他还把数论与代数几何相结合，从而对数论的发展做出了重要贡献. 他建立了代数群的数理论，为模形式理论、自守函数理论、自同构表示理论打下了基础. 他还对数域上代数簇的某些函数进行了全局性研究，有关结果现被称为哈塞-韦伊 ζ 函数. 他是拓扑、微分几何和复解析几何研究的先驱. 通过拓扑群上的调和分析、特征类、凯勒几何和 θ 函数的几何理论等方面的基础性工作，他把这三个领域联系了起来. 他还是法国布尔巴基学派的创始人之一，该学派抽象与严谨的学术风格至今还影响着人们. 他还研究过群论，从 20 世纪 70 年代开始，他对数学史进行了系统的研究. 1978 年，曾在国际数学家大会上作了“数学史：为什么这样做与如何做”的报告，并著有《数论：从汉谟拉比到勒让德》(1984). 他曾在 1979 年获沃尔夫数学奖，1980 年获美国数学会斯蒂尔奖，1994 年获国际性的日本京都奖. 他还著有《代数几何基础》(1946)、《基础数论》(1967)等近 10 本专著，以上的两本曾扩增修订再版. 他的学术论文均收入《韦伊文集》(1979)中.

佐　恩(Zorn，Max，1906—1993)　美国数学家. 生于德国克雷菲尔德，卒于印第安那州布卢明顿. 1930 年获汉堡大学博士学位. 毕业后任哈雷大学助理教授. 1933 年，为逃避纳粹统治的迫害，到了美国. 1934—1936 年，在美国耶鲁大学做研究工作. 1936—1946 年，任洛杉矶加利福尼亚大学副教授. 1946 年起，任印第安那大学数学教授，1971 年退休.

佐恩的研究工作涉及拓扑学、代数学和几何学等. 1934—1936 年间，他给出了与选择公理等价的佐恩引理. 他还证明了凯莱数的惟一性：每一个没有零除子的交错、二次、实的但非结合的代数同构于凯莱代数. 他还给出了交错代数的一种描述，以使得用显式计算凯莱数成为可能. 他晚年曾还对黎曼假设发生兴趣.

德福内梯(de Finetti，Bruno，1906—1985)　意大利数理统计学家. 生于奥地利因斯布鲁克，卒地不详. 1927 年，获米兰大学应用数学学士学位；1930 年，获数学分析博士学位. 后任职于意大利中央统计局，曾到的里雅斯特的保险公司任精算师，同时还曾任的里雅斯特大学和帕多瓦大学数学、精算数学、概率论的讲师，后任的里雅斯特大学教授. 1950 年起，任罗马大学教授，先为教育学院金融与精算数学教授，后任自然科学院统计学教授. 1974 年，被选为林琴科学院通讯院士，后为院士.

德福内梯主要研究统计与概率，对概率论有重要贡献. 1931 年，他阐述了主观概率论的哲学基础，并对他给出的凝聚条件和定量主观概率做了系统处理. 这些工作与拉姆齐(Ramsey，F. P.)及萨维奇(Savage，L. J.)等人的工作构成了概率论的重要基础. 1929 年，他引入了可交换事件序列概念，并列举了相关表示定理. 1964 年，他用他的可交换性理论处理了有限置换下样本观察的分布不变性，并证明了当有限置换下主观联合分布不变时，这种方法与统计决策理论框架中讨论的不变性在数学上是等价的. 1929 年，他还引入了无限可分分布. 德福内梯在意大利，以及国际统计学界是位很有影响的人物. 他 1970 年出版的《概率论》是主观观点意义上的一本很重要的概率论方面的书，为数量判断提供了公理基础. 该书原文为意大利文，1974—1975 年，出版了英译本，1981 年被译成德文出版. 此外，他还在经济数学及精算数学方面有不少论著. 他一生发表了学术论著 280 多篇，出版了 10 本学术专著，其中重要的有《概率、归纳与统计》(1972)等.

威尔克斯(Wilks，Samuel Stanley，1906—1964)　美国数理统计学家. 生于得克萨斯州，卒于普林斯顿. 1926 年，毕业于得克萨斯技术学院，获学士学位，1928 年，获得克萨斯大学数学硕士学位，1931 年，获衣阿华大学数学博士学位. 曾于 1931—1932 年在哥伦比亚大学、1932 年在伦敦大学学院、1933 年在剑桥大学从事研究工作. 同年到普林斯顿大学任教，1936 年任助理教授，1944 年任数理统计教授，直至去世. 1946 年，任美国统计协会副主席，1950 年任主席. 1935 年，他创立了数理统计学会，并于 1938—1949 年任学会主办的《数理统计年刊》主编. 他还曾在多个政府部门和机构兼职.

威尔克斯对统计理论和多元分析等有重要贡

献. 1941 年,他为统计的允许极限,即置信限度理论打下了基础. 他的这一思想后来为瓦尔德(Wald, A.)等所推广. 1931 年,在教育心理学试验工作中给出了控制度量匹配样本的技术,1932 年,又用新的解析工具给出了一般分布理论. 1938 年,他证明了检验合成统计假设中似然比判别式大样本分布的基本定理. 1942 年,在统计推断的非参数方法问题上得到了重要成果. 他在方差和协方差的非正交分析、四元组差、多元正态分布各种假设的似然比检验、多元分布与高维独立联立表等方面都有重要贡献. 另外,他对军事统计工作也有非一般的成果. 为了纪念他对数理统计的贡献,美国统计协会于 1965 年设立了威尔克斯纪念奖章,奖励有成就的统计学家. 他著有《威尔克斯统计推断理论讲义》(1937)、《数理统计》(1962)、《工业统计引论》(1971)等多种专著与教材. 1967 年还出版了《威尔克斯数理统计文集》.

布　伦(Bullen, Keith Edward, 1906—1976)　澳大利亚应用数学家. 生于新西兰奥克兰,卒于澳大利亚悉尼. 曾获奥克兰大学、墨尔本大学和英国剑桥大学学士、硕士和博士学位. 毕业后曾在奥克兰任中学教师,1928—1931 年、1934—1940 年,任奥克兰大学学院讲师. 1933 年,任英国赫尔大学特别讲师. 1940—1945 年,任墨尔本大学高级数学讲师. 1946 年起,任澳大利亚悉尼大学应用数学教授. 1960 年成为美国艺术与科学学院外籍院士,1961 年成为美国全国科学院外籍通讯院士.

布伦在应用数学方法研究地震波方面有重要贡献. 他发展了一种估计地球深处不同化学成分区域的密度梯度的直接法,1936 年首次推得了地球 5 000 公里深度的密度、压力、弹力等方面的数值,经过长期全球基本震动的纪录证实,精度在 5%以内. 后来他又把原来计算做了进一步提炼和推广,并把结果应用到了许多地球物理等问题上. 他还建立了两个地球模型 A 和 B,在地球物理学中有很多应用. 1940—1942 年间,他还引入了在地球内层研究方面广泛使用的专门术语. 1940 年,他还与人合作汇编了地震传递时间表. 1961 年,他获得美国地球物理联合会鲍伊奖章;1963 年,获得美国地质学会阿瑟 J. 戴奖章;1974 年,获得皇家天文学会金质奖章等. 他还著有《地震学理论》(1947)、《地球的密度》(1975)等多种专著.

迪厄多内(Dieudonné, Jean, 1906—1992)　法国数学家. 生于里尔,1924—1927 年,就读于巴黎高等师范学校,1931 年获博士学位. 1933—1937 年,任雷恩大学讲师;1937—1946 年,任南锡大学教授,以后曾在巴西圣保罗大学、美国密歇根大学和西北大学、法国尼斯大学等任教. 1968 年,被选为法国科学院院士.

迪厄多内主要研究拓扑和代数,曾是布尔巴基学派的重要成员. 1937 年,他与博赫纳(Bochner, S.)同时,但相互独立地引入了连续单位分割的概念. 此概念对拓扑和微分几何的各种问题非常有用. 1944 年,他定义并研究了仿紧空间这一类新的拓扑空间,此类空间在代数拓扑中使用较广泛. 他还证明了可分离可度量化的空间是仿紧空间,后来斯通又把这一结果推广到了所有可度量化空间. 这一概念把局部范围的一些结构协合成了一个整体结构,对拓扑学及一些注意整体分析的现代数学分支都有重要意义. 1942 年,他对局部凸空间的对偶概念进行了一般性研究,这一工作是后来对偶性的研究及在泛函分析中应用的基础. 1943 年,他开始了在典型群方面的工作,他曾把若尔当(Jordan, M. E. C.)和迪克森(Dickson, L. E.)关于有限域上的群的结果推广到了一般域上的典型群. 他在正交群和酉群理论方面发现了依赖于是否存在迷向向量的完全不同的两种群结构. 1952 年开始,他又对形式李群理论,即经典李理论的代数化进行了研究,并取得了重要成果. 他晚期主要研究数学史,并著有《1700—1900 年数学简史》(1973)和《泛函分析史》(1981). 他一生撰写出版了 19 本专著,其中包括《现代分析基础》(1968—1978;第二卷有中译本,科学出版社,1986)、《典型群的几何学》(1955;中译本,科学出版社,1960)等.

尤什克维奇(Юшкевич, Адольф Павлович, 1906—1993)　苏联数学史家. 生于敖德萨(Одесса),1929 年,毕业于莫斯科大学. 1930—1952 年,在莫斯科高等技术学校工作. 1945 年以后,在苏联科学院自然科学与技术史研究所和莫斯科大学工作. 1940 年,获物理数学博士学位,同年成为教授. 1960 年,被选为国际科学史研究院院士. 1965—1968 年,任该院院长.

尤什克维奇多年来从事数学史的研究,并取得了巨大的成就,他先后发表了数学史论著 200 多篇(部),其中《中世纪数学史》(1961)和《1917 年前的俄国数学史》(1968)在国内外都享有盛名. 他还主编了《从古代到 19 世纪初期的数学史》(1970—1972)教材和 4 卷集的本国数学史教材. 1948 年以后,他还和雷布金(Рыбкин, Г. Ф.)共同主编了《数学史研究》论文集. 这部论文集不仅在苏联国内,就是在国际上也是数学史方面最好的出版物之一. 雷布金去世后,他担任了《数学史研究》的执行编辑(从第 18 卷开始). 尤什克维奇的许多著作还被译为其他国家的文字出版.

费　勒(Feller, William, 1906—1970)　美国数学家. 生于南斯拉夫萨格勒布,卒于美国普林斯顿. 1925 年,获萨格勒布大学硕士学位,1926 年,获德国

格丁根大学博士学位. 1926—1933 年，任教于格丁根大学和基尔大学，后在斯德哥尔摩当统计工作者、生物学家、经济学家顾问. 1939 年，到美国任新创刊的《数学评论》的执行编辑. 1944 年入美国籍，1945—1950 年，任康奈尔大学数学教授. 1950 年起，任普林斯顿大学教授. 1960 年，被选为美国全国科学院院士，去世后被授予 1969 年度美国国家科学奖章.

费勒主要研究概率，他对极限定理、马尔可夫过程和方法论等都有重要贡献. 在极限定理方面，他拓宽了定理描述的可能性的波动范围，并澄清了无限期望的作用，发现了"迭代对数法则"的正实形式. 1935 年，他和林德伯格(Lindeberg, Y. W.)解决了独立随机变量序列的中心极限定理的一般情形，即给出了林德伯格-费勒定理，使这一问题得到了根本解决. 在马尔可夫过程的研究中，他引入了伴随半群的概念，确定了一维扩散过程的解析结构，并由此导出了广义微分算子. 他推动了马尔可夫过程在其他领域的应用，还对马尔可夫过程的边值问题进行了研究，并取得了重要成果. 他曾花费了很多精力于改进和统一方法这一问题上. 他在《概率论及其应用引论》(1950,1966;中译本上册,1964;下册,1975,科学出版社)一书中，采用了全新的风格，内容也与传统的教材大不相同，包含了大量解释概率论新应用的例题和问题，还举例说明了概率思维方法等问题.

贝肯巴克(Beckenbach, Edwin Ford, 1906—1982) 美国数学家. 生于得克萨斯州达拉斯(Dallas)，1928 年毕业于赖斯(Rice)大学，1931 年获博士学位. 先后在普林斯顿大学、芝加哥大学、加利福尼亚大学任教. 贝肯巴克的主要贡献在应用数学方面，著作有《不等式导引》(1961,与贝尔曼(Bellman, R. E.)合著)、《应用组合分析》(1964)等.

陶斯基-托德(Taussky - Todd, olga, 原名为 Taussky, Verh Todd olga, 1906—1995) 女数学家，国籍不明. 生于奥匈帝国的奥尔莫茨(Olmütz)(第一次世界大战后属捷克共和国)，卒于美国加利福尼亚的帕萨迪纳. 早年曾就学于维也纳大学，1930 年获博士学位. 1931—1932 年，任德国格丁根大学助理教授. 1932—1933 年，返回维也纳. 因为是女性，求职颇费转折. 1933—1934 年，在布赖恩·茂尔(Brym Maur)大学等做研究工作，后到英国剑桥大学格顿学院做研究工作，1937 年，任教于伦敦大学的女生学院. 第二次世界大战期间，曾任教于牛津大学，1943—1946 年，任职于国家物理实验室. 1947 年，到美国国家标准局的全国应用数学实验室工作. 从 1957 年起，任教于加利福尼亚理工学院，开始任研究副教授，1963 年任教授(另一说是 1971 年任教授)，1977 年退休. 1985 年，曾任美国数学会副主席. 1975 年被选为奥地利科学院通讯院士，1985 年被选为德国巴伐利亚科学院通讯院士. 她是《线性代数及其应用》杂志的创刊主编，还曾任《数论杂志》等的主编.

陶斯基-托德的主要工作是在数论及矩阵理论方面，尤以后者著称. 在矩阵理论方面，她的研究工作涉及到格尔什戈林定理、李雅普谱夫定理、换位矩阵、L 性质、凯莱变换 $A^{-1}A^{*}$ 的推广、值域等，解决了与这些课题有关的重要问题，并在矩阵与矩阵代数方面做出了重要贡献. 对矩阵与其他数学分支的联系及在计算机计算中的应用也很有成果. 早期她还在数论的希尔伯特典型域提升等方面曾有重要贡献. 在格丁根期间，她编辑了希尔伯特文选中有关数论的第一卷，并与人合作编辑了另外两卷.

陶斯基-托德曾于 1978 年被奥地利政府授予科学与文学一级十字荣誉奖章，维也纳大学曾于 1980 年授予她金博士称号. 她一生曾发表学术论著 300 余篇(部).

盖尔丰德(Гельфонд, Александр Осипович, 1906—1968) 苏联数学家. 生于圣彼得堡，1927 年毕业于莫斯科大学，1931 年任该校教授，1933 年到苏联科学院数学研究所工作，1935 年获得物理数学博士学位，1939 年，被选为苏联科学院通讯院士. 第二次世界大战期间(1941—1945)，他在海军舰队总指挥部工作.

盖尔丰德的主要成就在数论和复变函数论方面. 他的最大贡献是建立了数论中的一个新分支——超越数论. 1934 年，他解决了希尔伯特第七个问题，证明了任何一个形如 α^{β} 的数是超越数，由此式得到了关于"代数数的对数的超越性"的定理，从这一定理又直接得到了所有不等于 10^{R} 的自然数的常用对数都是超越数的结果. 在数论的随机方法中有著名的盖尔丰德方法. 在复变函数方面，他研究了函数系的完备性，积分方程特征值的渐近性质，复数域的插值法等问题. 著作有《超越数和代数数》(1952)、《解析数论的基本方法》(1962;与林尼克(Линник, Ю. В.)合著、《有限差分法》(1967)等，其中某些著作已译为中文，如《数论》(1953,科学出版社)、《有限差分计算》(上、下册,1955—1956,高等教育出版社)、《方程式的整数解》(1952,中国青年出版社,1955)等.

吉洪诺夫(Тихонов, Андрей Николаевич, 1906—) 苏联数学家、地球物理学家. 生于格扎兹克(Тжатск)，1927 年毕业于莫斯科大学，是亚历山德罗夫(Александров, П. С.)的学生. 1936 年以后，他在莫斯科大学和苏联科学院应用数学研究所工作. 1936 年，获得物理数学博士学位，同年成为教授. 1966 年，被选为苏联科学院院士.

吉洪诺夫的数学研究涉及面很广，从最抽象的纯粹数学领域到直接应用于生产技术的各数学学科，他都做出了贡献. 在集合论拓扑学中，他引进了拓扑空间的无穷乘积和完全正规空间的概念，还研究了数学物理、带小参数的微分方程，以及地球物理学中的各种问题. 著作有《数学物理方程》(1953)、《不适定问题的解法》(中译本，地质出版社，1979)等.

博　耶(Boyer，Carl B.，1906—1976)　美国数学家. 生于宾夕法尼亚州，1928 年毕业于哥伦比亚大学. 1939 年，获博士学位. 1952 年起，为布鲁克林学院数学教授. 1957—1958 年，任美国科学史学会副主席. 曾还被选为美国国际科学史研究院院士. 博耶主要研究科学史及数学史. 著作有《微积分概念史，对导数与积分的历史性评论》、《数学史》和《解析几何史》等.

勒　雷(Leray，Jean，1906—　)　法国数学家. 生于法国南特. 1926—1929 年，就读于巴黎高等师范学校. 1933 年，获巴黎大学博士学位. 1936—1941 年，任南雪大学教授；1941—1947 年，任巴黎大学教授；1947—1978 年，任巴黎法兰西学院微分方程与泛函教授. 1953 年，被选为法国科学院院士，1965 年，被选为美国全国科学院外籍通讯院士，1966 年，被选为苏联科学院外籍院士. 同时，他还是比利时、意大利、波士顿、格丁根、波兰等多家科学院院士.

勒雷的贡献主要在把拓扑方法应用到微分方程的研究方面的先驱性工作，并因此曾于 1979 年获沃尔夫数学奖. 1934 年，他与绍德尔(Schauder，J. P.)合作把布劳威尔不动点定理及映射度理论推广到了巴拿赫空间，形成了拓扑度理论，并建立了勒雷-绍德尔原理. 这是使不动点定理适用于非线性问题的最早的延拓定理，现已成为研究非线性偏微分方程的标准工具. 1945 年，他首先引入了层及以层为系数的上同调群的概念. 经人改进后，这些概念已成为近代多复变分析及代数几何的基本工具. 1959 年，他还推广了柯西单复变量公式，得到了多复变量全纯函数的积分表示公式，后被称为勒雷公式. 1946 年，他引入了局部紧空间和具有紧支撑的上同调连续映射的谱序列，即勒雷谱序列，并用以计算了纤维空间的同调，得到了深刻的结果. 勒雷还曾获骑士称号，还曾于 1938 年获国际马拉克什数学奖，1971 年获费尔特兰尼利奖，1989 年获洛蒙苏伊奖章等. 著作有《双曲微分方程》(1952)和《拉格朗日分析与量子力学》(1981 年译自法文)等.

邓福德(Dunford，Nelson，1906—　)　美国数学家. 生地不详. 耶鲁大学教授. 邓福德的主要贡献在泛函分析方面. 他得到了反映算子的谱及其函数之间关系的"谱映像定理"，现称为邓福德定理. 他还建立了可和函数空间压缩的遍历定理. 此外，他的研究课题还涉及巴拿赫空间、抽象积分、线性算子及其摄动、紧算子、微分算子、本征值问题和算子半群等. 专著有《线性算子》(第一卷，1958；第二卷，1963；与施瓦兹(Schwarz，H. A.)等合著)等.

马格努斯(Magnus，Wilhelm，1907—　)　德国数学家. 生于柏林，1931 年获法兰克福大学博士学位. 1947—1948 年，任格丁根大学教授. 1948 年去美国，1955 年入美国国籍. 1950 年以后，任美国纽约大学教授. 马格努斯的主要贡献在近世代数方面. 他证明了对于具有一个单定义关系的任何群，"字的问题"是可解的. 他还研究了数学物理中的特殊函数. 著作有《组合群论》(1966，合著)和《数学物理中的特殊函数的公式和定理》(1948，合著)等.

考克斯特(Coxeter，Harold Scott MacDonald，1907—　)　加拿大数学家. 生于英国伦敦，1931 年获剑桥大学博士学位. 毕业后在剑桥大学三一学院做研究工作. 1936 年，到加拿大多伦多大学任教，1936—1944 年，任助理教授，1944—1948 年，任副教授，1948 年起任教授，1980 年退休. 曾到普林斯顿高等研究院做研究工作. 1962—1963 年，任加拿大数学会主席；1968 年，曾任美国数学会副主席；1974 年，任国际数学家大会主席. 考克斯特是英国皇家学会、加拿大皇家学会会员，还是美国艺术与科学学院及荷兰自然科学院荣誉院士. 1949—1958 年，还任《加拿大数学杂志》主编.

考克斯特是位国际知名的几何学家. 他主要研究多边形、多胞形、有限群、对称性等有关课题. 1926 年，他曾发现了在每个顶点有 6 个 6 边形面的新的正多面体，1933 年枚举了 n 维的各种变化情况. 1934 年，他计算出了 n 维欧几里得空间的全部反射群，并证明了它们全是以他的名字命名的群；1935 年，他又证明了每个有限考克斯特群同构于与 E^n 中的某个元素有公共不同点的反射群，从而得到了有限考克斯特群的分类. 他还计算出了仿射考克斯特群，并证明了有限生成元的任意考克斯特群具有有限维实线性表示.

考克斯特曾获多所大学的荣誉博士学位，1950 年曾获加拿数学会托里(Tory)奖章. 他的著作较多，有的影响较大，曾多次再版，如《非欧几何学》(1942)已修订出版至第四版. 他写的教科书《实射影平面》(1949)也被广泛采用. 他还修订和重写了鲍尔·劳斯(Ball，W. W.，Rouse)于 1887 年出版的《数学娱乐与小品》，并于 1987 年再版. 他的著作还有《正则胞腔》(1948)、《正则复胞腔》(1974). 此外，还出版了两卷文集：《几何随笔十二篇》(1968)和《万花筒》(1995). 另外，他还与人合著了《离散群的生成元与关系》(1957)等.

惠特尼(Whitney,Hassler,1907—1989) 美国数学家.生于纽约,卒于普林斯顿.1928年和1929年,获耶鲁大学物理和音乐两个学士学位;1932年,获哈佛大学数学博士学位.1931—1932年,曾在普林斯顿大学做研究工作.1933年,回哈佛大学任教,并在该校晋升为教授.1952年,转任普林斯顿高等研究院数学教授.1977年,退休为荣誉教授.1945年,被选为美国国家科学院院士.1948—1949年,曾任美国数学会副主席.

惠特尼是微分拓扑的奠基人之一.他在一般流形理论、闭集上可微函数、几何积分理论、奇异解析空间的切线几何等方面的研究中,发展起来的思想和方法已成为这些领域的重要组成部分,并对以后的工作产生了极大影响.1936年,他给出的惠特尼嵌人定理,是对流形概念认识的一大进展.他还是上同调理论的创始者之一.他与切赫(Čech,E.)首次给出了上同调中上积的确切定义.1937年,他把流形和以流形上每一点为原点的线性独立切向量组的全体总括在一起得到了纤维丛的概念,并首先使用向量丛和球丛为工具解决拓扑问题.1936年,他和施蒂费尔(Stifel,M.)发现了向量丛中的重要不变量,即施蒂费尔-惠特尼类.他还在奇点理论方面做了不少先驱性的工作.1955年,他关于把平面映射到平面的映射奇点的成果,是奇点理论成为一个独立数学分支的标志.他对簇进行了定性研究,并给出了惠特尼层化的概念.他的层化理论被托姆(Thom,R.)用分层集的概念作了深化,并在局部及大范围奇点研究中起了基础作用.他对C^∞类函数也有重要工作.他早期曾在图论方面有重要贡献,他首先提出了拟阵理论.在20世纪60年代后期,他看出了美国数学教育系统的失误,于是花了很多精力于数学教育的研究上.他对普通教育中,数学教育的目的、手段都有精辟论断,指出了当前学生学到的不是如何思考问题,认为"教给最后结果仅是无生命的装饰",它"失去了发现的喜悦".他曾于1982年获沃尔夫数学奖,1985年获美国数学会斯蒂尔奖,还曾于1975年获美国国家科学奖章.

克列因(Крейн,Марк Григоръевич,1907—1989)苏联数学家.生于基辅(Киев),早年自学数学,1924年到敖德萨不久,成为了切博塔廖夫(Чеботарёв,Н.Г.)的研究生.1933年以后,在敖德萨、古比雪夫、哈尔科夫、基辅等地的高等学校和科研机构工作,1934年成为教授.1939年,在莫斯科大学获物理数学博士学位,同年当选为苏联科学院通讯院士.1954年以后,在敖德萨建筑工程学院工作.

克列因的重要贡献在泛函分析方面.他的研究课题涉及密切矩阵理论、微分算子的核、矩理论、巴拿赫空间中的锥面理论、参数共振理论、微分算子的谱理论、积分方程论等许多领域.他的工作是现代泛函分析思想与切比雪夫-马尔科夫学派经典理论的结合,并在力学中有广泛应用.他共发表250多篇(部)论著,其中有一系列专著,如《线性非伴算子理论导引》(1969,合著)等.他还被选为美国艺术与科学学院荣誉院士.1982年曾荣获沃尔夫数学奖.

谢 菲(Scheffé Henry,1907—1977) 美国数理统计学家.生于纽约城,卒于加利福尼亚伯克利.毕业于布鲁克林工学院,并于1931年和1935年前后获威斯康星大学硕士和博士学位.1935—1938年,任教于威斯康星大学、俄勒冈州立大学和德里学院.1941—1944年,任教于普林斯顿大学.1944—1945年,任教于锡拉丘兹大学.1946—1948年,任洛杉矶加利福尼亚大学工程学副教授.1948—1953年,任哥伦比亚大学数理统计副教授.1953年,任伯克利加利福尼亚大学统计学教授,1974年退休.1974—1977年,任印第安纳大学数学教授.1954年,任数理统计学会主席,1954—1956年,任美国统计协会副主席.还曾任《计量技术》杂志副主编.

谢菲在数理统计的方差分析、置信区、试验设计及应用统计等方面都有重要贡献.他推广了奈曼-皮尔逊最优检验理论.1950年,他和莱曼(Lehmann,E.L)提出了最简单的充分统计量,即极小充分统计量.他还给出了谢菲联合比较法.1953年,给出了F统计量多重比较解释,建立了平均差线性独立集的椭球置信区在向量上的射影,现称为谢菲($s-$)区间,这种方法被称为S方法.他在1959年出版的《方差分析》是方差理论及其应用方面的一本基础性著作.他在方差分析的混合方差设计和混合试验方面都做了重要工作,给出了混合分量的对称设计.他还在校正的统计理论问题上做过重要研究.

阿尔福斯(Ahlfors,Lars Valerian,1907—1996)美国数学家.生于芬兰赫尔辛基,卒于美国.1928年,毕业于赫尔辛基大学,1932年获博士学位.1930—1932年,游学于欧洲数国.1933年,任赫尔辛基大学副教授,1938年任教授.1945年,任苏黎世大学教授.1946年移居美国,任哈佛大学教授,直至1977年退休.阿尔福斯在1955年被选为美国全国科学院院士,还是芬兰科学院院士,丹麦皇家学会和瑞典皇家学会会员.1954—1955年,任美国数学会副主席.曾于1962年和1978年两次应邀在国际数学家大会上发表演讲.

阿尔福斯的贡献主要在复变函数论、保形与拟保形映射和黎曼曲面等领域.1929年,证明了当儒瓦猜想.1935年,他提出了覆盖曲面理论,受到国际数学界的极大关注,因此于1936年在奥斯洛召开的国际数学家大会上获得了首次颁发的菲尔兹奖.他还首先使用了"拟保形"映射的术语.1946年以后,

他的研究兴趣转到了黎曼曲面方面，并把拟保形映射应用到了黎曼曲面的参模问题，还给出了拟保形映射的一些重要性质．他和拉夫连季耶夫（Лаврентьев，M. A.）为拟保形映射的理论奠定了基础．他的《复分析》(1953)一书，虽然是初级读物，但它对复分析的风格及数学有深远影响．1981 年，他获沃尔夫数学奖；1982 年，获美国数学会斯蒂尔奖．他的学术论文收入了他的两卷本《文集》中．

韦　夸（Векуа，Ильл Нестерович，1907—1977）苏联数学家、力学家．生于格鲁吉亚的舍舍列特镇（Шешелеты），1930 年毕业于第比利斯大学．从 1933 年起，他先后在第比利斯大学、莫斯科大学、苏联科学院数学研究所、新西伯利亚大学工作．1965 年，返回了第比利斯大学，出任校长．1958 年，当选为苏联科学院院士．1972 年以后，任格鲁吉亚科学院院长．

韦夸的研究课题涉及现代数学物理的新领域，包括复变量解析函数论方法的应用、力学和物理中出现的微分方程和积分方程的解法等．他在奇异积分方程的研究方面，曾取得很大成果．他还曾研究了椭圆型方程的一般解法和一般边值问题．这些工作对解决弹性薄壳理论、曲面变型理论等方面的问题具有重要实际意义．他的主要著作有《广义解析函数》(1959)、《椭圆型方程新解法》(1950)、《一阶椭圆型微分方程组与边值问题及其在薄壳理论上的应用》等．

法捷耶夫（Фаддеев，Дмитрий Константинович，1907—　）苏联数学家．生于尤赫诺沃（Юхново），早年在列宁格勒大学学习．毕业后在列宁格勒大学、苏联科学院数学研究所列宁格勒分所工作．1934 年成为教授．1935 年获博士学位．1964 年，当选为苏联科学院通讯院士．法捷耶夫的主要贡献在代数、数论和数值逼近法等方面．他研究了所谓伽罗瓦问题的逆问题，并取得了重要成果．在同调代数、函数论和概率论等方面，他也做了大量工作．他前后共发表论著 110 多篇(部)，有《高等代数习题》(1953，与人合著)、《代数学》(1956，与人合著)等．

洛　奇（Lorch，Edgar Raymond，1907—1990）美国数学家．生于瑞士尼翁（Nyon），卒于美国纽约．1917 年到美国，1928 年获哥伦比亚学院学士学位，1933 年获哥伦比亚大学博士学位．曾在普林斯顿高等研究院做过冯·诺伊曼（von Neumann，J.）的助手，后到匈牙利随里斯（Riesz，F.）学习．1935 年起，任教于哥伦比亚大学，1968—1972 年，任数学系主任，1977 年退休为荣誉教授．他 1982 年开始任该校计算机、人和社会大学讨论班主席．1945—1950 年，曾任《美国数学会通报》副主编．还曾任意大利林琴科学院通讯院士．

洛奇在巴拿赫空间和希尔伯特空间算子谱理论方面有重要贡献．他是分析的代数化和用几何语言对其进行重新提炼的主要人物之一．现在巴拿赫空间和希尔伯特空间算子理论方面的一些经典分析问题的解允许用代数计算和几何直观来重新表述．著作有《谱理论》(1962)等．

莫　利（Morrey，Charles Bradfield，1907—1984）美国数学家．生于俄亥俄州哥伦布，卒于加利福尼亚州伯克利．1927 年和 1928 年，获俄亥俄州立大学学士和硕士学位；1931 年，获哈佛大学博士学位．1931—1933 年，在普林斯顿大学和赖斯学院做研究工作．1933 年起，任教于伯克利加利福尼亚大学，1977 年退休．1942—1945 年，在道弹研究室研究火力控制问题．1962 年，被选为美国全国科学院院士；1965 年，被选为美国艺术与科学学院院士．1967—1968 年，曾任美国数学会主席．

莫利的研究工作涉及曲面面积、变分法和椭圆型偏微分方程．他的工作曾为希尔伯特第十九问题和第二十问题的解决起了决定性作用．他在调和积分、勒贝格面积方面有重要贡献．他曾研究过积分

$$\iint_G f[x,y,z(x,y),z_x(x,y),z_y(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的变分问题．此积分的极小化函数应满足的欧拉方程是二阶偏微分方程．托内利（Tonelli，L.）曾证明了上述积分类的存在定理，但并不能推得满足欧拉方程的解．莫利把托内利的存在性结果推广到了非常一般的包含任意自变量和应变量的上述积分类，不过其解仅属于现在称为索伯列夫空间的函数空间．1937—1938 年，他又进一步证明了具有两个自变量、任意个应变量的上述类型积分极小函数的一阶和二阶导数的连续性．这导致了他又在不连续系数椭圆型方程解的连续性方面取得了重要成果．这方面的结果后来被他自己和他人推广到了包含任意自变量，但只有一个应变量的上述积分类的极小函数．1968 年，他还对包含任意多应变量和自变量的一大类变分问题，证明了除在测度为零的局部紧集外，解具有阶≤2 的连续导数．除了他编撰的教科书外，他还著有《变分法中的多重积分》(1966)．

达文波特（Davenport，Harold，1907—1969）英国数学家．生于阿克灵顿（Accrington），1927 年毕业于曼彻斯特大学，1938 年获剑桥大学博士学位．毕业后曾在曼彻斯特大学任职．1941 年后，在威尔士（Wales）大学、伦敦大学学院、剑桥大学等校任教授．1940 年，成为伦敦皇家学会会员．1957—1959 年，任伦敦数学会主席．达文波特的主要贡献在数论方面．他深入研究了丢番图方程的解析理论和代数数论，所得到的三角和的估值以及关于有限域的特征的结果，对近世代数理论的发展有重大影响．著作有《丢番图方程与不等式的分析方法》(1963)、《积性

数论》(1967)等.

埃尔布朗(Herbrand, Jacques, 1908—1931) 法国数学家. 生于巴黎,卒于伊泽尔(Isère). 早年曾在巴黎高等师范学校学习,21岁获博士学位,很快又晋升为研究员,出国到德国游学. 在那里与冯·诺伊曼(von Neumann, J.)、阿廷(Artin, E.)、诺特(Noether, E.)等人相识. 埃尔布朗是一位很有才干的青年数学家,可惜1931年夏在阿尔卑斯山度假时,不幸遇险身亡,年仅23岁.

埃尔布朗的主要贡献在数理逻辑和近世代数方面. 他建立的埃尔布朗定理是量化理论的一个基本命题,已成为机器证明的基础. 在近世代数方面,他发表了十几篇有关类域论的论文,丰富了代数数域的阿贝尔扩张理论.

马尔库舍维奇(Маркушевич, Алексей Иванович, 1908—1979) 苏联数学家、教育家. 生于彼得罗扎沃次克(Петрозаводск),早年在中亚细亚大学和莫斯科大学学习. 1935年以后,在莫斯科大学任教. 1944年,获博士学位. 1950年,晋升为教授,同年被选为俄罗斯联邦教育科学院院士. 1964—1975年,任苏联教育科学院副院长.

马尔库舍维奇的主要贡献在函数论方面,他的工作使泛函分析的方法特别是线性空间理论广泛应用于解析函数论. 他撰写的专著有《解析函数论》、《解析函数论专门教程》等. 他还为提高中学数学教师的专业水平和改进苏联中学数学教育的现状,进行了长期不懈的努力. 他一直领导着苏联科学院中学教材委员会的工作,并亲自起草教学大纲,编写教科书和学生课外读物.

巴格曼(Bargmann, Valentine, 1908—1989) 美国数学家. 生于柏林,卒于普林斯顿. 1926—1933年,就学于柏林大学. 1936年,获苏黎世大学博士学位,同年移居美国,1943年入美国籍. 1937—1946年,在普林斯顿高等研究院做研究工作,曾做过爱因斯坦(Einstein, A.)的助手. 1946年起,任教于普林斯顿大学,1948—1957年,任数学物理副教授,1957年任教授. 曾还被选为美国全国科学院院士.

巴格曼主要从事数学物理及相关领域的研究. 1947年,他系统地研究了$SL(2,R)$不可约酉表示,不仅把表示(即相应的洛伦茨群的李代数表示)做了分类,而且还从整体上清晰地构造了这些表示,把它们分成了"主系列"、"离散系列"和"补系列"三类. 他的这一工作与盖尔范德(Гельфанд, И. М.)和奈玛克(Наймарк, М. А.)关于$SL(2,C)$的不可约酉表示的研究一起,标志着酉表示理论的形成. 他还通过表示的能量函数所满足的微分方程,对这些函数作为系统地研究,因而从实质上推导了群的"普朗谢尔公式". 1948年,他还和威格纳(Wigner, E. P.)一起得到了有名的任意旋基本质点的巴格曼-威格纳方程. 他在薛定谔方程方面也取得了重要成果. 他曾获德国物理学会的普朗克奖章,还曾获威格纳奖章.

佩克利斯(Pekeris, Chaim Leib, 1908—) 以色列应用数学家. 生于立陶宛爱莱脱斯,1926年入美国马萨诸塞理工学院学习,1929年获学士学位,1934年获理学博士学位,1935—1941年,留校任教. 1941—1946年,在设于哥伦比亚大学的战时研究处工作. 1946—1948年,任职于普林斯顿高等研究院. 1948年,被任命为以色列雷霍沃特的魏茨曼科学学院应用数学系主任,1973年成为院教授. 1952年,被选为美国全国科学院院士;1961年,成为以色列科学与文学学院院士. 他还是美国艺术与科学学院(1971)、林琴科学院(1972)等外籍院士.

佩克利斯在应用数学领域有不少贡献. 1960年,他与人合作给出了以拉普拉斯潮汐方程为基础确定潮汐的理论. 18年以后,有人证实了这种理论的潮汐预报与实际观察记录的一致性. 薛定谔(Schrö-dinger, E.)关于单电子原子氢情况解决了他的波方程,1957年佩克利斯给出了解决2电子原子的波方程的新方法,并在计算机上得到了超过实验精度的结果. 1962年,他发现了已被确定的锂原子谱线中有一条有误,并预报了应找的正确谱线,几个月后即被证实. 第二次世界大战期间,他给出了爆炸声在浅水中传播的正规方式理论,他的理论所预测的几种新波,在确定海底物理性质等方面发挥了重要作用. 20世纪60年代,他还与他人合作提出了地球自由振动理论. 他的贡献主要在于根据物理科学中出现的问题,发展了数学方法. 他对大气层的潮汐理论、电磁波传播、统计力学、流体力学等方面,都做出了重要贡献. 1966年,他还获得了罗思柴尔德数学奖等.

庞特里亚金(Понтрягин, Лев Семёнович, 1908—1988) 苏联数学家. 生于莫斯科. 14岁时,在一次劳动中,因汽油炉爆炸而造成双目失明. 他在母亲的帮助下,以顽强的毅力坚持学习和科学研究. 1929年,毕业于莫斯科大学. 1935年,获物理数学博士学位,同年晋升为教授. 1939年,任苏联科学院斯捷克洛夫数学研究所的科主任. 1958年,被选为苏联科学院院士.

庞特里亚金在拓扑学方面有重要贡献. 早在大学时代,他就发现了对偶性的一般规律,建立了连续群的特征定理. 后来他又把"有限群与其特征标群同构"的结果推广到局部紧拓扑阿贝尔群上,建立了著名的庞特里亚金对偶定理. 这个定理更新了代数拓扑的内容,是一个世纪以来拓扑学最卓越的成就之一. 他的专著《连续群》,1941年获斯大林奖. 书中阐明了连续映射理论和维数论等一系列拓扑学的重要

结果.他对同伦论的研究也取得了重要进展,给出了庞特里亚金类.1962年,他转向研究经济管理中的数学方法——控制论,成为最优化过程的数学理论的奠基者.他的基本结果是提出了所谓庞特里亚金最大值原理.他在振荡理论、代数李群理论和微分几何等方面也做出了贡献.他的著作还有《组合拓扑学基础》、《最佳过程的数学理论》和《常微分方程》等.

索伯列夫(Соболев, Сергей Львович, 1908—1989) 苏联数学家.生于圣彼得堡,1929年毕业于列宁格勒大学.毕业后,先后在苏联科学院地震研究所、斯捷克洛夫数学研究所、原子能研究所工作.1957年以后,在新西伯利亚大学工作,并任苏联科学院西伯利亚分院院长.1934年,获博士学位.1936年,晋升为教授.1939年,被选为苏联科学院院士.

索伯列夫主要研究固体动力学和数学物理方程.他首先建立了平面波的一般理论,并阐明了曲面波的基本概念.他还得到了双曲型偏微分方程的新解法.他与斯米尔诺夫(Смирнов, В. И.)共同研究了分层介质振动的动力问题,提出了用泛函不变式的方法求解.从此以后,他把现代泛函分析方法应用到了偏微分方程理论,引进一类函数空间(索伯列夫空间),并研究了这类空间的性质.1935年,他给出了偏微分方程广义解的概念,并建立了第一个广义函数的严格定义.他还借助这些概念,研究了某些边值问题.索伯列夫是苏联偏微分方程学派的创始人之一,培养了许多优秀学生.他先后发表论著150多篇(部),有《数学物理方程》、《泛函分析在数学物理中的应用》等.

沃尔德(Wold, Herman Ole Andraeas, 1908—) 瑞典统计学家.生于挪威希恩,1912年随家迁入瑞典.1930年,获斯德哥尔摩大学学士学位,1938年,获博士学位,这中间曾任职于保险公司.1942年,被聘为乌普萨拉大学统计学教授,至1970年转任哥德堡大学教授,1975年退休.1960年,被选为瑞典科学院院士;1961年,被选为英国皇家统计学会荣誉会员.1968—1980年,沃尔德为诺贝尔经济奖委员会成员.1957—1961年,任国际统计学会副主席,1966年,被选为经济计量学会主席.1978年,他还被选为美国艺术与科学学院荣誉院士.

沃尔德对统计学与经济计量学都做有贡献.1938—1952年,他主要从事消费需求的经济计量分析研究,后转而研究具特变量的道路模型.他的工作与现实社会的应用有密切关系.1938年,他在他的博士论文中给出了平稳序列的分解定理,把序列分解成"确定性的"和"随机的"两部分.1939年柯尔莫哥洛夫(Колмогоров, А. Н.)、1942年维纳(Wiener, N.)证明了这种分解可为解决原来谱分析和算子理论中的一些重要难题提供有效方法.他还把最小二乘法建立到了非参数基础上,并在这个框架上于1965年、1966年首先开始了相依系统估计的固定点方法的研究;1971—1972年,又研究了部分最小二乘法,他称其为软建模.他在这些方法及应用的研究中,取得了重要成果.他的消费需求经济计量分析研究报告,曾以政府的小册子形式出版,为瑞典在第二次世界大战时的供给计划提供了重要参考.他已发表学术论文200余篇,并著有《平稳时间序列分析研究》(1938)、《传统的模型建立与数据分析中间的软建模》(1973)、《科学基础上的预测》(1967)、《需求分析的经济计量研究》(1952;与人合著)等近10本专著.

克 林(Kleene, Stephen Cole, 1909—1994) 美国数理逻辑学家.生于康涅狄格州哈特福德,卒于威斯康星的麦迪逊.1930年毕业于阿默斯特学院,1934年获普林斯顿大学博士学位,1934—1935年,留校任研究助理.1935—1941年,任教于麦迪逊威斯康星大学.1941—1942年,任阿默斯特学院副教授.1943—1945年,在美国海军服役,任海军少校,从事应用数学研究.1946年,回麦迪逊威斯康星大学任数学副教授,1948年晋升为教授,曾还任系主任多年.1969—1974年,任文理学院院长,1979年退休.1942年和1947—1949年,曾任符号逻辑协会副主席,1956—1958年任主席.克林还曾任国际科学与哲学史联合会主席(1961).1969年,被选为美国全国科学院院士,1980年,被选为美国艺术与科学学院院士.1958年,曾应邀在国际数学家大会上作报告.

克林的主要贡献在递归函数理论和有效的可计算性方面.1936—1943年,他建立了递归函数类的基本数学性质,并证明了递归函数的概念与可计算数论函数的直觉概念是一致的.1936年,他给出了克林范式定理,1938年,给出了克林递归定理.他引入了部分递归函数、相对递归和关于整数关系的算术分层等概念.20世纪40年代和50年代,他发展了算术层和高型算术层.1950年,他和波斯特(Post, E. L.)用相对递归定义了"不可解性的度",有人称之为克林-波斯特不可解理论.他1952年出版的《元数学引论》标志着递归函数理论的正式形成,该书还是一本影响很大的专著.1955年开始,他把算术分层分类推广到了广泛的超算术、归纳和解析关系等.1959年开始,他研究了可由递归定义的泛函,还引入了"可数泛函",从而推广了可计算性理论,对理论计算机科学有重大影响.早在1945年,他就给出了直觉主义数论的一个可实现性解释,并猜想直觉主义数论的每一个定理在某种意义上是可实现的.这一猜想后被其学生所证实.现在可实现性理论在解释程序语言的研究中已起着重要作用.在他

与学生合著的《直觉主义数学的基础，与递归函数的关系》(1965)中，形式公理化了布劳威尔(Brouwer，L. E. J.)著名的实数理论. 1983 年，获美国数学会斯蒂尔奖；1990 年，获美国国家科学奖章.

谢瓦莱(Chevalley，Claude，1909—1984) 法国数学家. 生于南非德兰士瓦省约翰内斯堡，卒于巴黎. 1929 年毕业于巴黎高等师范学校，1934 年获理学博士学位. 曾到德国汉堡、马尔堡等地学习、讲学. 谢瓦莱是布尔巴基学派的创始人之一. 1938 年，他到美国普林斯顿高等研究院工作. 20 世纪 40 年代，任教于普林斯顿大学. 1949—1957 年，任哥伦比亚大学教授. 1953—1955 年间，曾两次赴日本. 后回法国后，任巴黎大学理学部教授，后来成为巴黎第八大学教授，1979 年退休为荣誉教授.

谢瓦莱在代数、代数数论、李理论及代数几何等方面都做出了重要贡献，早期曾在类域理论方面还做过重要工作. 1936 年、1940 年，他对于有限次代数数域引入了新的伊代尔概念，并成功地使证明算术化. 伊代尔后来成了数论中的重要概念. 1943 年，他发展了局部环理论. 1948 年，他和艾伦伯格(Eilenberg，S.)给出了描述上同调群、同调群的自由分解标准型. 他们将李群的上同调论代数化，构成了上同调理论. 20 世纪 40 年代，在一般代数曲线理论方面，他和韦伊(Weil，A.)重新提出了相交重数的问题. 他还发展并应用了由克鲁尔(Krull，W.)创始的局部环的理想论，引进了拓扑概念，并把它应用到了相交问题. 1950 年，他计算了例外紧单李群，给出了计算公式. 1955 年发现了 F_4、E_6、E_7、E_8 等例外型群. 在 20 世纪 50 年代，他还和另外几人对以前在李群方面的工作进行了整理. 1955 年，他定义了谢瓦莱群. 1941 年曾获美国数学会柯尔奖. 著有《李群理论》(Ⅰ，1946；Ⅱ，1951；Ⅲ，1955)、《旋量的代数理论》(1954)、《代数的基本概念》(1956)、《代数几何基础》(1958)等多种专著.

麦克莱恩(MacLane，Saunders，1909—) 美国数学家. 生于康涅狄格州诺威奇，1930 年获耶鲁大学学士学位，1931 年获芝加哥大学硕士学位，1934 年获德国格丁根大学博士学位. 1934—1936 年，任教于哈佛大学；1936—1937 年，任教于康奈尔大学；1937—1938 年，在芝加哥大学任教. 1938—1947 年，回哈佛大学任教，并在该校晋升为教授. 1947 年以后，任芝加哥大学教授，在 1952—1958 年，任数学系主任，1982 年退休. 1944—1945 年，曾任设在哥伦比亚大学的应用数学小组主任. 1949 年，被选为美国全国科学院院士；1963 年和 1977 年，两次被选为全国科学院副院长，每次任期 4 年. 1946—1947 年，任美国数学会副主席，1973—1974 年，任主席. 还曾任《美国数学会通报》(1943—1947)、《美国数学会会刊》(1949—1954)、《美国数学会讨论会丛书》(1966—1972)主编. 1948 年，任美国数学协会副主席，1950 年，任主席.

麦克莱恩的贡献主要在代数和代数拓扑方面. 他是同调代数和范畴论的先驱者之一. 1939 年，他阐述了一类可分离的超越扩张，在可分离扩张方面现有麦克莱恩定理. 他曾和艾伦伯格(Eilenberg，S.)在拓扑的代数方面进行过长期合作，1942 年联名发表了有关群扩张和同调的文章，证明了构造扩张属于拓扑的万有关系问题，即给定拓扑空间的同调群，求各种系数群的上同调群. 如此系统地使用扩张是同调代数发展中的重要一步. 他们还曾对同伦群和上同调群进行了系统的研究，构造出了某些具有一个非消没同伦群的空间，称为艾伦伯格-麦克莱恩空间. 1945 年艾伦伯格和麦克莱恩第一次引入了范畴和函子的概念. 1950 年麦克莱恩又引入了阿贝尔范畴. 他曾于 1986 年获美国数学会斯蒂尔奖，1989 年获美国国家科学奖章；还曾于 1941 年获美国数学协会的查文尼特奖，1975 年获杰出服务奖. 著有《近世代数综述》(1942；与人合著)、《同调》(1963)、《从事研究工作数学家用范畴》(1973)等多种专著.

乌拉姆(Ulam，Stanislaw Marein，1909—1984) 美国数学家. 生于奥匈帝国里沃夫(现属波兰)，卒于美国科罗拉多州. 1932 年和 1933 年，获里沃夫工业学院数学硕士和博士学位. 1934 年，曾到欧洲数国旅游讲学. 1936 年，到美国普林斯顿高等研究院访问，1936—1940 年，任教于哈佛大学. 1941—1943 年，任威斯康星大学讲师、助理教授，1941 年入美国籍. 1943 年，参加洛斯·阿拉莫斯的曼哈顿工程，研制原子弹，第二次世界大战后在那里又参与研了制氢弹. 在此期间的 1945—1946 年，曾任教于南加利福尼亚大学. 1967 年，到科罗拉多大学任数学教授，并任系主任. 同年，曾任美国总统科学顾问委员会成员. 1957 年，被选为美国艺术与科学学院院士；1966 年，被选为美国全国科学院院士.

乌拉姆在洛斯·阿拉莫斯期间(约 1946 年)提出了蒙特卡罗法，当时被用于核物理研究，现已被广泛地使用到许多领域. 他曾在美国原子弹和后来的氢弹的研制中发挥了重要作用，特别是在研制所涉及的复杂的数学计算问题方面. 他到洛斯·阿拉莫斯之前，一直是研究纯粹数学的，并很有建树. 1929 年，尚在学生时期，他用 0 和 1 两个值定义了一个有限可加性测度的存在性，并证明了集合论中关于集合的理想的定理. 1930 年，得到了关于在一个给定集合的一切子集中定义完全可加测度的不可能性的结果，所用构造法在集合论基础的研究中曾起过重要作用. 1931 年开始，他与人合作引入并研究了对

称积，引出了新的思想，证明了连续形变下某些拓扑性质的不变式. 他还与人合作证明了流形上连续而保持测度不变的"大多数"变换是遍历的. 他还研究过群论、概率论，曾与人一起引入过射影代数的概念. 著作有《数学问题集》(1960)、《乌拉姆文选》(1974)、《一位数学家的经历》(1976；中译本，1989，上海科技出版社)等.

科克伦(Cochran，William Gemmell，1909—1980) 美国数理统计学家. 生于苏格兰，卒于美国科德角. 毕业于格拉斯哥大学，1931 年获硕士学位，后到剑桥大学学习荣誉学位考试课程. 他曾在罗特姆斯梯特(Rothamsted)任助教，1939 年到美国衣阿华州立大学任教授. 1943—1944 年，在普林斯顿统计研究组从事军事方面的研究工作. 1946 年到北卡罗利纳统计研究所任职. 1949—1957 年，任约翰斯·霍普金斯大学生物统计系主任. 1957 年，到哈佛大学任教. 1946—1947 年，任数理统计学会主席；1953—1954 年，任美国统计协会主席；1954—1955 年，任生物统计学会主席；1976—1981 年，任国际统计学会主席. 1971 年，被选为美国艺术与科学学院院士；1974 年，被选为美国全国科学院院士.

科克伦在试验设计、采样调查、方差分析、判别函数等多个数理统计分支都有重要贡献. 1941 年给出了用于检验方差相等的科克伦(检验)统计量. 1947 年，麦克尼马尔(McNemar)提出了一个当响应变量是二分时比较两个匹配样本的方法，1950 年，科克伦把麦克尼马尔的结果推广到了多个匹配样本的情形，并给出了科克伦 Q 统计量. 科克伦 Q 统计量，还被用于检验假设. 1976 年，他研究了分组采样下联列表的 X^2 检验的行为，1977 年给出了分组样本的方差估计. 他在组合试验方面也有研究. 他还曾在农业的长期试验方面做过不少工作. 科克伦一生曾多次获奖，其中比较重要的有：1930 年，获自然哲学牛顿奖章；1936 年，获英国皇家统计学会盖伊奖章；1967 年，获美国统计协会威尔克斯纪念奖章. 他一生发表学术论文 120 多篇，曾单独或与他人合作出版了 5 本专著，其中影响较大的有：《试验设计》(1950；与考克斯(Cox，G. M.)合著)、《采样技术》(1953)、《统计方法》(1967 年第六版；与人合著). 这些专著都曾被译成多种文字出版，其中《统计方法》曾被世界各国广为引用.

博戈柳博夫(Боголюбов，Николай Николаевич，1909—) 苏联数学家、力学家、理论物理学家. 生于下诺夫戈罗德(Нижний Новгород，今高尔基市)，是博戈柳博夫(Боголюбов，A. H.)之兄. 他 14 岁进入乌克兰科学院数学物理研究班. 1923 年获副博士学位，1930 年获博士学位. 1958 年，被选为苏联科学院院士.

博戈柳博夫在分析的近似方法和非线性力学方面进行了卓有成效的研究，他和克雷洛夫(Крылов，A. H.)共同研究了现代微分方程理论与泛函分析这两门学科的交叉内容，建立了所谓动力系统不变测度. 在常微分方程中，他们提出了克雷洛夫-博戈柳博夫均值法. 在复变函数中，他们得到了"楔形尖点"定理. 他在数学物理、统计物理、量子场论、基本粒子理论等方面也做了大量的工作. 他还应用数学方法研究超导性理论，并取得了很大成就. 博戈柳博夫创建了苏联非线性力学、统计物理和量子场论方面的科学学派，为苏联科学技术的发展做出了贡献. 其著作有《非线性振动理论中的渐近方法》(1963)等.

蒙哥马利(Montgomery，Deane，1909—1992) 美国数学家. 生于明尼苏达州威弗，卒于北卡罗来纳州查普尔山. 1929 年毕业于哈姆兰大学. 1930 年和 1933 年，获依阿华大学硕士和博士学位. 1935—1938 年，任史密斯学院助理教授，1938—1941 年，任副教授，1941—1946 年，任教授. 1946—1948 年，任耶鲁大学副教授. 1948 年，成为普林斯顿高等研究院的固定成员，1951 年成为数学教授，1980 年退休. 1952—1953 年，任美国数学会副主席，1961—1962 年任主席. 1975—1978 年，任国际数学联盟主席. 1955 年被选为美国全国科学院院士，1958 年被选为美国艺术与科学学院院士. 1954 年，曾应邀在国际数学家大会上作报告.

蒙哥马利的贡献主要在变换群方面，是现代变换群理论的奠基人之一. 1952 年，他和齐平合作解决了希尔伯特第五问题，即证明了任意有限维局部连通的局部紧群是李群. 在此之前，他个人或与人合作已在局部紧群和变换群方面取得了不少成果. 他在变换群一般理论的发展方面起了重要作用，证明了许多基本结果，如 1957 年和杨(Young，C. T.)合作证明了片的存在性，这是研究群在轨道附近作用的有效工具. 1958 年，他们又证明了轨道的存在性. 1963 年，他和康纳(Conner，P. E.)证明了 SO_3 在没有不动点的欧氏空间上光滑作用的存在性. 他起初注重于拓扑性质，后来转向微分作用. 1966—1973 年间，他和杨于圆群在同伦 7 维球上自由或半自由(即在不动点集外自由)作用方面做了一系列工作，产生了很多有趣的同伦复射影 3 维空间的例子. 1988 年，曾获美国数学会斯蒂尔奖. 著作有《拓扑变换群》(1955；与齐平(Zippin，L.)合著).

北川敏男(Kitagawa，Tosio，1909—) 日本数理统计学家. 生于日本北海道小樽城，就学于东京大学，1934 年毕业，1939 年获科学博士学位. 1934 年，任教于大阪大学. 1939 年，任九州大学助理教授，1943 年晋升为数理统计教授. 1968—1969 年，任理学院院长. 1968 年，还曾兼任该校基础信息科学

研究所所长,1973年退休.同年,任藤津国际社会信息科学高等研究所所长.1975—1977年,任日本信息处理学会主席.还曾任国际物理科学统计协会主席.

北川敏男主要研究数理统计和信息科学.他早期研究分析,后转向概率、统计学.1941年,他开始了对工业质量控制的研究,并致力于把统计质量控制方法引入日本工业界.他还把试验设计、时间序列分析引入到煤矿工人生活消费调查、渔业等领域.他曾于1942年和1953年分别出版了《统计表》和《因子试验设计表》,并出版了专著《对统计基础与方法论的认识》(1968,用日文出版).这对在日本普及现代统计知识起了重要作用.1953年,他还曾对纠正密集错误的代码及其与试验设计的关系有过重要研究工作.1960年,他又开始对信息科学进行了长期的研究,其中包括信息科学的逻辑基础,并引入了信息逻辑空间、生物数学方法、生物数学中的胞腔空间、神经动力学等.

北川敏男对日本统计学及信息科学的发展有重要的影响.1953年,他曾获日本统计学家与工程师联合会的统计质量控制戴明奖;1980年,还因其科学成就突出,获日本政府荣誉奖章.编撰有《统计推断Ⅰ,Ⅱ》(1958)、《信息科学的逻辑》(1969)等专著.

根 岑(Gentzen,Gerhard Karl Erich,1909—1945) 德国数学家.生于格赖夫斯瓦尔德(Greifswald),卒于捷克布拉格.1932年获博士学位.1934—1943年,在格丁根为希尔伯特(Hilbert,D.)当了10年助手,后任教于布拉格大学.他在《基本定理》中强化了演绎系统,完成了古典分析系统相容性证明的部分工作,给出希尔伯特-根岑定理,将希尔伯特的逻辑公理计划推进到新的阶段.此外,他还证明过一些初等数论中的问题.

马尔采夫(Мальцев,Анатолий Иванович,1909—1967) 苏联数学家.生于米舍隆斯基(Мишеронский),1931年毕业于莫斯科大学.先后在伊万诺夫师范学院、苏联科学院斯捷克洛夫数学研究所、苏联科学院西伯利亚分院和西伯利亚大学工作.1941年获博士学位.1944年成为教授.1958年当选为苏联科学院院士.马尔采夫的数学研究涉及数理逻辑、群论、环论、线性代数、拓扑代数、算法理论等学科.特别是他对群论所做的代数研究和对代数系统一般理论的研究都取得了卓有成效的成果.此外,他还为高等学校编著了一系列的教科书,其中《线性代数基础》最为流行.

杜 布(Doob,Joseph Leo,1910—) 美国数学家.生于俄亥俄州辛辛那提,1930年、1931年、1932年,前后获哈佛大学数学学士、硕士、博士学位.1932—1934年,在哥伦比亚大学做研究工作.1935年开始任教于伊利诺斯大学,先任副教授,1945年晋升为教授,1978年退休.1950年,任数理统计学会主席;1963—1964年,任美国数学会主席.1957年,被选为美国全国科学院院士;1965年,被选为美国艺术与科学学院院士;1975年,被选为法国科学院外籍通讯院士.

杜布的贡献主要在概率论方面.他是现代概率论的代表人物之一.20世纪40年代到50年代初,他对鞅进行了系统的研究,用抽象的数学形式定义了一类随机过程,即鞅.他发展了鞅论的许多基本概念,得到了有名的鞅不等式、停止定理和收敛定理等重要结果,使鞅论成了随机过程理论的一个重要分支.现在鞅论已在纯粹数学和应用数学的许多领域,如遍历理论、势论、马尔可夫过程理论、信息论、统计等多方面得到了广泛的应用.1945年,他在研究马尔可夫链的过程中提出了“停止”思想,20世纪60年代,他和邓肯(Dynkin,E.B.)等用这一思想研究了鞅及强马尔可夫过程.他和迈耶(Meyer,Y.)给出了杜布-迈耶上鞅分解定理.他在1953年出版的《随机过程》一书中,系统而严格地叙述了随机过程的基本理论.他和角谷静夫还发现了布朗运动与偏微分方程理论中狄利克雷问题的关系.他曾获1978—1979年度美国国家科学奖章,1984年获美国数学会斯蒂尔奖.

沃尔弗维茨(Wolfowitz,Jacob,1910—1981) 美国统计学家.生于波兰华沙,卒于美国佛罗里达的埋帕.1920年随家移居美国.1931年获纽约城市学院学士学位.毕业后曾任中学教师.1942年获纽约大学数学博士学位.第二次世界大战期间,曾在哥伦比亚大学统计研究组从事与战争有关的研究工作.1945年,任北卡罗来纳大学副教授.1946年,任教于哥伦比亚大学,1951年到康奈尔大学数学系任教.1970年,成为伊利诺斯大学数学教授,1978年退休.后任南佛罗里达大学教授.他是美国全国科学院和美国艺术与科学学院院士.还曾任数理统计学会主席.

沃尔弗维茨在统计推断、序贯分析、库存理论、排队论、信息论、决策论等多方面都有贡献.1940年,他给出了有名的以游程为基础的双样本检验.“非参数”一词首次于1942年出现在他的文章中,他还把非参数推断技术用到了研究参数推断的极小距离方法.该方法给出了某些复杂问题的相容估计.他对序贯分析有不少重要贡献,1947年曾发展了基于序贯采样的克拉默-拉奥型方差估计下界.1948年,他和瓦尔德(Wald,A.)一起证明了瓦尔德序贯概率比检验的最优特性.他在数理统计的主要领域都有重要成果.他还与人合作对库存问题有过先驱性成果.1974年,他在与人合作的《极大概率估计和相关

问题》专著中，阐述了库存问题领域的大多数重要成果. 1955 年、1956 年，他与人合作在排队论方面做出了基础性成果，证明了随着时间的无限增加，等候时间与排队长度极限分布的存在性. 1957 年起，他又对信息论的编码定理进行了研究，证明了直接编码定理和其逆定理. 他在这方面的工作曾是他那个时代该领域理论的代表. 他还著有《信息中的编码定理》(1961).

雅各布森(Jacobson，Nathan，1910—1999) 美国数学家. 生于波兰华沙，1917 年随家移居美国. 1930 年获亚拉巴马大学学士学位，1934 年获普林斯顿大学博士学位. 毕业后曾任教于布林莫尔学院、芝加哥大学、加利福尼亚大学、北卡罗利纳大学、约翰斯·霍普金斯大学，1947 年起，任教于耶鲁大学. 1954 年，被选为美国全国科学院院士. 1971—1973 年，任美国数学会主席. 1972—1974 年，任国际数学联盟副主席.

雅各布森的贡献主要在代数领域的结合环、李代数和若尔当代数. 在结合环理论方面，1945 年，他发展了环的一般结构理论，并给出了该理论的一些重要应用，其中包括给出了环的根及相应半单性概念的一般定义，用本原环对半单环做了部分分析、本原环的结构理论，并把这一理论针对代数的特殊情况做了专门性的阐述发展等. 他对李代数的结构理论也有重要贡献，特别是特征为 0 的任意域上单李代数的分类，并开创了素特征李代数的结构理论. 他还证明了李代数分类问题等价于有限维对合单结合代数的分类. 1937—1938 年，他引入了 p 李代数的概念，并发展了不可分域扩张的伽罗瓦理论. 1950 年以后，他主要研究若尔当代数理论，在表示理论方面有重要成果，并发展了类似于阿廷结合环结构理论的结构理论. 著有《环论》(1943)、《环的结构》(1956)、《李代数》(1962)、《若尔当代数的结构与表示》(1968)、《例外李代数》(1971)等多种专著.

斯廷罗德(Steenrod，Norman Earl，1910—1971) 美国数学家. 生于俄亥俄州的代顿(Dayton)，1932 年毕业于密歇根大学，1936 年获博士学位. 1950 年以后，任普林斯顿大学教授. 曾被选为美国全国科学院院士. 他的主要贡献在拓扑学方面，对拓扑学许多课题他都进行了深入研究. 他发表了大量论著，有《代数拓扑原理》(1952，合著)、《纤维丛的拓扑》，以及一些关于拓扑学入门的著作.

约 翰(John，Fritz，1910—1994) 美国数学家. 生于德国柏林，卒于美国纽约. 1933 年获德国格丁根大学博士学位. 1934 年到英国剑桥大学做研究工作. 1935 年到美国任肯塔基大学助理教授，1942 年晋升为副教授. 1943—1945 年，任职于美国战事部门设在阿伯丁的检验场内的弹道研究实验室. 1946 年起，任教于纽约大学，开始任副教授，1951 年晋升为教授. 在此期间的 1950—1951 年，任国家标准局数值分析研究所主任. 1976 年，任库朗数学科学研究所库朗教授，1981 年退休. 曾被选为美国全国科学院院士、德国自然科学院院士. 1966—1981 年，任《纯粹数学与应用数学通讯》杂志主编. 1966 年，曾应邀在国际数学家大会上作报告.

约翰研究偏微分方程、分析及数值分析，其工作还涉及到几何等领域. 他的工作很多与不适定问题有关. 他的博士论文就是关于从一个函数在各种流形上的积分来确定该函数的不适定问题. 他曾证明一大类不适定问题在很多情况下可以得到数值解，只要在已知条件中添加对可望获得的解的最大值估计. 1968 年，他和尼伦伯格(Nirenberg，L.)在研究椭圆型偏微分方程的解时，引进了一类有界平均振动空间，简称为 BMO 空间. 他们还指出可用约翰-尼伦伯格不等式刻画 BMO 的特征. BMO 空间已成为研究 H^r 许多问题的新工具，已在调和分析中起着重要作用. 1948 年，他还曾提出过一个非线性规划最优化的判别式. 1973 年，他曾获美国数学会和美国工业与应用数学会联合颁发的伯克霍夫应用数学奖；1982 年，获美国数学会斯蒂尔奖. 著作有《平面波与球平均在偏微分方程中的应用》(1955)、《偏微分方程》(1964；与人合作)、《高等数值分析》(1967)等.

科拉茨(Collatz，Lothar，1910—1990) 德国数学家. 生于阿恩斯堡，卒于汉堡. 曾在格赖夫斯瓦尔德、慕尼黑、格丁根、柏林等大学学习数学与物理，1935 年获柏林大学博士学位，1937 年在卡尔斯鲁厄工业大学取得大学授课资格，并于 1938 年任讲师. 1943 年，任汉诺威工业大学教授. 1952 年起，任汉堡大学应用数学研究所所长、计算中心主任，并主持数学讨论班. 1966 年、1978 年相继成为意大利摩德纳、波伦亚科学院荣誉院士，1980 年成为德国哈雷自然科学院院士.

科拉茨在微分方程、特征值问题、逼近与最优化以及这些领域问题的数值解等方面都有重要贡献. 他一生曾指导了 50 多名博士生. 1985 年，曾获保加利亚科学院的荣誉奖章. 他还撰写了多种专著和教科书，其中译成英文的有《泛函分析与数值数学》(1966)、《特征值问题及在工程上的应用》(1968)、《最优化问题》(1975；与人合著)等.

图 兰(Turán，Paul，1910—1976) 匈牙利数学家. 生于布达佩斯，卒于布达佩斯. 1933 年获布达佩斯大学的数学与科学教师证书，1935 年获博士学位. 1938 年前任家庭教师，1938 年，任布达佩斯匈牙利犹太训练学校数学教师助理. 1945 年，任布达佩斯大学副教授；1949 年晋升为教授. 1955 年，任新成

立的匈牙利科学院数学研究所复变函数论室主任.1948年,被选为匈牙利科学院通讯院士,1953年成为院士.去世前是匈牙利亚诺什·波尔约数学会主席.

图兰的主要研究工作在解析数论方面,最大贡献是他在1938年在对黎曼ζ函数的零点分布的研究过程中,发现了幂和法(Power Sum Method),并把幂和法应用到了分析与数值代数问题中.1934年,他第一次把概率方法应用到数论,并得到了多项式算术方面的第一个一般的统计定理.另外,他还研究了复变函数论、逼近论、插值理论、微分方程、群论、图论和组合论等,并且都取得了成果.他和爱尔特希(Erdös,P.)合作在统计群论方面的文章,开创了这一领域的研究工作,还给出了对称群特征标值分布的一般定理.图兰一生共发表过245篇论文,其中100篇左右是有关数论的.1948年和1952年,他两次获匈牙利政府颁发的科苏(Kossuth)奖,此奖在匈牙利声誉很高.1975年还获亚诺什·波尔约数学会的谢尔(Szele)奖.他的学术论文全都收入了他的三卷本文集(1990)中.

库普曼斯(Koopmans,Tjalling Charles,1910—1985) 美国数理经济学家.生于荷兰格雷夫兰特,卒于美国纽黑文.1933年获荷兰乌得勒支大学数学与物理学士学位.1936年,以"经济时间序列的线性回归分析"的学位论文获荷兰莱顿大学博士学位.1936—1938年,任经济学校讲师;1938—1940年,任职于日内瓦的国际联盟金融部.1940年到美国,1946年入美国籍.1940—1941年,任普林斯顿大学研究助理,后曾任设在华盛顿的联合海运调节委员会统计学家.1944—1945年,任芝加哥大学研究助理,1946—1948年,任经济学副教授,1948—1955年,任教授.在此期间的1948—1954年,任考尔斯经济研究委员会主任.1955年起,任耶鲁大学经济学教授,1981年退休.1949年任计量经济学会副主席,1950年任主席.1978年任美国经济协会主席.还曾被选为美国艺术与科学学院、美国全国科学院院士,荷兰皇家艺术与科学学院通讯院士.

库普曼斯在大学时学的是数学与理论物理,后转学经济,并接触过多位数理经济学家.在海运调节委员会任职期间,为使货船的交货费用最小,他改进了联合海运的路线.他把数学方法用到了不足资源的最优分配问题上.他发展的一种称为"活动分析"的解析技巧,改变了经济学家和生产管理者的分配方法.1942年提出这种技巧时证明了分配问题可转变为受一定约束的数学最优化问题.为解决交货货船值的极大化问题而给出的数学解在经济理论和管理实践中得到了广泛使用.后来在20世纪60年代和70年代,他在经济增长的研究方面都做出了重要贡献.他是发展规划的先驱者,指出了在规划社会经济增长时贴现率的重要性.他于1975年因对资源最优分配理论的贡献,而获诺贝尔经济科学纪念奖.著有《线性生产函数系统》(1948)、《最优增长模型中的目标、约束与结果》(1966)等专著,1970—1985年,还出版了2卷《库普曼斯科学论文集》.

切萨里(Cesari,Lamberto,1910—1990) 美国数学家.生于意大利波伦亚,卒于美国密歇根安阿伯.曾就读于比萨高等师范学校,1933年获比萨大学博士学位,后在罗马国家研究委员会数值分析研究所工作.1935年,任教于罗马大学,1937—1939年,任助理教授,1939—1942年,任比萨大学副教授,1942年,任波伦亚大学副教授,1947年晋升为教授.1949年到美国,先在普林斯顿高等研究院任访问教授一年,后曾在伯克利加利福尼亚大学、威斯康星大学、普度大学等任访问教授.1952—1960年,任普度大学教授.1960年起,任密歇根大学教授,1980年退休.1982年,被选为意大利林琴科学院院士,还是意大利波伦亚、摩德纳、米兰科学院通讯院士.

切萨里的研究工作涉及实函数、变分法、曲面面积理论、微分方程的渐近行为、数值分析、最优控制理论、非线性分析等多个领域,在曲面面积理论、有界变差的多维函数和塞林(Serrin)型函数方面曾做过早期工作.他在变分法和最优控制方面有重要贡献,特别是在单变量与多变量系统最优解的存在性定理和帕雷托(Pareto)问题必要条件理论及分析等方面.在20世纪60年代后的20多年中,他主要研究了非线性分析的有关问题及其在微分方程中的应用.他对交错法进行了长期研究,特别是在具有很大非线性性的问题方面的应用.他还研究了某些拟线性双曲系统解的存在性等.他一生共发表论文220多篇,著有《非线性分析与交错法》(1977)、《最优化理论与应用》(1983)等4本专著.

里希特迈耶(Richtmyer,Robert Davis,1910—) 美国数学家.生于纽约州伊萨卡,1931年和1932年,获康奈尔大学物理学学士和硕士学位,1935年,获马萨诸塞理工学院物理博士学位.1935—1940年,在斯坦福大学讲授物理.1940—1945年,在华盛顿的军事部门任非军职科学家.1945—1953年,在洛斯阿拉莫斯项目中任职.1953—1964年,任教于纽约大学,开始任副教授,后任教授.1964年起,任博尔德科罗拉多大学教授,起初为计算科学教授,后任物理系和数学系教授.还曾在芝加哥、新墨西哥、海德堡、慕尼黑、乌普萨拉等大学任短期教职.

里希特迈耶学的是物理,但在洛斯阿拉莫斯期间研究了流体动力学、核与热核反应、蒙特卡罗法、计算机程序、代数数的连分式展开及系统采样等.在纽约大学期间又研究了数值分析和计算机方法.在

此期间内出版了《初始值问题的差分法》(1957)一书.此书对解偏微分方程的数值方法的发展有较大影响,并被广泛地使用和研究,还曾被译成俄文出版.该书从理论上对差分法的稳定性和收敛性做了系统阐述.1967年,与人合作出版了第二版,增加了新发展起来的混合初始值问题的稳定性理论.该书还为解流体力学、中子迁移、弹性及相关的问题提供了各种应用数值方案,其中有些还涉及到了一些前沿问题,如戈杜诺夫方案、以黎曼解为基础的一些方案等.他还曾于1990年获美国数学会斯蒂尔奖.

汉 森(Hansen,Morris,1910—) 美国统计学家.生于怀俄明州,1934年获怀俄明大学学士学位.毕业后任职于华盛顿州人口调查局,同时业余时间在农业部的研究生院和美国大学学习.1940年获硕士学位.1947年,任人口调查局统计研究室负责人;1949年,任统计标准处处长助理;1961年,任研究与发展处副处长.1968年退休.同年,任从事统计研究与咨询服务的韦斯德特(Westat)公司的统计指导和高级副主席.1953年,任数理统计学会主席;1960年,任美国统计协会主席;1973年,任国际调查统计学家协会主席.1972年,被选为美国全国科学院院士.

汉森长期从事采样调查的实践与有关理论方法的研究,如样本调查设计、数据搜集、数据处理与分析等,在采样方法与理论方面有重要成果.他曾参与过1937年美国失业人口的大规模调查.1943年,他与同事设计了概率比例抽样法,他对调查误差也有研究.他在人口调查局期间,还与人共同组织了"全国分析学家"的一个顾问咨询性组织,即后来的韦斯德特公司,参与了社会各方面的咨询活动:曾建议劳动统计局采用概率采样法建立消费价格指数及生产价格指数,他还通过国会成员建议建立了福利项目的质量控制系统,并涉及到工业部门的有关问题.这些活动都是以采样调查分析、评估为基础的.汉森曾获洛克菲勒公共服务奖.与人合作著有《采样调查方法与理论》(1953).

吉文斯(Givens,James Wallace Jr.,1910—1993) 美国数学家.生于弗吉尼亚的艾伯伦尼.1936年,获普林斯顿大学博士学位.1935—1937年,在普林斯顿高等研究院做维布伦(Veblen,O.)的助手.1937—1941年,任教于康奈尔大学.1941—1946年和1960—1964年,在东北大学任教;1947—1956年,在田纳西大学任教;1956—1960年,在韦恩州立大学任教.1964年开始任阿刚国家实验室应用数学部主任,1975年退休.同年,回东北大学任数学教授.1979年从东北大学退休后,迁到加福尼亚居住,卒于该州埃尔塞利托.1969—1971年,任美国工业与应用数学会主席.

吉文斯主要研究数值线性代数算法,他是矩阵算法领域的先驱者之一.早期研究射影几何,20世纪40年代接触数值算法.从20世纪50年代开始用把对称矩阵化为三角形阵方法给出了计算特征值的平面旋转矩阵,即吉文斯旋转法.这种方法是矩阵计算中的第一个误差分析方法.20世纪60年代初和70年代初,研究了李雅普诺夫映射:$Z\rightarrow AZ+ZA^*$.在阿刚期间,他组织培养了一批涉及到量子物理的数学基础、自动定理证明、计算机语言、图像处理、计算机执行的监控等领域的应用数学家、计算机科学家和工程技术人员.1974年,他曾获洪堡奖.

巴特莱特(Bartlett,Maurice Stavenson,1910—) 英国统计学家.生于伦敦,毕业于剑桥大学.1933年,任伦敦大学学院统计系助理讲师;1934—1938年,任职于帝国化学工业公司;1938年,任剑桥大学数学讲师.第二次世界大战期间,他曾从事火箭研究.1947年,任曼彻斯特大学数理统计教授;1960年,任伦敦大学学院统计教授;1967年,任牛津大学生物数学教授.1975年退休.1961年,被选为伦敦皇家学会会员.1959—1960年,曾任曼彻斯特统计学会主席;1966—1967年,任英国皇家统计学会主席.

巴特莱特主要研究统计和随机过程,他对英国随机学派的形成有重要影响.他在"生-死"过程方面做过不少先驱性工作,在1955年出版的《随机过程引论》一书中对"生-死"过程给出了简要而具权威性的阐述.1937年,他给出了方差齐性的检验,现被称为巴特莱特M检验.该方法不仅可测试近似正态分布的若干总体的齐性,还被用到了测试高阶相互作用析因试验和时间序列分析,以研究光滑图的起落情况.巴特莱特曾于1969年获英国皇家统计学会的盖伊金质奖章,1971年获牛津大学韦尔登奖章.他还著有《概率、统计和时间》(1975)和《谱空间模式的统计分析》(1976)等专著.

伯克霍夫(Birkhoff,Grarrett,1911—1996) 美国数学家.生于普林斯顿,早年在哈佛大学和英国剑桥大学就读,1932年获哈佛大学学士学位,后获理学博士学位.1936年起,任教于哈佛大学,1938—1941年,为助理教授,1941—1946年,为副教授,1946—1982年,任数学教授,1982年退休.美国全国科学院、美国艺术与科学学院院士.1958年,任美国数学会副主席;1971—1972年,任美国数学协会副主席;1967—1968年,任美国工业与应用数学会主席.

伯克霍夫的工作涉及格论、近世代数、核反应堆理论的流体动力学、声学、偏微分方程的数值解,以及科学计算.他曾和菲力普斯(Phillips,R.S.)定义了取值于局部凸拓扑线性空间的函数的积分.他在1940年出版的《格论》,经重新组织并增扩内容于

1967年出版了第三版，除全面阐述了有关理论外，还介绍了格论在分析、集合论（包括拓扑和测度论）等方面的应用，还涉及了有序系统及二进制运算等．他在把代数方法以及其他一些高水准的数学方法应用到别的科学领域方面有重要贡献，并因此曾于1978年获美国数学会G.D.伯克霍夫应用数学奖．他一生发表学术论文近200篇，著有《流体动力学》（1950）、《椭圆方程的数值解》（1971）、《近世代数概论》（1941，与麦克莱恩（MacLane，S.）合著）和《代数》（1967）等专著．

克尔德什（Келдыш，Мстислав Всеволодович，1911—1978）　苏联数学家、力学家．生于里加（Рига），1931年毕业于莫斯科大学，以后在茹科夫斯基空气动力中心研究所工作．1936年起，在苏联科学院工作．1937年兼任莫斯科大学教授．1946年，被选为苏联科学院院士．1953年，成为苏联科学院主席团成员，同年兼任科学院应用数学研究所所长．1960—1961年，任苏联科学院副院长，1961—1975年，任院长．

克尔德什在纯粹数学、应用数学、计算数学、航空动力学等许多科学领域做出了重要贡献．对飞机结构的自振问题进行了一系列重要的研究．他的工作对空气动力学理论的发起起到推动作用．他的数学研究主要在实变函数、复变函数、偏微分方程、泛函分析和计算数学等学科领域．他提出并解决了拉普拉斯方程狄利克雷问题解的稳定性的基本课题．在复变函数论中，他得到了拟保角映射的重要结果，并把它应用于流体动力学．他还解决了在闭集中用多项式级数一致地逼近复变函数的问题，并研究了平均逼近度．他首先证明了对于非自共轭偏微分算子的特征函数系和伴随函数系的完备性．他还对计算数学和苏联计算机科学的发展做出了重要贡献，建立了原子和宇宙技术计算中的有效方法，开辟了宇宙技术的研究领域．他的科学成就得到了苏联政府的高度评价，曾多次给予他各种奖励、勋章和荣誉称号．除此之外，他还被选为多国科学院的院士或荣誉院士．

博戈柳博夫，А.Н.（Боголюбов，Алексей Николаевич，1911—　）　苏联数学史家．生于涅仁（Нежин），1936年毕业于哈尔科夫大学．1965年获得工程技术科学博士学位．他的主要贡献在数学史和力学史方面．他曾担当主编的四卷集《本国数学史》，由苏联科学院和乌克兰科学院联合出版．这部专著具有重要的学术价值．他编著的《1917—1966年的苏联数学科学生活》也广为流传．

马　丁（Martin，William Ted，1911—　）　美国数学家．生于阿肯色（Arkansas）斯普林代尔（Springdale），1930年毕业于阿肯色大学，1934年获伊利诺伊大学博士学位．1936年以后，在马萨诸塞理工学院任教．曾还任美国数学协会副主席，美国科学艺术研究院院士．马丁的主要贡献在拓扑学方面，他建立了关于拓扑空间性质的马丁公理．在拓扑流形中有马丁-博特定理．专著有《多复变量函数》（1948，合著）、《函数空间的分析》（1964，合著）等．

格涅坚科（Гнеденко，Борис Владимирович，1912—1995）　苏联数学家．生于辛比尔斯克（Симбирся），1930年毕业于萨拉托夫大学．1942年获得博士学位，同年晋升为教授．1948年，被选为乌克兰科学院院士；1960年，开始在莫斯科大学工作．

格涅坚科的主要贡献在概率论、数理统计和数学史等方面，他在概率论和数理统计方面的研究成果具有重要的意义．他解决了独立随机变量和的分布函数按各种可能收敛于其极限分布的条件问题．他还在质量控制和可靠性理论方面得到了某些成果．格涅坚科不仅是一个出色的数学家，而且还是杰出的教育家和科普作家．他多年一直积极参与编辑出版苏联的《中学数学》杂志．先后发表论著200多篇（部），主要著作有《概率论初步》（1958；合著）、《概率论教程》（1955）、《相互独立随机变量之和的极限分布》（1955）等．

坎托罗维奇（Канторвич，Леонич Витальевич，1912—1986）　苏联数学家、数学经济学家．生于圣彼得堡，1930年毕业于列宁格勒大学．1932—1964年，在列宁格勒大学工作．1940—1964年，在苏联科学院数学研究所列宁格勒分所兼职．1958—1971年，在苏联科学院西伯利亚分院数学研究所工作．1971年以后，到苏联科学技术委员会国民经济研究院工作．1934年成为教授．1935年，获得物理数学博士学位．1964年，被选为苏联科学院院士．

坎托罗维奇是一个很全面的学者，他的科学研究涉及许多数学领域．在泛函分析中，他引进并研究了一类半有序空间（后来称为坎托罗维奇空间）．他还把泛函分析的理论应用于计算数学中，发展了近似方法的一般理论，建立了解算子方程行之有效的方法．他对程序设计、函数论、数学物理、微分方程、积分方程、变分法等也都有所贡献．他还深入研究了数学在经济学中的应用和经济学中的若干课题，因此在1975年荣获诺贝尔经济学奖．他的一些著作还被译为中文出版，如《半序空间泛函分析》（上册，高等教育出版社，1958；下册，人民教育出版社，1960）、《近似方法》及《生产组织与计划中的数学方法》（1939）．后者是他规划论的早期著作．

哈特利（Hartley，Herman Otto，1912—1980）统计学家．国籍不详．生于德国，卒于美国北卡罗来纳．1933年获柏林大学数学博士学位．1934年移居英格兰，1940年获剑桥大学统计学博士学位．

1938—1946 年任职于英国科学计算服务公司；1946—1953 年，任伦敦大学学院讲师. 1953 年访问美国，并且在美国任衣阿华州立大学研究教授. 1963—1967 年，在得克萨斯农业机械大学建立了统计研究所，并任所长. 1979 年退休后，到杜克大学任教授，直至去世. 1979 年，任美国统计协会主席，还曾任北美地区生物统计学会主席.

哈特利主要研究统计方法论、样本调查理论方法、估计理论的数学技术和运筹学等. 他曾和皮尔逊(Pearson，E. S.)合作编撰了著名的《统计学家用生物统计表》(1966；1972). 他在从事教学和研究的 40 多年中，在统计学的很多分支都做了重要工作，其中包括方差分析、数据处理、数值分析、制表、采样分布和采样理论、统计方法等. 他对采样分布、假设检验、方差分量、采样调查，以及在应用领域统计方法的发展研究都有着重要意义. 哈特利曾于 1973 年获得美国统计协会威尔克斯纪念奖章. 他还与人合作著有《数理统计表指南》(1962)等.

斯潘塞(Spencer，Donald C.，1912—) 美国数学家. 生于科罗拉多州博尔德，1934 年获科罗拉多大学物理学学士学位，1936 年获马萨诸塞理工学院工程学士学位. 1939 年获英格兰剑桥大学博士学位，1963 年又获该校理学博士学位. 1939—1942 年，任教于马萨诸塞理工学院. 1942—1949 年、1963—1968 年，任教于斯坦福大学；1949—1963 年、1968—1978 年，任教于普林斯顿大学. 1978 年退休. 退休后生活于科罗拉多的杜兰戈. 1961 年，斯潘塞被选为美国全国科学院院士；1967 年，又被选为美国艺术与科学学院院士.

斯潘塞到普林斯顿大学之前，他主要研究数论中的格点和整数序列、流体力学、保角映射和黎曼曲面等. 到普林斯顿大学以后转向多复变函数和复流形的研究. 他和小平邦彦合作在复流形的研究中所用的位势理论方法，已发展成一个重要工具，并且是一系列研究工作的基础. 他们引入了复变形的现代理论和其他一些结构，这一工作对代数几何和数学物理都有重大影响. 他还利用位势理论研究了有界复流形. 1950 年，他首先提出了著名的 $\bar{\partial}$ 纽曼问题，导出了多复变量和偏微分方程方面许多重要的新发展. 在 20 世纪 60 年代，他还对偏微分方程超定组和伪群做过研究. 他还曾于 1948 年获美国数学会博歇纪念奖，1989 年获美国国家科学奖章. 他还与人合作编撰了《施利希特函数的系数区域》(1950)、《有限黎曼曲面函数》(1954)、《李方程，卷 I：一般理论》(1972)等专著. 1985 年还出版了三卷本《斯潘塞文选》.

图　灵(Turing，Alan Mathison，1912—1954) 英国数学家. 生于伦敦，因氰化物中毒卒于曼彻斯特. 1931 年入剑桥国王学院学习，1935 年毕业. 1936—1938 年，在美国普林斯顿大学与丘奇(Church，A.)一起工作，并于 1938 年获博士学位. 1939—1945 年，在英国外交部通讯处任职，并于 1946 年被授予获帝国勋章的军官的称号. 1945 年秋，图灵参加了国家物理实验室从事自动计算机的设计工作. 1948 年，成为曼彻斯特大学讲师，且任曼彻斯特自动数字计算机的主任助理. 1951 年，被选为英国皇家学会会员.

图灵的贡献主要在图灵机的先驱工作和数理逻辑方面，其工作还涉及其他方面. 1935 年开始，他对数理逻辑发生兴趣，1937 年在“论可计算的数及其在决策问题上的应用”一文中，得到了理论“通用”计算机(即图灵机)，并定义了可计算函数的概念. 文章引起了人们的关注. 1939 年，他曾详细地考察了对任意序数 α 构造一个逻辑 $L\alpha$，使任何问题都能在某个 $L\alpha$ 范围内解决. 这一有关序逻辑的工作有着深远影响，曾被应用于不可能问题的分类等. 他对群论和黎曼 ζ 函数的计算也有贡献. 1950 年，他研究了人工智能问题，并指导编写了《曼彻斯特电子计算机程序员手册》. 此外，他还曾研究过有机体生长的有关数学理论.

亚历山德罗夫(Александров，Александр Данидович，1912—) 苏联数学家. 生于沃伦(Волынь)，1933 年毕业于列宁格勒大学，获物理数学博士学位. 1932—1964 年，在列宁格勒大学工作. 1937 年晋升为教授，1952 年起，任列宁格勒大学校长. 1964 年，被选为苏联科学院院士.

亚历山德罗夫是苏联几何学派的奠基者. 他所开创的研究曲面度量性质的方法扩大了几何研究领域，并导致一系列曲面理论经典问题的解决. 特别是他建立了三个最一般的关于凸曲面的内蕴几何的命题，并得到了一系列关于凸曲面的十分理想的结果. 他的著作有《凸曲面的内蕴几何学》、《数学——它的内容、方法和意义》(多人合著)等.《数学——它的内容、方法和意义》流传很广，执笔者都是著名数学家.

博　斯(Boas，Ralph philip，Jr.，1912—1992) 美国数学家. 生于华盛顿州沃拉沃拉，卒于西雅图. 1933 年、1937 年，先后获哈佛大学学士、博士学位. 曾在哈佛、普林斯顿、英国剑桥等地做过研究工作，并曾任教于杜克大学等. 1945 年，任《数学评论》执行编辑. 1950 年起，任西北大学教授，1957—1972 年，任数学系主任，1980 年退休. 1959—1960 年，任美国数学会副主席；1973 年，任美国数学协会主席. 还曾任《美国数学月刊》等刊物的主编.

博斯主要研究单变量的实函数与复函数，特别是指数型的整函数. 他的工作还涉及到经典分析的其他许多课题，如三角级数、傅里叶级数、矩问题、积

分变换以及不等式等. 他还是一位阐述性作家. 他的专题著作《实函数入门》(1960), 在清晰与精确方面是楷模. 他的《整函数》(1954)一直是该领域的标准参考书. 他1981年在《美国数学月刊》上发表的"我们能使数学易懂吗?"一文, 是数学教学以及数学家们关于写、讲数学方面的一篇极好文献. 在他任《数学评论》执行编辑时, 曾应邀撰写过该年的《大不列颠百科全书》的数学部分. 他在那里首次披露了"布尔巴基"是法国一组数学家的集体笔名. 1981年, 他还曾获美国数学协会杰出服务奖.

丹尼尔斯(Daniels, Henry, 1912—) 英国数理统计学家. 生于伦敦, 毕业于爱丁堡大学, 后曾到剑桥大学学习, 获爱丁堡大学博士学位. 1935—1942年、1945—1946年, 在英国羊毛工业研究协会做统计工作; 1942—1945年, 任英国飞机制造工业部科学官员. 1947年任剑桥大学数学讲师, 1957年任伯明翰大学数理统计教授, 1978年退休. 后在剑桥大学统计实验室任荣誉职位. 1974—1975年, 任英国皇家统计学会主席; 1980年, 被选为伦敦皇家学会会员.

丹尼尔斯主要从事应用统计的研究, 对统计理论及方法在英国羊毛工业中的应用取得了重要成果, 并在有关统计方法等方面也有突出的建树. 他曾用组合方法证明了渐近正态性, 其方法比U统计使用更为广泛. 他给出了复合结构方面的第一个统计模型, 现被称为丹尼尔斯系统, 在材料强度领域有重要影响. 1954年, 他首次把鞍点逼近介绍到了统计学界, 该成果介绍已成为经典性论文, 文中讨论了大量基本性问题, 如鞍点的存在性与惟一性等. 1980年, 他又证明了正规化的鞍点逼近导出的正态分布、Γ分布、逆正态分布的精确结果. 1982年, 他还把这方法应用到了生育过程理论. 1941年, 他就给出了正态极值的丹尼尔斯公式, 1982年又对此公式做了进一步研究. 他还从随机游动角度阐述了化学聚合理论中的有关问题, 有关成果被聚合化学家广为引用. 另外, 他还对射影几何有所研究; 还曾解决过涉及通常扩散的离心加速问题等. 他对钟表设计也有重要贡献, 业余时间爱好修理与研究钟表. 丹尼尔斯曾于1947年、1984年先后两次获皇家统计学会的银质和金质盖伊奖章.

沃利斯(Wallis, W. Allen, 1912—) 美国统计学家. 生于费城, 毕业于明尼苏达大学, 获学士学位, 曾在该校及芝加哥大学和哥伦比亚大学学习研究生课程. 毕业后曾任教于耶鲁大学. 1938—1946年, 在斯坦福大学任教, 但其中大部分时间在国家经济研究局和哥伦比亚大学统计研究组从事研究工作. 1946年到芝加哥大学任教, 1956年任经济学院院长. 1962—1982年, 任洛克菲勒大学校长. 1982—1989年, 任美国国务院经济事务副国务卿. 后任华盛顿美国企业公共政策研究所的常驻学者. 他曾于1959—1961年, 任总统特别助理; 1950—1959年, 任《美国统计协会杂志》主编; 1965年, 任美国统计协会主席. 1964年, 还被选为美国艺术与科学学院院士.

沃利斯主要从事序贯分析、试验设计、时间序列分析、统计技术等研究. 1941年, 他和穆尔(Moore, G. H.)给出了检验在数值序列中偏离随机性的相频率检验. 1952年, 他和克鲁斯卡尔(Kruskal, W. H.)给出了以阶为基础的一种非参数检验, 即克鲁斯卡尔-沃利斯检验. 在国家经济研究局工作期间, 主要从事经济中的统计理论研究, 后来又对商业领域的统计问题做过研究, 还曾把统计理论应用到了政治领域. 沃利斯曾于1980年获美国统计协会的威尔克斯纪念奖章. 他与人合作著有《时间序列与其他有序观察的显著性检验》(1941)、《统计数据的序贯分析应用》(1945)、《统计分析技术》(1947)、《福利纲要, 经济评价》(1968)等10多种专著.

赖斯纳(Reissner, Eric, 1913—) 美国数学家、工程科学家. 生于德国亚琛, 就学于柏林工业大学. 1935年获应用数学学士学位; 1936年获民用工程博士学位; 1938年获美国马萨诸塞理工学院数学博士学位. 1937年成为马萨诸塞理工学院航空学研究助理, 以后一直任职于该校, 直至1970年. 在此期间, 1942—1946年任助理教授, 1946—1949年任副教授, 1949—1970年任教授. 1970年, 到圣迭戈加利福尼亚大学任力学与数学教授. 1950年, 被选为美国艺术与科学学院院士.

赖斯纳主要从事应用数学及理论与应用弹性力学的教学和研究工作. 1940—1950年间, 他曾表述了弹性的变分原理; 建立了薄壳扭转对称弯曲的大范围挠曲理论; 表述了弯曲管的冯·卡门问题, 并给出了渐近解; 从空气动力提升曲面理论导出了提升线理论, 并用两个一维积分联立方程推广了提升和运动短时变化的提升线理论等. 在20世纪60年代和70年代, 他又在薄墙结构的非线性大应变分析等与工程有关的应用数学和力学问题方面进行了系统研究, 并得到了不少重要成果.

爱尔特希(Erdös, Paul, 1913—1996) 匈牙利数学家. 生于布达佩斯, 就学于布达佩斯大学, 1934年获博士学位. 曾到英国曼彻斯特大学学习, 并获理学博士学位. 1934—1955年间, 他曾频繁地在美国、加拿大、匈牙利、英国、法国和以色列等国之间游学或旅行讲学. 后成为匈牙利科学院数学研究所成员、数学教授. 1956—1962年为匈牙利科学院通讯院士, 1962年成为院士. 他还是伦敦皇家学会外籍会员, 美国全国科学院、荷兰科学院、澳大利亚科学院、

印度科学院外籍院士. 还曾担任过匈牙利《数学学报》主编.

爱尔特希在数论领域有重要贡献. 他在周游各国时,常与人讨论数学问题,或为人提供解题方法,故与人联名发表文章极多. 他一生个人或与人合作发表文章 1000 多篇,有时一年竟发表 50 多篇. 1949 年,他曾和赛尔伯格(Selberg,A.)合作,第一次给出了素数定理的非常初等的证明. 他还开创了对一般整数序列的算术研究. 他的工作对数论的发展有着重要影响,在数论的许多分支中都有他引入的技巧,其中包括一些出自概率论的方法. 他对组合论也有重要贡献,特别是对分析运算的研究,曾开创了(部分内容与拉多(Radó,T.)合作)数理逻辑与集合论交界处的一个新的研究分支. 另外,他还在分析、集合论、概率论以及组合论的图论、极值问题、拉姆齐理论等领域都有许多重要的贡献. 他曾于 1951 年获美国数学会科尔奖,1958 年获匈牙利科苏特(Kossuth)奖,1983 年获沃尔夫数学奖. 著作有《组合论中的概率方法》(1974;与人合著)、《几何中的某些极值问题》(1976)等.

菲利普斯(Phillips,Ralph S.,1913—) 美国数学家. 生于加利福尼亚的奥克兰,1935 年获洛杉矶加利福尼亚大学学士学位,1939 年获密歇根大学博士学位. 1940—1941 年、1941—1942 年,分别任教于华盛顿大学和哈佛大学,后到马萨诸塞理工学院做研究工作. 1946 年,任纽约大学助理教授;1947 年,到南加利福尼亚大学任教;1958 年,任加利福尼亚大学教授;1960 年起,任斯坦福大学教授. 1971 年,被选为美国艺术与科学学院院士.

菲利普斯是有名的分析学家之一. 早期他在泛函分析方面曾建立了一个有关半群的谱与其无限小生成元之间关系的定理. 这定理在偏微分方程的研究中非常有用. 他在算子理论的插值法和鲁棒控制出现之前就给出了散逸型线性算子的扩张理论. 他与拉克斯(Lax,P. D.)合作在声学散射理论方面,证明了局部能量衰变以及散射矩阵的极点预解式的解析性质之间的关系. 后来他又把这一结果推广到自守拉普拉斯算子的谱理论. 他还与人合作在对称空间上的拉普拉斯谱论、双曲平面一般非紧商尖点型的存在性与稳定性、稀疏最优扩张图的显式构造、和两维等谱集族的结构等方面做了很多重要工作.

菲利普斯于 1997 年获美国数学会斯蒂尔数学终生成就奖. 他还与人合作著有《泛函分析与半群》(1957;中译本,上海科技出版社,1964)和《散射理论》(1967)等.

瑟凯福尔维-纳吉(Szökofalvi - Nagy,Bèla,1913—) 匈牙利数学家. 生于罗马尼亚克卢日(Cluj),1936 年毕业于塞格德大学,后留校工作,1948 年成为教授. 1953 年以后,任匈牙利数学会主席. 1956 年,当选为匈牙利科学院院士. 1970 年以后,任匈牙利科学院塞格德分院院长. 他的主要贡献在函数逼近论和泛函分析方面. 他研究了希尔伯特空间算子的扩张理论,并取得了一定的成果. 著作有《泛函分析讲义》(与里斯(Riesz,F.)合著)、《希尔伯特空间中算子的调和分析》.

盖尔范德(Гельфанд, Израиль, Моисеевич, 1913—) 苏联数学家. 生于红奥克诺(Красные окны,现在的敖德萨(Одесса)省内. 1930 年,中学未毕业便随父迁居莫斯科,以后自学数学. 1932 年开始参加莫斯科大学的研究活动,同年在莫斯科大学工作. 从 1939 年起,在苏联科学院数学研究所工作,1940 年,获物理数学博士学位;1943 年晋升为教授. 1953 年,被选为苏联科学院通讯院士;1966—1970 年,任莫斯科数学会主席. 盖尔范德还被选为其他国家科学院的外籍院士和荣誉院士.

盖尔范德是巴拿赫代数赋范环理论的创始人之一. 从 1943 年起,他研究了对理论物理具有重大意义的连续群的酉表示,广义函数理论及其在微分方程中的应用,线性拓扑空间理论,光谱分析的逆问题和量子力学等问题. 他建立了一个专门研究数学方法在生物学中应用的学派. 他编著的关于线性代数、广义函数和变分法等方面的著作广为流传. 他的一些著作已被译成中文,如《一次代数学》(商务印书馆,1953)、《广义函数(Ⅰ,Ⅱ)》(与希洛夫(Шилов, Г. Е.)合著;科学出版社,1965)、《广义函数(Ⅲ)》(与维列金(Виленкин, Н. Я.)合著;科学出版社,1965)等.

戈德斯坦(Goldstine,Herman H.,1913—) 美国数学家. 生于芝加哥,1936 年获芝加哥大学博士学位. 1936—1939 年,留校任教. 后又任教于密歇根大学,1945 年任助理教授. 1946 年,到普林斯顿高等研究院,1950 年被选为长期成员. 1946—1958 年,任该研究院电子计算机设计主任助理. 1958 年,加入国际商用机器(IBM)公司 T. J. 沃森研究中心,1969 年成为 IBM 研究员. 还曾被选为美国全国科学院院士.

戈德斯坦的主要贡献在数字计算机的发展、计算机程序和数值分析等方面. 20 世纪 40 年代到 50 年代初,他是发明计算机的先驱小组成员,曾和冯·诺伊曼(von Neumann,J.)进行了长期合作. 他们在普林斯顿高等研究院提出了关于"电子计算机的设计与编码问题"的一系列报告,并出版了单行本. 报告中对计算机的组成部分作了定义,如指令系统、存贮管理、输入输出、控制等. 他们还于 1946—1950 年间,按报告设想制造出了机器,后来的计算机几乎都以其为原型. 同时,他们还为程序编制做出了基础性

贡献,并首先对计算机舍入误差进行了理论分析,通过大量的实际计算证明了大规模计算的可行性.他早期还曾从事过分析方面的研究.1985年,获美国国家科学奖章.著作有《从帕斯卡尔到冯·诺伊曼的计算机》(1972)、《十六世纪到十九世纪的数值分析史》(1977)等.

艾伦伯格(Eilenberg,Samuel,1913—1998) 美籍波兰数学家.生于波兰华沙,1934年、1936年先后获华沙大学硕士、博士学位.1939年到美国,1940—1946年任教于密歇根大学,在该校升至副教授.1946—1947年,任印第安那大学教授.1947年以后,任哥伦比亚大学教授,1981年退休.曾当选为美国全国科学院院士.1966—1967年,任美国数学会副主席.1958年,曾应邀在国际数学家大会上作了一小时报告.

艾伦伯格的主要贡献在代数拓扑和同调代数方面.1944年,他定义了奇异(上)同调群.1945年,他与斯廷罗德(Steenrod,N.E.)合作提出了同调群、上同调群满足的公理,统一了几种有关一般空间的同调理论,并证明了在多面体的情况下,满足公理的同调群、上同调群是惟一的.1947年,他和麦克莱恩(MacLane,S.)合作给出了上积还原定理.1948年,他和谢瓦莱(Chevalley,C.)合作把李群的上同调论代数简化,构成了李代数的上同调论.阻碍理论与映射同伦分类有着密切关系,他首先定义了阻碍上链与阻碍上同调类的概念.此外,艾伦伯格-西尔伯定理是奇异同调论的基础;艾伦柏格-穆尔谱序列是纤维空间的有效工具;他还与麦克莱恩一起建立了范畴理论.他和斯廷罗德合写的《代数拓扑学基础》(1952)一书,曾对代数拓扑的发展起过重要的推动作用.艾伦伯格因其对代数拓扑和同调代数的贡献,获1986年沃尔夫数学奖,并于1987年获美国数学会斯蒂尔奖.

莫斯托夫斯基(Mostowski,Andrzej,1913—1975) 波兰数学家.生于利沃夫,在加拿大讲学时因突发病卒于温哥华.1931—1936年,就学于华沙大学,1936年、1937年,先后到维也纳大学、苏黎世联邦工业大学学习,并获硕士学位;1938年,获华沙大学博士学位,后在气象研究所任职.德国纳粹占领期间,他曾在工厂工作.1942—1944年,为地下华沙大学授课;1945年,在克拉科夫任教.1946年,回华沙大学任教,1947年任副教授,1951年起任教授.1956年,被选为波兰科学院通讯院士,1963年成为院士.1973年,还被选为芬兰科学院院士.

莫斯托夫斯基主要研究数理逻辑、基础数学等.1939年,他在排列模型方面得到了重要结果.经他和斯派克的工作把排列模型改进成了FMS方法,与外模型法结合,可构成对称模型法.第二次世界大战期间,他独立于克林(Kleene,S.C.)导出了算术分层概念(工作到1947年才得以发表).1948年,他给出了量词的代数解释;1949年,给出的收缩引理是集合论中基本的元数学结果之一.1956年,他与人合作创造了构造模型的方法,该方法在模型论与基础数学的其他部分都有很多应用.他还与其他几位数学家一起开始了对算术的ω模型的研究,为二阶算术的β模型的研究做出了基础性贡献.他曾于1953年和1966年两次获国家奖,1972年还获得朱济柯夫斯基基础奖.著作有《形式化算术中语句不可判定》(1952)、《可构成集及应用》(1969)等.

伯　斯(Bers,Lipman,1914—1993) 美国数学家.生于拉脱维亚的里加,卒于纽约州新罗谢尔(New Rochelle).1938年获捷克斯洛伐克布拉格大学自然科学博士学位.1940年到美国,1942年,参加了布朗大学的战时应用数学研究与训练计划.1945—1949年,在锡拉丘兹大学任教,后在普林斯顿高等研究院工作2年.1951—1964年,任教于纽约大学;1964年成为哥伦比亚大学的数学教授,1972—1975年,任系主任,1984年退休.1963—1965年,任美国数学会副主席,1975—1977年,任主席.1961年,被选为美国艺术与科学学院院士;1964年,被选为美国全国科学院院士.

伯斯主要研究复函数论和椭圆型偏微分方程,在分析和应用数学的多个分支都有重要贡献.早期的数学工作在气体动力学,特别是解的存在性和惟一性方面,继而在偏微分方程理论方面发现了一类椭圆型方程的解为伪解析函数,并建立了这类函数的理论.他在拟保角映射的原始定义和贝尔特拉米方程的解析理论的联系方面起了决定性作用,使该理论有了坚实的基础,并发展成了复分析的有力工具.他和阿尔福斯(Ahlfors,L.V.)的关于可测黎曼映射定理的文章,导出了黎曼曲面的现代模理论.他们还以复解析形式解决了黎曼(Riemann,(G.F.)B.)的模问题,并把默比乌斯变换的克莱因不连续群理论置于运动背景下进行研究.他在20世纪70年代开始的工作,对几个数学领域的发展都有影响,其中包括了三维流形结构的研究.1975年,他曾获美国数学会斯蒂尔奖.著有《亚音速与超音速气体动力学的数学问题》(1958)、《偏微分方程》(1964;与人合著)等专著.

霍夫丁(Hoeffding,Wassily,1914—　) 美国统计学家.生于芬兰靠近俄国圣彼得堡的木斯塔马奇(Mustamäki).早年曾就学于柏林大学,1940年获博士学位.第二次世界大战期间,在柏林兼任编辑助理和保险统计科学研究助理.1946年赴美,先在纽约的哥伦比亚大学停留.1947年起,在查珀尔希尔的北加利福尼亚大学统计系任职,1956年任教

授，1979年退休. 1976年，被选为美国全国科学院院士. 1969年，曾任数理统计学会主席.

霍夫丁主要研究相关理论、U统计及渐近方法. 1947年，他建立了独立恒等分布随机向量，一般情况下等级相关系数τ的渐近正态性，接着又发现了证明τ的渐近正态性的新方法，并由此导致他于1948年引入了在非参数统计中有广泛应用的U统计量. 从他开始，对这种统计量的大样本性质进行了深入地研究，并应用于构造非参数性量的一致最小方差无偏估计，在这种估计的基础上检验非参数性总体中的有关假设.

卡　茨(Kac, Mark, 1914—1984)　美国数学家. 生于波兰克热梅涅茨，卒于美国加利福尼亚. 1937年获利沃夫的杨·卡西米尔大学博士学位. 1938年，到美国约翰斯·霍普金斯大学做研究工作. 1943年入美国籍. 1939—1961年，任教于康奈尔大学，1943年任助理教授，1947年起任教授. 1961—1981年，任洛克菲勒大学数学教授，后转到南加利福尼亚大学，直至去世. 他是美国全国科学院的院士、美国艺术与科学学院院士，还是荷兰皇家艺术与科学学院和挪威皇家科学院的院士. 1965—1966年，还曾任美国数学会副主席.

卡茨的数学工作包括概率论、数论和数学物理等. 1940年，他在欧拉求和公式方面曾与爱尔特希(Erdös, P.)合作取得一定成果. 第二次世界大战后，他开始研究连续函数空间上关于维纳测度的泛函分布. 他研究了一类泛函在做布朗运动的粒子所有轨道上的平均值的计算. 他证明了n次多项式，其系数为具有相同正态分布的均值为零的独立随机变量，有实根平均值$(2/\pi)\log n$，证明过程中引入了一个计算随机函数实根平均数的一般公式，现称为赖斯-卡茨公式. 他证明了可用连续函数空间的维纳测度与积分理论研究一大类算子的特征值的渐近性质并得到了位势理论中的新的公式，他还用维纳积分解微分方程. 1946年，他给出了埃伦弗斯特模型的完整解. 他还系统研究过一维气体模型，与人合作引入了球面模型，给出了解伊辛二维模型的组合方法. 晚年他主要研究一定程度上由算子谱确定算子本身的逆问题. 他与人合作研究了量子力学中反散射问题的离散方法，并首次给出了周期n体托塔问题的完整解. 他曾在1949年和1968年，两次获美国数学协会的查文尼特奖，1978年，获美国数学会和美国工业与应用数学会联合颁发的伯克霍夫应用数学奖.

宾(Bing, R. H., 1914—1986)　美国数学家. 生于得克萨斯奥克沃特，卒于奥斯汀. 1935年毕业于西南得克萨斯州立师范学院(现为西南得克萨斯州立大学)，1935—1942年任中学教师. 1938年、1945年，先后获得克萨斯大学数学教育硕士和博士学位. 1943—1947年，任教于得克萨斯大学. 1947—1973年，任麦迪逊威斯康星大学助理教授、教授，1958—1960年，任数学系主任. 1973—1985年，任得克萨斯大学教授，1973—1977年，任数学系主任. 1963—1964年，任美国数学协会主席；1977—1978年，任美国数学会主席. 1965年，被选为美国全国科学院院士，1970—1973年，任该科学院数学部主任，1977—1980年成为该科学院理事会成员.

宾的主要贡献在几何拓扑方面，特别是三维流形. 20世纪50年代中期，他给出了二维球在三维欧氏空间中的边逼近定理，并给出了三维欧氏空间的胞腔剖分结果不是流形的例子. 后来他又证明了这种非流形与直线的笛卡儿积是四维欧氏空间. 他的边逼近定理曾在后来的20多年中导出了广泛的工作，如二维流形在三维流形的驯顺与非驯顺嵌入，以及一些到高维的推广. 他还给了"宾收缩"的概念，这一方法在证明流形的一个类胞腔剖分能否得到流形方面很重要，还被弗里德曼(Фридман, A. A.)用于四维庞加莱猜想的证明. 在他的思想的影响下，美国形成了以他为首的拓扑学派，他们的工作加深了对流形的认识. 著作有《三维流形的几何拓扑》(1983).

加德纳(Gardner, Martin, 1914—　)　美国数学科普作家. 生于俄克拉何马州塔尔萨，1936年获芝加哥大学哲学学士学位. 毕业后他作过新闻记者、社会工作者和作家. 1941年应征入伍进了海军部队. 第二次世界大战结束后，他回芝加哥大学做哲学科学研究生学位的研究工作，后在《科学美国人》杂志做"数学游戏"的专栏作家，1981年退休.

加德纳作为数学科普作家，从1956年开始主持"数学游戏"专栏工作，长达25年之久，每月一期，直至退休. 此外，他还主持过"智力题"等专栏. 他的文章能激励读者的数学智力和数学思维的开拓，能给读者以惊奇，内容也丰富多彩，使人感到数学和数学思维方法十分有趣. 他在"数学游戏"专栏发表的文章已集成11本专辑出版. 除此之外，他还有多本著作，其中有《科学名词中的时尚与谬误》、《数学狂欢节》、《阿哈，灵机一动》(1978；中译本，上海科技出版社，1981)等. 另外，他还著有多本有关哲学、科学与文学的图书. 加德纳曾在1987年获美国数学会斯蒂尔(阐述著作)奖，1994年又获数学交流奖.

丹齐克(Dantzig, George Bernard, 1914—　)　美国数学家. 生于俄勒冈波特兰. 1936年获马里兰大学数学和物理学学士学位，1937年获密歇根大学硕士学位，1946年获伯克利加利福尼亚大学数学博士学位. 1937—1939年，任职于美国劳动统计局. 1941—1945年，任美国空军统计人员；1945—1952年，任美国空军司令部作战分析处主任数学家.

1952—1960 年，任兰德公司研究数学家. 1960—1966 年，任伯克利加利福尼亚大学运筹学中心主任和工程学教授. 1966 年，任斯坦福大学运筹学和计算机科学教授. 丹齐克还是数学规划学会的创建人之一，1966 年，任美国管理科学学会主席. 1971 年，被选为美国全国科学院院士.

丹齐克的主要贡献在线性规划方面. 1947 年，他发现了一大类规划问题可表述成满足一组线性方程的若干非负变量线性函数的最小化函数问题，从而建立了一般线性规划模型和解线性规划问题的单纯形法，奠定了数学规划作为一门学科的基石. 他是把线性规划发展成优化管理的有效方法的领先人物. 现在美国已把它应用到工业、商业、交通等管理的各个领域. 他所著的《线性规划和扩张》(1963)是该领域有重大影响的专著. 他曾于 1975 年获美国国家科学奖章，同年还获美国运筹学会和管理科学学会联合颁发的冯·诺伊曼理论奖，1976 年又获全国科学院应用数学与数值分析奖. 他的研究工作还涉及数理统计的相似域的存在性、运筹学、大范围最优化的数学理论等.

林尼克(Линник, Юрий Владимирович, 1915—1972) 苏联数学家. 生于基辅(Киев)，1938 年毕业于列宁格勒大学. 1940 年获博士学位，同年到苏联科学院数学研究所列宁格勒分所工作. 1944 年，受聘为列宁格勒大学教授. 1964 年，当选为苏联科学院院士.

林尼克主要研究数论、概率论和数理统计学. 他在这些学科中创立了一些有效的新方法：例如，对此在二次型和整数矩阵理论中的各态遍历方法；在 L 级数理论中的凝集方法，他还用这种方法解决了一系列典型的数论问题，取得了关于哥德巴赫问题的新进展. 在解析数论中，提出了离差法，对此在他的《二元加法问题中的离差法》(1961)中作了系统的论述. 他创立了"大筛法"，这是数论中的新方法. 在概率论与数理统计中，他研究了关于独立随机变量和非均匀马尔科夫链的极限定理，无限可除性规律和某些类型的复合假设检验理论等. 著作有《最小二乘法和处理观察数据的数理统计理论基础》(1958)、《概率规律的展开》(1960)和《解析数论的基本方法》(1962；合著)等.

利什内罗维奇(Lichnérowich, An - dré, 1915—) 法国数学家. 生地不详. 1930 年，获巴黎大学科学博士学位. 1933—1936 年，任教于巴黎高等师范学校. 1941—1949 年，任斯特拉斯堡大学教授；1949—1952 年，任巴黎大学教授；1952 年以后，任法兰西学院教授. 他还是巴黎科学院院士、意大利山猫科学院院士、西班牙马德里科学院院士，以及许多其他学术机构和学会的成员. 他对现代数学的许多分支都做出了贡献，特别在曲线和曲面的微分几何学、变换群和张量分析等方面. 在物理学中，他研究了相对论和电磁学中的课题. 著作有《万有引力和电磁学中的相对论》(1955)和《变换群的几何学》(1958)等.

怀特曼(Whiteman, Albert Leon, 1915—1995) 美国数学家. 生于宾夕法尼亚，卒于加利福尼亚. 早年就读于宾夕法尼亚大学，先后于 1936 年，1937 年，1940 年获学士、硕士、博士学位. 1940—1942 年，任教于哈佛大学. 1942—1946 年，到海军服役，任上尉军官. 1946 年，任教于普度大学，后又任海军部的数学工作人员. 1948—1956 年，在南加利福尼亚大学任助理教授、副教授，1956 年晋升为教授. 1980 年退休. 1957—1962 年，任《太平洋数学杂志》主编，还曾任《杜克数学杂志》和《数学分析及其应用杂志》副主编.

怀特曼主要研究数论与组合分析. 早期工作主要为数论中的恒等式及求和法. 第二次世界大战后，开始研究素数阶域元素的性质，求解了 10 阶、12 阶、16 阶及 20 阶的割圆方程，还证明了当 p 和 $q=p+2$ 都为素数幂时，存在 pq 元素的循环阿达马差集(斯普罗特也曾独立地证明了这一结果). 这一结果后来曾被广泛引用，并由此得到了很多组合设计和结构，以及一类新的三分之一码. 他还与人合作在用伽罗瓦理论构造阿达马矩阵方面得到了现已知的三类会议矩阵(Conference matrices)族中的一个，发现了 D 最佳设计中的第二个族，并在与差集相关的方面取得了突破性成果.

图　基(Tukey, John Wilder, 1915—2000) 美国统计学家、统计分析学家. 生于马萨诸塞新贝德福德，1937 年获布朗大学理学硕士学位，1938 年获普林斯顿大学文学硕士，1939 年又获普林斯顿大学数学博士学位. 1939—1941 年，在普林斯顿大学任教. 1941—1945 年，任炮火控制研究处副研究员. 1945—1958 年，任贝尔实验室技术员. 1958—1961 年，任储备通讯总部主任助理，1961 年后，任该总部的执行主任. 同时在 1941—1965 年间，他在普林斯顿大学从助理数学教授晋升为数学教授；1965 年后，又为该校统计学教授，1965—1970 年，任统计系主任. 图基还是美国全国科学院院士、美国艺术与科学学院院士. 英国皇家统计学会荣誉会员. 还曾获凯斯理工学院、布朗大学等多所大学的荣誉理学博士学位.

图基是 20 世纪 50 年代以来，统计方法发展的领袖人物之一. 研究工作涉及理论统计、应用统计和数理统计、点集拓扑、火力控制设备、军事分析等，其最大贡献是引入了时间序列谱估计的现代技术；他还曾在数据分析的哲学与原理、数据分析的方法等方面做了大量的研究工作. 1960 年，他发表的有关

稳健统计的工作,引起了很多统计学家的关注,对该领域有重要影响.另外,他和库利(Cooley,J.W.)于1965年提出的快速傅里叶变换(FFT)算法把运算次数大大缩减,极大地提高了计算工效.1965年,他获得美国统计协会的威尔克斯奖章,1973年获得美国国家科学奖章.他著有《拓扑收敛与一致性》(1940)、《位置的稳健估计,综述与进展》(1972)等专著.从1984年开始还陆续出版了《图基著作集》,到1991年已有7卷问世.

施瓦尔茨(Schwartz,Laurent,1915—) 法国数学家.生于巴黎,1937年毕业于巴黎高等师范学校.1943年获得博士学位.曾相继在法国国家科学研究中心、南锡大学和巴黎理学院工作.其数学研究受到了布尔巴基学派的影响.施瓦尔茨的主要贡献是创立了广义函数(分布)论.1945年,他在前人大量研究工作的基础上,建立了广义函数的完整理论.这一理论不仅提供了用于数学物理的形式方法的数学基础,而且给出了微分方程和傅里叶变换的新的有力工具,现已成为泛函分析的重要分支,也是研究现代数学特别是分析数学的有效方法.在偏微分方程和概率论方面,他也做出了贡献.专著有《分布论》(Ⅰ,1950;Ⅱ,1951)、《物理科学中的数学》(修订版,1966)等.由于他在现代分析方面的贡献,荣获了1950年的菲尔兹奖.

兰 金(Rankin,Robert Alexander,1915—2001) 英国数学家.生地不详.早年就学于剑桥大学克莱尔学院获理学博士学位.1940—1945年,就职于英国供给部.1945—1948年,任剑桥大学助理讲师,1948—1951年,任讲师;1951—1954年,任伯明翰大学纯粹数学数授.1954—1982年,任格拉斯哥大学数学教授,1982年退休为荣誉教授.在1947—1951年,还曾任《剑桥哲学会汇刊》数学部分主编.1957—1958年和1978—1979年,曾任爱丁堡数学会主席.1960—1963年,曾任爱丁堡皇家学会副主席.

兰金主要研究数论和函数论等,在数论与模形式方面有重要贡献.1939年,在《拉马努金函数$\tau(n)$及相似算术函数Ⅰ,Ⅱ》的文章中所引入的思想,在后来的数论及表示理论的研究中有重要影响.他还把他的方法应用到与现在称为两模形式的兰金积有关的L函数特殊值的研究.德利涅(Deligne,P.)在证明有限域上代数簇的韦伊猜想时,其中关键一步就是受兰金工作的启发而得到.有些数学家在关于模曲线上希格纳点的标准高度与一定的L级数导数的联系方面的工作都曾用他的方法作为基本工具.兰金曾获得爱丁堡皇家学会基恩奖;1987年,又获得伦敦数学会高级怀特海奖.著有《模群及其子群》(1969)、《模形式与函数》(1977)等多种专著.

狄克逊(Dixon,Wilfrid,Joseph,1915—) 美国统计学家.生于俄勒冈波特兰,1938年获俄勒冈州立学院学士学位,1939年获威斯康星大学数学硕士学位,1944年获普林斯顿大学数理统计博士学位.1942—1943年,任教于俄克拉何马大学.1944—1945年,在空军作运筹分析工作.1946—1952年,任俄勒冈大学数学副教授,1952—1955年,任教授.1955年,到洛杉矶加利福尼亚大学任生物统计教授,1967年,任生物数学教授,还曾任该校医学院生物数学系主任,1986年退休.

狄克逊主要研究与序列相关的数学理论、灵敏性试验、低效统计、计算机在医学研究中的应用等.1940年,他给出了检验同一总体两个样本假设H_0的不计分布检验,被称为狄克逊检验.他在洛杉矶加利福尼亚大学建立了生物统计处、生物数学系,对这方面的人才培养起了重要作用.1960年,他提供的统计咨询意见中包括了他对参数化计算机程序的思想,后来发展成了第一个一般性的统计软件包、生物医学计算机程序.他还在美国统计协会和国际统计学会中组织了统计计算部,在推动统计计算机计算方面起了重要作用.他于1992年获得美国统计协会的威尔克斯纪念奖章.他与人合作所著教材《统计分析引论》(1951)是一本非数学专业人员用的统计教材,影响较大,其英文版到1988年截止,已销售30万册,还曾被译成西班牙文、朝鲜文等多种文字出版,被引用达4000多次.

巴尔·希勒尔(Bar-Hillel,Yehoshua,1915—1975) 以色列数学家、逻辑学家.生于维也纳,经历不详.主要研究一般语言理论的逻辑、数学结构、数理语言学、自动翻译和定义理论等.他与德国数学家弗伦克尔(Fraenkel,A.A.)合作的专著《集合论基础》(1965)一书,强调指出了把数理逻辑的思想方法应用于数学基础的各个研究方向的重要性.著作还有《语言与信息》(1964)等.

哈尔莫斯(Halmos,Paul Richard,1916—) 美国数学家.生于匈牙利布达佩斯,早年就学于伊利诺伊大学,分别于1934年、1935年、1938年获学士、硕士、博士学位.1938—1939年,曾留校任教.1939—1942年,在普林斯顿高等研究院做研究工作.1942—1943年,回伊利诺伊大学任教.1943—1946年,任锡拉丘兹大学助理教授.1946年,任芝加哥大学助理教授,1956年晋升为教授.1961—1968年,任密歇根大学教授.1968—1969年,任夏威夷大学教授、系主任.1969年起,除了在1976—1978年,任圣巴巴拉加利福尼亚大学教授外,一直任印第安纳大学教授,直至1986年任圣克拉拉大学教授.1981—1982年,任美国数学会副主席.1977—1978年,任《美国数学会通报》编委主席.还曾任《美国数

学月刊》主编. 还是爱丁堡皇家学会会员、匈牙利科学院院士.

哈尔莫斯主要研究遍历理论、代数逻辑、希尔伯特空间算子、测度论等. 他和奈曼(Neyman,J.)在1949年严格证明了一个判定统计量充分性的方法,被称为因子分解定理,用它可以验证很多常见统计量的充分性. 1944年,他以测度论的定形化证明了适当地给予小摄动的任意力学系统是遍历的. 他和冯·诺伊曼(von Neumann,J.)给出了遍历理论中关于同构问题的第一定理:两个具有离散谱的遍历自同构 φ_1 和 φ_2 是空间同构的,当且仅当它们是谱同构的;而后者成立当且仅当诱导算子 T_1 和 T_2 有相同的特征值集. 在遍历理论中还有一个哈尔莫斯定理. 1983年,因其在有限向量空间、测度论、遍历理论及希尔伯特空间等方面对研究生教材的贡献,获美国数学会斯蒂尔奖,其中有些教材是第一次用英文系统地阐述. 这些教材对北美的数学教育有重要影响. 他还获美国数学协会查文尼特奖(1947)和福特奖(两次:1970,1977). 著作有《测度论》(1950;中译本,科学出版社,1958)、《遍历理论讲义》(1956)、《有限维向量空间》(1958)、《希尔伯特空间与谱重度理论引论》(1957年第二版)、《希尔伯特空间问题》(1967)等.

科尔钦(Kolchin,Ellis Robert,1916—1991) 美国数学家. 生于美国纽约,卒于纽约. 早年就学于哥伦比亚大学,1937年获学士学位,1941年获博士学位. 1941—1942年,在普林斯顿高等研究院做研究工作. 1946年起,任教于哥比亚大学,1946—1958年,为讲师、副教授,1958年晋升为教授,1963—1968年,任数学系主任,1986年退休,为荣誉教授. 还曾是美国艺术与科学学院院士.

科尔钦主要研究微分代数与代数群. 所谓微分代数就是用代数方法研究代数微分方程,由科尔钦的导师里特(Ritt,J. F.)建立,由科尔钦发展的一个领域. 他用现代代数几何的风格加上求导算子重新提炼了该理论. 他第一次对常微分方程发展了微分体的伽罗瓦理论. 这样非微分代数的有限伽罗瓦群为有限维代数群所代替,从而开创了任意域上的代数群的一般理论. 现在该领域有李-科尔钦定理. 此理论后经谢瓦莱(Chevalley,C.)、博雷尔(Borel,A.)做了进一步完善. 科尔钦早期曾集中于研究可解群,其工作与通过附加代数函数、整数、整数指数的可解性的微分模拟有关. 他除了把代数几何和代数群理论的基础推广到微分代数外,还研究了图埃-西格尔-罗特定理的微分模拟,即要求用有理函数逼近一个有理系数代数微分方程的解,并取得了重要成果. 他还曾在哥伦比亚大学主持了25年的讨论班. 著作有《微分代数与代数群》(1973)、《微分代数群》(1985)等.

仙　农(Shannon,Claude Elwood,1916—2001)美国数学家. 生于密歇根的盖劳德,1936年毕业于密歇根大学,1940年获马萨诸塞理工学院数学硕士和博士学位. 1940—1941年,在普林斯顿大学做研究工作. 1941—1972年,任职于贝尔电话实验室. 1957年起,还任马萨诸塞理工学院通讯科学与数学教授,1978年退休. 1956年,被选为美国全国科学院院士;1985年,被选为美国工程科学院院士. 仙农还是荷兰皇家艺术与科学学院、爱尔兰皇家科学院的院士,伦敦皇家学会会员.

仙农的贡献在于创立了信息论,并把布尔代数应用到开关回路理论. 他在贝尔实验室任职时,对"通讯"、"信息"等概念从数学上和工程上进行了系统研究. 在他于1948年发表的"通讯的数学理论"一文中,创立了通讯系统中信息传输的数学理论,现称为仙农信息论,已成为涉及通讯、语言等多方面问题的重要数学领域. 他把原来属于经典热力学的熵这一重要概念引入了他的理论,并讨论了熵的一些重要特性. 他还给出了随机编码法,把概率运算应用到语言. 1938年,他对符号逻辑的两个"接触值"与电路中的0与1二进制值之间的关系进行了研究,并创造了后来广泛用于表示计算机信息量的单位"比特"(即bit). 仙农因其在信息论方面的工作曾多次获奖,其中有1955年获富兰克林研究所巴兰坦奖章;1966年获美国电气与电子工程师学会(IEEE)荣誉奖章,同年还获美国国家科学奖章;1985年获日本京都基础科学奖,同年还获听觉工程学会金质奖章. 他还是获马奎斯名录有限公司成就奖的五个美国人之一. 1994年,他又获国际控制协会维纳世纪奖章. 著作有《自动机研究》(1956).

弗勒利希(Fröhlich,Albrecht,1916—　) 英国数学家. 生于德国,在英国布里斯托尔大学接受高等教育,1948年获学士学位,1951年获博士学位. 1950—1952年,任莱斯特大学学院数学助理讲师,1952—1955年,任数学讲师. 1955—1962年,任伦敦大学女王学院纯粹数学高级讲师,1962—1981年,任纯粹数学教授,在此期间的1971—1981年,还任数学系主任,1981年退休. 1982年起,任伦敦大学帝国学院高级研究员. 1982—1984年,任剑桥大学鲁宾逊学院研究员,1984年起,为退休研究员. 1976年,被选为伦敦皇家学会会员;1982年,成为海德堡科学院通讯院士.

弗勒利希在代数数论方面有重要贡献. 他的研究工作包括两类幂零伽罗瓦群、阿贝尔域的类群、亏格理论、二次型与正交表示,以及局部朗兰兹理论等. 他最重要的贡献是给出了现称之为算术伽罗瓦模理论的一套理论,揭示并发展了被称为阿廷根数

的解析不变量与确定伽罗瓦群整群环上数域的伽罗瓦扩张整数环的结构这一纯粹算术问题间的关系.虽有希尔伯特(Hilbert,D.)和诺特(Noether,E.)的早期工作,但这一理论主要是由于他的关于驯顺的H_8扩张方面的工作而确立的.在此基础上,他发展了一般理论,并在这过程中引入了一套新的思想与技巧.他曾于1976年获伦敦数学会高级贝威克奖,1992年又获德·摩根奖章.著有《形式群》(1968)、《代数整数的模结构》(1983)、《类群与埃尔米特模》(1984)等专著.

西　蒙(Simon,Herbert Alexander,1916—　)美国经济学家、数学家.生于威斯康星州密尔沃基.1936年,获芝加哥大学政治学士学位,做了几年研究工作后,又重返芝加哥大学学习.1943年获政治学博士学位,并留校任教.1946年,任芝加哥大学政治学系主任.1949—1965年,任卡内基-梅隆大学管理与心理学教授,1965年,任计算机科学与心理学教授.1967年,被选为美国全国科学院院士,也是美国艺术与科学学院院士.1984年,曾主持过美国数学会的吉布斯讲座.

西蒙曾于1978年因在经济组织内部决策理论方面的先驱性工作获诺贝尔经济科学纪念奖.除了社会科学方面的研究外,他曾致力于密切自然科学与社会科学关系方面的研究.他曾研究信息处理心理学、认知过程的计算机模拟、组织理论、人工智能和决策论等.在1947年出版的《管理行为》和后来出版的《人的模型》(1957)和《组织》(1958)中,系统地阐述了他的组织决策理论.他把商行看作为物质的、个人和社会因素为了共同目的自愿地由通讯网络组成的一个自适应系统.他认为人类的行为和认识性质即为信息处理和解决问题.后来西蒙主要集中于人工智能与计算机科学的研究.他开辟了决策过程的经验假设检验的领域.他还在计量经济学、哲学、管理科学与运筹学、统计学等学科领域做出了贡献.另外,他还于1969年获美国心理学协会杰出科学贡献奖,1975年获美国计算机协会图灵奖,1986年获美国国家科学奖章.他出版的著作有《新的管理决策科学》(1960)、《发现模型》(1977)、《思维模型》(1979)等.

莫斯特勒(Mosteller,Frederick,1916—　)美国统计学家、教育家.生于西弗吉尼亚的克拉克斯堡,早年曾就学于卡内基-梅隆大学.1942年获普林斯顿大学硕士学位,1946年获博士学位.1942—1944年,留校任教,1944—1946年,在该校做研究工作.1946年起,任教于哈佛大学,1951年任美国数理统计教授;1957—1959年、1975—1977年,任统计系主任;1977—1981年,任生物统计系主任;1981年起,任公共卫生与管理系主任.1974—1975年,任美国数理统计学会主席;1962—1964年,任美国统计协会副主席,1967年任主席.他还是美国艺术与科学学院、美国全国科学院院士,英国皇家统计学会荣誉会员.

莫斯特勒的研究工作主要在理论与应用统计领域.他在统计学在其他许多领域的应用方面有突出贡献,其中包括在社会与卫生科学、心理学、教育、质量控制,以及历史学等领域的应用.他的工作为基础科学的研究与应用创造了联系.他在心理计量学中的成对比较法、学习理论等方面都有重要的研究成果.在他与人合著的《学习随机模型》(1955)一书中,给出了学习理论中的一个线性模型.另外他在动力传递消耗测试、数论等方面也有贡献.他曾于1971年获美国统计协会杰出统计学家奖,1978年获评估研究学学会米达尔奖,1979年获应用社会学委员会拉扎斯弗尔德奖,1986年获美国统计协会威尔克斯奖章,1987年获弗希尔奖.他著作较多,他单独或与人合作撰写的著作已近50种,其中有《临床医学中的生物统计学》(1983)和《统计与公共政策》(1977)等.

芬　尼(Finney,David John,1917—　)英国统计学家.生于柴郡沃灵顿,1934年入剑桥大学读数学与统计,后随费希尔(Fishey,R. A.)在伦敦大学高尔顿实验室学习了一年,获硕士学位.1939年,被聘为罗特姆德实验站的统计助理.1945—1954年,任牛津大学设计与科学实验讲师.1954年,成为阿伯丁大学高级讲师,1963年,成为统计学教授.1966—1984年,任爱丁堡大学统计教授.1954—1984年,任农业研究委员会统计单位主任.1970—1974年,任英国大学计算机委员会和研究委员会主席.1964—1965年,任英国生物统计学会主席.1973—1974年,任英国皇家统计学会主席.1987—1988年,任国际统计学会研究中心主任.1955年,被选为英国皇家学会和爱丁堡皇家学会会员.1978年成为第二等高级英帝国勋爵士.

芬尼的工作涉及统计在生物学方面的应用及实验设计.1946年,他在实验设计方面提出了部分实施法,即在保证能估计全部主效应和少数一部分低阶交互作用的前提下,只挑选一部分水平组合做实验,忽略一部分低阶和全部高阶交互作用.这样可大大减少实验次数.他曾长期从事农业、生物和药物等方面的统计分析工作,对防治农业虫灾及有害植物的出现、对药物的安全性分析等有重要贡献.他还曾获韦尔登纪念奖和马丁尼奖.著有《概率单位分析》(1947)、《生物试验中的统计方法》(1952)、《农业中的统计科学引论》(1953)、《实验设计及其统计基础》(1955)、《数学家用统计学》(1968)、《生物学家用统计学》(1980)等多种专著.

希洛夫(Шилов, Георгий Евгеньевич, 1917—1975) 苏联数学家.生于伊万诺沃(Иваново),1938年毕业于莫斯科大学.1945—1950年,在莫斯科大学工作.1951年获物理数学博士学位.1951—1954年,在基辅大学工作,1952年晋升为教授.1954年以后,返回莫斯科大学工作.希洛夫的主要贡献在函数论、泛函分析、微分方程和代数等方面.他的许多论著是与盖尔范德(Гельфанд, И. М.)合作完成的.他在可换巴拿赫赋范环理论、广义函数、偏微分方程论等方面的研究具有重要意义.在经典分析、傅里叶环数、几何学、数学史和数学方法论等方面,也做出了一定的贡献.希洛夫的著作有《广义函数》(合作)、《向量分析讲义》、《最小二乘法》等.

卡普兰斯基(Kaplansky, Irving, 1917—) 美国数学家.生于加拿大多伦多.1938年获多伦多大学硕士学位,1941年获哈佛大学博士学位,后留校任教.1944年,参加设在哥伦比亚大学的国防研究委员会应用数学小组,从事应用数学研究.1945—1969年,任教于芝加哥大学,在该校升为教授,并在1962—1967年担任数学系主任.1984年后,任伯克利数学科学研究所所长.1975年,任美国数学会副主席,1985—1986年,任主席.1964年,被选为美国艺术与科学学院院士,1966年,被选为美国全国科学院院士.

卡普兰斯基的主要研究兴趣在交换代数领域,早期工作曾涉及数论、统计、组合论、对策论等.他曾证明如果除环满足任意多项式恒等式,则其中心是有限维的.他还用多项式恒等式证明了每一个有限生成的代数的代数是有限维的.1958年,他给出了任意环上的射影模是可数生成模的直和的结论.他和沃菲尔德(Warfield, R. B.)等找到了能从整体上讨论混合群的方法,从而开创了该领域研究的新局面.他还研究了一类特殊的 C^* 代数,即不可约的 * 表示只由紧算子组成,这时的 C^* 代数称为 CCR 代数,基本定理是 CCR 代数的结构空间是第二类型的.他兴趣广泛,他的工作对很多数学分支都有影响,特别是代数和泛函分析.1989年,获美国数学会斯蒂尔奖.著作有《无限阿贝尔群》(1954)、《微分代数引论》(1957)和《交换环》(1970)等.

赛尔伯格(Selberg, Atle, 1917—) 美国数学家.生于挪威朗厄松,1943年获奥斯陆大学数学博士学位.1942—1947年,留校做研究工作.1947年移居美国,先在普林斯顿高等研究院任职,1948—1949年,任锡拉丘兹大学副教授.1949年,又回到了普林斯顿高等研究院,1951年晋升为教授.赛尔伯格还被选为美国艺术与科学学院院士,并且还是挪威科学院、瑞典皇家科学院院士.

赛尔伯格的贡献主要在数论、离散群和自守型等领域.他的早期工作主要在黎曼 ζ 函数理论方面,证明了 ζ 函数在临界线上的非平凡零点有正密性.1947年,他给出了赛尔伯格筛法,该方法简单,便于应用,用它可得到筛法函数的一个较好的上界.现在赛尔伯格筛法已成为解析数论的基本工具.1949年,他和爱尔特希(Erdös, P.)首次给出了素数定理的一个十分初等的证明,赛尔伯格不等式在该证明中起了基础性作用.1956年,他在自守函数方面引入了一个重要的迹公式,从而推广了古典的泊松公式,并可用以计算自守函数空间的维数和赫克算子的迹等.这一工作促使人们注意了酉表示与自守形式理论以及数论的联系,并引起了在这方面的研究工作.他还定义了伴随不连续群的赛尔伯格 ζ 函数,同时又引入了弱对称黎曼空间.他还开创了格的算术性质的研究.他和其他学者还提出了一个著名的猜想:秩大于2的任一半单李群的不可约格都是算术的.这一猜想1978年被马库利斯所证实赛尔伯格1950年获菲尔兹奖,1985年获沃尔夫数学奖.

罗森菲尔德(Розенфельд, Борис Абрамович, 1917—) 苏联数学家、数学史家.生于圣彼得堡,1939年毕业于莫斯科大学.1947年获博士学位.以后在阿塞拜疆大学工作.1955年以后在莫斯科工作.1964年,任苏联科学院自然科学和技术史研究所研究员.罗森菲尔德早年研究复数和超复数代数上的几何及应用,后转向数学史,对中世纪中东和近东国家的数学史和自然科学史进行了大量研究.他还将卡西(al-Kāshī)的《算术之钥》和《圆周论》从阿拉伯文译为俄文出版.

岩沢健吉(Iwaasawa, Kenkichi, 1917—) 日本数学家.现在美国工作.主要贡献在近世代数、代数拓扑、数论、泛函分析和微分几何等方面.他在嘉当(Cartan, É.)工作的基础上建立了基本的半单群的岩沢分解,现已成为研究半单李群的基本工具.这些工作把用拓扑群的性质来刻画李群的希尔伯特第五问题的研究推进了一步.他还引进了代数数域的几种函数,并用调和分析的方法研究其性质.在局部域中,他研究了关于正规剩余符号的显式公式.还研究了全序格论,并取得了一定的成果.著作有《代数函数论》(1952)等.

萨维奇(Savage, Leonard Jicmmie, 1917—1971) 美国数理统计学家.生于密歇根底特律,卒于康涅狄格纽黑文.毕业于密歇根大学数学系.1943年到哥伦比亚大学统计研究组工作,后曾任教于芝加哥大学,1960年转到密歇根大学任教,1964年到耶鲁大学任教,直至去世.

萨维奇对概率论、统计基础和贝叶斯统计都有重要贡献.20世纪40年代后期到50年代初的统计学主要由费希尔(Fishey, R. A.)的工作和决策论思

想所支配，虽然很实用，但尚缺乏一般的基础理论.他把公理结构从应用和概率的角度进行扩大、演算，从而为统计学提供了基础，导出了一些新的概念.他证明了对不确定性的满意的描述是概率，价值在于应用，最好的决策是使期望的应用最大.他提出了一些新的概念，构造了现通常称为的贝叶斯统计.在比较两个样本的非参数方法方面他还给出了萨维奇检验.他对为使赢得一定的钱的概率最大而选择赌注的研究，丰富了随机过程方面的结果.萨维奇著有《统计推断基础》(1962)、《如果必要如何赌博：随机过程不等式》(1965；与人合著).1981年，美国统计协会和数理统计学会出版了他的文集《萨维奇著作选》.

莱　曼(Lehmann，Erich L.，1917—　)　美国数理统计学家.生于法国斯特拉斯堡，1940年移居美国.1942年、1946年，分别获伯克利加利福尼亚大学数学硕士和博士学位.毕业后一直在该校任教，1954年升为教授.1953—1955年，任美国《数理统计年刊》主编.1996年，任美国数理统计学会主席.1975年，被选为美国艺术与科学学院院士，1978年，被选为美国全国科学院院士.

莱曼主要从事假计检验、估计理论、非参数统计等研究.他曾于1947年提出了极小完全族的概念，并用于假设检验的研究.极小完全族后来成了决策论的两个基本概念之一.1950年，他和布莱克韦尔(Blackwell，D. H.)等人提出了寻找基于充分性与完全性概念的一致最小方差无偏估计的方法.他把完全性的概念从拉奥(Rao，C. R.)等人建立的理论中分离了出来，并阐述了其一般性理论.他在非参数技术方面也有较有影响的工作.在参数秩检验的幂方面给出了莱曼交错方法，使秩检验幂的计算大大简便.他长期从事统计科学方面的教学，对统计人才培养彼有见解，他指导过50多名博士研究生，最多时同时指导10位.他个人或与人合作撰写的著作有《检验统计假设》(1959)、《点估计理论》(1983)、《概率与统计的基本概念》(第二版，1970)、《以秩为基础的非参数统计方法》(1975)等.

希格曼(Higman，Graham，1917—　)　英国数学家.生地不详.早年就读于牛津大学，获硕士学位.1940—1946年，曾任职于气象部门.1946—1955年，任曼彻斯特大学讲师.1955年起，任教于牛津大学，1955—1960年，任高级讲师；1958—1960年，还任巴利奥尔学院高级研究员.1960—1984年，任纯粹数学教授、麦格达伦学院研究员，1984年退休任荣誉教授.1984—1986年，任美国伊利诺伊大学访问教授.1958年，被选为伦敦皇家学会会员.

希格曼主要研究群论，对无限群理论(包括其算法)和有限群理论都做出了基础性的贡献.1949年在与人合作的有关嵌入定理的文章中，不仅证明了每一个可数群可嵌入到二生成元群，而且还给出了一种具有广泛适用性的构造法.1951年，他证明了存在着有限生成的无限单群.后来他还给出了有限出现无限单群的无限族的显式构造.他在无限群方面的最佳工作是在1961年，证明了有限生成群可嵌入到有限出现群当且仅当其有一个定义关系的递归可数集.这一结果包括了很多重要推论，其中包括有限出现群的文字问题方面一般不可解的诺维科夫定理.后来他还与人合作给出了有限生成群有可解文字题的纯代数判别准则.在有限群方面，1956年，他与人合作在P长P可解群方面的文章，在1963年，费特(Feit，W.)和汤普森(Thomson，W.)证明所有奇数阶群都是可解的问题上起了重要作用.他在后来的有限单群研究的发展中曾起了重要作用.希格曼1974年获伦敦数学会德·摩根奖章，1979年获伦敦皇家学会西尔维斯特奖章.

卡里尔(Carrier，George Francis，1918—　)　美国应用数学家.生于缅因州米利诺克特(Millinocket).早年就读于康奈尔大学，1939年获机械工程师学位，1944年获应用力学博士学位.1946—1952年，在布朗大学任教，从工程学助理教授晋升到教授.后转到哈佛大学任机械工程教授，1972年起，任哈佛大学应用数学教授.1952年开始任《应用数学季刊》主编，1956—1986年，任《流体力学杂志》副主编.卡里尔还是美国全国科学院、美国工程科学院、美国艺术与科学学院的院士.

卡里尔在工程科学和地球物理问题的数学建模及用分析工具解这些问题等方面有着重要贡献.他在第二次世界大战后美国应用数学的发展中起了重要作用.在有关问题解决的文章中，他生动地证明了如何根据相似性、量纲、大小的考虑从有关复杂现象中取得相对重要的能量、力和响映等，以找出对现象的理解的核心资料，保存以后有用但非核心的资料，然后建立所考虑问题的简洁的数学模型和公式，用熟练的数技巧求出描述该现象的微分和积分方程的数值解，最后给出所得结果的清晰、透彻的解释.他还在应用数学方法方面广泛地传播了边界层方法、奇摄动法、渐近和复变量等方法.为此，他曾于1990年获得美国国家科学奖章.他的著作有《偏微分方程》(1976；与人合著)、《单复变量函数的理论与技巧》(1966；与人合著)等.

费因曼(Feynman，Richard Phillips，1918—1988)美国物理学家、数学家.生于纽约，1939年毕业于马萨诸塞理工学院，1942年获博士学位.1943—1945年，参与了洛斯-阿拉莫斯(Los Alamos)的原子弹研制工作.1945年后，任科内尔大学和加利福尼亚理工学院教授.1965年，获诺贝尔

物理学奖.在数学方面,费因曼主要研究量子力学中的轨线积分法.他还编著了一系列高等学校的教科书,在书中力图使用现代术语来叙述传统物理学.学术著作有《费因曼物理教程》(1963—1964)、《量子力学与轨线积分》(1966;合著)等.

里 斯(Rees,David,1918—) 英国数学家.生地不详.曾就学于剑桥大学悉尼·萨塞克斯学院.1945—1946年,任曼彻斯特大学助理讲师,1946—1949年,任讲师.1949—1958年,任剑桥大学讲师;1950—1958年,任剑桥唐宁学院研究员.1958—1983年,任埃克塞特大学教授,1983年退休为荣誉教授.1968年,被选为伦敦皇家学会会员,1977—1978年为理事会成员.

里斯主要研究代数,在交换诺特环理论和局部代数方面有重要贡献.他以代数的观点得到了一些平行于若干几何学家工作的结果.其中他在约化理论方面的贡献,现已是基础交换代数的重要概念之一.他引入了联合约化方法,并用以研究了泰尔耶混合重数,他还发展了理想分次理论,现已是该领域的基本性概念.他给出了强赋值定理,现被称为里斯赋值,它们是研究整理想闭包的有效工具.他发展了局部环度数函数理论,这还导致他在二维伪有理局部环以及与希尔伯特多项式系数的关系方面的深刻工作.里斯还给出了现被称为里斯环的理论,为简化关于一般理想的某些问题提供了巧妙的工具.他曾到日本和北美讲学,对那里的交换代数的发展有重要影响,因此他曾获得伦敦数学会1993年波伊亚奖.

安德森(Anderson,Theodore Wilbur,1918—) 美国数理统计学家.生于明尼阿波利斯.1939年获西北大学学士学位,1942年、1945年,前后获普林斯顿大学硕士和博士学位.1939—1943年,相继任教于西北大学和普林斯顿大学.1943—1946年,在普林斯顿高等研究院和芝加哥大学从事合作研究.1946—1967年,任教于哥伦比亚大学,在此期间的1946—1956年,先后为数理统计讲师、助理教授、副教授,1956年晋升为教授,1956—1960年、1964—1965年,还曾两次任数理统计系主任.1967年开始,任斯坦福大学统计学与经济学教授.安德森还是美国艺术与科学学院、美国全国科学院的院士.1963年,曾任美国数理统计学会主席;1971—1973年,曾任美国统计协会副主席.1950—1952年,任《数理统计年刊》主编;1980年起,任《时间序列分析杂志》副主编.

安德森在多元分析、时间序列分析、统计推断理论、计量经济学方法论等方面都有重要贡献.他发展了单个方程系数估计的有限信息极大似然法,并导致了二级最小二乘法的发展,后者常用于处理经济学中的问题.早期他还曾在对策论的方差模型的多元分量问题上有重要工作.他曾在因子分析研究方面做过大量工作,对非中心维夏特分布有重要成果.在时间序列分析领域,他在自回归模型方面也有重要成果.1948年,他证明了在回归情况下非独立分布,如果回归量方差是协方差矩阵或它的线性组合的特征向量,如有误差的话,最小二乘与加权最小二乘是一样的.该结果曾引起许多人的关注.在经济学领域的联立方程模型的估计量分布及其渐近展开等方面,他也有一系列的成果.安德森曾于1988年获美国统计协会威尔克斯纪念奖章.著作有《多元统计与分析引论》(第二版,1984)、《时间序列统计分析》(1971)、《数据统计分析引论》(1978)等.

怀特海(Whitehead,George William,1918—) 美国数学家.生于伊利诺伊州布卢明顿,早年就读于芝加哥大学.1937年获学士学位,1938年获硕士学位,1941年获博士学位.1941—1945年,任教于普度大学.1945—1947年,任教于普林斯顿大学.1947—1949年,任布朗大学助理教授和副教授.1949—1951年,任马萨诸塞理工学院助理教授.1951—1957年,任副教授;1957年起任教授.1985年退休.1954年,被选为美国艺术与科学学院院士,1972年,被选为美国全国科学院院士.1978—1979年任美国数学会副主席.

怀特海主要研究拓扑,特别是同伦论.20世纪80年代,他的研究兴趣集中于稳态同伦与广义同伦理论.他在球面同伦群方面有重要成果.在20世纪40年代,他第一次构造了稳态同伦群的怀特海同态或称J同态.他还定义了广义霍普夫同态.1946年,他定义了同伦群的怀特海乘法.在同伦运算方面,他也卓有成果.他的著作有《同伦论》(1965)、《近年同伦论的进展》(1970)、《同伦论基础》(1978)等.

鲁宾孙(Robinson,Abraham,1918—1974)美国数学家.生于德国沃尔登堡(后为波兰的瓦乌布日赫),在美国耶鲁大学任职时去世.14岁时随家移居巴勒斯坦,1939年毕业于希伯来大学,1946年获该校硕士学位.1957年获伦敦大学理学博士学位.1939—1940年,在法国巴黎大学学习.1940年,逃亡到英国参加自由法国空军;1941年,参加皇家军事机构从事应用数学研究.1946—1951年,任克兰菲尔德航空学院高级数学讲师.1951—1957年,任加拿大多伦多大学应用数学副教授、教授.1957—1962年,任希伯来大学数学教授.1962—1967年,任洛杉矶加利福尼亚大学数学与哲学教授.1967年,任耶鲁大学数学教授,直至去世.1968—1970年,任符号逻辑协会主席.1972年,被选为美国艺术与科学学院院士;1974年4月,被追认为美国全国科学院院士.

鲁宾孙既是一位应用数学家,又是一位纯粹数

学家. 1940—1950 年前后，在皇家军事机构和航空学院期间，主要从事与飞机机翼等有关的空气动力学与流体动力学的研究，并取得了重要成果. 1949 年，他以"代数系统的元数学"的论文获博士学位. 从 20 世纪 50 年代后期开始，他逐步把兴趣转移向数理逻辑、数论、数学哲学等领域. 他继塔尔斯基(Tarski，A.)之后对模型论做出了重要贡献. 他从代数中抽象出了模型完备性概念，并将此概念和模型论方法应用到代数问题的研究. 他还把模型与分析数学相结合创立了非标准分析方法. 1961 年前后，他利用非标准分析方法研究开发了完全理论 $Th(k)$ 的非标准模型，从而为古典数学分析中的"无穷小量"和"无穷大量"方法提供了严格的基础，并发展成了"非标准分析"新学科. 他还用模型论重新证明了阿廷(Artin，E.)等解决的希尔伯特第 17 问题. 在数学基础领域，他是形式主义的代表人物之一. 在数论领域，他对类域理论、丢番图几何都有基础性贡献. 1973 年，获荷兰数学会布劳威尔奖. 他著有《论代数的元数学》(1951)、《机翼理论》(1956；与人合著)、《模型论与代数元数学引论》(1963)、《数与理想》(1965)、《非标准分析》(1966)等 10 种学术专著.

萨马尔斯基(Самарский，Алексанрл Андреевич，1919—) 俄国数学家. 生于阿姆夫罗西耶夫卡(Амвросиевка)，1945 年毕业于莫斯科大学，是吉洪诺夫(Тихонов，А. Н.)的学生. 1948 年以后，他在莫斯科大学和苏联科学院应用数学研究所工作. 1957 年获博士学位. 1959 年晋升为教授. 1976 年，被选为苏联科学院院士. 萨马尔斯基主要研究偏微分方程和数值逼近方法. 他与吉洪诺夫共同研究了大量与数学物理有关的微分方程问题. 他们提出了解抛物型方程的所谓分数步长法，研究了柯西问题和拟线性系统，建立了解的分离原理等. 在数值近似法中，他制作了具光滑系数和具不连续系数的微分方程的齐次差分图表. 他的主要著作有《数学物理方程》(1951；与吉洪诺夫合著)和《差分图表理论》等.

波戈列洛夫(Погорелов，Алексей Васцльевич，1919—) 俄国数学家. 生于科罗查(Короча)，1937 年进入哈尔科夫大学数学系学习. 苏联卫国战争期间，在空军工程学院学习. 1945 年毕业后，到茹科夫斯基空气动力中心研究所工作. 1947 年，到哈尔科夫大学工作. 1948 年获物理数学博士学位. 1950 年成为教授. 1976 年，被选为苏联科学院院士.

波戈列洛夫主要研究大范围几何问题. 他完全解决了一般凸曲面的单值确定性问题，证明了关于等矩闭曲面的等式、全曲率为 2π 的无穷阶凸曲面的等式和在某些补充条件下曲率小于 2π 的无穷阶曲面等式. 他关于凸曲面的工作曾在 1950 年获苏联国家奖. 他还解决了任意黎曼空间中二维黎曼流形的浸入问题，这方面的主要成果包含在他的专著《黎曼空间中某些"大范围"几何问题》(1957)中. 1959 年，他又解决了一般凸曲面的无穷小变形问题. 1960 年以后，他转向研究力学问题，特别是非线性薄壳理论.

所罗门(Solomon，Herbert，1919—) 美国数理统计学家. 生于纽约城. 1940 年获纽约城市学院数学学士学位，1941 年获哥伦比亚大学硕士学位. 后参加哥伦比亚大学统计研究小组，从事与军事有关的研究工作. 1948—1952 年，任职于海军研究处. 1950 年获斯坦福大学统计学博士学位. 1952 年，任哥伦比亚大学副教授，1957 年晋升为教授；1959—1964 年、1985—1988 年，任统计系主任. 1964—1965 年，曾任美国数理统计学会主席.

所罗门主要从事统计方法与概率方法，以及它们在工程、行为科学与社会科学、市场、法律、教育、卫生和军事等方面的应用的研究. 1942 年，他曾与人合作推广了科克伦的方差相等性检验，1990 年，他又对此工作给出了新推广. 他在研究与军事和生物有关的问题时，研究了几何概率论，并对二次型分布、接受采样模型、连续采样等都有贡献. 他还结合市场及广告问题，研究了有关分类、聚集和因子分析等多元分析问题，并取得了一系列的成果. 他还对统计在法律方面的应用有所研究. 所罗门曾于 1975 年获美国统计协会的威尔克斯纪念奖章，1977 年获纽约城市学院的哈里斯奖章. 1978 年，还获得海军部的杰出公共服务奖章，表彰了他的研究工作及对海军部学术界基础研究的领导作用. 他个人或与人合作发表了 75 篇论文和多本有关统计与概率的著作.

布莱克韦尔(Blackwell，David Harold，1919—)美国数理统计学家. 生于伊利诺伊州逊特拉里. 早年就学于伊利诺伊大学，分别于 1938 年、1939 年、1941 年获学士、硕士、博士学位. 1942—1944 年，曾先后任教于索诺马大学和克拉克学院. 后曾在霍华德大学任统计学助理教授、副教授和教授. 1954 年起，任伯克利加利福尼亚大学统计与数学教授. 1968—1969 年，曾任美国数学会副主席. 1965 年，被选为美国全国科学院院士；1976 年，成为英国皇家统计学会荣誉会员.

布莱克韦尔主要研究概率与统计. 他曾为序列分析、统计决策理论、无限对策论、动态规划、信息论和马尔可夫链的应用提供了基础，并因此曾于 1986 年获美国统计学会主席委员会的费希尔奖. 在马尔可夫型决策过程方面，他曾严格地证明了霍华德(Howard，R. A.)提出的收益迭代法的收敛性. 1958 年，他曾与人合作证明了信息论基本定理的弱收敛定理. 他还曾于 1979 年获美国运筹学会的冯·诺伊曼理论奖. 著作有《博弈论与统计决策》(1954；与人

合著).

博克斯(Box,George E. P.,1919—) 美国数理统计学家.生于英格兰肯特郡格雷夫森德.早年就学于伦敦大学,分别于1947年、1952年获数理统计学士、博士学位,1961年又获理学博士学位.1948—1956年,任职于帝国化学工业公司.1956年赴美,1957—1959年,任美国普林斯顿大学统计技术研究组主任.1960年起,任威斯康星大学教授.他在该校创办了统计系,并任首届系主任.1978年,任美国统计协会主席;1979年,任美国数理统计学会主席.1974年,被选为美国艺术与科学学院院士;1985年,成为伦敦皇家学会会员.

博克斯主要研究试验设计、工业统计及相关的问题、随机过程等.第二次世界大战期间,曾从事与武器有关的化学分析、统计,导致他后来在化学反应、化工生产,以及工业统计中的有关研究,并取得了不少重要成果.1954年,他与人合作在反应曲面的探索中,为改进求得最优条件使用的逐次试验规划法,给出了下山法,大大改进了化学过程.该方法已成为求多变量函数的数值方法之一,还可用作为求方程组的近似解法.1964年,他和考克斯(Cox,D. R.)合作给出了参数估计的博克斯-考克斯变换.他与詹金斯(Jenkins,G. M.)在时间序列分析方面,给出了非常一般的线性过程类的模型,现在一类线性模型被统称为博克斯-詹金斯模型.他在随机变量分布方面也有重要成果.博克斯曾于1968年获美国质量控制学会休哈特奖章,1972年获美国统计协会威尔克斯纪念奖章.他与人合作著有《时间序列分析、预测与控制》(1970)、《统计分析中的贝叶斯推断》(1973)、《经验模型的建立与反应曲面》(1987)等专著.

施梅特雷尔(Schmertterer,Leopold,1919—) 奥地利数理统计学家.生于维也纳.1941年获维也纳大学博士学位,1949年获该校大学任教资格,1948年、1949年,先后任概率论和统计学讲师.1956年,任德国汉堡大学教授,1961年,回维也纳大学任数学教授.1971年,被选为奥地利科学院院士,1975—1983年,任该科学院总书记.1967—1971年,还曾任国际统计学会副主席.他还是德国自然科学院和柏林、萨克森、巴伐利亚等科学院院士.1958—1971年,任《概率论及相关领域杂念》首任主编.

施梅特雷尔主要研究概率论的数理统计,在随机逼近论及渐近估计等方面做了重要工作.1953年,他在随机逼近方面引入随机方差;1961年,为证明罗宾-门罗过程的概率收敛性,而发现了有关的弱条件;在渐近估计理论方面,引入了连续收敛性的概念以避免过分的“效能”.他在1956年出版的《数理统计引论》(1974年第三版用英文出版)教材中,发展了内曼-皮尔逊理论.该书在奥地利和德国等使用德语的国家曾产生了深远影响.施梅特雷尔早期的研究工作曾涉及数论、三角级数、级数理论、数理逻辑等.他在20世纪50年代中期,曾研究过现代风险理论和保险数学,并取得了一定成果.

鲁宾孙(Robinson,Julia Bowman,1919—1985) 美国女数学家.生于密苏里圣路易斯,因白血病卒于加利福尼亚的奥克兰.她在伯克利加利福尼亚大学接受高等教育,分别于1940年、1941年、1948年获学士、硕士和博士学位.1948—1976年,她一直在伯克利从事研究和教学工作,1976年,被聘为教授,1985年7月1日退休.1976年,被选为美国全国科学院第一位女数学家院士.1978年,被选为美国数学会副主席,1983年,当选为美国数学会的第一位女主席.

鲁宾孙把数论方法用到了解决数理逻辑问题上.1970年,她曾在解决希尔伯特第10问题方面做出了重要贡献,使该问题得到了否定的解决.1971年,她曾指出应改变问题的提法,“不是问一个给定的丢番图方程是否有解,而应问对于什么样的方程,已知道获得解的方法”.这一提法对丢番图方程的研究有重要意义.她还对丢番图方程从别的方面进行了研究,并推广了证明丢番图方程无解的古老的方法.1973年,她建立了基于14条公理的一个单变量函数的理论,并证明了该理论有一个满足皮亚诺公理的子理论.1974年,她和马季亚谢维奇(Matijacevic,Y.)合作给出了以有限数的量词对递归可枚举集的表示.早期她还曾在博弈论方面做过工作.

休伊特(Hewitt,Edwin,1920—) 美国数学家.生于华盛顿州埃弗里特(Everett),早年就学于哈佛大学.1942年获博士学位.1954年起,为华盛顿大学数学教授.休伊特的主要贡献在拓扑学、泛函分析和数论方面.在拓扑空间理论中,他首先引进了实紧空间同胚的条件.他还研究了幂等测度,改进了紧连通阿贝尔群的部分结果.著作有《抽象调和分析》(1970;合著)等.

巴切勒(Batchelor,George Keith,1920—) 英国应用数学家.生于澳大利亚墨尔本.1941年获墨尔本大学理学硕士学位;1948年获剑桥大学博士学位.1940—1944年,在墨尔本航空研究实验室任研究官员,研究空气动力学问题.1945年,在英国剑桥大学研究湍流.1948年起,任教于剑桥大学,1948—1959年任讲师,1959—1964年,任流体动力学高级讲师.1964—1983年,任应用数学教授,在此期间的1959—1983年,任应用数学与物理系主任.1983年退休.1957年,被选为伦敦皇家学会会员,1972年,被选为乌普萨拉皇家学会会员.他还是美国艺术与科学学院(1959)、波兰科学院(1974)、法国

科学院(1984)、奥地利科学院(1990)等外籍院士或外籍荣誉院士. 1956年,创办了《流体力学杂志》,并任主编多年.

巴切勒主要研究湍流,并做出了重要贡献. 1945—1953年间,他推广了泰勒(Taylor,B.)和柯尔莫哥洛夫(Колмогоров,A. H.)在这方面的工作,后来他研究了湍流中流体的某些非一致性的扩散和弥散,如飘浮或溶解在流体中的物体的集中. 他解释了若干观察到的集中的性质. 他确定了集中谱的小尺度极值的泛函形式. 后来他还研究了两种成分混合力学. 1986年,获罗马林琴科学院阿戈斯蒂内利奖; 1988年,获伦敦皇家学会皇家奖章等. 著作有《齐性湍流理论》(1953)、《流体动力学引论》(1967)等.

斯 坦(Steim,Charles,1920—) 美国统计学家. 生于纽约布鲁克林. 1940年获芝加哥大学学士学位. 1942—1946年,在美国空军服役. 1947年,获哥伦比亚大学博士学位. 1947—1949年,在伯克利加利福尼亚大学统计实验室工作. 1949—1950年,在巴黎庞加莱研究所做研究工作. 1951—1953年,任芝加哥大学副教授. 1953年起,任斯坦福大学的统计学教授,1985年退休.

斯坦在数理统计的点估计、序贯分析等方面做出了重要贡献. 1955年,他在小样本方面给出了一个反例,证明当维数大于2时,多维正态分布均值向量的样本均值在平方损失下不容许. 该结果曾引发了一系列的有关点估计的容许性的研究. 1946年,他和亨特(Hunt,G.)合作用群论方法给出了著名的亨特-斯坦不变性结果,现称为亨特-斯坦定理,是假设检验问题中给出极大极小不变检验存在性条件的一个定理.

费德雷尔(Federer,Herbert,1920—) 美国数学家. 生于奥地利维也纳,1938年移居美国,1944年入美国籍. 1942年获伯克利加利福尼亚大学数学与物理学士学位;1944年获该校数学博士学位. 1944—1945年服兵役. 1945年起,任教于布朗大学,1951年任教授,1985年退休. 1962年,成为美国艺术与科学学院院士;1975年,成为美国全国科学院院士.

费德雷尔主要贡献在几何测度论. 1960年,他与弗莱明(Fleming,W. P.)合作在《数学纪事》上发表的"法向与整流"一文是几何测度论形成的标志. 他们引入并研究了"整流",此概念现已成为高维几何变分法中常用的处理方法. 文章的重要成果是紧性定理和变形定理,给出了表示积分同调类极小整流的存在性,第一次得到了一般维数和余维的等周不等式. 此工作对同调理论也有重要意义. 文章引入的思想和方法使几何变分问题的研究发生了根本性的变化,并为进一步发展提供了基础. 因此两人曾共获1987年美国数学会斯蒂尔奖. 1947年,他证明了一般情形下的豪斯多夫测度. 1957年,对李普希茨映射证明了余面积公式. 1969年,他用测度论方法对以空间给定闭曲线为边界的极小曲面问题的存在性进行过研究,还给出过高斯-格林定理的测度理论的推广等. 著作有《几何测度论》(1969).

贝尔曼(Bellman,Richard,1920—1984) 美国数学家. 生于纽约克鲁布林,卒于圣莫尼卡. 1941年获克鲁布林学院学士学位;1943年获威斯康星大学硕士学位. 曾在洛斯阿拉莫斯理论物理处工作两年,可算作自己服兵役的一段时间. 1946年入普林斯顿大学,同年获博士学位,并留校任助理数学教授. 1948—1952年,任斯坦福大学副教授. 1953—1965年,受聘于兰德公司,后任南加利福尼亚大学数学、电子工程和医学教授,直至去世. 贝尔曼曾还是《数学分析及应用杂志》和《数理生物科学》两杂志的主编. 他还先后被选为美国艺术与科学学院(1975)、美国全国工程学院和美国全国科学院(1983)院士.

贝尔曼的主要贡献是建立了动态规划. 他在研究多阶段决策理论的过程中于1953年提出了动态规划,为处理变分之类确定性过程提供了新方法,也为马尔可夫决策过程和自适应过程等随机过程提供了基础. 动态规划现已被广泛地使用于控制理论和运筹学. 他自己曾用变分法和动态规划研究过控制系统问题,并对控制论和系统分析做出了重大贡献. 他还把不变量嵌入法用到了数学物理和数学分析的许多问题上. 他的数学工作还涉及时滞过程、分支过程和微积分不等式等. 贝尔曼主要研究数学在其他领域的应用,如动态规划在工程、管理和经济领域的应用;不变量嵌入法在放射传递方面的应用和对商业界的模拟等. 贝尔曼晚年的工作主要是数学在生物学和医学上的应用. 1970年,他获美国数学会和美国工业与应用数学会的首届维纳应用数学奖; 1976年,获美国管理科学学会与美国运筹学会的冯·诺伊曼理论奖;1977年,获IEEE动态规划金质奖章;1983年,获美国控制委员会的赫里脱奇(Heritage)奖章. 他一生论著颇多,发表论文600多篇,出版了《动态规划》(1957)等7本专著,以及其他类图书30余本.

考尔德伦(Calderón, Alberto - Pedro, 1920—1998) 美国数学家. 生于阿根廷门多萨,1947年毕业于布宜诺斯艾利斯大学工程学院. 1948年留校任教,但他出于对数学的兴趣,同年随在该校任访问教授的赞格蒙(Zygmund, A.)学习数学. 1950年获芝加哥大学数学博士学位. 1950—1953年,任俄亥俄州立大学访问副教授. 1954—1955年,在普林斯顿高等研究院做研究工作. 1955—1959年,任马萨绪塞理工学院副教授. 1959—1972年,任芝加哥大学

数学教授，并于1970—1972年任数学系主任. 1972年，又任马萨绪塞理工学院数学教授. 1975年，回芝加哥大学任数学教授，直至1985年退休. 现为荣誉教授. 1957年，被选为美国艺术与科学学院院士；1968年，被选为美国全国科学院院士. 他还是阿根廷科学院、拉丁美洲科学院、法国科学院、第三世界科学院等多所科学院的院士. 1966年，还曾应邀在国际数学家大会上作报告.

考尔德伦的贡献为在奇异积分算子方面的突破性工作及其在偏微分方程的重要问题上的应用，包括证明了柯西问题的惟一性、阿蒂亚-辛格指标定理等. 他和他的老师赞格蒙(Zygmund，A.)进行了长期的合作，发展了基础性的实变工具，建立了奇异积分算子运算，现称为伪微分运算，深刻地影响了偏微分方程理论的研究，并产生了几何与分析之间的相互作用. 他们建立了考尔德伦-赞格蒙非线性分析. 他自己给出了复插值法，而且还引入了考尔德伦恒等式(现称为连续小波变换)作为描述函数空间和它们近似性质的主要工具. 现已证明，这对数值分析和信号处理有重要意义. 他对分析的影响，很大一部分是因他创造了许多方法. 他的很多技巧方法已成为调和分析中的标准工具，且已进入非线性分析、偏微分方程、复分析以及信号处理和数值分析等领域. 他还和赞格蒙一起建立了一个强有力的分析学派. 1979年，他获美国数学会博歇纪念奖；1989年，获沃尔夫数学奖和美国数学会斯蒂尔奖. 此外，他还曾获得过阿根廷的多项有关奖.

拉　奥(Rao，Calympudi Radhakrishma，1920—　) 印度数理统计学家. 生于印度卡纳塔克邦. 1940年获安得拉大学硕士学位；1943年获加尔各答大学统计学硕士学位；1948年获剑桥大学博士学位. 1944年任职于印度统计研究所，1949年成为教授，1964年任研究训练院院长，1972年任研究所书记和所长. 1979年退休. 同年受聘到美国匹兹堡大学数理统计系任教授. 还曾任国际统计学会、数理统计学会、国际生物统计学会和印度计量经济学会主席. 1964年，任《印度统计学报》主编. 他还是伦敦皇家学会会员、美国艺术与科学学院外籍荣誉院士、印度国家科学院和印度科学院院士、第三世界科学院首批院士之一.

拉奥在估计、检验判别函数、数理统计在人类学领域的应用等数理统计的很多领域都做出了贡献. 他1945年和克拉默(Cramér，H.)于1946年分别独立地证明了克拉默-拉奥不等式，简称为C-R不等式. 它是求一致最小方差无偏估计的重要工具之一. 1945年，他在证明独立小样本的某性质时给出了拉奥-布莱克韦尔定理. 他还把微分几何的方法用到了估计，用费希尔信息度量定义了测地距，现称为拉奥距离，并用它在二阶有效估计方面得到了特征化极大似然估计量. 他在分类方面发展了多种方法，在特征化问题方面也做过重要成果. 早期他曾在剑桥人类学博物馆对来自北非杰贝勒莫亚的古人类骨骼进行过统计方面的研究，并与他人合作撰写了《杰贝勒莫亚古居民》(1955). 他已发表230多篇学术论文，著有9本专著，其中有《线性统计推断及其应用》(第二版，1973)《生物统计研究中的高级统计方法》(1952)、《数理统计的特征化问题》(1973；与人合著)等.

罗杰斯(Rogers，Claude Ambrose，1920—　) 英国数学家. 生地不详. 早年就学于伦敦大学学院、伦敦伯克贝克学院，分别于1941年、1949年、1952年获学士、博士和理学博士学位. 1940—1945年，曾任英国供给部实验官员. 1946—1954年，任伦敦大学学院讲师. 1954—1958年，任伯明翰大学纯粹数学教授. 1958—1986年，任伦敦大学学院数学教授，1986年退休. 1959年，被选为伦敦皇家学会会员，并曾于1966—1968年、1983—1984年任皇家学会理事会成员. 1970—1972年，还任伦敦数学会主席.

罗杰斯在数的几何和豪斯多夫测度方面有重要贡献. 他在凸与非凸柱的格常数、星形体可约性及自同构体内无限多格点存在性蕴涵、一般集关于格的逐次极小值、闵科夫斯基-赫劳卡(Hlaurka)定理，以及n齐次线性式的积等方面都有重要成果. 在相关的包装与覆盖领域，他用概率技巧及其他方法得到了数的几何中的较简单格的估计. 他在大维数相等球面包装的估计方面也有重要成果，他的专著《包装与覆盖》(1964)是一本标准性著作. 从1958年起，他的研究兴趣转向了豪斯多夫测度理论、解析集及一般凸体理论，并在这几方面都做过重要的工作，并解决了两个长期未解决的问题：与戴维斯(Davis，M. D.)合作构造了无限豪斯多夫测度不具有限非零测度子集的紧度量空间；还与他人合作证明了n维欧氏空间中凸体上线段方向具有σ有限$(n-2)$测度. 他曾于1977年获伦敦数学会德·摩根奖章；著作有《豪斯多夫测度》(1970).

扎　德(Zadeh，L. A.，1921—　) 美国数学家、系统理论专家. 生于苏联巴库. 早年攻读电气工程，1942年获伊朗德黑兰大学学士学位，1946年获美国马萨诸塞理工学院硕士学位，1949年获哥伦比亚大学博士学位. 1950年任哥伦比亚大学助理教授，1953年任副教授，1957年晋升为教授. 1959年，任伯克利加利福尼亚大学电机工程系教授，1963—1968年任系主任. 现为该校计算机科学系退休教授. 扎德还是日本生物医学模糊系统协会荣誉主席、美国工程科学院院士、《模糊集与系统》等杂志的主要编辑之一.

扎德的主要贡献为开创了模糊数学这一新领域的研究工作. 20世纪50年代,他主要从事与滤波器设计有关的预报理论和非线性滤波器设计等方面的研究. 1952年,他与拉格锡尼合作发展了采样数据系统的Z变换法. 在1965年前,他从事系统理论的研究,1965年开始,他转向了模糊集理论及其应用的研究. 在这方面他发表了近百篇论文,推动了该领域的发展,并在世界范围内促进了对它的研究. 后来他的主要研究兴趣为人工智能、专家系统、模糊逻辑和近似推理、自然语言、决策,以及信息分析等. 他曾获美国电气电子工程师学会的百年奖章和教育奖章. 1993年,因他对系统理论、决策分析、模糊理论及其在人工智能、语言学、逻辑、专家系统、神经网络等领域的应用诸方面的杰出贡献,而获得美国机械工程师学会奥尔邓伯格(Rufus Oldenberger)奖章. 他还著有《线性系统理论——状态空间法》(1963;与人合著)、《系统理论》(1969)、《模糊集和决策分析》(1984)等专著.

雷　尼(Rényi, Alfrèd, 1921—1970)　匈牙利数学家、统计学家. 生于布达佩斯,卒于布达佩斯. 早年就学于布达佩斯大学和塞格德大学,并获博士学位,后又获列宁格勒大学副博士学位. 1947年,任布达佩斯大学助理讲师. 1950年,匈牙利科学院数学研究所成立,不久他便任该所所长,并同时任布达佩斯大学概率论系主任,直到去世. 1949年,他成为匈牙利科学院通讯院士,1956年成为院士. 1965年,还当选为国际统计学会副主席.

雷尼对概率论、统计理论、信息论、数论和组合论等都有贡献. 他与其他学者合作在泊松分布、可测函数方面做了重要贡献,还在混合序列和分布代数领域做了工作. 1953年,他发表的有关顺序统计的文章中,建立了确定极限分布法则的方法. 1954年,在他出版的《概率论》一书中,他给出了他的以条件概率为基础的概率论公理基础,他还对几何概率等做过研究. 1965年,他在有关信息论的文章中,从多方面解释了熵的概念及其应用. 后来他又考虑了熵与统计物理、熵与数理统计等问题,并最终建立了搜索理论. 1947年,他对数论的大筛法做了改进,并用其方法估计了狄利克雷L函数的零点密度,证明了命题$\{1,b\}$,开辟了应用大筛法的新途径. 他还在复变解析函数、几何、牛顿逼近法、组合论、随机图等多个数学分支做了很多重要的工作. 雷尼于1949年获科苏特银奖,1956年又获科苏特金奖. 他一生发表论文约300篇,并用匈牙利文、德文出版了多种专著. 1979年,布达佩斯出版社又出版了《雷尼文选》.

鲁　丁(Rudin, Walter, 1921—　)　美国数学家. 生于奥地利的维也纳,1945年到了美国. 早年在杜克大学就读,1947年获学士和硕士学位,1949年获博士学位. 1949—1950年留校任教. 1950—1952年,任教于马萨诸塞理工学院. 1952—1959年,任教于罗切斯特大学,在此期间的1952—1955年为助理教授,1955—1957年为副教授,1957—1959年为教授. 1959—1991年,任麦迪逊威斯康星大学教授. 1991年退休为荣誉教授.

鲁丁主要研究数学分析,特别是抽象调和分析、傅里叶级数,以及单变量与多变量全纯函数. 1959年,他曾和人合作在测度代数方面证明了对于非离散局部紧阿贝尔群G及所有正则有界测度所组成的集$M(G)$,区间$[-1,1]$上的一个运算于$M(G)$内的测度的傅里叶-斯蒂尔杰斯变换的函数,可以开拓为整函数. 他在《群上的傅里叶分析》(1962)一书中,进一步给出了测度代数的一般阐述. 他还研究了群代数映射方面的有关定理. 他编著的《数学分析原理》(1953)和《实与复分析》(1966)是大学本科数学专业的很好的教科书,曾再版过多次,广泛地被美国和其他国家采用.《实与复分析》成功地把实分析与复分析组织在一本教科书中,有助于学生理解两者在分析中的地位. 总之,这两本教科书对美国和一些国家的大学数学教育有着重要的影响. 他还曾于1993年获美国数学会斯蒂尔奖. 除以上著作外,他还著有《多圆柱上的函数理论》(1969)等多种专著.

阿　鲁(Arrow, Kenneth Joseph, 1921—　)　美国数理经济学家. 生于纽约城,1940年获纽约市立学院社会学学士学位. 后来他改学数学,1941年获哥伦比亚大学数学硕士学位,再后来他又改学经济学. 1942—1946年,因战争到美军空军任气象官员. 1946年返回哥伦比亚大学继续深造,1951年获博士学位. 1973年又获理学博士学位. 1948—1949年,任芝加哥大学经济学助理教授. 1949—1950年,任斯坦福大学经济与统计助理教授,1950—1953年任副教授,1953—1968年任经济学、统计学、运筹学教授. 1968—1979年,任哈佛大学教授. 1980年起,又任斯坦福大学经济学教授予运筹学教授. 1955年,他曾任计量经济学会副主席,1956年任主席. 他还是美国全国科学院、美国艺术与科学学院、芬兰科学院、不列颠科学院等多所科学院的院士.

阿鲁曾于1972年因一般经济平衡理论和福利理论方面的先驱性工作获诺贝尔经济科学纪念奖. 他主要研究一般平衡理论、数学规划和福利经济等. 在他的博士论文中,他曾想建立若干条件,在这些条件下,从个人偏爱可合理而民主地得到集团的决策. 他得到了民主"社会福利函数"应满足的四个条件,但他证明了这四条是互相矛盾的,任何社会福利都不可能同时满足. 根据这一"不可能定理",他进一步证明了,按传统理解的那种多数裁定原则的民主决策,原则上是不可能的. 他曾和他人合作证明了在抽

象的、多市场经济模型的意义上，存在着竞争平衡. 这一工作不仅弥补了一般平衡理论的不足，还第一次把数学中的集合论和拓扑应用到了经济分析. 后来他还证明了，在引入了未来市场和保险以后，他们的模型可推广到不确定世界. 他对最优库存理论、市场模型的稳定分析、数学规划、统计决策理论都有重要贡献. 1986 年，他曾获冯·诺伊曼奖. 他还著有《库存与生产的数学理论研究》(1958)、《线性与非线性规划研究》(1958)、《一般竞争分析》(1971)、《应用经济学》(1985)等多种著作. 1983—1985 年，他又出版了 6 卷本的《论文集》.

阿米苏(Amitsur, Shimshon Avraham, 1921—1994) 以色列代数学家. 生于耶路撒冷老城，卒于耶路撒冷. 1931 年入希伯莱大学，因第二次世界大战和独立战争去服兵役几年，后又返校学习. 1946 年获硕士学位，1950 年获博士学位. 毕业后一直在希伯莱大学任教，并晋升了教授. 1969 年，阿米苏被选为以色列科学与文学院院士，并于 1980—1986 年任科学部主席.

阿米苏的主要贡献在满足多项式恒等式(PI)的环和可除代数方面. 他是 PI 理论的先驱者之一. 20 世纪 50 年代，他和列维茨基为 PI 理论打下了基础. 20 世纪 50 年代初，他提出了根的公理理论，促进了根理论的发展. 1971 年，他用 PI 理论构造出了一个不是交叉乘积的有限代数，发现了所有最大子域不是中心的伽罗瓦扩张的有限可除代数，解决了一个存在已久的问题. 1959 年，他给出了一个更一般的上同调理论，现称为阿米苏上同调，现已在东屋代数理论中被广泛应用. 1961 年，他还发现了一个蕴含素数定理的重要引理. 1964 年，他证明了德萨尔格射影平面满足某非平凡相交定理，当且仅当作为基础的可除代数在其中心上是有限维的，完成了德恩(Dehn, M. W.)42 年前开始的工作. 1971 年，他发现了用矩阵环检验莫里塔理论的方法，并因此激起了在固定子环理论和霍普夫代数方面的很多工作. 他还发现了新的交换环和东屋代数的一些新的性质. 他曾在以色列推行了阿米苏数学教学大纲，并为此花费了许多时间和精力. 1953 年，他获以色列精确科学奖；1969 年获罗思希尔德数学奖.

琼　斯(Jones, Douglas Samuel, 1922—　) 英国数学家. 生地不详. 1947 年获牛津大学科尔普斯·克里斯蒂学院硕士学位，1957 年获曼彻斯特大学理学博士学位. 1947—1948 年，在美国马萨诸塞理工学院做研究工作. 1948—1951 年，任曼彻斯特大学数学助理讲师，1951—1954 年任讲师. 1955 年，任纽约大学研究教授. 1955—1957 年，任曼彻斯特大学高级讲师. 1957—1964 年，任基里大学数学教授. 1965 年起，任邓迪大学数学教授. 1968 年，被选为伦敦皇家学会会员. 1988—1989 年，任英国数学及其应用学会主席. 还曾任《适用分析》等多种杂志副主编.

琼斯在绕射理论方面做出了重要贡献，特别是在电磁辐射、波导和声学方面的应用. 他把复分析和傅里叶分析等技巧，包括维纳-霍普夫技巧，融进了该理论，从而使以前认为不能解决的问题获得了解析解. 1986 年在"三个半无限平面的绕射"一文中，他给出了绕射域的解析结构及其渐近性质. 他在电磁波传播及广义函数理论方面的文章曾被应用数学家、物理学家和工程师们广为使用. 他曾于 1974 年获爱丁堡皇家学会基思奖，1981 年获国际无线电联合会范·德·波尔金质奖章，1987 年获伦敦数学会内勒应用数学奖. 他还著有《分析引论》(1969，1970；与人合著)、《电磁波传播方法》(1979)、《初等信息论》(1979)、《广义函数理论》(1982)、《微分方程与数理生物学》(1983；与人合著)、《汇编程序与 8086 微处理机》(1988)等近 10 种专著.

萨普利斯(Suppes, Patrick, 1922—　) 美国数学家、教育学家. 生于俄克拉何马州塔尔萨. 1943 年获芝加哥大学学士学位，1950 年获哥伦比亚大学哲学博士学位. 毕业后一直任职于斯坦福大学. 从 1959 年起，任该校社会科学院数学研究所所长. 1973—1974 年，任美国教育研究协会主席. 现任斯坦福大学哲学、统计、心理学、教育等学科教授. 美国全国科学院和美国艺术与科学学院院士.

萨普利斯在主观概率测量及在不确定情况下的应用、一般学习理论的发展和测试、自然语言的语义与句法、相互作用计算程序在教育中的使用等方面都做出了重要贡献. 他研制的程序在数学教学，特别是在学习数学证明中起了重要作用. 他在测量理论的公理化研究方面，首创了模型测量系统法. 在概率公理化方面也做了不少工作，并推导了一组适合量子力学的公理. 他在学习理论中两类学习模型的形式公理基础方面有重要贡献. 他对数学在社会科学中的应用，包括语言分析，有不少开创性工作，曾对自然语言语义分析的经典模型进行过研究，还首次用关系代数分析了英语量化语句. 他对相对论与量子力学、决策论、因果律、哲学与语言哲学都有研究，并均有成果. 1979 年，他曾出版了一本《帕特里克·萨普利斯》的书，十多位有关领域的学者在该书中介绍并评价了他的科学成就. 他曾于 1990 年获得美国国家科学奖章. 他出版的著作有《公理集合论》(1960；与人合著)、《测量基础，卷Ⅰ—Ⅲ》(1971，1989，1990；与人合著)、《因果的概率理论》(1970)等.

卡斯尔斯(Cassels, John William Scott, 1922—　) 英国数学家. 生地不详. 1943 年获爱丁堡大学

硕士学位，1949 年获剑桥大学博士学位. 同年成为剑桥大学三一学院研究员，并任曼彻斯特大学讲师. 1950 年起，任教于剑桥大学，开始任讲师，1963—1967 年任高级算术讲师，1967—1984 年任纯粹数学教授，在此期间的 1969—1984 年任纯粹数学与数理统计系主任，1984 年退休. 1963 年，被选为伦敦皇家学会会员；1981 年，被选为爱丁堡皇家学会会员. 1974—1978 年，任国际数学联盟副主席；1976—1978 年，任伦敦数学会主席.

卡斯尔斯主要研究数论，并做出了许多重要贡献. 1959—1964 年，他在椭圆曲线的算术方面做了一系列的重要研究工作，为人们理解所涉及的问题及进一步研究提供了重要基础. 他几乎对数论的每一分支都有贡献，其中包括丢番图逼近与数的几何，尤其是对二次型理论和平方和理论还有重要的创新. 他还把代数几何应用到了数论，对亏格 1 的代数曲线的有理点进行了重要研究. 他曾于 1973 年获伦敦皇家学会西尔维斯特奖章，1986 年获伦敦数学会德·摩根奖章. 他的著作有《丢番图逼近引论》(1957)、《数的几何引论》(1959)、《有理二次型》(1978)、《局部域》(1986)等.

卡拉比(Calabi，Eugenio，1923—　)　美国数学家. 生于意大利米兰的一个犹太家庭，1938 年逃离意大利，1939 年移居美国，1943 年入美国籍. 1946 年获马萨诸塞理工学院化工学士学位，1947 年获伊利诺伊大学数学硕士学位，1950 年获普林斯顿大学博士学位. 1951—1955 年，任路易斯安那州立大学助理教授. 1955 年，到明尼苏达大学任助理教授，1957 年升为副教授，1960 年晋升为教授. 1964 年起，任宾夕法尼亚大学教授，1971—1973 年，任数学系主任. 1982 年，被选为美国全国科学院院士.

卡拉比主要研究微分几何. 他在整微分几何，特别是在复微分几何方面有重要贡献. 他和埃克曼(Eckmann，B.)构造的紧非凯勒流形，现称为卡拉比-埃克曼流形，而他自己构造的 6 维几乎复流形对凯勒流形理论和几乎复结构的可积性理论都有重要意义，并且是具体理解这些理论的重要例子. 他与其他学者合作计算的紧局部埃尔米特对称空间的上同调群，在紧复流形的刚性理论中极为重要. 在计算中分析曲率的方法是后来的具非正曲率条件凯勒流形的强刚性理论的重要工具. 他曾构造了所有从标准 2 维球面到标准 n 维球面的调和映射. 他构造的复流形现称为 n 维球面的挠子(twistor)空间. 他在蒙日-安培方程和凯勒-爱因斯坦度量方面都有杰出贡献. 他曾以复蒙日-安培方程表征了零第一陈类情况的凯勒-爱因斯坦变量的的存在性. 他还证明了解的惟一性，并提出了存在性证明的提纲. 他还得到了实蒙日-安培方程三阶先验估计，其估计方法是复蒙日-安培方程三阶估计的基础. 近年来这一领域已取得了重大进展. 他还于 1991 年获美国数学会斯蒂尔奖.

博雷尔(Borel，Armand，1923—　)　瑞士-美国数学家. 生于瑞士拉绍德林. 1947 年毕业于瑞士联邦工学院；1952 年获巴黎大学博士学位. 曾任教于瑞士联邦工学院、美国芝加哥大学，1957 年起，任普林斯顿高等研究院教授. 他还曾任马萨诸塞理工学院、印度塔塔研究所、法国巴黎大学、日本东北大学等院所的访问教授. 1976 年，他被选为美国艺术与科学学院院士；1987 年，被选为美国全国科学院院士. 1962 年和 1974 年，两次应邀在国际数学家大会上作报告.

博雷尔主要研究李代数. 1950 年，他和塞尔(Serre，J. P.)证明了用紧纤维对欧氏空间进行纤维表示是不可能的. 他曾以"博雷尔结构"为基础重建了史密斯理论，而且和穆尔(Moore，G. H.)一起发展了一个新的同调理论. 1956 年发表的"线性代数群"是一篇经典性文献，它使线性代数群的发展发生了历史性转折. 他和谢瓦莱(Chevalley，C.)等人为线性代数群建立了一般理论. 他还解决了算术群中的共紧性(Co-Compactness)判别、商空间的紧化等问题. 在最近 20 多年中，他在算术群上同调及其应用和多种上同调理论方面，在自守型、实与 p 进李群的无限维表示理论方面做了许多工作. 现在代数群中有"博雷尔理论"、"博雷尔子群"和"博雷尔不动点定理"等. 博雷尔在 1978 年获荷兰数学会的布劳威尔奖章，1991 年获美国数学会斯蒂尔奖，1992 年获国际巴尔扎恩(Balzan，E.)基金会颁发的巴尔扎恩奖. 1983 年，斯普林格出版社还出版了他的三卷本文集.

沙法列维奇(Шафаревич，Игорь Ростиславович，1923—　)　苏联数学家. 生于日托米尔(Житомир). 早年在莫斯科学习，19 岁获副博士学位. 1943 年以后，一直在苏联科学院斯捷克洛夫数学研究所工作. 1953 年获博士学位，同年成为教授. 1958 年，被选为苏联科学院通讯院士. 沙法列维奇的主要贡献在代数学、代数几何学和代数数论方面. 1954 年，他证明了在任何代数数域上都存在无穷多个预先给定的伽罗瓦群分解的代数扩张，即所谓的伽罗瓦理论的逆问题. 他发现了对偶性问题的一般规律. 1962 年，他提出了所谓沙法列维奇猜想，这一猜想在 1983 年由德国年轻的数学家法尔廷斯(Faltings，G.)所证明.

莫斯托(Mostow，George Daniel，1923—　)　美国数学家. 生于波士顿. 1946 年、1948 年，先后获哈佛大学硕士和博士学位. 1947—1948 年，在普林斯顿大学任教. 1947—1949 年，为普林斯顿高等研

究院成员. 1949—1952 年,任锡拉丘兹大学助理教授. 1952—1961 年,任教于约翰斯·霍普金斯大学,1954—1956 年任副教授,1957 年起任教授. 1961 年开始任耶鲁大学教授,1971—1974 年任系主任. 1963—1967 年,还任《美国数学杂志》主编. 1987—1989 年,任美国数学会主席. 还曾被选为美国全国科学院和美国艺术与科学学院的院士.

莫斯托主要研究李群、代数群的离散子群等. 他 1973 年给出的所有半群 G(非 $SL_2(R)$)强刚性定理是现代数学中的一个重要成就. 他第一次给出了这方面的全局性结果. 1967 年,他引入了广义等变化映射的重要概念,并把它用到了双曲空间的边界. 他对复空间、四元空间和凯莱双曲空间的论述是研究这些空间的重要方法. 他还用到边界的广义映射和边界的组合结构讨论了高阶群. 因对他的方法的改进已导出了格的超刚性与度量空间上群作用的上循环的超刚性、比格更一般的离散子群强刚性等许多重要结果. 强刚性定理已被拓扑学家用到了双曲 3 维流形的研究. 他因在强刚性定理方面的贡献于 1993 年获美国数学会斯蒂尔奖.

凯 勒(Keller, Joseph Bishop, 1923—) 美国应用数学家. 生于新泽西州帕特森. 早年就学于纽约大学,分别于 1943 年、1946 年、1948 年获学士、硕士、博士学位. 毕业后留校任助理教授,1952 年成为研究副教授,1956 年晋升为教授,1967—1973 年任数学系主任. 1979 年起,任斯坦福大学数学与机械工程教授. 1969 年,被选为美国艺术与科学学院院士;1973 年,被选为美国全国科学院院士;1986 年,被选为伦敦皇家学会外籍会员. 1978—1979 年,曾任美国工业与应用数学会副主席. 他还是剑桥大学荣誉数学教授.

凯勒的研究领域包括应用数学、声学、电磁理论、流体动力学、几何光学等. 他对广泛应用问题中常微分方程和偏微分方程的摄动法的深刻理解并熟练地应用,为数学、科学和工程学做出了重要贡献,特别是在挠射的几何理论方面更有突出贡献. 他曾致力于解决挠射几何理论领域的波传播问题. 在他的这方面的理论中,给出了处理高频波传播问题的系统方法,并推导和解决了确定信号传播的射线、路径方程,以及描述能量如何沿这些射线传播的方程. 在他之前这方面仅有少量孤立的工作,并无一般理论可供使用. 他在奇异摄动理论和分歧理论方面有先驱性工作. 他曾引入了一个重要度量,后经马斯洛夫(Maslov, V. P.)推广到拉格朗日流形上的曲线,现称为凯勒-马斯洛夫指数. 后来他又把这指数推广到了有界域中的特征值问题上. 他在纽约大学时,曾主持了电磁理论、波传播、应用数学等讨论班长达 20 多年. 后来他又在斯坦福大学继续了这类讨论班,这对培养与训练应用数学工作者有着深远影响. 他曾获美国工业与应用数学会冯·卡曼奖、工程科学会埃林根奖、美国机械工程师学会季莫申科奖,还曾两次获美国数学协会福特奖. 1988 年,获美国国家科学奖章;1995 年,获美国全国科学院应用数学奖. 著作有《挠射的几何理论——变分及其应用》(1958)等.

格卢什科夫(Глушков, Виктор Михаилович, 1923—) 俄国数学家. 生于顿河罗斯托夫(Росгов - на - Дону),1948 年毕业于罗斯托夫大学. 1948—1956 年,在乌拉尔林学院工作. 1956 年以后,在乌克兰科学院工作,1962 年任该院副院长,同年兼任该院控制论研究所所长. 1956 年获物理数学博士学位,1957 年成为教授.

格卢什科夫的主要贡献在自动机理论、群论和拓扑代数方面. 他研究了具有极值条件的拓扑代数系统,阐明了不可换局部紧群的局部结构. 他和他的学生共同研究了自动机器和半群之间的关系,在自动机的代数理论方面做出了贡献. 他拟定了研究自动机的自动控制和自动控制系统的方法,还研究了用数字表示的自动机理论和小型电子计算机的结构,并得到了重要结果. 为计算机技术在生产和经济领域的应用开辟了广阔的道路. 著作有《数字自动机的构成》(1962)《控制论导引》(1964)等. 他和库洛什(Курош, А. Г.)合作的几篇论文被译成中文:《一般代数学·域和多项式论·线性代数·李群论》(1964,科学出版社).

博 特(Bott, Raoul, 1923—) 美国数学家. 生于匈牙利布达佩斯,在欧洲接受的早期教育. 1945 年和 1946 年,在麦吉尔(McGill)大学获工程学士和硕士学位;后转学数学. 1949 年获卡内基工学院理学博士学位. 1949—1951 年,在普林斯顿高等研究院做研究工作. 1951—1959 年,任教于密歇根大学,在此期间升为教授. 1959 年,转任哈佛大学数学教授至今. 还曾任英国牛津大学、印度塔塔研究所、法国高等科学研究所、德国波恩大学等访问教授. 1964 年,被选为美国全国科学院院士. 还曾获多所大学荣誉博士称号. 1975 年,当选为美国数学会副主席.

博特主要贡献在李群、拓扑和微分几何等领域,包括特征类、K 理论、指标理论,以及很多现代数学工具. 尤以 1959 年给出的"博特周期定理"最有名,该定理是 K 理论中的一个基本定理,是把莫尔斯理论应用于经典李群的稳态同伦计算的重要成果. 周期定理与他的其他有关工作现已成为拓扑 K 理论和椭圆算子指标理论的基石. 1967 年,他与阿蒂亚(Atiyah, M. F.)合作研究了群在椭圆微分算子上的作用,揭示了对微分算子的几何和拓扑的新理解. 他们还把等价的莫尔斯理论应用到对杨-米尔斯方程

的研究,在计算杨-米尔斯域的模空间的维数中起了重要作用,并促进了这方向的进一步发展.他还和米尔诺(Смирнов,В. И.)等合作证明了实数域上有限维(非结合)可除代数的维数,只能是1,2,4,8.他曾于1964年获美国数学会维布伦奖,1987年获美国国家科学奖章,1990年获美国数学会斯蒂尔奖.著作有《$K(x)$讲义》(1969)、《特征类与叶状结构讲义》(1972)等.

托　姆(Thom,René,1923—　)　法国数学家.生于蒙彼利埃(Monpelier).1946年毕业于高等师范学校,1951年获博士学位.曾主持英国沃里克大学数学研究所的工作多年.

托姆主要从事复变函数论及拓扑学的研究,以协边理论的创造闻名于世,并因此于1958年获菲尔兹奖.20世纪60年代以来,他致力于高维空间曲面的研究,用微分拓扑的方法分析曲面的奇点,并进行分类.从1968年开始,陆续发表文章论述"突变理论",1972年出版《构造稳定性和形态发生学》一书,一时风靡世界,成为"突变理论"的创始人.英国齐曼(Zeeman,E. C.)教授称"突变理论"是"数学界的一次智力革命——微积分之后最重要的发现".突变理论是处理不连续现象的有力的工具.它能解释诸如:胚胎学、人性学、医学、生态学、地质学、光学、激波、船舶稳定,以及囚犯骚动、战争爆发、市场崩溃等自然科学与社会科学中的大量问题.

基　弗(Kiefer,Jack Carl,1924—1981)　美国数理统计学家.生于辛辛那堤,卒于伯克利.早年就学于马萨诸塞理工学院,1948年获硕士学位.1952年获哥伦比亚大学数理统计博士学位.1951年到康奈尔大学任教,1959年任教授.1979年起,任伯克利加利福尼亚大学研究教授,一直至去世.1969—1970年,任数理统计学会主席.1962年,被选为美国艺术与科学院院士;1975年,被选为美国全国科学院院士.

基弗对数理统计的贡献主要在试验设计、决策论、序贯分析、非参数检验与相关的分析理论、多元分析等领域.在决策论方面,他在博士论文中曾建立了比瓦尔德(Wald,A.)于1950年所假设的更弱的正则性条件下的极大值存在性和容许方法.1952年,他和导师沃尔弗维茨(Wolfowitz,J.)合作在序贯分析方面给出了确定回归函数极小值或极大值点位置的基弗-沃尔弗维茨方法.他还与人合作分析研究了固定样本量方法是序贯方法中最优的那些情况.在用连续时间过程逼近离散时间过程等问题上也有重要工作.1960年,他又和导师合作在试验最优设计方面证明了基弗-沃尔弗维茨等价定理,即证明了试验最优设计中存在着的两个最优性判据,在逼近理论中可导出相同类的最优设计.他还在样本累积分布函数的渐近极大极小性质方面有重要成果.他还著有《决策论讲义》(1953)、《统计推断讲义》(1973年完稿;1984年正式出版)等多本专著.

辛　格(Singer,Isadore Manual,1924—　)　美国数学家.生于底特律.1950年获芝加哥大学博士学位.1950—1952年,任教于马萨诸塞理工学院.1952—1954年,任洛杉矶加利福尼亚大学助理教授.1954—1955年,任教于哥伦比亚大学.1955—1956年,在普林斯顿高等研究院做研究工作.1957年起,到马萨诸塞理工学院任教,1959年晋升为教授.1979年退休.同年,到伯克利加利福尼亚大学任数学教授.辛格还是美国全国科学院院士.1970—1971年,曾任美国数学会副主席.

辛格的主要贡献在微分几何方面,特别是有名的阿蒂亚-辛格指数定理.1963年,他和阿蒂亚(Atiyah,M. F.)合作推广了黎曼曲面理论中的希策布鲁赫(Hirzebruch,F. E. P.)-黎曼-罗赫公式,得到了更一般的指数定理.阿蒂亚-辛格指数定理统一了其他几个有名的经典定理,因而被誉为近代数学的重要成就之一.1968年,他们又把定理推广到了紧李群作用于流形、向量丛及椭圆算子上的某些情形.他还与人合作在完整群、无限伪群、拉普拉斯和赖德迈斯特挠率谱等方面做出过基础性贡献.晚年研究兴趣主要在数学与理论物理的关系上.1969年,曾获美国数学会博歇奖;1985年获美国国家科学奖章.著作有《基础拓扑与几何讲义》(1967;与人合著).

邓　肯(Dynkin,Eugene B.,1924—　)　又译作登金(Дынкин,Е. Б.),美籍俄国数学家.生于列宁格勒(现俄罗斯圣彼得堡).1948年获莫斯科大学博士学位,后留校任教,直至晋升为教授.1968—1976年,任苏联科学院高级研究员.1977年赴美国,任康奈尔大学数学教授.邓肯曾任莫斯科数学会副主席.还被选为美国全国科学院院士;1985年,又被选为美国艺术与科学学院院士,并曾多次应邀在国际数学家大会上作报告.

邓肯的主要贡献在李群和概率论领域,研究工作还涉及到最优控制、数理经济学的经济增长和平衡的概率模型等.在读大学时,他就用"考克斯特-邓肯图"描述了半单李代数的嘉当矩阵,并对其进行了分类.他还指出了素根系的合同是对应半单紧李代数同构的充分必要条件.20世纪50年代中期,其研究兴趣转到了随机过程,特别是马尔可夫过程,在这方面做过许多基础工作.1956年,他和学生一起表述并证明了强马尔可夫性(亨特(Hunt,G.)也独立地引入了此概念).他还和亨特相互独立地证明了某些到达时间的可测性.他发展了马尔可夫过程的半群理论,并用它们半群的生成元表征了这类过程,

1980年左右，他把量子域理论中的一个恒等式推广后变成了马尔可夫过程的占有时间与高斯随机域之间的重要关系式，并因此导出了一些新的研究. 近几年来，他在超过程理论方面取得了重要成果. 他还把某些非线性偏微分方程的解的解析性质与超过程的概率性质联系了起来. 1993年，他获美国数学会斯蒂尔奖；1951年，曾获莫斯科数学会奖励. 他的著作有《马尔可夫过程基础》(1959；中译本，科学出版社，1962)和《马尔可夫过程》(1963)等.

卡　林(Karlin，Samuel，1924—　) 美国数学家. 生于波兰约诺瓦. 1944年获伊利诺伊大学学士学位；1947年获普林斯顿大学博士学位. 后任教于加利福尼理工学院，1955年晋升为教授. 1956年起，任斯坦福大学数学与统计学教授. 他还是美国全国科学院和美国艺术与科学学院院士. 1978—1979年，曾任数理统计学会主席.

卡林在纯粹数学与应用数学的多个领域有重要贡献，包括泛函分析、对策论、全正性、逼近论、概率论与数理统计、数理经济学、数理生物学等. 20世纪50年代初，他从事算子理论、不动点定理、全正性、凸性与极值点理论、矩空间、积分方程及其他解析工具在对策论、运筹学、数理经济学中的应用的研究. 他在全正性的基础理论方面的研究及所给出的广泛应用，对该理论的发展有着重大影响. 他发现了全正性在统计决策中的作用及其在统计模型中普遍存在的现象，这些促使他在20世纪50年代发表了许多重要成果，其中包括有关统计检验类单调似然比和最优性质等. 他1968年出版的《全正性》一书，统一了全正性基本概念的表示，并给出了在分析、概率论、微分方程和微分不等式等方面的应用. 20世纪60年代和70年代，他在多项式序列和样条类、切贝切夫系统的全正性，以及后者在分析中的意义等进行了系统深入研究，并确立了切贝切夫系统在分析、插值与逼近论、矩空间的几何、不等式与广义凸域和统计试验设计中的作用. 20世纪80年代，他又把全正性推广到多元情况. 同时，他在随机过程的生死过程的表示、分类和极限定理，在不变与随机环境下的分支过程做了不少基础性工作. 在数理生物学方面，1970年到1979年间，他还与学生合作给出了多基因系统中选择的第一个数学表示式，工作还涉及到重新组合过程的新的表示及选择模型的分类. 总之，他在数理生物学领域有着广泛影响. 他曾获美国全国科学院应用数学奖，美国数学协会福特奖，美国运筹学会冯·诺伊曼理论奖. 1989年，还获美国国家科学奖章. 他的著作有《对策、划规和数理经济学中的数学方法和理论》(1959)、《非随机交配种群遗传模型的平衡行为》等多种.

考克斯(Cox，David Roxbee，1924—　) 英国数理统计学家. 生于伯明翰，毕业于剑桥大学圣约翰学院. 1944—1945年，在皇家空军工作. 1946—1950年，在利兹羊毛工业研究协会任职. 1949年获利兹大学博士学位. 1950—1955年，任剑桥大学助理讲师. 1956—1966年，任伦敦伯克贝克学院高级讲师及统计学教授. 1966—1988年，任伦敦帝国学院统计学教授. 1988年，任牛津纳菲尔德学院教授，1994年退休. 1973年，被选为伦敦皇家学会会员；1985年，被封为爵士. 1966—1991年，任《生物统计》杂志主编. 还曾任伯努利学会、皇家统计学会和国际统计学会主席.

考克斯主要研究条件推断、质量控制、试验设计等，早期研究过随机过程. 1955年，他给出了考克斯随机性检验. 1958年，他在二元数据分析问题上取得了重要成果，详细地推导了对规范型指数族中多余参数充分统计量的调节方法. 1972年，他在一般意义上表述了比例偶然模型(Proportional hazards models)，给出了比例偶然失败回归模型，简称为考克斯回归模型. 1974年，他与人合作给出了渐近似然理论向量多余参数的一般处理方法. 此外，他还在条件推断、降雨点过程等方面做出过重要贡献. 考克斯曾于1990年获凯特林奖和金质奖章. 他个人或与人合作已发表学术论文200余篇，出版了专著15本，其中有《试验规划》(1958)、《随机过程理论》(1965；与人合著)、《二元数据分析》(1970；与人合著)、《点过程》(1979；与人合著)、《残存数据分析》(1980；与人合著)等.

齐　曼(Zeeman，Erik Christopher，1925—　) 英国数学家. 生于英国. 获剑桥大学硕士、博士学位. 1955—1964年，任剑桥大学讲师. 1964—1988年，任沃里克大学数学研究中心教授、主任. 1988年起，任赫特福德学院院长. 1966年以后，任英国科学研究理事会高级研究员. 他还曾在美国普林斯顿高等研究院、法国巴黎高等科学研究所、美国加利福尼亚大学等多个研究机构和大学任访问教授. 1975年，被选为英国皇家学会会员；1991年，被封为爵士. 曾获法国斯特拉斯堡大学荣誉博士称号；1989年，成为剑桥大学荣誉研究员.

齐曼主要研究拓扑、动力系统及其在生物和社会科学中的应用. 1961年，他曾解决了广义庞加莱猜想，即n同伦球面与S^n同胚. 他还定义了与组合流形概念类似的"多流形"(Polymanifold)的概念. 1963年，他证明了如果$m-n\geqslant 3$，S^n到S^m的任何两个嵌入均合痕，因此S^n在S^m中不打结. 他后来研究并发展了突变理论及其应用. 为了阐述突变理论，他作为一个力学例子构造了齐曼机. 1982年，他曾获伦敦数学会高级怀特海奖；1988年，因其通过讲学、作品等促进了公众对科学和数学的理解而获英国皇

家学会法拉第奖.著作有《三维流形拓扑》(1962).

尼伦伯格(Nirenberg,Louis,1925—) 美国数学家.生于加拿大安大略省哈密尔顿.1945年获麦吉尔大学学士学位;1947年、1949年,先后获纽约大学硕士和博士学位.1945—1951年,留校做研究工作;1951—1957年,先后任助理教授和副教授,1957年以后任教授.1976—1977年,任美国数学会副主席.尼伦伯格还被选为美国全国科学院、美国艺术与科学学院院士和罗马林琴科学院、法国科学院、乌克兰科学院等院的外籍院士.1987年、1988年,先后被中国的南开大学、浙江大学授予荣誉教授.

尼伦伯格的贡献主要在线性和非线性偏微分方程及其在复分析和微分几何领域的应用等.他曾在整体微分几何领域解决了长期没有解决的 R^3 中正曲率曲面等距嵌入的外尔问题.他善于在分析领域中取得并应用先验估计,现有的加利亚尔多-尼伦伯格不等式就属这类成果,还有他和阿格蒙(Agmon,S.)、道格拉斯(Douglas,J.)于1959年给出的对线性椭圆算子一般边值问题的先验估计.1961年,他和约翰(John of Palermo)合作在研究椭圆型方程时,引入了有界平均振动空间,简称为BMO空间,现在调和分析中起着重要作用,他和纽兰德(Newlander,L.)关于几乎复结构的定理现已成为经典.1965年,他和科恩(Cohen,P.J.)引入了伪微分算子的概念,并首先对其做了系统研究.他对一般线性偏微分方程的可解性也有重要贡献.1959年,他曾获美国数学会博歇纪念奖;1982年获瑞典皇家科学院国际克雷福德奖;1994年获美国数学会斯蒂尔奖.著作有《非线性泛函分析中的问题》(1974).

塔 特(Tate,John,1925—) 美国数学家.生于美国明尼阿波利斯.1946年获哈佛大学学士学位;1950年获普林斯顿大学数学博士学位.1950—1954年,留普林斯顿大学任教.1954—1990年,任教于哈佛大学,1960年起任数学教授.1990年以后,任得克萨斯大学教授.塔特还被选为美国全国科学院和巴黎科学院院士,还曾于1962年和1970年两次应邀在国际数学家大会上作报告.

塔特主要研究代数、数论和代数几何,他的工作深刻地影响了这些领域的发展,1950年,他在博士论文中开创了在 L 函数研究中使用调和分析方法,对后来的很多数学活动有着重要影响.他的早期工作促进了群上同调和伽罗瓦上同调基础的发展.他和阿廷(Artin,E.)合作为类域理论提供了伽罗瓦上同调说明.1962年给出了数域上伽罗瓦同调对偶定理,1966年发表的"P 可除群"开创了以他名字命名的群的理论,这是第一次对局部域上伽罗瓦群的 P 进表示进行深刻的研究.1962—1966年,他还给出了有关代数闭链的塔特猜想.20世纪70年代初开始,他在代数 K 理论中的 $K2$ 方面取得了不少成果,并触及到了数域上 $K2$ 的实质,他在椭圆曲线和阿贝尔簇的 P 进单值化理论和现称为塔特曲线的理论方面有重要贡献.他曾于1956年获美国数学会柯尔数论奖,1995年获该学会斯蒂尔奖.他还与人合作著有《类域论》(1990年第二版)、《椭圆曲线上的有理点》(1992)等专著.

科 尔(Cole,Julian David,1925—) 美国应用数学家,生于纽约州布鲁克林.1944年获康奈尔大学学士学位;1946年、1949年,先后获加利福尼亚理工学院硕士和博士学位.1951—1959年,任加利福尼亚理工学院助理教授.1959—1969年,任航空学和应用数学教授.1969年,任洛杉矶加利福尼亚大学应用科学与工程学教授;1969—1976年任系主任;1976年任数学教授.后又任哈佛大学教授,现为伦斯勒工业学院应用数学教授.科尔还被选为美国全国科学院、美国全国工程科学院、美国艺术与科学学院院士.

科尔对应用数学和数值分析做出了重要贡献,他曾解决了应用数学领域的一些重要问题,并从解析与数值分析角度发展了新的数学方法.1949年,他在博士论文中引入了科尔-霍普夫变换,把伯格方程变换成了热方程,从而给出了方程的解.他在此领域的工作导出了粘性解的思想.他在奇摄动法方面也做出了重要贡献.他把极限过程展开、重叠区域和匹配等思想系统化后,应用到了许多问题上,其中如流体力学中低和高阶的雷诺(Reynolds)数流.他还引入并发展了多变量渐近展开法,还用李群理论发现了热方程的新的相似性解,在空气动力计算方面也有重要成果.他还曾研究过航空学和应用力学.他曾于1995年获美国全国科学院应用数学奖.著作有《应用数学中的摄动法》(1968);1981年,他又与人合作出版了此书的增扩版.

博尔强斯基(Болтянский,Владимир,Григорьевич,1925—) 俄国数学家.生于莫斯科.1948年,毕业于莫斯科大学.1951年,到苏联科学院数学研究所工作.1955年获博士学位.1956年以后,在苏联教育科学院工作,1959年成为教授.他在拓扑学和拓扑方法上得到了非常重要的结果,研究了与组合几何问题和希尔伯特第三问题相关的课题.在控制论方面,他深入探讨了最优控制问题,并论证了动态规划方法在最优控制理论中的应用.在常微分方程理论和数学教育方面也有一定贡献.他先后共发表学术论著220多篇(部),有些著作还被译成中文,如《图形的大小相等和组合相等》(1959)、《连续映射的和矢量场的同伦理论》(1958)等.

盖 林(Gehring,Frederick William,1925—) 美国数学家.生于密歇根的安阿勃(Amm Ar-

bor). 1946 年,毕业于密歇根大学,1949 年获硕士学位;1952 年获剑桥大学博士学位. 从 1956 年起,任教于密歇根大学,1956—1962 年,先后任助理教授和副教授,1962 年起任教授. 1973—1975 年、1977—1984 年,在该校任数学系主任. 1989 年,他还同时被选为美国全国科学院和美国艺术与科学学院院士,但数学家大会上作报告. 1963—1980 年,还任《杜克数学杂志》主编.

盖林主要研究复分析. 在高维欧氏空间的拟保角映射理论和几何函数理论方面取得了重要成果. 1961 年和 1962 年,他发展了 3 维拟共形映射理论,为该理论在高维的发展打下了基础. 他关于 H^+ 的拟共形自映射边值的定理曾引出一个反问题,即是否每一个$\overline{R^2}$的拟共形自映射都有延拓为$\overline{R^3}$的一个拟共形自映射. 1965 年,他解决了这个问题,高维情况尚待解决. 他的研究结果至今尚属最好. 1977 年,他又给出了一个单通域是以拟圆为边界的充分必要条件,这结果是拟共形映射与函数复变论中经典想法有着密切关系的表现之一. 1973 年,他证明了对所有 n,R^n 中的拟共形映射的一阶编导数,对某些 $p>n$,局部地在 L^p 中. 他与其学生合作在研究作用在高维球上的麦比乌斯变换的离散群时,不仅发现了这种群的几何不等式,而且还引入了收敛群的新概念,在拓扑和高维流形的研究中有着重要应用.

克鲁斯卡尔(Kruskal,Martin D. ,1925—) 美国数学家. 生于纽约市. 先获芝加哥大学学士学位,1952 年又获纽约大学博士学位. 毕业后一直在普林斯顿大学任职,先在等离子体物理实验室工作(当时称为马特霍恩项目),于 1956—1964 年,提升为马特霍恩项目理论部副主任;1959 年,成为普林斯顿大学天文学讲师,1961 年晋升为天体物理科学教授. 1968—1988 年成为该校应用数学计划主任,1979 年被聘为数学教授. 1989 年退休为荣誉教授. 后又到拉特格斯大学任希尔伯特教授席位. 1980 年,被选为美国全国科学院院士;1983 年,又被选为美国艺术与科学学院院士.

克鲁斯卡尔对纯粹数学与应用数学都做出了重要贡献,是 20 世纪 70 年代以来非线性领域的领袖人物. 他在等离子体物理、相对论、渐近分析、扰动理论、超实数、微分方程等领域的数学理论方面都有创新的工作或发现. 由于他发现了非线性偏微分方程的孤立子解,以及他对这些方程的控制方程的分析,改变了人们对这些方程的认识. 他早期主要研究理论等离子体物理,并帮助发展了一些这方面的基本原理,发现了控制方程新的精确解,以及分析等离子波稳定性的重要数学方程. 他和奥伯曼(Oberman)引入了"KO"稳定性原理. 1960 年,他具体证明了在合适的坐标下,广义相对论方程的某些解的奇点并没有奇异地离开原点,这种坐标被相对论学家称为"克鲁斯卡尔坐标". 这种坐标允许在黑洞的领域中进行有效的分析. 1963 年,他系统地使用并发展了渐近分析和扰动理论,给出了一组应用于定极限情况问题的原则. 他通过渐近分析理解了环状形态中磁力线,现在称之为混沌的性质. 他研究了超实数,给出了生成超实数的直接构造法,使其接近于能作为基本量进行运算. 他于 1993 年获美国国家科学奖章,还于 1983 年获美国物理学会数学物理海涅曼奖,1989 年又获美国全国科学院应用数学与数值分析奖.

罗 特(Roth,Klaus Friedrich,1925—) 德国-英国数学家. 生于布雷斯劳,9 岁时,全家移居英国. 1948 年获伦敦大学硕士学位,1950 年获得博士学位. 1961 年,受聘为伦敦大学教授. 罗特主要从事数论研究. 1955 年,他发表了《对于代数数的有理逼近》,将创立了 30 多年的图埃-西格尔定理,发展为图埃-西格尔-罗特定理,推进了有关问题的进展,一举赢得了 1958 年度国际数学家大会颁发的菲尔兹奖.

巴布斯卡(Babuska,Ivo Milan,1926—) 美国数学家. 生于捷克布拉格. 1945 年在布拉格工业大学学习民用工程学,1949 年毕业. 1951 年获技术科学博士学位. 1949—1952 年,在数学研究所(捷克斯洛伐克科学院数学研究所的前身)学习数学,1955 年获数学博士学位. 1960 年又获数学与物理学博士学位. 1952—1968 年,任职于捷克斯洛伐克科学院数学研究所. 1968 年,赴美任马里兰大学流体力学与应用数学研究所访问教授. 1969 年成为研究教授,后又任该校数学系教授. 他还创办了《数学的应用》杂志.

巴布斯卡的贡献主要在数值分析和工程计算方面. 特别是在有限元素方法的可靠性、有限元素误差估计的一般理论框架的发展,以及 p 和 h-p 有限元素法等方面. 他和布雷齐(Brezzi,F.)相互独立地发现了有限元素法的基本稳定条件,现称为巴布斯卡-布雷齐条件. 它是有限元素法发展和评估的基础,他曾发起组织并领导了一个"有限元素广场"("Finite Element Circus"),即有限元素界每两年一次的非正式会议,已持续 20 多年. 他的工作受工程计算需要的影响较大,且很多成果已应用到工程计算的实践中. 他还研究了偏微分方程的数值解和应用数学. 他曾于 1968 年获捷克斯洛伐克国家数学奖,1976 年获洪堡高级美国科学家奖,1992 年获布拉格大学查尔斯奖章,1994 年获美国数学会和美国工业与应用数学会联合颁发的伯克霍夫奖. 他还撰写了《有限元分析》(1991;与人合著)等多种著作.

拉克斯(Lax,Peter D. ,1926—) 美国数学

家. 生于匈牙利布达佩斯,1941 年随家迁居美国. 1949 年获纽约大学博士学位,并留校任教. 1951 年任助理教授,1958 年晋升为教授. 1963 年起,任职于纽约大学库朗数学科学研究所,于 1972—1980 年,任研究所所长. 1970—1971 年,任美国数学会副主席,1979—1980 年任主席. 他还被选为美国全国科学院院士、法国科学院和俄国科学院外籍通讯院士.

拉克斯的主要贡献在偏微分方程理论及其应用、泛函分析等方面,工作还涉及到数值分析与计算、散射理论、流体动力学等领域. 他在奇异积分算子和有振荡的初始数值问题方面的先驱性工作,曾是伪微分算子和傅里叶积分算子理论进一步发展的标志. 他和菲利普斯(Phillips, Ralph S.)在散射理论领域的工作,给出了对该领域的新认识,并导出了调和分析的新成果. 他曾是非线性双曲方程和激波理论方面的领袖人物. 在这些方面,他对双曲守恒系统黎曼问题有贡献,给出了拉克斯激波条件的表述,研究过激波理论中熵的作用等,并引起了后续研究工作. 1968 年,他指出了 Kdv 方程可写成 $L_t=[A,L]$形式,其中$[A,L]=AL-LA$,L 和 A 为与位势 u 有关的线性常微分算子. 这一方程在孤立子理论中有着重要作用,并被称为拉克斯方程,L 和 A 称为拉克斯对. 他的工作主要围绕逼近和偏微分方程理论,但对很多学科领域的发展都有重要影响. 拉克斯-文德罗夫方案是解双曲系统问题的现代计算方法论的基石,拉克斯等价定理在线性偏微分方程组的适定初值问题方面起了重要作用. 他还在逼近稳定性方面有许多重要结果. 他曾在计算和应用数学的发展中起过重要的领导作用. 因拉克斯对数学的突出贡献,他曾多次获奖,其中包括 1974 年美国数学协会的查文尼特奖、1975 年美国数学会和美国工业与应用数学会联合颁发的维纳数学奖、1983 年美国全国科学院应用数学与数值分析奖、1986 年颁发的美国国家科学奖章、1987 年颁发的沃尔夫数学奖、1992 年获美国数学会颁发的斯蒂尔奖等.

奥斯兰德(Auslander, Maurice, 1926—1994) 美国数学家. 生于纽约布鲁克林,卒于挪威的特隆赫姆. 早年就读于哥伦比亚大学,1949 年获学士学位,1954 年获博士学位. 1953—1954 年,任教于芝加哥大学. 1954—1956 年,任教于密歇根大学. 1956—1957 年,在普林斯顿高等研究院工作. 1957 年起,任教于布兰代斯大学,在此期间的 1960—1961 年和 1976—1978 年,任系主任,1963 年任数学教授. 奥斯兰德还曾在巴黎、伦敦、挪威特隆赫姆等地任访问教职. 还是美国艺术与科学学院院士、挪威皇家科学与文学学会会员. 1986 年,还曾应邀在国际数学家大会上作报告.

奥斯兰德主要研究同调、结合与交换代数. 他对同调方法曾有系统研究. 在这方面曾与人合作有一系列成果,并组织和表述了接近代数几何观点的同调交换代数. 他与人合作对正则环作为有限同调环的表征,以及正则局部环的析因性等现在已是经典性成果. 1961 年左右,他开始对非分歧正则局部环上的模进行了长达 30 年的研究. 他和他的合作者给出了诺特环研究的新方法,还提出了交换环上可分代数的一般理论. 1970 年左右,他在阿廷代数模理论方面取得了重要成果,他用同调方法以自同态代数表征了有限型,现称为奥斯兰德代数. 他首次证明了左阿廷环的布饶尔-恩罗尔猜想,并以非有限生成的不可分解模的存在性表征了无限型. 他和其他学者的工作谱写了阿廷代数表示理论的新的一页. 从 1970 年初开始,他还和赖特(Wright, F. B.)合作发展了殆裂序列,以及与此相关的不可约映射,现称为奥斯兰德-赖特序列,现在已在表示理论和分类定理方面起着重要作用. 他还第一个给出了斜坡理论的模理论构造. 1980 年左右,他又与人合作发展了反变有限子范畴理论,并与赖特合作建立了它与斜坡理论的联系. 著作有《群、环、模》(1974).

布雷默曼(Bremermann, Hans - Joachin, 1926—1996) 美国数学家. 生于德国不来梅,卒于伯克利. 1951 年获明斯特大学博士学位,后留校任教一年. 1952—1953 年,任美国斯坦福大学研究副教授. 1953—1955 年,任明斯特大学助理教授. 1955—1957 年和 1958—1959 年,在普林斯顿高等研究院做数学和物理研究. 1957—1958 年,任教于华盛顿大学. 1959 年,到伯克利加利福尼亚大学,1959—1966 年任副教授,1966 年起,任数学和生物物理教授. 1991 年退休. 还曾在《数理生物学杂志》创建时任主编.

布雷默曼主要研究复分析及数理生物学. 1954 年,他曾解决了一般情况的列维问题(大约同时,日本的冈洁(Oka, K.)也解决了这一问题),即拟凸域是否一定是全纯域. 博赫纳(Bochner, S.)和马丁(Martin, W. T.)在 1948 年曾猜想:多重次调和函数是按在取上确界并取序列的下降极限的自然解析运算下是一个闭的正锥的方式生成的. 1956 年,他对于正规域证明了这一猜想,并证明对一般区域猜想不成立. 1959 年,他推广了狄利克雷问题. 他是首先用双体和连续遗传密码、随机变异、选择、性别重新组合这些现代遗传算法基础,发展并分析演变进化遗传探索法的人之一,并首先建议用这种算法来训练多层次视察控制. 这种算法现已为神经网络训练普遍采用. 他的研究工作还涉及复杂性理论、神经网络、模糊逻辑、最优化理论、模式识别等方面.

塞　尔(Serre, Jean - Pierre, 1926—　) 法国数学家. 生于巴日(Bages). 早年在巴黎高等师范学

校学习，受到布尔巴基学派的影响. 1950 年获博士学位，不久任巴黎大学教授. 后来到美国普林斯顿工作，被选为美国艺术与科学学院院士. 20 世纪 70 年代，当选为巴黎科学院院士. 1982 年，任国际数学联盟执委会副主席. 20 世纪 50 年代初期，塞尔在嘉当(Cartan，H.)的指导下对代数拓扑学做出了重要贡献. 他发展了纤维丛的概念，引进了一般纤维空间概念. 他利用谱序列等工具解决了纤维、底空间、全空间的同调关系问题，并由此证明了同伦论中最重要的一般结果. 他还把代数拓扑学的方法应用于代数学研究，在同调代数方面做了许多工作. 1954 年以后，塞尔转向代数几何学和复解析几何学领域，为把黎曼-罗赫定理推广到高维代数簇做出了重要工作. 1955 年，他发表了《凝聚代数层》与《代数几何学与解析几何学》两篇重要文章. 20 世纪 60 年代中期，塞尔又转向数论研究，在证明"韦伊猜想"中起了很大作用. 他编写了大量专著，多种被译为其他国家的文字出版. 由于他在代数拓扑学方面的贡献，荣获了 1954 年的菲尔兹奖.

兰(Lang，Serge，1927—) 美国数学家. 生于法国巴黎，1940 年移居美国. 1946 年获加利福尼亚理工学院学士学位；1951 年获普林斯顿大学博士学位. 1953—1955 年，任教于芝加哥大学. 1955—1970 年，任哥伦比亚大学教授. 1970—1972 年，任普林斯顿、哈佛、剑桥等大学访问教授；1972 年起，任耶鲁大学教授. 1986 年，被选为美国全国科学院院士.

兰的研究工作涉及到数论、代数、代数几何、微分流形、解析函数等多个领域. 1951 年，他曾独立地重新发现了一个曾被中国数学家曾炯之证明的重要定理，现称为曾-兰定理. 这个定理是大多数关于超越扩张的布饶尔群的研究基础. 1956 年，他推广了类域理论. 证明了阿贝尔非分歧覆盖扩张是阿尔巴内塞型的条件. 为此成果于 1960 年获美国数学会柯尔奖. 他在同调代数、不定方程、拟代数闭包、丢番图逼近、阿廷同余 L 函数、代数表示理论、代数算术数论，以及阿贝尔簇在数论中的应用等方面都有成果. 他著作较多，涉及面也广，仅被斯普林格出版社收入《研究生教材》丛书的就有《割圆域》(1978)、《割圆域Ⅱ》(1980)、《$SL_2(R)$》(1985)、《代数数论》(1970 年第一版)、《椭圆函数》(1973 年第一版)等；于 1990 年两本《割圆域》又合成了一本. 另外，还有《奈望林纳理论中的问题》(1990，与人合著)等多本专著.

布劳德(Browder，Felix Earl，1927—) 美国数学家. 生于莫斯科. 1948 年获普林斯顿大学博士学位. 1948—1951 年，任马萨诸塞理工学院讲师. 1956—1963 年，任耶鲁大学助理教授、数学教授. 1963—1986 年，任芝加哥大学数学教授. 在此期间的 1972—1977 年和 1980—1985 年，还两次任数学系主任. 1986 年起，任拉特格斯大学数学教授，并于 1986—1991 年任主管科研的副校长. 1973 年，布劳德被选为美国全国科学院院士. 1979 年，曾任《美国数学会通报》编委主任；还曾任《数学纪事》(1965—1969)、《杜克数学杂志》(1965—1968)、《数学进展》(1969—?)、《偏微分方程通讯》(1972—1996)等多种杂志和丛书的副主编. 1970 年，曾应邀在国际数学家大会上作报告.

布劳德在线性泛函分析、线性椭圆偏微分方程、非线性泛函分析等领域都做出了贡献. 他证明了自反巴拿赫空间单调算子的一个一般定理，即从自反巴拿赫空间到其对偶空间的连续强单调算子是满射的. 此定理导致证明了某些偏微分方程的存在性问题，并开始了单调算子方法及其在偏微分方程中的应用的逐步发展. 他的这一理论还扩大了非线性问题在恰当分析中应用的范围. 1966 年，他证明了布劳德-戈德-柯克(Browder - Gohde - Kirk)定理，即一致凸巴拿赫空间的有界、闭凸子集不扩张自映射有一个固定点. 他这方面的工作推广了固定点理论、固定点指数的概念，以及相关的无限维空间中一个映射对映射的度的思想. 他的某些工作还发展了非线性收缩半群理论.

麦卡锡(McCarthy，Johu，1927—) 美国数学家、计算机科学家. 生于马萨诸塞州波士顿. 1948 年获加利福尼亚理工学院学士学位，1951 年获普林斯顿大学数学博士学位. 1951—1953 年，在普林斯顿大学做研究工作，1953—1955 年在斯坦福大学、1955—1958 年在达特茅斯学院任助理教授，后又任教于马萨诸塞理工学院，并升为通讯科学副教授. 1962 年，转到斯坦福大学任计算机科学教授. 1965—1980 年，任斯坦福大学人工智能实验室主任. 麦卡锡还被当选为美国艺术与科学学院、美国全国工程科学院、美国全国科学院的院士.

麦卡锡对计算机科学和人工智能做了基础性的贡献. 他曾在 1958 年发展了 LISP 程序语言，30 多年中 LISP 一直是人工智能领域的主要程序语言. 他还曾参与发展了 ALGOL58 和 ALGOL60 语言. 他在计算的数学理论和程序语言的形式语义学方面都做有先驱性工作. 第一次把以定义函数的方程组为基础的递归理论用到了程序语言，1979 年在递归程序证明规则、1984 年在多处理机的 LISP 程序语言方面都取得了重要成果. 他提出并发展了时间共享的概念，1962 年给出了第一个时间共享系统. 他在数理逻辑在计算机程序中的应用方面也做出了重要贡献. 1977 年，他引入了应用于一阶理论的一个推测规则，即外接概念. 他还引入了很多处理通常意义下推理问题的形式主义表示法. 1990 年，麦卡锡获美国国家科学奖章.

赫尔加森(Helgason Sigurdur,1927—) 美国数学家.生于冰岛阿克雷里(Akureyri),早年就学于冰岛大学及哥本哈根大学.1954年获美国普林斯顿大学博士学位.后在普林斯顿大学、芝加哥大学、马萨诸塞理工学院等校任教.赫尔加森的主要贡献在微分几何和微分方程方面.1966—1973年,他证明了对于球傅里叶变换的佩利-维纳定理,并把这个结果应用到对称空间,得到了相应的定理.他还研究了积分几何学,推广了拉东变换.著作有《微分几何和对称空间》(1962)等.

希策布鲁赫(Hirzebruch,Friedrich Ernst Peter,1927—) 德国数学家.生于德国哈姆,早年就学于明斯特大学和苏黎世高等工业学院.1950年获明斯特大学博士学位.1951—1952年,任埃尔朗根大学科学助理.1952—1954年,在美国普林斯顿高等研究院做研究工作.1954—1955年,任明斯特大学讲师.1955—1956年,任美国普林斯顿大学副教授.1956年开始任波恩大学教授.1980年,任马克斯·普朗克数学研究所首任所长.希策布鲁赫不仅是美因茨、海德堡、柏林科学院的院士,还是荷兰皇家科学院、苏联科学院、巴黎科学院、美国全国科学院等院的院士.1961—1962年和1990年后,任德国数学会主席;1991—1994年,还任欧洲数学会主席.

希策布鲁赫的贡献主要在拓扑、代数几何和整体微分几何等领域.他的一些结果对现代数学的发展有着十分重要的影响.1954年,他表述并证明了代数簇的黎曼-罗赫定理,得到的公式称为希策布鲁赫-黎曼-罗赫公式.1959年,他与阿蒂亚(Atiyah,M.F.)合作引入了K理论.他们根据格罗腾迪克(Grothendieck,A.)的有关思想从向量丛的等价类构造了K群,证明了微分流形的黎曼-罗赫定理.这种K群理论与博特(Bott,R.)的周期定理一起在微分拓扑学中得到了应用.他还对紧李群齐性空间的一般示性类理论做有贡献,并用拓扑方法证明了戴德金互反性定理.他还系统地研究了希尔伯特模形式及曲面与其他类数的关系等.1950年,希策布鲁赫曾获苏黎世高等工业学院银质奖章,后又因他在拓扑、代数几何、微分几何、代数数论的相结合方面的突出贡献等,获1988年沃尔夫数学奖.他的专著《代数几何中的拓扑方法》(1956;1966年第三版)曾在1989年获国际罗巴切夫斯基基础数学奖.此外,他还著有《微分流形上二次型》(1971;与人合著)、《阿蒂亚-辛格定理与初等数论》(1975;与人合著)等专著,1987年还出版了他的两卷本《文集》.

迪乔吉(de Giorgi,Ennio,1928—1996) 意大利数学家.生于莱切.1950年获罗马大学数学学位.1958—1959年,任墨西哥大学教授.1959年起,任比萨高等师范学校代数与数学分析教授.还曾是罗马林琴科学院院士.

迪乔吉在偏微分方程和变分法方面做出了基础性贡献,并因此于1990年获沃尔夫数学奖.他在两个变量二阶非线性椭圆方程方面取得了重要成果,1957年证明了可测系数是赫尔德连续的,并给出了二阶椭圆方程不连续解的例子.1960年,他给出了极小超曲面的正则性理论,为此他还引入了几何测度论,并将其应用到了变分法,后来他还证明了一个极小超曲面在余维数至少为2的闭子集外是解析的.在极小曲面方面,他还在1965年证明了E^{n+1}的完备极小曲面$Z=Z(x^1,x^2,\cdots,x^n)$,当$n=3$时,函数$Z(x^1,x^2,\cdots,x^n)$是线性的.1968年,他与邦别里(Bombieri,E.)、朱斯蒂(Giusti,E.)合作证明了,当$n=8$时,该函数不再是线性的.他还曾与人合作首次证明了2维常系数偏微分方程的解析解的存在性.1973年,他又与人合作在二阶椭圆微分方程的γ收敛性方面取得了重要成果,后来他又给出了γ收敛性的一般理论,并应用到了变分法的直接法和力学中的齐性化问题、概率论、几何等.他还曾和人合作证明了具有解析初始条件的柯西问题解的存在性定理.

莱昂斯(Lions,Jacques-Louis,1928—) 法国数学家.生于格拉斯.1947年、1950年,获巴黎高等师范学校硕士和博士学位.毕业后任教于南锡大学,1954—1962年任教授.在此期间的1954—1957年,还曾任美国、印度、日本等多所大学的访问教授.1963—1973年,任巴黎大学教授.1966—1986年,任巴黎高等工业学校教授.1973年,兼任法兰西学院教授.1988年被命名为巴黎高等工业学校和巴黎大学荣誉教授.1968年,还任国家信息与自动化研究所的研究指导,1980—1984年任所长.他还兼任法兰西学院分析与系统控制主任、法国国家空间研究中心主任等.1991—1994年,任国际数学联盟主席.1958年、1970年、1974年,曾三次应邀在国际数学家大会上作报告.

莱昂斯的贡献主要在分析及分布控制系统等领域.他早期曾因对发展方程、非齐次边值问题和插值空间等的深入理解方面的重要研究工作而被人们关注.他突出的成就有:对数学物理中的线性与非线性偏微分方程的分析;系统地改进了差分法、有限元法及补偿法等数值法;引入了变分不等式;建立了把问题齐性化的渐近法;建立并发展了由偏微分方程支配的分布系统控制理论.他还对很多特殊的应用领域做出了贡献.如计算空气动力学、石油工业、能源研究及全球性环境问题等.1991年,因他在应用数学领域的应用分析和分布控制系统方面的先驱性和开创性工作等而获日本奖.另外,1972年还获法国科学院科尼亚克-热大奖,并曾获法国荣誉骑士称

号.著有《偏微分方程支配系统的最优控制》(1968)、《非齐次边值问题及应用》(1972,1973;与人合著;法文版,1968,1970)等多种专著.

卡莱松(Carleson,Lennart Axel Edvard,1928—) 瑞典数学家.生于斯德哥尔摩.先后于1947年、1950年获乌普萨拉大学硕士和博士学位.1950—1951年,在美国哈佛大学做博士后研究,后回到乌普萨拉大学任助理教授.1954—1955年,任斯德哥尔摩大学教授.1955年开始,任乌普萨拉大学教授,1986年兼任美国洛杉矶加利福尼亚大学教授.1956—1979年,任《数学学报》主编.1968—1984年,任米塔列夫-列夫勒研究所所长.1978—1982年,任国际数学联盟主席.他不仅是瑞典科学院院士,而且还是美国艺术与科学学院,以及苏联、丹麦、挪威、芬兰、匈牙利等科学院的外籍院士.他还曾于1962年、1966年,两次应邀在国际数学家大会上作报告.

卡莱松在傅里叶分析、复分析、拟保形映射和动态系统等方面都做出了重要贡献.他在1958年和1962年发表的有关插值和科罗纳问题的文章中,解决了科罗纳猜想,引入了卡莱松测度、科罗纳构造以及与插值的关系的新方法、新概念.这些现已成为现代傅里叶分析以及单复变量和多复变分析的主要概念.1965年,他以十分精巧的数学论证证明了提出已达半个多世纪的卢津猜想成立.1972年,证明了任意阶博赫纳-里茨平均值在两维情况是L^p有界的($4/3\leqslant p\leqslant 4$).他引入的方法在傅里叶分析领域中有着重要意义.1974年,证明了R^3上的拟保形自映射可推广到R^4.他和贝内迪克斯(Benedicks)在1984年引入了研究映射$1-ax^2$的混沌行为的新方法.1988年,他们又推广了这种方法,证明了埃农映射$(x,y)\to(1+y-ax,bx)$对非空(甚至正测度)参数值集显示的"奇怪的吸引子",从而开辟了动力学系统整个领域的研究.卡莱松曾于1984年获美国数学会斯蒂尔奖;1992年获沃尔夫数学奖,

格罗腾迪克(Grothendieck,Alexandre,1928—) 法国数学家.生于柏林,后迁居法国,联合国授予他世界公民的护照.早年没有受过系统的正规教育,第二次世界大战后,才进入巴黎高等师范学校和法兰西学院听课.在此期间,他受到布尔巴基学派的影响,并很快显露出他的才华.20世纪60年代,被聘为巴黎高等科学研究院的终身教授.他热衷于无政府主义运动及和平运动,当了解到数学研究直接或间接受军事方面的资助时,毅然于20世纪70年代初脱离数学研究工作,辞职回乡务农.

格罗腾迪克的主要贡献在泛函分析和代数几何学方面.他系统地研究了拓扑向量空间理论,引进了"核空间"、"张量积"概念.这些工作均因其独创性、深刻性和系统性使数学界震惊.20世纪50年代中期,格罗腾迪克由泛函分析转向代数几何学的研究,也做出了重要贡献.他的著作有《代数几何基础》(1962)、《抽象代数簇的同调理论》(1958)等,1966年,在莫斯科召开的国际数学家大会上,格罗腾迪克还荣获菲尔兹奖.

科斯坦特(Kostant,Bertram,1928—) 美国数学家.生于纽约布鲁克林.1950年获普度大学学士学位,1951年获芝加哥大学硕士学位,1954年获博士学位.1953—1955年,在普林斯高等研究院做研究工作.1955—1956年,任普林斯顿大学讲师.1956—1962年,任教于伯克利加利福尼亚大学,从助理教授晋升到教授.1962年起,任马萨诸塞理工学院数学教授.1970年,曾应邀在国际数学家大会上作报告.科斯坦特还被选为美国全国科学院、美国艺术与科学学院院士.还曾任《整体分析与几何年刊》的主编.

科斯坦特研究算子理论、李群、表示论、微分几何和几何量子化等,在酉表示理论等方面都做出了重要贡献.1965年,他讨论了李群的齐性辛流形与酉表示的关系,给出了获得李群的不可约酉表示的一个标准方法.他还和人合作证明了科斯坦特定理能给出I型可解李群的所有不可约酉表示.他在1975年发表的"某些表示系列的存在性与不可约性"一文,曾改变了半单李群不可约酉表示研究的状况,建立了无限表示理论的有效方法.他在文中完全使用了代数方法,而且找到了构造新的酉表示族的简单而有力的方法.文章还涉及到对称空间分析的一些其他问题.这些问题对他及其他学者在泊松变换方面的工作有重要影响.现在用不可约酉表示的科斯坦特方法,可构造大部分连续主系列.他还给出了以极化存在为关键的科斯坦特理论.他曾于1990年获美国数学会斯蒂尔奖.

纳 什(Nash,John Forbes,Jr.,1928—) 美国数学家.生于西弗吉尼亚的布卢菲尔德.1945年、1948年,先后获卡内基理工学院学士学位和硕士学位;1950年获普林斯顿大学博士学位.1951年,在马萨诸塞理工学院任教.1959年,被诊断患有精神分裂症,乃辞去教职并进行长期的治疗.在此期间,纳什仍还断断续续地坚持着研究工作,后又到普林斯顿大学任职.1996年,被选为美国全国科学院院士.

1994年,纳什因在对策论领域的贡献,在经济分析方面应用后取得了很大成效,而和约翰·豪尔绍尼(John Harsanyi,C.)、泽尔滕(Selton,R.)分享了这一年的诺贝尔经济纪念奖.1950年前后,纳什创立了非合作对策理论,把冯·诺伊曼(von Neumann,J.)等人的两人零和对策论推广到了有n人

参与的一般对策的情况，还给出了“每次有 n 人的对策至少有一个平衡点”的定理，现被称为“纳什平衡理论”. 这理论在经济领域已有广泛应用，其中包括卖方寡头垄断、进出市场、市场平衡等 10 多个方面，还有在政治领域的选票、武器控制、国际政治模式、生物学的策略平衡形式等方面都有所应用. 后来纳什还在纯粹数学方面做出了重要成果. 1956 年证明了：任何 p 维紧黎曼流形能整体等距嵌入到 $p(3p+1)/2$ 维欧氏空间中，而非紧的黎曼流形能整体等距嵌入到 $p(p+1)(3p+1)/2$ 维欧氏空间中. 他的方法后来对非线性分析和非线性偏微分方程的求解产生了重要影响，经莫泽推广后，现称为纳什-莫泽技巧. 他还在微分方程、实代数簇等方面做过研究工作. 到 1966 年为止，他共发表论文 14 篇. 1968 年 9 月，普林斯顿大学图书馆还收藏了一篇他没有发表过的文章：“奇性的弧结构”.

莫　泽(Moser, Jürgen Kurt, 1928—　) 德国数学家. 生于柯尼斯堡(曾为苏联的加里宁格勒). 1952 年获格丁根大学博士学位. 1953 年到美国纽约大学做研究工作，后又任该校助理教授. 1957—1960 年，任马萨诸塞理工学院副教授. 1960—1980 年，任库朗数学科学研究所教授，于 1967—1970 年，任研究所所长. 1980 年起，任瑞士苏黎世联邦工业大学教授，并从 1984 年起任该校数学研究所所长. 莫泽还被选为美国全国科学院院士. 1983—1986 年，还任国际数学联盟主席. 1989 年，成为意大利纯粹与应用数学研究所荣誉教授.

莫泽在发展柯尔莫哥洛夫-阿谱尔德-莫泽(KAM)理论中起了重要作用，该理论描述了几乎完全可积动态系统的结构和稳定性，对现代哈密顿力学理论有着重要影响，在科学上有着广泛的应用. 他还证明了椭圆与抛物型微分方程中的哈纳克不等式，现已成为非线性偏微分方程中的标准工具. 另外，他在与复几何、辛几何和微分几何有关的分析方面也做了不少工作，特别是在复流形的局部不变式的分类、非线性索伯列夫不等式、辛结构的形变技术和叶状结构的稳定性等方面. 在算子微分学中的反函数定理方面，他修改了牛顿求根法的迭代格式，并用它推广了反函数定理. 由此发展起来的技巧在小除数问题、黎曼流形的嵌入问题等一些重要问题中非常有效，现被称为纳什-莫泽技巧. 他因在哈密顿力学稳定性方面的基础工作和在非线性偏微分方程方面的重要贡献，获 1994—1995 年度沃尔夫数学奖. 另外，他还于 1965 年获美国数学会和美国工业与应用数学会联合颁发的伯克霍夫奖；1969 年获美国全国科学院沃森奖章；1984 年获布劳威尔奖章. 著作有《天体力学讲义》(1971；与西格尔(Siegel, C. L.)合著)、《动态系统的稳定与随机运动》(1973)等.

戴维斯(Davis, Martin David, 1929—　) 美国数学家和计算机科学家. 生于纽约，早年就读于纽约城市学院. 1949 年、1950 年，先后获普林斯顿大学硕士和博士学位. 1950—1952 年，在伊利诺伊大学做研究工作，1952—1954 年，任职在普林斯顿高等研究院. 1954—1955 年，任戴维斯加利福尼亚大学、1955—1956 年，任俄亥俄州立大学助理教授. 1956—1959 年，在伦斯勒工业学院任教，并从助理教授升为副教授，1959—1960 年，任教于纽约大学. 1960—1965 年，任教于耶西瓦大学，并在 1962 年晋升为教授. 1965 年起，任职于纽约大学库朗数学科学研究所，1969 年聘为教授.

戴维斯在希尔伯特第 10 问题和理论计算机科学方面做出了重要贡献. 1950 年在其博士论文中比较了丢番图谓词和递归可数谓词，前者为通过把丢番图方程中的某些变量看作为定义该谓词的参数而得，后者为用同样方法由任意递归条件而得. 他发现了这两个概念的一致性可直接推出希尔伯特第 10 问题的递归不可解性，并得到了接近于丢番图形式(戴维斯法式)的任意递归可数谓词的形式表示. 他的学位论文还开始了对超算术集的研究，这一领域在后来数理逻辑的研究中起了重要作用. 1957 年，他与帕特南合作从数论中两个未证明的假设推得了上面提到的两谓词的一致性. 这两个假设后经人排除了一个，另一个由苏联数学家马季亚谢维奇(Matijacevic, Y.)在 1970 年证明，从而证明了希尔伯特第 10 问题的递归不可解性. 他在图灵计算模型和图灵计算机方面都做出了重要贡献. 他在图灵计算机方面的工作在代数问题不可解度理论中有重要应用. 他 1958 年出版的《可计算性与不可解性》一书是理论计算机领域第一本书形式的出版物，曾被广泛引用. 他在自动推演以及丢番图方程不可解度等方面都有重要工作. 戴维斯曾于 1975 年获美国数学会斯蒂尔奖，还获美国数学协会查文尼特奖、福特奖. 他还著有《现代数学讲义》(1967)、《应用非标准分析》(1977)、《可计算性、复杂性和语言》(1983)等专著.

阿蒂亚(Atiyah, Michael Francis, 1929—　) 英国数学家. 生于伦敦. 1952 年获剑桥大学三一学院学士学位，1955 年获博士学位. 1954—1958 年留校做研究员；1958—1961 年任讲师. 1961—1963 年，任牛津大学高级数学讲师. 1963—1969 年，任萨维利亚恩几何教授. 1969—1972 年，任美国普林斯顿高等研究院数学教授. 1973—1990 年，任牛津大学数学研究所教授. 1990 年，任剑桥大学三一学院院长；1992 年，又任新建于该校的牛顿数学研究所所长. 1962 年，被选为英国皇家学会会员，并于 1990

年起任学会主席.1969年,被选为美国艺术与科学学院院士;1978年,被选为美国全国科学院外籍院士,还是瑞典皇家科学院、法国科学院外籍院士.1983年,被封为爵士.1985年,被选为爱丁堡皇家学会会员.1976—1977年,曾任伦敦数学会主席.1981—1982年,曾任英国数学协会主席.1978—1990年,还曾任欧洲数学委员会主席.

阿蒂亚对K理论及其在几何与分析方面的应用做出了重要贡献.他的工作还涉及到代数几何、拓扑及理论物理等.他建立了微分几何、拓扑、分析之间的联系,为物理学提供了有用的工具.1959年,他和希策布鲁赫(Hirzebruch,F. E. P.)合作,根据格罗腾迪克(Grothendieck,A.)的代数几何思想,从向量的等价类构造了K群,并由此引入了K理论.他们还从他们所定义的环$K(X)$出发,利用博特(Bott,R.)的周期性定理构造了类似于上同调正合序列的正合序列.这很快就被应用到了代数拓扑及其他领域.他们用此证明了微分流形的黎曼-罗赫理论、射影空间的非浸入与非嵌入理论.1963年,阿蒂亚和辛格(Singer,I. M.)合作利用K理论给出了著名的指标定理:椭圆算子L的指标是由向量丛E_1、向量丛E_2和主符$\sigma(L)$所确定的一个拓扑不变量.他们因此证实了韦夸(Векуа,И. Н.)和盖尔范德(Гельфанд,И. М.)的有关猜想.阿蒂亚-辛格指标定理把算子的解析指标与流形的示性类联系了起来,是分析学与拓扑学结合的范例.他们两人还进一步证明了推广型的指标定理,其中涉及到构造一个椭圆复形的椭圆微分算子序列.他们用此证明了黎曼-罗赫-希策布鲁赫定理不仅对射影代数流形有效,而且还适用于任意的紧复流形.1964年,阿蒂亚与博特合作把指标定理推广到了有边界复流形.1968年,他又与辛格把它推广到了流形、向量丛及椭圆算子上的紧李群的情况.这一推广与莱夫谢茨不动点定理密切相关.1967年,阿蒂亚还与博特把莱夫谢茨不动点定理推广到了一般椭圆复形的情况.阿蒂亚因其对数学的多个领域的突出贡献,曾多次获奖,其中有:1966年获菲尔兹奖,1968年获英国皇家学会皇家奖章,1980年获伦敦数学会德·摩根奖章,1981年获罗马林琴科学院费尔特利尼数学科学奖,1987年获费萨尔国王国际科学奖,1988年获英国皇家学会科普利奖章,1990年获爱丁堡皇家学会朱比利奖,1993年获美国哲学会富兰克林奖章等.他的专著有《K理论》(1967)、《交换代数引论》(1969;与人合著)、《椭圆算子与紧群》(1974)、《纽结的几何与物理》(1990)等.1988年还出版了他的《文集》.

戈莫里(Gomory,Ralph E.,1929—) 美国数学家.生于纽约州布鲁克林.1950年毕业于威廉斯学院,后到剑桥大学学习.1954年获普林斯顿大学数学博士学位.1954—1957年,在海军志愿服役,后回普林斯顿大学任讲师.1959年,到国际商用机器(IBM)公司研究部做数学研究;1965—1970年,任该部数学处主任;1970年,成为IBM研究主管;1973年,被选为IBM的副总裁;1985年,被选为高级副总裁.此外,他还在多所大学任职,还是美国工程学院、美国艺术与科学学院院士;1972年,又被选为美国全国科学院院士.

戈莫里原来研究非线性微分方程,在海军服役期间转向应用数学,特别是运筹学.回普林斯顿大学后,他把经典丢番图分析与新的线性规划相结合,于1958年给出了解线性整数规划的割面法,从而使整数规划逐步形成为一个独立分支.割面法是第一个有效地解决求整体极大值的一般问题的方法,提供了构造性地处理组合、丢番图和布尔分析等问题的算法.到IBM公司后,在20世纪60年代初,与人合作在渐缩问题、货郎担问题、切段及多终端网络与连续问题方面进行了研究.有关切段的文章曾获美国运筹学会1964年兰彻斯奖.20世纪60年代后期,他发展了整数规划的渐近理论,并引入了隅角多面体的概念,还为渐近整数规划提供了几何解释.戈莫里曾获美国信息处理学会联合会的哈里·古德纪念奖和由美国运筹学会与美国管理科学学会联合颁发的冯·诺伊曼理论奖,1988年还获美国国家科学奖章.

格林鲍姆(Grünbaum,Branko.1929—) 南斯拉夫-美国数学家.生于南斯拉夫奥西耶克(Osyek).1948—1949年,就学于萨格勒布大学;1958年,在以色列希伯莱大学获博士学位.1958年,任美国普林斯顿高级研究院研究员.以后在华盛顿大学等校任教.格林鲍姆对几何学的若干分支做出了贡献.著作有《赫利定理及其应用》和《凸多胞形》(1967)等.

普罗霍罗夫(Прохоров,Юрий Васильевич,1929—) 俄国数学家.生于莫斯科.1949年毕业于莫斯科大学,先后在苏联科学院斯捷克洛夫数学研究所和莫斯科大学工作.1956年获博士学位.1958年成为教授.1972年,被选为苏联科学院院士.

普罗霍罗夫是柯尔莫哥洛夫(Колмогоров,А. Н.)的学生.主要贡献在概率论和数理统计方面.他得到了强大数定律的充分条件,即随机过程论中的函数空间和许多其他空间中分布的弱收敛性的充要条件.在数理统计中,他提出分布类的特征问题,把概率论方法应用于在大负荷条件下质量管理体系的研究.他还撰写了一系列关于理论物理中的数学方法和控制过程理论方面的论著,并担任了《概率论及其应用》杂志的主编、《苏联科学院通报》的编委和《苏联大百科全书》第三版的编委等职务.

皮亚捷茨基-沙皮罗(Piatetski-Shapiro, Ilya, 1930—) 以色列数学家.生于莫斯科,1951年毕业于莫斯科大学.1955年获莫斯科教育学院数学副博士学位;1958年获斯捷克洛夫数学研究所博士学位,1958—1972年留所工作.1964—1972年,任莫斯科大学数学教授.1973年移居以色列,1976年起任以色列特拉维夫大学教授;1977年起兼任美国耶鲁大学教授.

皮亚捷茨基-沙皮罗在自守函数理论及其与数论、代数几何和无限维李群表示等学科的联系方面引入了不少新思想.他解决了有关函数展开成三角级数的惟一性的塞勒姆问题,给出了4维非对称齐性域的例子,证明了任何有界齐性域都解析等价于他自己所定义的西格尔域,并与人合作给出了所有有界齐性域的完全分类、解决了$K3$曲面的托雷利问题.他还解决了赛尔伯格(Selberg, A.)关于幂么元素猜想的特殊情况,为离散群理论的进一步发展铺平了道路.在自守函数理论方面也有很多成果,他与盖尔范德(Гельфанд, И. М.)合作把该理论推广到了半单李群的一般情况.他证明了在有界对称域上运算的算术群的一般理论,给出了$GL(3)$的第一个"逆定理",与人合作构造了所有典型群自同构表示的L函数.他还与哥罗莫夫(Gromov, M.)合作,证明了任意大维数双曲空间中非算术格的存在性.因他在齐性复域、离散群、表示理论和自守形式等领域的基础性贡献而于1990年获沃尔夫数学奖,同年还获以色列数学奖.著有《表示理论与自守函数》(1969;俄文版1966,与人合著)、《自守函数和典型域几何》(1969,译自俄文)等专著.

赫　茨(Herz, Carl Samuel, 1930—1995) 加拿大数学家.生于纽约长岛,卒于加拿大麦吉尔.1950年获康奈尔大学学士学位,1953年获普林斯顿大学博士学位.1953年回康奈尔大学任教,1955年任助理教授,1958年任副教授,1963年任教授.1969年到英国布兰代斯大学访问.1970年起任教于加拿大麦吉尔大学,1981年入加拿大籍.1981—1983年,任加拿大数学会副主席,1987—1989年,任主席.1978年,被选为加拿大皇家学会会员.1993年任蒙特利尔数学科学研究所所长.

赫茨主要研究调和分析.他曾在1955年定义了矩阵变量的超几何,还曾举出了R^n中许多谱综合集的例子.他的正定函数的符号运算、凸集上的傅里叶变换等工作及对势论的贡献都有重要意义.他在绝对收敛傅里叶级数的伯恩斯坦不等式、李普希茨空间与洛伦茨空间方面曾引入了新的概念并进行了改进,他还曾证明了$A_p(G)$空间为巴拿赫代数,A_p代数后成了从交换到非交换的重要手段.晚年他曾对对称空间理论、李群等有贡献,通过紧流形的切触变换成功地对李群的忠实表示(faithful representation)进行了分类.他还曾在H_p理论及BMO、鞅变量等方面做出了重要贡献.除了数学研究外,他还对政治活动有兴趣,曾激烈反对20世纪60年代美国在越南的战争,并因此而拒交所得税和辞去了在康奈尔大学的教职而到加拿大任职.

特里夫斯(Treves, Jean - Francois, 1930—) 美国数学家.生于比利时布鲁塞尔,1947年随家移居法国.1953年获法国巴黎大学学士学位,1958年获博士学位.后赴美,1958—1960年,任伯克利加利福尼亚大学数学助理教授;1961—1964年,任耶西瓦大学副教授;1964—1971年,任普度大学教授.1971年起任拉特格斯大学教授.1972年入美国籍.1970年,曾应邀在国际数学家大会上作报告.

特里夫斯主要研究偏微分方程和泛函分析等.1980年,他出版了二卷本的《伪微分和傅里叶积分算子引论》.在此之前有关伪微分算子方面的文献都较难读,而他在他的书中以非常一般的形式阐述了该理论,书中内容很容易阅读,学过一年分析课程的读者就能读懂.在书中,他首次把伪微分算子理论应用到了弗雷德霍姆算子及椭圆伪微分算子指数等方面,还介绍了这种理论在其他多方面的应用.现在该理论已应用到柯西问题的惟一性、多复变量的正则性定理以及CR流形、次椭圆性、斜微商问题的研究、半椭圆算子、指数定理等.傅里叶积分算子现已是流形上分析的基础性工具.他在书中详细地介绍了与傅里叶积分算子有关的技巧,阐述了这方面的主要成果及其应用.他因此于1991年获美国数学会斯蒂尔奖,还曾于1971年获美国数学协会的查文尼特奖.他还著有《拓扑向量空间》(1967)、《局部凸空间和线性偏微分方程》(1967)、《基础线性偏微分方程》(1975)等多种专著.

卡尔曼(Kalman, Rudoff Emil, 1930—) 美籍匈牙利数学家、电气工程师.生于匈牙利布达佩斯.1954年获马萨诸塞理工学院理学硕士学位;1957年获哥伦比亚大学理学博士学位.1955—1957年,任教于哥伦比亚大学.1957—1958年,到IBM实验室从事与大系统计算机控制有关的应用数学问题方面的工作.1958—1964年,在巴尔的摩的高级项目研究所从事数学与控制的基础研究.1964—1970年,任斯坦福大学工程力学与电气工程教授.1971年以后,任佛罗里达大学教授和数学系统理论中心主任.1973年以后,还兼任了苏黎世高等工业学院数学系统理论教授.1994年,被选为美国全国科学院院士.

卡尔曼的主要贡献是提出了现称为卡尔曼滤波器的新的滤波方法和能控性、能观性的概念,为20世纪50年代末至60年代初,发展起来的现代控制

理论做出了重要贡献.在他之前已有柯尔莫哥洛夫(Колмогоров, А. Н.)和维纳(Wiener,N.)的统计滤波,但因理论及计算都较难,没能产生重要的实际应用.1959年,他重新表述了这一问题,并引入了预报问题的新的原理,最后得到了最优滤波器的显式描述.卡尔曼滤波器在1963年美国宇宙飞船登上月球的过程中发挥了重要作用,现在已被广泛地应用到时间序列分析、动态系统辨识、水文学及流体动力学,乃至经济领域.他在数学系统理论的研究中提出了能控性概念,并对由常系数线性常微分方程描述的系统给出了能控性判别准则,因此大大简化了控制系统的研究并提供了有效手段,它在最优控制中起着重要作用.他还证明了他的滤波理论在严格的数学意义上与最优控制理论是对偶的.他曾于1974年获美国电气与电子工程师学会(IEEE)荣誉奖章,1986年获美国数学会斯蒂尔奖,还曾于1976年获美国机械工程师学会的鲁弗斯·奥尔登堡格奖章,1985年还获日本京都奖.著作有《数学系统理论问题》(1968;与人合著)等.

斯梅尔(Smale,Stephen,1930—) 美国数学家.生于密歇根州弗林特.早年就学于密歇根大学,先后于1952年、1953年、1956年获学士、硕士和博士学位.1956—1958年,任教于芝加哥大学.1958—1960年,在普林斯顿高等研究院工作.1960—1961年,任伯克利加利福尼亚大学副教授.1961—1964年,任哥伦比亚大学教授.1964年起任伯克利加利福尼亚大学教授.斯梅尔还是美国全国科学院和美国艺术与科学学院院士.

斯梅尔主要研究微分拓扑和整体分析.1956—1957年,他证明了2维球面在3维欧氏空间的任何浸入通过3维空间的通常球面是可变的.后来他把2维的结果推广到了求任意维球面到任何欧氏空间中的形变类,并且这一结果成了后来在一般意义上把流形浸入进行分类的基础.1960年,他证明了维数$n\geqslant5$的庞加莱猜想.他在流形结构方面也取得了重要成果,1962年按h配边分类得到了同伦球面的微分结构在连通和运算之下出现的阿贝尔群Qn,还得到了一些不允许任何微分结构的拓扑流形,给出了任意流形上佳函数(nice function)存在定理,引入了环柄体的概念.他还得到了6维紧、2连通流形与S^6或$S^3\times S^3$的有限个连通和微分同胚的结果.1961年前后,他又对整体分析进行了研究.他证明了对于现被称为莫尔斯-斯梅尔动力系统,有和大范围变分法中相应的莫尔斯不等式成立,同时还研究了非线性椭圆微分方程.他把常微分方程看作是微分动力系统进行研究,并取得了重要成果.后来他还把整体分析应用到经济领域,并在整体分析的观点下研究了分析的算法,还对规划等运筹学问题进行了研究,并都取得了成果.他曾于1966年获菲尔兹奖和美国数学会的维布伦奖,1988年又获美国数学协会查文尼特奖.著作有《微分方程、动力系统和线性代数》(1974;与人合著)等.

蒂 茨(Tits,Jaeques,1930) 法国数学家.生于比利时于克勒.早年在比利时布鲁塞尔大学接受教育,1950年获博士学位.1950—1956年,先后在瑞士苏黎世高等工业学院、美国普林斯顿高等研究院、意大利罗马大学等处进行访问或做研究工作.1956—1964年,任教于布鲁塞尔大学,1962—1964年任教授.1964—1974年,任德国波恩大学教授.1973年,到法国任法兰西学院副教授,1975年开始任教授.他还曾任多所大学的访问教授.1980年以来,任法国高等科学研究所数学出版物主编.1977年,被选为巴黎科学院通讯院士,1979年成为院士.1988年成为荷兰皇家艺术与科学学院外籍院士.

蒂茨在群论及其与几何的相互作用方面做出了许多基础性的贡献.20世纪50年代初,他证明了流形上的每一个三元可迁连续群是射影群.他和博雷尔(Borel,A.)等人进一步发展了线性代数群的一般理论,使之成了一个独立的数学分支.1957年,他对半单李群做了综合研究,建立了类似于射影几何的公理体系,由此可完全确定例外型单群E_6.他还给出了例外型单群$F_4^1(2)$,现称为蒂茨单群.20世纪60年代开始,他提出并逐步发展了局部域上可简约群的"建筑物"(building)理论.1972年和1984年,他和布吕赫(Bruhat,F.)合作系统地阐述了这一理论,并给出了分类定理.这是一种应用于有限群、P进群和算术群等研究的几何方法,是研究单代数群的内部结构、表示理论及其几何等的重要工具,在有限几何和各种上同调问题的研究中也起着重要作用.在紧复齐次空间的研究中,1962年,他引入了被称为帝茨丛的概念.他用抽象的方法,确定了对应于卡茨-穆迪代数的卡茨-穆迪群,并给出了新的定义.1987年,他推广了塞尔(Serre,J.P.)关于树的定理.他还在1967—1968年间给出了有限考克斯特群图的分类.因他在群的代数结构理论和其他类群方面的先驱和基础性的贡献,特别是建筑物理论,而于1993年获沃尔夫数学奖.

费 特(Feit,Walter,1930—) 美国数学家.生于奥地利维也纳,在英国长大,后入美国籍.1951年获芝加哥大学学士学位,1954年在密歇根大学获博士学位.1953—1964年,任教于康奈尔大学,在此期间还曾到普林斯顿高等研究院和哈佛大学做过研究工作.1964年起任耶鲁大学数学教授.1977年被选为美国全国科学院院士.

费特研究群论和模表示理论.在读研究生课程时,他就对有限单群的结构以及它与特征标理论和

模表示理论间的联系有兴趣. 曾研究过特征标在群论中的应用. 他和霍尔(Hall,M. Jr)、汤普森(Thomson,W.)合作把纯粹群理论方法与特征标理论结合起来推广了一个经典的结果,并证明了如奇数阶群的每一个 $x\neq1$ 的元素都有一个幂零中心化子,则是可解的. 1963 年,他和汤普森合作在《太平洋数学杂志》上,发表了题为《奇数阶群是可解的》长篇论文,解决了长期悬而未决的伯恩赛德猜想. 他们给出的奇数阶群必可解的定理,标志着有限单群分类的大突破. 费特因此获 1964 年美国数学会的科尔奖. 著作有《有限群特征标》(1967).

亚当斯(Adams,John Frank,1930—1989) 英国数学家. 生于伦敦,死于车祸. 早年就读于剑桥大学三一学院、普林斯顿高等研究院,并获理学博士学位. 1955—1956 年,任牛津大学讲师. 1955—1958 年任剑桥大学三一学院研究员,1958—1961 年,任剑桥大学助理讲师、三一讲堂数学学习主任. 1962—1970 年,任教于曼彻斯特大学,在此期间的 1962—1964 年为高级讲师;1964—1970 年为纯粹数学教授. 1970 年起任剑桥大学三一学院天文学与几何学朗迪安教授席位. 1964 年,被选为伦敦皇家学会会员;1985 年,被选为美国全国科学院外籍合作院士.

亚当斯是位有影响的代数拓扑学家. 他的工作在创造稳定同伦论的现代方向方面起了重要作用. 20 世纪 50 年代末,他在霍普夫不变量为 1 的问题上,证明了实数上的可除代数的可能维数为 $n=1$, 2,4 或 8. 在解决上述问题过程中,他发展了高阶上同调运算理论,并构造了亚当斯谱序列. 他还解决了向量场问题,在解决过程中引入了拓扑 K 理论中的亚当斯运算. 他在"论群 $J(x)$"的系列文章的第一篇(1963)中提出了一个重要猜想,现称为亚当斯猜想,给出了关于向量丛与球面纤维化关系的基本论断及其推论. 后来对此的证明,导出了一些重要的发展. 沙利文(Sullivan,D. P.)在证明猜想时给出了拓扑空间的局部化构造,并得到了拓扑空间的完备化理论. 奎伦(Quillen,D. G.)在证明猜想的过程中得到了高阶代数 K 理论. 亚当斯曾于 1982 年获伦敦皇家学会西尔维斯特奖章. 著有《稳定同伦论》(1964)、《代数拓扑》(1972)、《稳定同伦与广义同调》(1974)等多种专著. 1992 年还出版了《亚当斯文选》.

默 里(Murray,James Dickson,1931—) 英国数学家. 生地不详. 1953 年获圣安德鲁斯大学理学士学位,1956 年获博士学位;1961 年获牛津大学硕士学位,1968 年获理学博士学位. 1955—1956 年,任德拉姆大学金斯学院应用数学讲师. 1956—1959 年,任哈佛大学应用数学讲师、研究员. 1959—1961 年,任伦敦大学学院应用数学讲师. 1961—1963 年,任牛津大学赫特福德学院研究员. 1963—1964 年,任哈佛大学副教授. 1964—1967 年,任密歇根大学工程力学教授. 1967—1970 年,任纽约大学数学教授. 1970—1986 年,任牛津大学数学研究员;1972—1986 年为高级数学讲师;1986 年起任该校数理生物学教授;1983 年起任数理生物学中心主任. 1979 年成为爱丁堡皇家学会会员. 1985 年,被选为伦敦皇家学会会员. 1991 年,任欧洲理论与数理生物学会主席.

默里早期研究流体力学,在流体化问题方面做出了重要的贡献,后研究数理生物学. 他把非线性微分方程应用到了生物学问题,涉及到非线性振动、行进波或一些特殊模式的问题. 特别是他利用反应扩散方程研究了一大类现象,如生态种群的相互作用、狂犬病等疾病的传播、昆虫的驱散、寄生虫的传播等. 他模拟了蝴蝶翅膀和动物的花纹的结构模式,引入了一个著名的力学形态模型. 他在生态学、流行病、药理学、胚胎学等方面的模型具有切合实际、符合生物学理论、在数学上不无意义而且简洁透彻等特点,所以可用数据拟合、可用以预测. 他在牛津大学创办的数理生物学中心,现已成为一个国际性的学术机构. 1989 年,他曾获伦敦数学会内勒奖. 著有《渐近分析》(1974)、《生物学中的非线性微分方程模型》(1977)、《数理生物学》(1989)等专著.

施 坦(Stein,Elias M.,1931—) 比利时-美国数学家. 生于比利时安特卫普(Antwerp),1941 年迁居美国,1952 年入美国籍. 1951 年毕业于芝加哥大学,1955 年获博士学位. 在马萨诸塞理工学院、芝加哥大学、普林斯顿高级研究院等校和研究机构工作. 1963 年成为普林斯顿大学教授. 施坦的主要贡献在函数论方面. 他著有奇异积分、函数的微分性质、欧几里得空间中的调和分析等方面的专著.

赫尔曼德尔(Hörmander,Lars Valter,1931—) 瑞典数学家. 生于布莱金厄. 早年就学于隆德大学,1956 年获博士学位. 1957—1964 年,任斯德哥尔摩大学数学教授,在此期间的 1963—1964 年又任美国斯坦福大学数学教授. 1964—1968 年,任普林斯顿高等研究院数学教授. 1968 年起任隆德大学数学教授. 他还是美国艺术与科学学院、美国全国科学院、瑞典皇家科学院、丹麦科学院等科研机构的院士.

赫尔曼德尔的工作成果主要在现代线性偏微分方程理论方面,他是伪微分算子和傅里叶积分算子的奠基人之一. 1959 年在常系数偏微分方程领域得到了存在性等结果,在偏微分方程一般理论上取得了突破性成果. 因此曾于 1962 年获菲尔兹奖. 他和科恩(Cohen,P. J.)、尼伦伯格(Nirenberg,L.)等首先系统地对伪微分算子做了研究,并于 1965 年发表了他们的成果. 1968—1970 年,赫尔曼德尔在拉克

斯(Lax,P. D.)等人工作的基础上系统地建立了傅里叶积分算子局部及整体理论.他把傅里叶积分算子定义为一个更广泛的伪微分算子类,并把其应用到了椭圆型算子谱函数,导出了一个极精确的渐近公式.现在他和其他一些人在奇异积分理论和方法的基础上建立的伪微分算子和傅里叶积分算子理论已成了偏微分方程现代理论的一个重要方面.他在四卷本的《线性偏微分算子分析》(1983—1985)一书中,阐述了这些理论的整个发展过程.他的涉及加权 L^2 空间伪凸域上齐次柯西-黎曼方程的存在理论对多复变理论是一个重要贡献.在散射理论、非线性双曲方程和纳什-莫泽隐函数定理等方面,他也取得了重要成果.1988 年,赫尔曼德尔获沃尔夫数学奖.他还著有《多变量复分析引论》(1966)等专著.

米尔诺(Milnor,John Willard,1931—) 美国数学家.生于新泽西州的奥兰治.早年就学于普林斯顿大学,1951 年大学毕业,1954 年获博士学位,后留校任教.1954—1955 年任讲师;1955—1962 年,先后任助理教授、副教授、教授.1962 年,转任亨利·帕特南大学教授,1963—1966 年,任数学系主任.1968—1970 年,任马萨诸塞理工学院数学教授.1970 年,起任普林斯顿高等研究院教授.1989 年开始任设在斯托尼希鲁克纽约州立大学的数学科学研究所所长.1975—1977 年,曾任美国数学会副主席.他还曾当选为美国全国科学院和美国艺术与科学学院院士.还曾于 1958 年和 1962 年,两次应邀在国际数学家大会上作报告.

米尔诺主要研究拓扑、几何、代数、动力学,早期曾研究过对策论.他的工作对现代数学的发展有着重要影响.1956 年,他引入了微分结构的不变量,在 7 维球面 S^7 上做出了几个微分结构,并证明了它们间的相异性,同时还给出了与普通球面同胚但不微分同胚的微分流形.他的这些工作促使微分流形发展成了一个独立的拓扑学分支,后来他又证明了 7 维球面有 28 种不同的微分结构.由于他和其他一些数学家发展了处理微分流形的基本方法,即剜补术,促使了 5 维以上流形的分类问题的解决.1961 年,他解决了在代数拓扑中存在已有半个多世纪的主猜想,1962 年给出了 3 维流形上的惟一分解定理,1964 年证明了微分流形的切丛及庞特里亚金类不是拓扑不变量.他还研究了超曲面的奇点,得到了许多结果,其中有纤维化定理.1967 年,他在代数 K 理论的研究中定义了米尔诺函子 $K_2(A)$,并指出 $K_2(A)$是阿贝尔群.20 世纪 50 年代后期,他还解决了一些代数与几何的问题.他还发展了托姆(Thom,R.)的配边理论.尔尔诺于 1962 年获菲尔兹奖,1966 年获美国国家科学奖章,1982 年获美国数学会斯蒂尔奖,并于 1989 年获得了沃尔夫数学奖.他还著有《莫尔斯理论》(1963)、《从微分的观点看拓扑》(1965;中译本,上海科技出版社,1983)、《代数 K 理论引论》(1971)、《h 配边定理讲义》(1965)等多种专著.

德格罗特(Degroot,Morris H.,1931—1989) 美国数理统计学家.生于宾夕法尼亚斯克兰顿,卒于匹兹堡.1952 年获罗斯福大学数学学士学位,1958 年获芝加哥大学统计学博士学位.后来到卡内基-梅隆大学任教,1966 年在该校建立了统计系,并任系主任至 1972 年.1984 年,被命名为大学统计与工业管理教授.1976—1978 年,还任《美国统计协会杂志》主编.他还创办了《统计科学》杂志,并于 1984—1988 年任执行主编(该杂志 1986 年正式发行).

德格罗特对贝叶斯统计做出了重要的贡献,他是该领域的领袖人物,对该领域的发展有着深远影响,其中最重要的是对在不确定情况下做合理决策方面的成果.从 20 世纪 70 年代初开始,他对贝叶斯统计及其应用进行了长期研究,其中包括对其基础性理解.他的想法曾导出了最小精密标准预报器的概念.他曾从统计方法论方面做了不少工作,发展了选择模型分析比较的贝叶斯方法.他曾发起或参与组织了多次有关贝叶斯统计的国际会议.他还与人合作把统计用到了法律领域,早期曾研究过效用理论,在序贯决策方面有重要成果.德格罗特于 1985 年获罗斯福大学杰出学者沃斯奖,1975 年曾获匹兹堡统计学家称号.他一生发表学术论文 100 多篇,著有《最优统计决策》(1970)、《概率与统计》(1975)、《经济理论中的贝叶斯分析与不确定性》(1987;与人合著)等著作.前两种著作曾被译成多种文字出版.

雷 吉(Regge,Tullio,1931—) 意大利数学物理学家.生于都灵.1952 年毕业于都灵大学,1956 年获纽约罗切斯特大学博士学位.1957—1962 年,任都灵大学讲师,后任教授.他还是罗马林琴科学院、都灵科学院、夸兰塔科学院院士.

雷吉的研究工作涉及高能物理、群论、统计物理等多个领域,在数学物理方面做出了重要贡献.他通过对复平面解析连续的角动量研究了位势扩散过程的渐近行为,这种技巧在微分方程的研究中已发现了很多应用.在强相互作用物理中的所谓雷吉轨迹帮助了对质点和共振的分类.所谓雷吉行为是弦理论构造中的重要组成部分.另外,他还首次引入了具有简单爱因斯坦动力学的时空的离散化(即所谓雷吉演算),以及用微分形式的几何语言表述了超重力理论,并因而受到称颂.他因对理论物理和数学物理的贡献,而获 1996 年狄喇克奖章.除此之外,他还曾多次获奖:1964 年获海涅曼数学物理奖,1967 年获美国物理学会索梅恩奖,1979 年获爱因斯坦奖章,还有都灵市金质奖章和意大利教育部金质奖章等.

彭罗斯(Penrose,Roger,1931—) 英国数学家、物理学家.生于英格兰科尔切斯特.1955 年获剑桥大学博士学位,此前他主要在伦敦接受教育.毕业后曾任职于全国研究发展公司、伦敦贝德福德学院、伦敦英王学院和美国普林斯顿、得克萨斯、耶西瓦等多所大学.1964—1966 年,任伦敦伯克贝克学院高级讲师;1967—1973 年,任应用数学教授.1973 年起,任牛津大学教授.1983—1987 年,任美国赖斯大学教授.1987 年,任锡拉丘兹大学物理与数学教授.1972 年,被选为英国皇家学会会员.

彭罗斯在博士论文中重新发现并发展了穆尔(Moore,G.H.)的广义逆矩阵,并证明了广义逆矩阵的惟一性,现称这类矩阵为穆尔-彭罗斯逆矩阵.他用代数的观点发展了张量系统,发现了应用于四色地图问题和量子力学中角动量的某种负维系统(negative - dimensional systems).他系统地研究了把时空几何表述到一个新的几何框架中的挠子理论.射影挠子流形被称为复射影三维空间彭罗斯变换,他用此变换证明了时空中线性无质量域对应于全纯层上同调群的元素.在广义相对论领域中,他创立了描述广义相对论的两旋子形式主义,并与人合作发展了旋系数方法,引入了处理广义相对论中渐近问题的形式方法.他还引入了研究时空奇性的整体方法,其中涉及到微分拓扑的思想.在对奇性的研究过程中,他得出结论说:初始奇性(大碰撞)和最终奇性(黑洞)实际上是不相似的.他还对铺砖问题有兴趣,1974 年发现了只能非循环地铺满整个欧几里得平面的一对平面图形.彭罗斯于 1966 年获剑桥大学亚当斯奖,1971 年获美国物理学会海涅曼奖,1975 年获英国皇家天文学会埃丁顿奖章,1985 年获英国皇家学会皇家奖章,1988 年和霍金(Hodgkin,A.L.)分享沃尔夫物理奖,1989 年获物理学会狄喇克奖和奖章,1990 年获爱因斯坦奖章,他还著有《相对论中的微分拓扑方法》(1972)、《旋子与时空》(1984,1986;与人合著)等专著.

布　朗(Brown,Morton,1931—) 美国数学家.生于纽约.早年就学于麦迪逊威斯康星大学,分别于 1953 年、1955 年、1958 年获学士、硕士和博士学位.1957—1958 年,任教于威斯康星大学、俄亥俄州立大学.1958 年起,任教于密歇根大学,先任助理教授,后任副教授,1964 年晋升为教授.

布朗对现代拓扑流形理论的发展有着重要贡献.舍恩菲利斯(Schoenflies,A.)曾在 1908 年证明了嵌入平面的一个拓扑圆的闭内部总是两维圆盘的边界.1960 年,布朗通过引入胞腔性概念给出了广义舍恩菲利斯定理高维情况的完整证明.他因此于 1966 年获美国数学会维布伦奖.1962 年,他建立了以下结果:一个局部不打结的$(n-1)$维球面的封闭内部嵌入到 n 维空间是一个拓扑 n 维球.他还在所谓圆环猜想方面有贡献,该问题是:假定两个局部不打结的拓扑 $n-1$ 维球面嵌入到 n 维空间,使得一个在另一个的内部,那么它们之间的闭空间是否同胚于两个同心球面之间的相应区域.1962 年,他与人合作对此猜想作了表述,并引入了稳定同胚和稳定结构的概念.他们证明了圆环猜想等价于在所有可定向流形上存在稳定结构,又等价于欧氏空间的每一个保持定向的同胚是稳定的,后者都是稳定同胚猜想.他们还证明了如果圆环猜想不成立,则将存在不可三角剖分的流形.现在圆环猜想除了 $n=4$ 以外,已解决.

伯　奇(Birch,Bryan Joho,1931—) 英国数学家.生于特伦特河畔的伯顿.早年就学于剑桥大学三一学院,并获硕士和博士学位.1956—1960 年,为该学院研究员.1960—1962 年,为剑桥邱吉尔学院高级研究员.1962—1965 年,任曼彻斯特大学高级讲师.1966—1985 年,任牛津大学高级讲师;1985 年起,任该校算术教授.1972 年,被选为伦敦皇家学会会员.

伯奇主要研究数论,对椭圆曲线的算术有重要贡献.他早期在多变量型方面、符号差为零的非齐次二次型极小值方面有重要成果,还建立了华林问题的一致估计.他在有关椭圆曲线的莫德尔-韦伊群及其解析不变式之间关系的“伯奇-斯温纳顿-戴尔猜想”方面的工作有重要影响.它建立了计算机计算与数学研究工作之间的一种研究模式.这些猜想及它们的推广已被认为是理解很多问题的核心,但现在对猜想本身的研究尚处开始阶段.后来他又在模形式方面做了不少重要工作,特别是在椭圆曲线上构造了有理点.这一工作改变了原来建立椭圆曲线上有理点存在性的方法,并把它发展成了一种有力工具,现已被有效地使用.1993 年,伯奇获伦敦数学会高级怀特海奖.

广中平祐(Hironaka,Heisuke,1931—) 日本-美国数学家.生于日本山口县.1950 年考入京都大学.1954 年进入研究院.1956 年,美国数学家扎里斯基(Zariski,O.)到日本讲学,使广中平祐接触了当时代数几何学最前沿的课题,这对他的一生产生了决定性的影响.1957 年,他到美国哈佛大学学习.1959 年取得博士学位,不久成为哈佛大学的教授.1970 年荣获菲尔兹奖.广中平祐直接延续和发展了扎里斯基在代数几何学方面的成果.从 19 世纪末起,许多数学家就研究二维代数簇——代数曲面的奇点解消问题.直到 20 世纪 30 年代,扎里斯基才完全解决这个问题.1944 年,他又用严格的代数方法解决了三维代数簇问题.1964 年,广中平祐运用许多新工具,细致地分析了各种情形,最后用多步归纳

法才最终完全解决了任何维数的代数簇的奇点解消问题,并建立了相应的定理.以后他又把这一结果向一般的复流形推广,对于一般奇点理论也做出了很重要的贡献.

纳尔逊(Nelson,Edward,1932—) 美国数学家.生于佐治亚州迪凯特.早年就读于芝加哥大学,1955年获博士学位.因拒绝服兵役,在印第安纳加里卫涅公会医院工作2年,后又在普林斯顿高等研究院工作3年.1959年起,任教于普林斯顿大学.还被选为美国艺术与科学学院院士.

纳尔逊是数学与相对性量子域理论相互影响研究的先驱者之一.在量子域理论中,起初起作用的只是算子代数和分布理论.他首先意识到概率技术将是此领域的重要工具.在1966年发表的《2维4次相互作用》一文中,他克服了以测度论和半群的L^p估计相结合在2维域理论中某种重正规化时出现的无限性.他在估计2维情况4次相互作用的稳定性时引入的技术是非常基本的技巧,对后来3维情况严格量子域理论的发展有重要影响.1973年,他发表的"从马尔可夫域构造量子域"一文,第一次在欧几里得解方面取得成果.相对性量子域理论向虚时间(imaginary time)的解析延拓形式地把闵可夫斯基域理论变换到欧几里得理论,这不仅是形式技巧,而且为某些随机过程提供了数学解释.他引入的概念建立起了严格的数学方法,把闵可夫斯基空间中的算子形式体系与利用马尔可夫性质关于空间和时间的对称性结合了起来.因为以上的研究成果,他获得了1995年美国数学会颁发的斯蒂尔奖.

利 布(Lieb,Elliot H.,1932—) 美国数学物理学家.生于波士顿.1953年获马萨诸塞理工学院学士学位,1956年获英国伯明翰大学数学物理博士学位.1956—1957年,在日本京都大学做研究工作.1957—1958年,任伊利诺伊大学副研究员.1958—1960年,任康奈尔大学核研究实验室副研究员.1960—1963年,任职于IBM公司沃森研究中心.1963—1966年,任耶西瓦大学物理学副教授.1966—1968年,任东北大学物理学教授.1968—1975年,任马萨诸塞理工学院数学教授.1975年起,任普林斯顿大学数学与物理教授.他还曾任《数学物理通讯》、《数学物理快讯》、《应用数学进展》、《应用数学研究》等刊物主编或主编之一.他还是美国全国科学院和奥地利科学院的院士.1982—1984年,还曾任国际数学物理协会主席.

利布主要研究数学物理,对于数学物理问题的分析有重要贡献,在非线性微分方程和经典不等式分析方面解决了物理中的很多重要问题.他在薛定谔方程方面允许库伦位势慢衰退的工作超出了短程相互作用的范围.利布-瑟林不等式把物质的稳定性与一个反对称N重张量积范数的新估计联系了起来.他的哈代-李特尔伍德-索伯列夫不等式的强约束为非线性方程的研究开创了新方法,他的工作在数学物理中对托马斯-费米问题、液态精体理论、调和映射、伊辛模型等都有深远影响.利布于1970年获纽约科学院化学物理研究普雷吉尔奖,1978年获美国物理学会和美国物理研究学会海涅曼数学物理奖,1985年获法国UAP(巴黎联合保险公司)科学奖,1988年获美国数学会和美国工业与应用数学会伯克霍夫奖.

德布兰奇(de Brange,Louis,1932—) 美国数学家.生于巴黎,成长在美国.1953年获马萨诸塞理工学院学士学位,1957年获康奈尔大学博士学位.1957—1959年,任拉斐学院助理教授.1959—1960年,在普林斯顿高等研究院做研究工作.1960—1961年,任布林莫尔学院讲师.1961—1962年为库朗数学科学研究所成员.1962年起,任教于普度大学,开始任副教授,1963年晋升为教授.

德布兰奇的研究工作涉及泛函分析、算子理论及其在系统理论方面的应用、多项式逼近、谱函数理论、几何函数论、解析数论、集合论和量子力学等.他曾在希尔伯特空间上的有界线性算子及黎曼猜想方面取得过成果.1984年,他证明了比伯巴赫猜想,该猜想自1916年提出以来,曾吸引过不少知名数学家.在证明猜想的过程中,他还曾解决了不少相关的问题,在保角映射方面得到了不少更重要的结果.他在希尔伯特空间理论方面的成果,大大促进了对以上问题及其他问题的理解.他在标准酉线性系统的结构理论及其在解析函数论方面的应用等问题方面也有重要贡献,特别是推广了博伊尔林内外因子分解.他于1990年获首届奥斯特洛夫斯基奖,1994年获美国数学会斯蒂尔奖.他出版的著作有《平方可和幂级数》(1966)、《整函数的希尔伯特空间》(1968)、《γ函数的量子化》(1994)等.

巴 斯(Bass,Hyman,1932—) 美国数学家.生地不详.哥伦比亚大学教授.20世纪60年代初期,巴斯创立了代数K理论.这是代数学的一个分支,它主要研究环(或某个范畴)上取值于Abel群的一系列函子K_n,带有某种广义同调论的特色,这一理论在代数几何和拓扑学中起着重要作用.他引入了K_1,并与他人合作大范围地研究了K_0和K_1,他还研究了半单李群的离散子群的构造.著作有《代数K理论》等.

汤普森(Thompson,John Griggs,1932—) 美国数学家.生地不详.1955年毕业于耶鲁大学.1959年获博士学位.1962年受聘于芝加哥大学,任教授.主要研究有限群论.1963年,他和美国数学家费特(Feit,W.)在《太平洋数学杂志》上发表了题为

《奇数阶群是可解的》的长篇论文(238 页,占整整一期的篇幅),肯定地证明了著名的伯恩赛德猜想. 1966 年,他又解决了弗罗贝尼乌斯(Frobenius,F. G.)猜想. 1968 年到剑桥大学工作,发表了总标题为《论其局部子群皆可解的不可解有限群》的 6 篇论文,这些文章已成为研究有限单群理论的重要文献. 汤普森由于工作成绩卓著,还荣获了 1970 年菲尔兹奖.

米尔纳(Milner,Robin,1934—) 英国计算理论学家. 生于英格兰普利茅斯. 1957 年获剑桥大学数学学士学位. 1959—1960 年,曾任中学数学教师. 1960—1963 年,任职于伦敦费兰蒂公司. 1963—1968 年,任伦敦城市大学数学与计算讲师. 1968—1970 年,为斯旺西大学学院研究员. 1970—1973 年,在美国斯坦福大学人工智能实验室工作. 1973 年起,任教于爱丁堡大学;1973—1975 年为讲师;1975—1984 年为高级讲师;1984 年晋升为计算理论教授. 1988 年,被选为英国皇家学会会员,同年成为欧洲科学院创建院士. 另外,他还是英国计算机学会杰出的会员.

米尔纳主要从事计算理论及计算机科学的基础研究. 他把对有关数学基础的深刻理解与对工程问题的深刻观点相结合,把理论反馈到实践,在计算理论等方面取得了重要成果. 他 1968 年开始研究检验计算机程序的更严格的方法. 1971 年提出了 LCF,一种可计算函数的逻辑. 它可用来严格地表述有关算法命题、程序语言以及计算系统. 这是机器辅助证明构造方面第一个有严格理论基础的实用工具. 他还给出了 ML,第一种包含有打字保险异常处理机的多形式打字推断的语言. 把打字推断应用到一种完整的语言是一个理论进步. 他还给出了一种一般性的并行理论 CCS. 他的工作还导致在爱丁堡建立了一个计算机科学基础实验室,它既为基础研究服务,又向工商界开放. 米尔纳于 1991 年获美国计算机协会图灵奖. 他的著作有《通讯与并行的计算》(1989)、《标准 ML 的定义》(1990)、《标准 ML 注释》(1990).

格利姆(Glimm,James Gilbert,1934—) 美国数学家. 生于伊利诺伊州皮奥里亚. 早年在哥伦比亚大学接受教育,分别于 1956 年、1957 年、1959 年获学士、硕士和博士学位. 1959—1960 年,在普林斯顿高等研究院工作. 1960 年,任马萨诸塞理工学院助理教授,1968 年晋升为教授. 1974—1982 年,任洛克菲勒大学数学教授. 1980—1982 年为库朗数学科学研究所访问教授,1982 年成为该所数学教授,后又任斯托尼布鲁克纽约州立大学教授. 他还是美国全国科学院和美国艺术与科学学院院士.

格利姆主要研究非线性微分方程、泛函分析、希尔伯特空间算子、数学物理、量子域理论及计算流体动力学等. 他 1965 年发表的题为《非线性双曲守恒律系统的大范围解》一文,首次证明了这一类极为重要的方程解的整体存在性. 因这类方程的解是典型非连续的,故经典的泛函分析工具不适用. 直至 20 世纪 90 年代初期,他的证明方法是不用黎曼不变式获得一般情况系统存在性的惟一方法. 他在证明过程中发现了波相互作用的精巧估计从而提供了一类小试探解的紧性. 他的证明促进了后来概率工具在偏微分方程理论中的应用. 上面提到的文章直接导致了守恒律系统解衰退的拉克斯-格利姆理论. 计算流体力学的随机选择法是他的构造的一个计算机实现,而后来的一些实现可视为他的波分析的推广. 1961 年,他还证明了可分 C^* 代数 R 的对偶空间关于包核拓扑是 T_0 空间的充分必要条件是 R 为 GCR (CCR)代数. 格利姆于 1979 年获纽约科学院物理与数学科学奖,1980 年获海涅曼奖,1992 年获美国数学会斯蒂尔奖,1993 年还获美国工业与应用数学会特别奖. 他的著作有《概率在物理中的应用》(1978;与人合著)、《非线性双曲守恒律系统解的衰退》(1970;与拉克斯(Lax,P. D.)合著)等.

科　恩(Cohen,Paul Joseph,1934—) 美国数学家. 生于纽约. 1954 年毕业于芝加哥大学,1958 年获得博士学位. 1961 年受聘于斯坦福大学,1964 年成为该校教授. 1967 年成为美国全国科学院院士.

科恩在数学上的研究兴趣十分广泛,在分析学和连续群方面都取得了突出的研究成果. 他最杰出的贡献在数学基础方面. 在 1966 年召开的国际数学家大会上,他因证明了连续统假设和选择公理的独立性而荣获菲尔兹奖. 康托尔(Cantor,G. F. L. P.)在 1878 年提出所谓的"连续统假设",但他生前未能证明. 1900 年,希尔伯特(Hilbert,D.)把这个问题作为 23 个问题中的第一个问题,向 20 世纪的数学家们提出挑战. 奥地利数学家哥德尔(Gödel,K.)证明了连续统假设与其他公理无矛盾. 1963 年,科恩证明了连续统假设的独立性,即遍用集合论的公理化体系也不能证明之. 他在证明中创造了一种新方法——力迫法. 这种崭新的方法在集合论中已得到了广泛的应用. 他的工作使连续统假设成为一种既不能证明,又不能推翻的现代逻辑工具. 他的主要著作有《集合论与连续统假设》(1966).

奥斯特伦(Åström,Karl Johan,1934—) 瑞典控制论专家、数学家. 生于瑞典奥埃斯特萨德(Oestersund). 早年就学于斯德哥尔摩皇家工业学院,1957 年获工程物理硕士学位,1960 年获控制论与数学博士学位. 1955—1956 年,任教于皇家工业

学院，同时还在空军部门和国防研究所做研究工作. 1961年，他在IBM在瑞典努迪克(Nordic)的实验室从事过程控制计算机化理论及应用方面的研究. 1962年和1963年，他还是IBM在美国纽克城高地和圣何塞研究实验室的访问科学家，后回瑞典IBM努迪克实验室. 1965年，他被聘为隆德大学隆德工学院自动控制教授，并任工程物理系副系主任、系主任. 1986年成为瑞典皇家工程科学学院院士，并任副院长. 1981—1987年，任国际自动控制联合会副主席. 他还是《自动化》、《时间序列分析》、《数学分析及其应用》、《信息科学》、《数理生物科学》等杂志的副主编.

奥斯特伦的贡献主要在自适应控制、系统辨识和随机控制等方面. 在IBM实验室工作期间，他给出了最小方差控制策略，并和人合作给出了系统辨识的极大似然法，此方法现仍为过程辨识的基本方法. 他还在系统辨识递归算法的性质、可辨性条件、闭环系统辨识、以状态空间表示和输入-输出表示系统的辨识数值算法等方面都有重要的理论成果，并把建模与控制应用到了造纸工业、电力系统、污水处理系统及生物医学系统等广泛领域. 他和他指导的学生在自适应控制理论方面做出了基础性贡献. 他还在计算机辅助控制工程、计算机控制系统、自动调整、智能控制等方面都在理论与实践上有重要贡献. 他还在有关的计算机软件工具等方面做出了贡献. 因他在自适应控制技术的理论与应用方面的基础性贡献，获1993年美国电子与电气工程师学会(IEEE)荣誉奖章，这是该学会的最高荣誉. 另外，他还曾多次获奖：1980年获测量与控制学会(伦敦)卡伦德银质奖章；1985年获美国机械工程师学会奥尔登堡格奖章，同年还获皇家工业学院大奖；1986年获瑞典皇家工程科学学院信息学卡尔逊奖章；1987年国际自动控制联合会还授予他夸扎奖章等. 他还发表论文80多篇，完成了近200篇技术研究报告；还著有《控制论》(1968)、《随机控制引论》(1970)、《自适应控制》(1989；与人合著)等多本专著.

卡　帕(Karp，Richard M.，1935—　)　美国数学家. 生于波士顿. 早年就读于哈佛大学，分别于1955年、1959年获硕士和应用数学博士学位. 1959—1968年，在IBM的沃森(Watson，T. J.)研究中心从事研究工作. 在此期间的1967—1968年，曾还在哥伦比亚大学任教. 1968年，到伯克利加利福尼亚大学任计算机科学与运筹学教授，1980年起，又兼任数学系教授. 1995年，到华盛顿大学任计算机科学与工程学教授兼分子生物技术教授. 卡帕还是美国全国科学院、美国工程科学院和纽约科学院的院士.

卡帕在理论计算机科学领域做出了重要的贡献. 1972年，他证明了21个用组合定义的计算问题都是NP完全的，在NP完全理论的发展中起了重要作用. 他在大量组合问题算法的设计方面也有重要贡献. 他还曾与人合作给出了最大流程和最小耗费流程的多项式时间算法，这是两个最基本的网络最优化问题，是20世纪50年代中期以来运筹学研究的一个重要课题. 他还与人合作给出了另一组合最优化基础问题，即二部分的匹配问题的有效算法. 他与赫尔特(Held)合作给出了货郎担问题最短路程的下限，是估计最佳路程的有效方法. 这个下限基于的拉格朗日松弛技巧也很快被用到了广泛的组合问题. 他还在$\#P$算法和平行算法中的NC算法、RNC算法等方面做了很多基础工作. 因他对理论计算机科学与现实世界问题的联系方面进展的成就，而获1996年美国国家科学奖章；此外，1977年还获兰彻斯特奖，1979年还获数学规划学会和美国数学会联合颁发的富尔克森离散数学奖.

西　纳(Sinai，Y. G. 1935—　)　俄国数学家. 生于莫斯科. 早年就学于莫斯科大学，1957年获学士学位，1960年获博士学位. 后留校做研究工作，1971年晋升为教授. 同年成为兰多理论物理研究所高级研究员. 自1993年起，他还兼任普林斯顿大学教授. 他还是美国艺术与科学学院和俄国科学院院士、匈牙利科学院外籍院士.

西纳因其对统计力学中的严格数学方法和动力系统遍历理论及其在物理学中的应用方面的贡献，而获1997年沃尔夫数学奖. 他的工作是数学物理问题中的动力系统的有力工具，对概率论有着重要影响，而且他还经常给出新的工具. 他首先表述了任意保测映射的不变熵的严格定义，他后来的工作包括了从弹子运动的遍历性到拟周期薛定谔算子的谱性质. 一般认为他是统计物理数学的世界领袖. 西纳还曾于1986年获博尔茨曼金质奖章，1989年获海涅曼数学物理奖，1990年获马尔可夫奖，1992年获设在意大利的里雅斯特的国际理论物理中心的狄刺克奖章.

鲍威尔(Powell，Michael James David，1936—　)　英国数学家. 生地不详. 早年就读于伊斯塔恩学院和剑桥大学，1959年获剑桥大学学士学位，1979年获理学博士学位. 1959—1976年为英国原子能研究组织的数学家. 1976年起，任剑桥大学应用数值分析教授. 1983年，被选为伦敦皇家学会会员.

鲍威尔主要研究非线性最优化理论及其应用，他是该领域的领袖人物. 20世纪60年代，该领域尚处早期发展阶段，他在发展其数值方法，并设计有效算法方面起了先驱作用，后来他又给出了严格的基础. 他推广了无约束与有约束非线性最优化数值算法的实用范围，后来还为多种这类算法提供了严格

的收敛理论.这些大大推动了非线性最优化领域研究的发展.他的工作不仅对数学本身有影响,对物理学、工程学及其他有关问题也有重要影响.他曾于1982年获美国工业与应用数学会和数学规划学会联合颁发的丹齐克数学规划奖,1983年还获伦敦数学会内勒奖.著作有《逼近理论与方法》(1981).

沃　尔(Wall,Charles Terence Clegg,1936—　)英国数学家.生于英国布里斯托尔.早年曾在剑桥大学莫尔伯勒学院和三一学院接受高等教育,1966年获博士学位.1959—1964年为剑桥大学三一学院研究人员.1960—1961年,在美国普林斯顿高等研究院做研究工作.1961—1964年,任剑桥大学讲师.1964—1965年为牛津大学圣凯瑟琳学院高级讲师和研究员.1965年起,为利物浦大学纯粹数学教授.1969年,被选为伦敦皇家学会会员,1974—1976年,为该学会理事会成员.1990年,被选为丹麦皇家科学院院士.1978—1980年,任伦敦数学会主席.

沃尔的贡献主要在流形拓扑,工作还涉及到相关的代数和几何等.1962年,他对$n-1$连通的$2n$维流形进行了分类.他还系统地研究了微分拓扑的分类问题,涉及到微分同胚下$S-1$连通$2S+1$维微分流形,并于1967年给出了它们的分类.1970年,他在《紧流形上的剜补术》一书中,给出了在非单连通流形上的剜补术障碍理论;引入了类似于代数K理论中K_0和K_1的剜补障碍群$Ln(\pi)$,简称为L群,又称沃尔群;还给出了表示障碍的沃尔不变量.1972年,他把L群看作是二次结构模的范畴的K群,为计算L群提供了基础.1969年,他还和其他学者证明了存在不允许任何组合结构的6维拓扑流形.他在配边环方面也有成果.沃尔于1988年获伦敦皇家学会西尔维斯特奖章,同年还获伦敦数学会波伊亚奖.他的著作有《拓扑的几何引论》(1972)等.

朗兰兹(Langlands,Robert Phelan,1936—　)美国数学家.生于加拿大不列颠哥伦比亚的新威斯敏斯特.1957年获不列颠哥伦比亚大学学士学位,1958年获硕士学位.1960年获耶鲁大学博士学位,并留校任讲师,1967年晋升为教授.1972年起,任普林斯顿高等研究院教授.1972年,被选为加拿大皇家学会会员;1981年,还被选为伦敦皇家学会会员.还曾于1970年、1978年,两次应邀在国际数学家大会上作报告.

朗兰兹的主要贡献在数论、自守形式和群表示等领域.他在艾森斯坦序列、群表示、L函数与阿廷猜想、函子性原理等方面的基础性工作和对有深远影响的"朗兰兹纲领"的表述为现代自守型理论奠定了基础.20世纪50年代以后,他和赛尔伯格(Selberg,A.)以及盖尔范德(Гельфанд,И. М.)等人的工作揭示了自守函数与代数函数、李群的无限维表示、代数几何等学科的关系.他曾得到阶数大于1的解析连续一般艾森斯坦序列的算术群.1967年,他表述了若干有关数论、自守形式和表示理论的猜想,已成为这三个领域研究的中心问题.几乎同时他还定义了一个新的ζ函数簇,并用艾森斯坦序列证明了其亚纯连续性.他还把局部和整体类域推广到了伽罗瓦群的非阿贝尔表示.1970年,他和人合作从表示论的观点给出了讨论四元代数的ζ函数的统一方法.朗兰兹还获得了1995—1996年的沃尔夫数学奖.另外,他还于1982年获美国数学会柯尔数论奖,1984年获联邦奖,1988年获首届美国全国科学院数学奖.著作有《GL(2)上的自守形式》(1970;与人合著).

马　宁(Manin,Yuri I.,1937—　)俄国数学家.生于俄国辛菲罗波尔.早年就读于莫斯科大学,1958年毕业,1960年获博士学位.1960—1991年为莫斯科斯捷克洛夫数学研究所成员,在此期间的1965—1991年,还任莫斯科大学代数教授.1991—1993年,曾任美国哈佛大学、马萨诸塞理工学院、哥伦比亚大学访问教授.1993年成为德国波恩的马克斯·普朗克数学研究所成员.他曾于1966年、1970年、1978年、1986年和1990年应邀在国际数学家大会上作报告,其中1978年为全体大会报告.他还是俄国科学院通讯院士、荷兰皇家科学院外籍院士、欧洲科学院院士(Academia Europaea).

马宁的工作涉及代数几何、数论、数学物理等多个数学分支.1963年,他证明函数域的莫德尔猜想时引入了高斯-马宁联络,后来成了现代代数几何的重要工具.1971年,他与人合作给出了吕罗特(Luroth)关于代数轨迹有理单值化猜想的一个反例.他在数论的P进分析和模形式理论方面的工作,吸取几何直观并用"连续"技巧解决了基本算术问题.他对三次超曲面算术的研究曾是该领域中20多年的标准.他对数学物理也有许多贡献,其中有对瞬子的分类、描述真空中微小量子波动的域方程的解等.1978年与人合作在这方面的工作不仅对物理很重要,而且还为4维流形的纯数学研究方面的进展打下了基础.他还在完全可积波方程的哈密顿结构、杨-米尔斯-狄喇克方程代数几何解的构造、弦理论等方面有重要工作.他曾因数论工作获布劳威尔金质奖章,1967年曾因代数几何工作获列宁奖,1995年获美国西北大学首届尼默斯(Frederic Esser Nemmers)奖.著有《代数几何讲义,Ⅰ,Ⅱ》(1970,1971)和《三次形式、代数、几何、算术》(1986;译自俄文第二版)等10多种专著.

韦　茨(Wets,Roger J.-B.,1937—　)美国数学家.生于比利时于克勒.1959年获布鲁塞尔的

自由大学学士学位，1964 年获美国伯克利加利福尼亚大学应用数学博士学位. 1962—1970 年，任职于华盛顿波音科学研究实验室. 1970—1971 年，任芝加哥大学数学教授. 1971—1985 年，任肯塔基大学数学教授. 1985 年起，任戴维斯加利福尼亚大学数学教授.

韦茨主要研究数学规划、随机最优规划等. 他在随机规划的理论基础方面做出了重要贡献. 他对解集的几何和值函数的性质、最优解的存在性与稳定性条件，以及对偶问题的结构等做了基础性的研究. 在算法基础方面，在对简单求助问题非常有效的基本 L 状方法和近来出现的逐步"设障"算法等方面，他都有重要贡献. 这些方法已在一大类应用问题中使用，并使计算能力扩大到能处理新出现的大型的模型. 通过对依赖于随机变量(包括广义大数定律)的最优化问题的统计性质的分析，他为在采样基础上的问题解法打下了基础. 他发展的近似无限维问题方法之一(即 epi 收敛概念)已成为有复杂动态情况的半无限规划和最优控制领域的基本工具. 他还积极参与在环境保护及经济工作中的应用方面的工作. 1994 年，韦茨获数学规划学会和美国工业与应用数学会联合颁发的丹齐克奖.

芒福德(Mumford，David Bryant，1937—) 美籍数学家. 生于英国苏塞克斯郡(Sussex). 很早就去美国读书. 16 岁考入哈佛大学，毕业后留校工作. 1961 年获得博士学位，1967 年成为教授. 由于他对代数几何学的贡献而荣获 1974 年的菲尔兹奖. 芒福德的主要贡献在参模理论方面. 他创造性地应用不变式理论研究参模的整体结构，得到许多新结果，并由此产生了一门新学科—— 几何不变式论. 1965 年，他出版了《几何不变式论》一书，从此开始了研究不变式论的新高潮. 他对代数几何学的另一重大贡献是代数曲面理论. 1961 年，他证明了代数曲面与代数曲线和高维代数簇的不同之处. 对代数曲面的分类做出了巨大成绩. 对费马大定理也有过贡献，证明了费马方程即使有解，也是很稀少的. 他的著作还有《代数曲面上的曲线》(1966)和《阿贝尔簇》(1970)等.

阿诺尔德(Арнольд，Владимир Игоревич，1937—) 俄国数学家. 生于敖德萨(Одесса). 1959 年毕业于莫斯科大学. 1963 年获物理数学博士学位. 毕业后在莫斯科大学工作，1965 年成为教授. 阿诺尔德的主要贡献在微分方程、泛函分析和实变函数论等方面. 早在大学期间，他就开始了数学研究，他继承了他的老师柯尔莫哥洛夫(Колмогоров，А. Н.)的研究工作，解决了希尔伯特第 13 问题. 根据他的结果，每一个三元连续函数都能表示为二元连续函数的叠加. 阿诺尔德在动力系统稳定性方面也做出了重要贡献. 主要著作有《经典力学中的数学方法》、《常微分方程》等.

珀西瓦尔(Percival，Ian Colin，1937—) 英国数学家. 生地不详. 早年就读于伦敦大学学院，获学士和博士学位. 1951—1961 年，任伦敦大学学院物理讲师. 1961—1967 年，任伦敦大学奎因·玛丽学院应用数学讲师. 1967—1974 年，任斯特灵大学理论物理教授. 1974 年起，任伦敦大学奎因·玛丽和韦斯特费尔德学院应用数学教授. 1985 年，被选为伦敦皇家学会会员.

珀西瓦尔研究应用数学，并涉及散射理论、统计力学、经典动力学、混沌理论以及原子与分子理论等. 他对量子力学做出了重要贡献，特别是在与经典理论的关系方面，并为解与经典和半经典问题有关的量子力学问题提供了新方法. 他引入了对应单位元的概念，并阐明了它们与动态对称性的关系，为经典射线理论精确地逼近一个量子系统的情况提供了深刻的理解. 他预测了分子谱的许多性质，得到了原子碰撞问题的精确解. 这些结果在无线电复合线观测的解译中有重要应用. 他还为解积分微分方程提供了重要的技巧，在一定情况下，这比迭代法更有效. 他引入了变分法，因而得到了非线性动力学中的不变环面和速度相位空间上的界. 他还研究了哈密顿系统中混沌运动的边界；在统计时间非对称性的研究中有重要贡献. 他曾于 1985 年获伦敦数学会内勒奖. 著作有《动力学引论》(1983；与人合著)、《核冬天》(1985)等.

莫伊舍佐恩(Moishazon，Boris G.，1937—1993) 美国数学家. 生于乌克兰敖德萨，卒于纽约. 1959 年毕业于塔吉克州立大学. 1962 年获苏联科学院数学研究所物理与数学科学副博士学位. 1964—1967 年，任教于教育学院. 1967 年，获莫斯科大学博士学位. 后又任莫斯科的中央数理经济研究所研究员，是当时苏联的持不同政见者之一. 1972 年，携家迁以色列，任特拉维夫大学数学教授. 1977 年，赴美国犹他州立大学任访问教授. 1978 年起，任哥伦比亚大学教授，直至去世.

莫伊舍佐恩是一位代数几何学家，早期从事复解析几何与代数几何基础的研究. 他建立了有关除了丰富性的"莫伊舍佐恩流形"(双映入同构于凯勒流形的复流形)及"中井-莫伊舍佐恩判据"等基本概念. 后他主要研究代数曲面，特别是它们的拓扑性质. 他 1977 年的有关椭圆曲面的讲义促使许多数学家开始了椭圆曲面的研究. 他在该领域的很多工作都与辫单值方法有关. 他在辫单值方面的一些想法导致他与泰希尔(Teicher，M.)构造了具非负符号差单连通代数曲面的第一个例子，从而否定了一般型曲面分类理论中的两个基本猜想. 他还第一次给

出了一般型同胚但不微分同胚的曲面的例子.他曾于 1967 年获莫斯科数学会奖.著作有《复曲面与复射影平面的连通和》(1977).

贾　菲(Jaffe,Arthur Michael,1937—　) 美国数学物理学家.生于纽约.早年就学于普林斯顿大学,1959 年获学士学位,1966 年获博士学位.在此之前的 1961 年还获剑桥大学硕士学位.1966—1967 年,任斯坦福大学助理教授.1967 年起,任教于哈佛大学,先后任助理教授、副教授,1970 年起任教授,1987—1990 年任数学系主任.他还是美国艺术与科学学院、纽约科学院的院士.1991—1996 年,任国际数学物理协会主席,1996 年,任美国数学会主席.他还曾应邀在 1978 年的国际数学家大会上作报告.从 1979 年起,他还任《数学物理通讯》主编.

贾菲是国际数学物理学界的活跃人物,经常出现在各种与数学物理有关的国际会议上,以及到各种与数学物理有关的暑期学校等处讲学.他和格利姆(Glimm,J.G.)一起建立了可构造场理论原理,成功地构造了 3 维时空中非平凡量子场.他曾与人合作分析了有关问题中的无限维拉普拉斯谱,证明了物理学家有关相变的猜想.他们证明所用的方法已成为数学物理的标准工具,并已影响着可构造场理论及统计物理和随机系统等领域.他在经典规范理论和循环上同调方面也做出了重要贡献.从 20 世纪 80 年代后期开始,他转向研究非交换微分几何,与人合作在整循环同调中构造了上循环.这是除特征标的非交换推广,现已成为指标理论的重要工具.

贾菲因证明相对论不变性的可计算性及量子力学和局部场理论方面的贡献,曾于 1980 年获海涅曼数学物理奖,还于 1979 年获纽约科学院数学物理科学奖.他与人合作著有《量子物理》(1981)等;其中,他与人合著的《涡旋与单极子》(1980)是经典、非线性场方程理论的重要文献.

康　威(Conway,John Horton,1937—　) 英国数学家.生地不详.早年就读于剑桥大学冈维尔与凯瓦斯学院,分别于 1959 年、1963 年、1964 年获学士、硕士和博士学位.后留校任教,1964—1973 年任纯粹数学讲师,1973—1983 年任纯粹数学与数理统计高级讲师,1983 年任数学教授.1988 年左右,到美国普林斯顿大学出任冯·诺伊曼教授席位.1981 年,还被选为伦敦皇家学会会员.

康威在编码理论、组合论、纽结理论和有限群等方面有重要贡献.在 20 世纪 60 年代晚期,他确定了利奇(Leech)格 L 的等距群,其中心商群现表示为 Co_1,这是与 L 和康威有关的三个单群中的第一个.他还证明了可用 L 来定义其他几个零星的单群.他确定并汇编了各种群的特征标表.1987 年获伦敦数学会首届波伊亚奖.著作有《正则代数与有限机》(1971)、《论数与对策》(1976)、《有限群图表》(1985)等.

拉特纳(Ratner Marina,1937—　) 美国女数学家.生于苏联.1961 年获莫斯科大学硕士学位,1969 年获博士学位.1961—1965 年,曾在柯尔莫哥洛夫(Колмогоров,А.Н.)的应用统计组等处工作 4 年.1969—1970 年,任莫斯科高等技术工程学校助教;1971—1974 年,任耶路撒冷希伯来大学讲师;1974—1975 年,任该校预科高级教师.1975 年,到美国伯克利加利福尼亚大学任助理教授,1982 年晋升为教授.1992 年被选为美国艺术与科学学院院士,1993 年被选为美国全国科学院院士.1994 年,曾应邀在国际数学家大会上作报告.

拉特纳主要研究遍历理论及其在其他领域的应用.她曾发现了各种“刚性”现象,建立了关于李群子群在这些群的齐性空间上作用的动力学的深刻而完整的理论,并发现了其与遍历理论的联系.20 世纪 80 年代初,她在极限圆流方面取得了重要成果,证明了极限圆之间的理论测度同构事实上是代数的,并证明了“拓扑拉格休内森猜想”.该问题可简述为:设 Γ 为李群 G 的离散子群,H 为由 G 的幂幺分支元素生成的子群;而 μ 为 G/Γ 上的有限测度,当 H 在 G/Γ 上左作用时不变且遍历,则 μ 有一个代数性质,即是在嵌入 G/Γ 的某齐性空间上的哈尔测度.她还证明了 S 算术型的拓扑拉格休内森猜想.1993 年,她曾获奥斯特洛夫斯基奖,1994 年又获美国全国科学院科学进步卡蒂奖.

克努特(Knuth,Donald Ervin,1938—　) 美国数学家、计算机科学家.生于威斯康星州米尔沃基.在 1960 年的一年中,他获凯斯理工学院学士和硕士学位.1963 年获加利福尼亚理工学院博士学位,并留校任数学助理教授,1968 年晋升为教授.同年,还成为斯坦福大学计算机科学教授.1989 年获牛津大学荣誉理学博士学位.1970 年,曾应邀在国际数学家大会上作报告.

克努特主要贡献在计算机程序编写技巧和计算机排版技术等方面.1962 年,他就开始了对计算机程序的研究,并写成了一套三卷本的《计算机程序技巧》(1968,1968,1973),该书充分体现了计算机与数学的关系.从数学的角度来看,是对数学教育的一大贡献,同时对一般计算机的科学影响也极大,因此他曾于 1986 年获美国数学会斯蒂尔奖.他还和本迪克斯合作首先设计了代数计算的项重写系统.1977 年,他开始了对数学书刊排版的研究,并发明了计算机排版系统,即 TEX 和 METAFONT 系统.在他五卷本的《计算机与排版》(1986)一书中对这些系统做了具体地阐述.他与人合作写成的《算法分析用数学》(1981)一书中,收入了算法分析必需的数学技

巧.他的著作曾被译成中、德、俄、日等多种文字出版.他曾多次获奖,除上面提到的还有:美国计算机协会1974年的图灵奖、1986年的计算机科学教育奖和软件系统奖等,1979年还获得了美国国家科学奖章.

诺维科夫(Новиков,Сергей Пегтрович,1938—) 俄国数学家.生于高尔基城,其父诺维科夫(Новцков,П. С.)是一位著名的数学家.1960年,他毕业于莫斯科大学.同年,考取了苏联科学院数学研究所研究班.1963年毕业留所工作.1966年,回莫斯科大学任教.同年晋升为教授,并被选为苏联科学院通讯院士.1981年成为正式院士.

诺维科夫的主要贡献在微分拓扑学方面.他首先用同伦论来解决配边理论问题,反过来又用配边理论解决同伦论问题.他把配边理论化成广义上同调理论,并仿照通常上同调理论来研究其种种性质,得出许多有趣的结果.他的工作推动了同伦论的发展,使配边理论成为现代拓扑学的重要方向之一.1964年,他用十分巧妙的方法证明了一般的流形上的叶状结构存在封闭的紧叶,得到叶状结构理论的一个重要结果.最突出的贡献是在1965年证明了微分流形有理庞特里亚金示性类的拓扑不变性.1970年左右,他转向研究与物理相关的数学问题,他把孤立子理论与代数几何学联系在一起,引起数学界与物理界的重视.此外,他对相对论和量子力学的基本数学问题也做了许多工作.由于诺维科夫在代数拓扑学方面的贡献,1970年在尼斯(Nice)召开的国际数学家大会上获菲尔兹奖.使他成为第一个获得这项荣誉的俄国人.

伯恩特(Berndt,Bruce Carl,1939—) 美国数学家.生于密歇根.1961年获阿尔比恩学院学士学位,1963年、1966年先后获麦迪逊威斯康星大学硕士学位、数学博士学位.1966—1967年,任教于英国格拉斯哥大学.1967年起,任教于伊利谱伊大学,1975年晋升为教授.1986年起,任《数学分析及其应用杂志》副主编.

伯恩特主要研究解析数论和经典分析.1972年左右,他曾证明了艾森斯坦级数的某些变换公式.后来他又致力于研究拉马努金(Ramanujan,S. A)笔记本中3000—4000个未证明的公式.经过他20多年的努力,取得了重要成果,并把这些成果与拉马努金笔记本中的资料一起汇编成五卷本《拉马努金笔记》(1985,1989,1991,1994,1996)出版,为数学界提供了难以得到的重要文献.为此他荣获美国数学会斯蒂尔数学阐述奖.他还曾于1989年和1994年两次获美国数学协会福特奖,还曾获艾伦多弗奖.他还与人合作编著了《拉马努金书信与评论》(1995)一书.

瓦拉德汉(Varandhan,S. R. Srinivasa,1940—) 美国数学家.生于印度马德拉斯.1959年获马德拉斯大学管辖区学院统计学学士学位.1963年获加尔各答印度统计研究所统计学博士学位,后到美国纽约大学库朗数学科学研究所做了3年博士后研究.1966年任该所助理教授,1968年成为副教授,1972年晋升为教授.1980—1984年、1992—1994年,他两次任研究所所长.他还是第三世界科学院和美国艺术与科学学院的院士.

瓦拉德汉的研究兴趣涉及概率论、偏微分方程和统计力学等.他对概率论及其应用做出了重要贡献.他与人合作在扩散过程的鞅表征方面的工作曾改变了马尔可夫过程的研究方法.他们在1979年出版的《多维扩散过程》一书,已是扩散过程的经典之作.马尔可夫过程占有时间泛函的东斯克(Donsker)-瓦拉德汉大偏差理论及其在二阶椭圆偏微分的谱理论方面的应用,在大偏差研究中确定了一组新的问题.他在一系列论文中给出了关于"大偏差原理"的表述,从而给出了对该领域的定义,并建立了以应用为基础的理论问题的有力工具.他与人合作对随机媒介的研究,他把大偏差和熵方法引入到相互作用粒子系统时间发展的流体动力极限的研究的工作,都对这些领域有着重要影响.他于1994年获美国数学会和美国工业与应用数学会联合颁发的伯克霍夫奖.他还著有《随机过程》(1968)等专著.

帕利斯(Palis,Jacob,1940—) 巴西数学家.生于巴西.1962年获联邦大学工程学士学位;1967年获美国伯克利加利福尼亚大学博士学位.自1968年起,他在巴西纯粹数学与应用数学研究所工作.1973年,他被选为巴西科学院院士.他曾于1978年应邀在国际数学家大会上作报告.1991年任国际数学联盟秘书长.

帕利斯对数学有着重要贡献,特别是在动力系统领域.他在这方面的基础性工作在理解可稳定系统,以及它们的分歧的部分性质中起了重要作用.他还在从整体观点看混沌系统方面有重要工作.在他的帮助下,巴西里约热内卢建立了纯粹数学与应用数学研究所,并已成为动力系统研究的一个国际中心.他曾获巴西科学奖和第三世界科学院数学奖,1995年又获美洲国家组织的国际豪斯瑟(Bernardo A. Haussay)科学奖.

奎 伦(Quillen,Daniel Gray,1940—) 美国数学家.生于新泽西州.在哈佛大学获博士学位,后任马萨诸塞理工学院数学教授.还被当选为美国科学院院士.奎伦在博士论文中就用微分几何方法解决了微分方程问题.1970年,他对代数K理论中的亚当斯猜想给出了解答;1976年,又得到塞尔猜想的证明.他还在同伦理论、形式群理论、上同调论

等方面取得重要成果. 1978 年,他荣获国际数学家大会颁发的菲尔兹奖.

邦别里(Bombieri,Enrico,1940—) 意大利数学家. 生于米兰. 1963 年在米兰大学获博士学位,1966 年任该校教授. 1978 年,当选为国际数学联盟的执行委员.

邦别里在许多新的数学领域取得了杰出的成就. 早年曾与英国数学家达文波特(Davenport,H.)共同研究素数分布理论,他在 1965 年发表的《论大筛法》一文中,给出了解决哥德巴赫猜想和孪生素数猜想的有效方法,即邦别里中值公式. 1967 年,邦别里转向研究解析函数论,不久就证明了关于单叶函数比伯巴赫猜想的一些结果. 后来,他又与比萨的几位学者合作,研究极小曲面问题,很快发现当 $n=7$ 时,$n+1$ 维欧氏空间中一类 n 维极小曲面可以有一个奇点. 1980 年,他又证明了有限单群分类问题中一类李型单群的惟一性. 邦别里于 1974 年获菲尔兹奖. 他的主要专著有《解析数论中的大筛法》(1974)等.

沙利文(Sullivan,Dennis Parnell,1941—) 美国数学家. 生于密歇根州休伦港. 早年就读于赖斯大学和普林斯顿大学,1965 年获普林斯顿大学博士学位. 曾于 1966 年在英国沃里克大学、1967—1969 年在伯克利加利福尼亚大学、1967—1972 年在马萨诸塞理工学院做研究工作. 1972—1973 年,任马萨诸塞理工学院教授. 1974 年成为法国巴黎高等科学研究所终身教授,1981 年起,又兼任纽约大学教授. 1990—1991 年,任美国数学会副主席. 他还是美国全国科学院和美国艺术与科学学院院士.

沙利文早期研究同伦理论与剜补术,并给出了一个新的几何观点. 他的这种从几何角度观察问题的方法导出了拓扑流形的很多重要成果. 他的以微分形式为基础的实与有理同伦型理论在复代数簇的拓扑等方面有着深刻的影响及应用. 他在叶状结构和动力系统方面也有重要贡献. 他还在拟保角和李普希茨流形方面证明了一些基础结果. 从 1980 年前后开始,他致力于保形动力学领域的研究,促使其形成为一个活跃而又重要的数学分支,此分支处于纯粹数学与应用数学的传统分界线上. 沙利文曾于 1971 年获美国数学会维布伦几何奖;1981 年获法国科学院嘉当几何奖;1994 年获费萨尔国王国际科学(数学)奖,他是 1987 年该奖授予数学家以来,第二个获此奖的数学家.

贝 里(Berry,Michael Victor,1941—) 英国数学物理学家. 曾获埃克塞特大学学士学位、阿特鲁斯大学博士学位. 1965—1967 年,在布里斯托尔大学做研究工作. 后来在该校任教,1967—1974 年任讲师,1974—1978 年任高级讲师,1978—1988 年任物理教授. 1988 年成为布里斯托尔大学皇家学会的研究教授. 1982 年,被选为伦敦皇家学会会员;1988 年成为瑞典乌普萨拉皇家科学学会会员.

贝里在波理论、量子力学的经典极限,以及指数渐近方面做出了重要贡献. 他对量子力学一致逼近的研究把拟经典理论拓广到了新的范围. 他在谱统计等的量子化理论方面也做了大量的重要工作,并发现了他的谱理论与黎曼 ζ 函数之间的关系. 他把突变理论应用到了波焦散曲线(面)及其他奇异性的分类和描述等. 他在用片形曲面研究波的散射方面做了大量先驱性工作,并开创了一个很重要的研究领域. 后来他在几何研究或称为"贝里"相位研究方面的工作也有着广泛的应用. 他在指数渐近领域的工作促使其成了一个具有广泛意义且渐趋成熟的领域. 他曾于 1993 年获伦敦数学会内勒奖. 他还曾在 1990 年获皇家学会的皇家奖章等. 著作有《光通过超声的绕射》(1966)等.

斯特鲁克(Stroock,Daniel Wyler,1940—) 美国数学家. 生于纽约州. 1962 年获哈佛大学福特学院学士学位,1966 年获洛克菲勒大学博士学位. 1966—1969 年,在纽约大学库朗数学科学研究所做博士后研究;1969—1972 年,任该校助理教授. 1972—1975 年,任科罗拉多大学副教授;1975—1984 年任教授,在此期间的 1979—1981 年任数学系主任. 1984 年起,任马萨诸塞理工学院数学教授. 1976—1982 年,任《伊利诺伊数学杂志》主编. 他还是纽约科学院院士.

斯特鲁克主要研究概率论. 他与瓦拉德汉(Varandhan,S. R. S.)合作引进了随机微分方程鞅解的新概念,从而使他们证明了解的存在性、惟一性,并讨论了以前用解析方法不能讨论的方程解的其他重要性质. 他们的方法已被广泛应用到证明其他各类扩散过程的收敛. 他因此荣获了 1996 年度美国数学会的斯蒂尔奖. 除了以上工作外,他还以普及所谓马利亚文演算(Malliavin Calculus)而著称. 著作有《多维扩散过程》(1979;与瓦拉德汗合著).

穆 迪(Moody,Robert,1941—) 加拿大数学家. 生于英国. 1962 年获萨斯喀彻(Saskatchewan)大学学士学位,1964 年、1966 年先后在加拿大多伦多大学获硕士、博士学位. 1966 年任萨斯喀彻大学助理教授,1976 年晋升为教授. 1989 年转阿尔伯达大学任教. 1980 年,他被选为加拿大皇家学会会员. 他还曾多次到美国、德国、法国、印度的多所大学和研究机构讲学.

穆迪主要研究李群、李代数和表示理论,近年来其兴趣在非周期序的数学,特别是非周期结晶. 从 1967 年开始,他与卡茨(Kac,V.)同时而相互独立地发展了一类新的无限维李代数理论,其中最重要

的一类现称为“卡茨-穆迪代数”，这类代数对物理有重要影响，特别是对粒子物理、场论和弦理论等. 1994年，他与卡茨共获威格纳奖章. 著作有《单李代数表示的主权重数表》(1985)和《仿射代数、权重数和分支规划》(1990;与人合著)等.

马斯登(Marsden, Jerrold Eldon, 1942—) 美国数学家. 生于不列颠哥伦比亚. 1968年获普林斯顿大学博士学位. 1967—1968年，在普林斯顿大学任教，后一直任教于伯克利加利福尼亚大学，开始任讲师，1976年晋升为教授，1984—1986年任非线性系统和动力学研究组主任.

马斯登的研究兴趣涉及哈密顿系统与流体力学、广义相对性、几何力学、非线性弹性学以及分歧理论与动力学系统，后来又集中于数学方法在物理和工程中重要力学系统的应用方面的研究. 他在力学中微分方程的研究方面有重要成果，曾证明了特殊经典微分方程中混沌的存在性. 他在动量映射方面从抽象的基础到具体应用等的研究工作有着重要影响. 马斯登因以上工作所获得的成果，曾于1990年获美国数学会和美国工业与应用数学会联合颁发的维纳应用数学奖. 他还于1972年开始对广义相对论的哈密顿结构进行研究，15年后，他与人合作在相对论场理论的解空间结构方面取得了重要成果，证明了广义相对论方程的代数复杂性、解空间的奇点仅为二次. 他还与人合作研究了约化理论，并把其应用到了流体与等离子力学上. 他还曾获1990—1991年度洪堡奖. 著有《整体分析在数学物理中的应用》(1973)、《力学基础》(1978,第2版;与人合著)、《霍普夫分歧及其应用》(1976;与人合著)等多种专著.

卡　森(Casson, Andrew John, 1943—) 英国数学家. 生于英国伦敦. 1965年获剑桥大学学士学位. 毕业后在剑桥大学三一学院任职，1967—1971年做研究工作，1971—1976年，任助理讲师，1976—1981年任讲师. 1981—1986年，任美国得克萨斯大学教授. 1986年起，任伯克利加利福尼亚大学教授. 1978年、1986年，曾先后两次应邀在国际数学家大会上作报告.

卡森主要研究拓扑学. 他在低维拓扑方面做出了重要贡献，发现了同调3维球面的一个整数值不变量，即模2约化为罗赫林(Rokhlin)不变量. 模2罗赫林不变量在高维拓扑非常重要，他对这种经典不变量的整数提升给出了与规范理论、辛几何及表示簇之间的联系，并已发展成了一个研究分支. 1974年，他引入了“灵活柄”，后来在4维流形的拓扑分类中起了重要作用. 因低维拓扑方面的工作成果，卡森曾于1991年获美国数学会维布伦奖. 著作有《在尼尔森和瑟斯顿意义上的曲面自同构》(1988;与人合著).

卡　茨(Kac, Victor, 1943—) 美国数学家. 生于苏联布古鲁斯兰(Buguruslan). 1965年获莫斯科大学学士和硕士学位，1968年获该校博士学位. 1968—1976年，任教于莫斯科电子工程学院. 1977年到美国马萨诸塞理工学院任数学教授. 卡茨曾到法国法兰西学院(1981)和巴黎高等师范学校(1993)、意大利比萨师范学校(1991)、日本(1984)、印度(1986)等处讲学，1985年还到中国科学院讲学. 1978年还曾应邀在国际数学家大会上作报告.

卡茨主要研究无限维李代数. 1967年开始，他与穆迪(Moody, R.)同时而相互独立地发展了一类新的无限维李代数理论，现在这类代数中最重要的一类称为“卡茨-穆迪代数”. 卡茨-穆迪代数对物理有重要影响，特别是对粒子物理、场论和弦理论等. 卡茨在1983年出版的《无限维李代数》，在1990年出版第三版时做了不少修改，特别强调了与有关的物理领域的联系. 1994年，在日本大阪举行的第20次物理中的群论方法讨论会上，卡茨与穆迪共获威格纳奖章.

哥罗莫夫(Gromov, Mikhael, 1943—) 无国籍数学家. 生于苏联布克西托格尔斯克. 1965年获列宁格勒大学硕士学位，1969年获博士学位，1973年获理学博士学位. 1967—1974年，任列宁格勒大学助理教授. 1974—1981年，任美国纽约州立大学数学教授. 1981—1982年，任法国巴黎第六大学教授. 1982年，开始任法国高等科学研究所研究员. 哥罗莫夫还是美国全国科学院、美国艺术与科学学院外籍院士. 法国科学院外籍院士，法兰西研究院院士. 他还曾于1970年和1978年两次在国际数学家大会上作报告.

哥罗莫夫在整体黎曼几何和辛几何、代数拓扑、几何群理论，以及偏微分方程理论等方面做出了重要贡献. 他在经典微分几何领域引入了很多新概念，使这一领域中原来看似无法解决的问题得以解决. 他还引入了联系微分几何结构和代数拓扑结构的新不变量. 1970年前后，他证明了任意非紧的微分流形容纳一个正截曲面率和一个负截面曲率的黎曼度量. 他的很多见解，扩大了人们对黎曼流形的拓扑性质和几何性质之间关系的了解，特别是他证明了一个直径有界、曲率接近零的流形是零流形. 他用截面曲率的下界估计了黎曼流形的贝蒂数. 他定义了一类流形的纯拓扑不变量，给出了双曲群理论，从而使离散群理论发生了重要变化. 他还对偏微分方程理论和辛流形理论等做出了重要贡献，构造出了不变量并第一次用以给出了辛刚性的度的阐述. 他于1993年获沃尔夫数学奖，还曾在1971年获莫斯科数学会奖，1981年获美国数学会维布伦几何奖，

1984 年获法国科学院嘉当奖，1989 年获巴黎保险联合会奖. 著作有《黎曼流形的度量结构》(1981)、《非正曲率流形》(1985；与人合著)和《偏微分关系》(1986)等.

德利涅(Deligne，Pierre，1944—) 比利时数学家. 生于布鲁塞尔. 14 岁开始读布尔巴基的《数学原理》，后就读于布鲁塞尔自由大学. 1965 年入高等师范学校. 1968 年获博士学位. 1970 年，26 岁时受聘为巴黎高等科学研究所任终身教授. 德利涅主要从事代数几何研究，1972 年和 1974 年，发表《论韦伊猜想》两篇论文，以简洁清晰的证明解决了这一代数几何的中心问题，得到了“韦伊-德利涅定理”. 他已发表论文 50 多篇，涉及到数学的多个分支. 在 1974 年和 1975 年，两度获得国家奖励；1978 年获菲尔兹奖.

弗拉斯卡(Flaschka，Hermann，1945—) 奥地利数学家. 生于奥地利奥布拉恩(Oeblarn). 1970 年获美国马萨诸塞理工学院博士学位. 1980—1981 年，曾任日本京都数学科学研究所访问教授，后任亚利桑那大学教授. 他是《物理学 D：非线性现象》杂志的创办人之一，从 1980 年起为该杂志的主编之一.

弗拉斯卡对完全可积系统有重要贡献. 他发现了托达(Toda)链的完全可积性，并对临界冲击速度的出现给出了解释. 他曾参与对 *KdV* 方程解的多相位振荡推导过平均方程. 20 世纪 80 年代以来，他用现代微分几何和代数方法研究了完全可积系统，他把舒尔-霍恩-科斯坦特(Schur - Horn Kostant)凸性定理推广到了无限维情形. 1995 年，他获美国数学会和美国工业与应用数学会维纳应用数学奖.

艾泽曼(Aizenman，Michael，1945—) 美国数学物理学家. 生于苏联，在以色列长大，并在希伯来大学接受大学本科教育. 1975 年获美国耶西瓦大学博士学位. 1974—1975 年，曾在库朗数学科学研究所访问. 1975—1977 年，在普林斯顿高等研究院做博士后研究. 1977—1982 年任普林斯顿大学物理系助理教授，后任拉特格斯大学数学与物理副教授，1984 年晋升为教授. 1987—1990 年，任库朗数学科学研究所数学教授，同时任纽约大学物理系教授. 1990 年起，任普林斯顿大学物理与数学教授. 1983 年，曾应邀在国际数学家大会上作报告.

艾泽曼的研究兴趣主要在与数学物理有关的领域，集中于对出自统计力学与量子域理论的问题的数学分析. 他在统计力学中新颖的、非扰动性的数学方法方面有突出贡献. 他还用这些方法解决了关于临界现象、相变和量子力学理论中的一些长期未能解决的重要问题. 为此，艾泽曼于 1990 年获美国数学会和美国工业与应用数学会联合颁发的维纳应用数学奖.

麦克达夫(Mcduff，Dusa，1945—) 旅美英国女数学家. 生于英国伦敦. 1967 年获爱丁堡大学学士学位，1971 年获剑桥大学博士学位，后曾在该校做 2 年研究工作. 1973—1976 年在约克大学、1976—1978 年在沃里克大学任讲师. 1978 年赴美任教于纽约州立大学，20 世纪 80 年代升为教授. 1990 年，曾应邀在国际数学家大会上作报告.

麦克达夫早期曾集中研究过微分同胚群的分类空间与叶状结构理论间的关系. 20 世纪 80 年代，她从事整体辛几何的研究，并取得了重要成果，首先在流形上构造了属于同一上同调类且不合痕的辛结构. 她还给出了具相切边界的辛流形和具伪凸边界的复流形间类似的限度. 1989 年前后，她对包含具非负自相交数辛嵌入 2 维球的紧辛流形进行了完整的分类，还建立了 4 维辛流形为有理曲面或直纹曲面奇异(blow - up)的简洁判别式. 1991 年，她获萨特(Ruth Lyttle Satter)数学奖. 该奖专门奖励女数学家在数学研究中的突出成就.

福内斯(Fornaess，John Erik，1946—) 美国数学家. 生于挪威哈马尔. 早年曾在奥斯陆大学学习数学，1974 年获华盛顿大学博士学位. 1974—1991 年任教于普林斯顿大学，1976—1978 年任助理教授，1978—1982 年任副教授，1982—1991 年任教授. 1991 年起，任密歇根大学教授. 福内斯曾还到欧洲多所高校及研究机构访问、讲学. 1983 年，曾应邀在国际数学家大会上作报告.

福内斯主要从事多复变量理论的研究，并有许多基础性贡献. 对这领域的若干重要分支的研究有重要影响. 他在弱伪凸域、嵌入定理、全纯映射、逼近定理、峰函数、列维问题、多重次调和函数、*CR* 函数、伯格曼度量等方面的工作中都做出了重要的创见性成果. 福内斯还曾于 1994 年获伯格曼奖.

瑟斯顿(Thurston，Williaam P.，1946—) 美国数学家. 生于华盛顿. 曾在伯克利加利福尼亚大学深造，1972 年获博士学位. 1974 年，28 岁时受聘为普林斯顿大学教授. 瑟斯顿对一般流形上叶状结构的存在、性质及其分类取得了重要成果，并于 1976 年赢得美国数学会 5 年颁发一次的维布伦奖. 此后，他转向三维流形的拓扑学研究，又借助计算机基本完成了二维流形的拓扑分类. 为此，他荣获了 1982 年度的菲尔兹奖.

马尔库利斯(Маргулис，Г. А. 1946—) 俄国数学家. 生于莫斯科. 早年在莫斯科大学学习，接受盖尔范德(Гельфанд，И. М.)的培养和严格训练. 大学毕业后在苏联科学院莫斯科通讯与信息问题研究所工作. 马尔库利斯的主要贡献在群论方面. 1968 年，他对非紧致情况下的赛尔伯格猜想做出了突破性的研究. 1969—1974 年，他经过深入研究，彻底证

明了非紧致情形下的赛尔伯格猜想. 1974 年,他综合地利用代数、分析和数论的近代成果,证明了这个猜想的紧致情形,得到了数学界的高度评价,并因此荣获了 1978 年的菲尔兹奖. 但当时他未能如愿地到赫尔辛基领奖,直到 1979 年他才获准到德意志联邦共和国访问,国际数学联合会才把菲尔兹奖发给他.

拉兹科维奇(Laczkovich, Miklos, 1946—) 匈牙利数学家. 生地不详. 1971 年获布达佩斯洛兰德·厄特沃什大学理学硕士学位,1974 年获博士学位. 1992 年又获匈牙利科学院理学博士学位. 1993 年,被选为匈牙利科学院通讯院士. 现任洛兰德·厄特沃什大学数学教授. 他还曾在意大利那不勒斯大学、美国密歇根州立大学、英国伦敦大学学院等多所大学和研究机构任访问教职. 1992 年,他曾应邀在第一届欧洲数学大会上作报告.

拉兹科维奇喜欢研究未解决的难题,并在研究过程中发现这些问题与看似完全不同数学领域的其他问题之间意想不到的联系,然后把相关问题都解决. 他曾把泛函不等式的肯帕曼(Kemperman)问题化成为丢番图逼近问题而解决了这 10 多年未能解决的问题. 他还通过求"平均型"积分方程振荡解,解决了某些递推解在无限处的阶的问题. 最重要的、首推的是他解决了塔尔斯基(Tarski, A.)于 1925 年提出的"圆求方"问题. 他用图论和数论中关于序列的一致分布的深刻思想证明了圆和正方形是可等度分解的,而且只能通过平移才可建立. 此结果实际上已超出了塔尔斯基的猜想. 因以上的研究成果,他曾获 1993 年奥斯特洛夫斯基奖.

戈德菲尔德(Goldfeld, Dorian M., 1947—) 美国数学家. 生于德国马尔堡. 1967 年、1969 年先后获哥伦比亚大学学士和博士学位. 1967—1971 年为伯克利加利福尼亚大学米勒研究员. 1971—1972 年,在以色列希伯来大学做博士后研究,1972—1973 年,任以色列特拉维夫大学讲师. 1973—1974 年为普林斯顿高等研究院成员. 1974—1976 年,任意大利比萨高等师范学校访问教授. 1976—1979 年为马萨诸塞理工学院助理教授,1979—1982 年为副教授. 1983—1985 年,任奥斯汀得克萨斯大学副教授. 1985 年起,任哥伦比亚大学教授. 1986 年,曾应邀在国际数学家大会上作了 45 分钟报告.

戈德菲尔德主要研究数论及有关问题. 1985 年,他给出了一个解决关于虚二次域类数的高斯猜想的解析方法,构造了一个求一个给定类数的所有虚二次域的有效算法. 他的工作与格罗斯(Gross, B. H.)和扎盖尔(Zagier, D. B.)1986 年的工作结合起来,解决了高斯猜想,给出了给定类数所有虚二次域判别式的有效界. 他还对求给定类数的所有实二次域的算法有兴趣. 他曾于 1985 年获沃恩奖,1987 年获美国数学会柯尔数论奖.

孔 涅(Connes, Alan, 1947—) 法国数学家. 1965 年,就学于巴黎师范学校. 1970 年,到法国国家研究中心工作. 1973 年,获法国国家博士学位. 1975 年,任巴黎大学教授. 1982 年,当选为法国科学院院士. 孔涅主要从事算子代数研究,博士论文为《Ⅲ型因子的分类》(1973),进一步又将这些结果归为Ⅱ型代数及其自同构,然后按外自同构进行系统归类,从根本上解决上代数分类问题. 因此,在 1975 年、1976 年、1977 年、1980 年、1981 年,连续荣获国家等各级科学奖,还于 1982 年荣获国际数学家大会颁发的菲尔兹奖.

舍恩菲尔德(Schoenfeld, Alan Henry, 1947—) 美国数学家、数学教育家. 生于纽约. 1968 年毕业于纽约昆斯学院,1969 年、1973 年先后获斯坦福大学硕士和博士学位. 1973—1975 年,任戴维斯加利福尼亚大学数学讲师. 1975—1978 年,任伯克利加利福尼亚大学科学教育讲师. 1978—1981 年,任哈密尔顿学院助理教授、副教授. 1981 年,任罗切斯特大学数学与教育副教授. 现任伯克利加利福尼亚大学教授,并任数学、科学与技术教育部主管.

舍恩菲尔德原来研究拓扑存在定理的测度理论推广,后受波伊亚教育思想的影响,研究数学教育. 他主要研究数学思维与学习,并着重研究数学问题解决的心理学. 他在 1985 年出版的《数学问题解决》一书中,提出了"数学行为理论",并指出个人的数学行为取决于:

1. 个人的数学基础.
2. 使用探索的能力.
3. 控制自己对基础和探索能力使用的技巧.
4. 信心.

舍恩菲尔德还指出一次数学活动中的努力成功与否取决于基础、探索、控制和信心. 他还对以上四个方面的含意作了阐述. 1980 年,因《教问题解决的技巧》一文,而获美国数学协会福特奖. 此外,他还著有《认知科学与数学教育》(1987)和《问题解决:一个世界性的思考》(1988;与人合著). 此外,他在数学教育、认知科学和问题解决领域,还有不少社会实践活动.

塔尔杨(Tarjan, Robert Endre, 1948—) 美国计算机科学家、数学家. 生于加利福尼亚波莫纳. 1969 年获加利福尼亚理工学院数学学士学位,1971 年、1972 年先后获斯坦福大学计算机科学硕士和博士学位. 1972—1973 年,任康奈尔大学计算机科学助理教授. 1973—1975 年,在伯克利加利福尼亚大学做研究工作. 1975—1977 年,任斯坦福大学计算机科学助理教授;1977—1980 年任副教授. 1980 年以后,任贝尔实验室技术员,并于 1981 年兼任纽约

大学副教授，1985 年，开始兼任普林斯顿大学计算机科学教授. 同年，被选为美国艺术与科学学院院士.

塔尔杨的贡献主要在算法设计与分析、数据结构的基础性工作等方面. 他是组合算法，特别是图理论算法的主要设计者. 他的工作对组合论方法的产生、进而统一对组合论的看法和巧妙的经济数据结构的出现都有着重要意义. 他还与合作者提出了"深探法"，用时间与图的边数成线性比例的算法测试图的可平面性等. 他们还用该方法求出了有限有向图中的节"控制器"和分析了某些类有向图的闭结构，而这些有向图在计算机程序的整体结构分析中起着重要作用. 他还和合作者把图理论技术应用到了数值分析，确定了稀疏矩阵反演的最佳消阶和平面图有利的剖分阶. 他给出了"组合树"数据结构. 塔尔杨于 1983 年获首次颁奖的奈望林纳奖，1986 年还获美国计算机协会图灵奖. 著作有《数据结构和网络算法》(1983)、《组合论引论注记》(1983；与人合著)等.

马　尼(Mañé，Ricardo，1948—1995)　巴西数学家. 生于乌拉圭(Uruguay)，卒于巴西里约热内卢. 1973 年获巴西纯粹数学与应用数学研究所博士学位. 后一直在该所从事研究工作. 1994 年，马尼被选为巴西科学院院士. 他还于 1983 年和 1994 年应邀在国际数学家大会的大组会上作报告.

马尼主要研究微分动力系统的遍历理论，在该领域的许多问题上，他都获得了基础性成果. 他解决了描述结构可稳定系统的特征问题. 所谓结构可稳定动力系统大致上就是当系统稍有扰动时，其轨道结构保持拓扑不变. 20 世纪 60 年代，曾有人猜想了结构稳定性的充分必要条件. 20 世纪 70 年代早期证明了充分性，但必要性没有解决，并被称为稳定性猜想. 在别人部分工作的基础上，马尼于 1986 年证明了微分同胚稳定性猜想. 他还在有理映射方面做了与稳定猜想类似的工作. 晚年，他研究了守恒动力系统的变分遍历理论. 1994 年，还获得了第三世界科学院的数学奖.

瓦林特(Valiant，Leslie，1949—　)　英国应用数学家. 生于匈牙利布达佩斯. 1970 年获剑桥大学国王学院数学硕士学位. 1970—1971 年，在伦敦帝国学院学习，并获计算机科学证书. 1973 年获沃里克大学博士学位. 1973—1974 年，在卡内基-梅隆大学访问. 1974—1976 年，任利兹大学计算机研究中心讲师. 1977—1982 年，任爱丁堡大学计算机科学系讲师、高级讲师. 后任美国哈佛大学计算机科学和应用数学教授.

瓦林特在计数理论方面有重要成就，工作涉及计算机科学领域中很多方面. 在他之前，一般认为识别算法在句长为 n 时需用时间 n^3. 1975 年，他证明了通过简化为整数矩阵的乘法，时间可小于立方. 一个 m 超集线器是一个有 m 个输入和 m 个输出结点的有向图，按其边数计其大小. 他发现了存在大小与 m 成线性关系的 m 超集线器. 证明中他用到了图的嵌入性质和图的路线性质，这导致后来出现了一般意义上的平行计算机理论. 他在图灵机方面也有重要贡献. 1979 年，他把注意力集中到了计数问题. 他发现了各种相应于容易检索问题的完全计数问题，因而大大推广了 NP 完全性理论. 对于有向图的子树计数、求一个连结不可靠的网络失效概率、双向图完全匹配的计数等问题，他用数理逻辑、图论和代数的思想概念证明了这些问题的完全性. 他还参与了对理论计算机科学的中心问题的表述、设计和求解技术的证明等，并给出了一些重要的新概念. 他曾于 1986 年获奈望林纳奖.

费弗曼(Fefferman，Charles，1949—　)　美国数学家. 生于华盛顿. 14 岁入大学，1966 年获马里兰大学学士学位，1969 年获普林斯顿大学博士学位，后留校任教. 但很快他又去了芝加哥大学，1971 年成为美国大学中最年轻的教授. 1974 年返回普林斯顿大学任教. 1972 年，被选为美国艺术与科学学院院士；1979 年，被选为美国全国科学院院士，并获得了多所大学荣誉学位.

费弗曼主要研究调和分析、偏微分方程和多复变函数. 在两个变量周期函数的傅里叶级数的收敛性方面他取得了重要成果. 在有界平均振动函数(BMO 函数)方面，他和施坦(Stein，E. M.)于 1972 年给出了涉及 BMO 空间构造特征的费弗曼-施坦分解. 因此判断一个函数是否属于 BMO 空间可以用调和分析的语言来表述与刻画. 同时他们还证明了 $H^1(R^n)$ 的对偶空间是 BMO 空间，使 BMO 空间成为研究 H^1 的许多问题的新工具. 在多复变函数理论方面，他于 1974 年证明了从一个有光滑边界的严格伪凸区域到另一个区域的双全纯映射直到边界都是光滑的. 1976 年，他还在 $d\Omega \times S_1$ 上构造了一个不确定度量，其中 $d\Omega$ 为多复变量的严格伪凸域的边界，S_1 为单位圆. 他还在 1973 年与人合作在偏微分方程方面得到了非退化线性偏微分方程的局部可解性的结果. 1971 年，他获得了萨勒姆奖，1976 年获美国国家科学基金会的沃特曼奖，1978 年获菲尔兹奖. 因其 1974 年发表的《伯格曼核和伪凸域的双全纯映射》等三篇文章在伯格曼核及其应用方面的重要贡献，而于 1992 年获伯格曼奖.

格罗斯(Gross，Benedict H.，1950—　)　美国数学家. 生于新泽西州南奥兰治. 1971 年获哈佛大学学士学位，1974 年获牛津大学硕士学位，1978 年获哈佛大学博士学位. 1978—1982 年，任教于普林斯顿大学. 1982—1985 年，任布朗大学副教授和教

授.1985年起,任哈佛大学教授.1986年,他曾应邀在国际数学家大会上作了45分钟的报告.

格罗斯研究数论、模形式理论等,在 L 函数、L 级数等方面都做了重要工作.1986年,他和扎盖尔(Zagier,D.B.)合作建立了涉及模曲线上特定点到 L 级数在 $S=1$ 的一阶导数标准高度的一个新的极限公式,并用它给出了3阶消没 L 级数的例子.把它应用到类数与戈德菲尔德(Goldfeld,D.M.)于1985年的工作一起给出了一个给定类数所有虚二次域判别式的有效界,解决了高斯(Gauss,C.F.)的有关猜想.他与扎盖尔的工作还证明了伯奇-斯温纳顿-戴尔(Birch - Swinnerton - Dyer)关于椭圆曲线 L 级数导数特定值猜想的一种特殊情况.1987年,他们还给出了雅可比形式系数乘积的公式.1987年,格罗斯获得了美国数学会柯尔数论奖.他的著作有《有复数乘法椭圆曲线上的算术》(1980).

弗里德曼(Freedman,Michael Hartley,1951—) 美国数学家.生于洛杉矶.1973年获普林斯顿大学博士学位.1973—1975年,任加利福尼亚大学讲师.1975—1976年,在普林斯顿大学做研究工作.1976年后,任圣迭戈加利福尼亚大学教授.1984年,他被选为美国全国科学院院士;此前还是美国艺术与科学学院和纽约科学院的院士.1982年起,任《微分几何杂志》副主编;1984—1991年为《数学年刊》、1987年起为《美国数学会杂志》副主编.

弗里德曼在1982年证明了有名的4维拓扑流形的庞加莱猜想,并给出了4维拓扑流形的分类定理.定理叙述简洁且易于使用.他用两个适合于同胚的简单不变量表征了所有紧的、单连通的4维拓扑流形,因而提供了一个完整的分类.这一工作揭示了很多以前不知道的这类流形,也揭示了很多已知流形间的同胚关系.他通过证明一个同伦条件解决了单连通剜补术问题.在闭单连通4维流形方面他还证明了任意正同伦等价于 R^4 的4维流形同胚于 R^4,有关结果对 $S^3\times R$ 也成立,并且他还证明了存在一个不可光滑的闭4维流形,有不等价于组合三剖分的4维流形.他1982年的工作与唐纳森(Donaldson,S.K.)的工作一起给出了 R^4 中怪的光滑的例子,揭示了4维欧氏空间与其他维数的欧氏空间的不同,除了通常的微分结构外,还有别的不寻常的微分结构.弗里德曼于1986年获菲尔兹奖,同年还获美国数学会维布伦几何奖;1987年获美国国家科学奖章,1988年获洪堡奖.他的著作有《四维空间分类》(1982).

扎盖尔(Zagier,Don Bernard,1951—) 德国数学家.生于德国海德堡.13岁结束中学学习,学习一年英语后,即到马萨诸塞理工学院学习,两年后获数学与物理学士学位,后到英国牛津大学随阿蒂亚(Atiyah,M.F.)学习拓扑学.1971年起,到德国波恩大学学习并任职.1972年获牛津大学博士学位.1979年起,任美国马里兰大学教授.1984年起,成为波恩的马克斯·普朗克研究所成员.

扎盖尔主要研究数论与模形式理论.他曾在1977年编制过迄今为止较为完善的素数表,列出了不大于50 000 000的所有素数.1986年,在和格罗斯(Gross,B.H.)合作的《希格纳(Heegner,K.)点与 L 级数的导数》一文中,以模曲线雅可比上希格纳点的算术性质的形式给出了某些模形式兰金(Rankin,R.A.)L 级数在 $S=1$ 的一阶导数的闭公式.他们并由此为在 Q 上的椭圆曲线上构造有理点做出了贡献,还得到了当 $m=r=3$ 时,Q 上存在椭圆曲线.因此与戈德菲尔德(Goldfeld,D.M.)1985年的工作一起给出了虚二次域上的高斯类数问题的解,给出了一个给定类数所有虚二次域判定式的有效界.为此曾在1987年与戈德菲尔德、格罗斯共获美国数学会柯尔数论奖,他还曾于1983年获德国利奥彼迪纳科学院卡鲁斯奖.著作有《雅可比形式理论》(1985).

卡特林(Catlin,David,1952—) 美国数学家.生于宾夕法尼亚的罗切斯特.1974年获密歇根大学学士学位,1978年获普林斯顿大学博士学位.1978—1980年,任教于芝加哥大学.1980—1983年,任普林斯顿大学助理教授.1983年起,任教于普度大学,先为副教授,后晋升为教授.1986年,曾应邀在国际数学家大会上作报告.

卡特林主要研究多复变函数.1983——1987年,他证明了伪凸域 Ω 上的 $\bar{\partial}$ 纽曼问题在 Ω 边界上的 P 点是次椭圆的,当且仅当是有限型的(即通过 P 的复解析曲线与 Ω 的边界有有限价接触).他的证明包括了若干在偏微分方程和多复变函数方面的新思想,如构造多重次调和函数,并因此导致他建立了重要的伪凸域边界不变量.这一结果可推出伯格曼射影和伯格曼核函数的行为.他还证明了小林(Kobayashi)、拉卡西奥多里(Carathéodory,C.)和伯格曼(Bergman,S.)等三种度量都等价于 C^2 中有限型伪凸域.他在伪凸域上的全纯函数方面也取得了重要成果,并推广了仑西的嵌入定理.卡特林于1988年获首次颁奖的伯格曼奖.

怀尔斯(Wiles,Andrew,1953—) 英国数学家.生于剑桥.1974年获牛津大学默顿学院学士学位,1977年获剑桥大学克莱尔学院博士学位.1977—1980年,任美国哈佛大学助理教授.1981年,在普林斯顿高等研究院做研究工作.后到欧洲多所大学访问后,于1982年任普林斯顿大学教授.1988—1990年,他还是皇家学会在牛津大学的研究教授.1989年,成为伦敦皇家学会会员.

怀尔斯因对数论及有关领域的重要贡献，因在有关基础性猜想的重要进展方面的工作，因解决了费马大定理，而获1995—1996年度的沃尔夫数学奖.他在解决数论中长期未解决的一些基础问题的过程中，做出了重要贡献，是他引入了意义深远而又新颖的方法.1993年6月，他在英国牛顿数学科学研究所的演讲中，对有理数域上的一类椭圆曲线，证明了志村-谷山-韦伊猜想，即椭圆曲线是模曲线.证明中他把一个给定的椭圆曲线的志村-谷山-韦伊猜想归结成了一个数值不等式.1994年，他和泰勒(Taylor,R.)合作建立了赫克代数的环论性质.在此基础上他最终完成了对影响数论已达两个世纪的费马大定理的证明.他还在伯奇-斯温纳顿-戴尔猜想、岩泽理论的主猜想等方面都做出了贡献.

陶布斯(Taubes,Clifford Henry,1954—) 美国数学家.生于纽约.1975年获康奈尔大学学士学位，1978年、1980年先后获哈佛大学硕士和博士学位.1980—1983年，任哈佛大学初级研究员，后到伯克利加利福尼亚大学任副教授，1985年返回哈佛大学任教授.1990年，被选为美国艺术与科学学院院士.1986年，曾应邀在国际数学家大会上作报告.

陶布斯的研究工作涉及微分几何、非线性偏微分方程和数学物理等领域.他曾在杨-米尔斯理论方面做过基础性工作，为杨-米尔斯泛函的研究打下了几何与分析的基础.1982年，他发表的《非自对偶4维流形上的自对偶杨-米尔斯联络》一文中，已包含了唐纳森(Donaldson,S.K.)的第一个非存在性定理的技术基础.他对理解杨-米尔斯方程的解可以在度量任意4维流形上构造的问题有着重要贡献.他1987年对端周期4维流形的分析为分析流形上杨-米尔斯域提供了基本工具.陶布斯于1991年获美国数学会维布伦奖.

法尔廷斯(Faltings,Gerd,1954—) 德国数学家.生于盖尔森基兴-比尔.1978年获明斯特大学博士学位.1978—1979年，在美国哈佛大学作访问研究.1979—1982年，任明斯特大学助理教授.1982年，任伍珀塔尔大学教授.1984年以后任美国普林斯顿大学教授.

法尔廷斯的工作主要在算术代数几何方面.1983年，他证明了莫德尔在1922年给出的猜想：在亏格大于1的代数曲线上仅有有限个有理点.在此之前虽有人试图证明，但没有成功.20世纪70年代初，代数几何与数论等方面出现了新的进展.在这些成果的基础上法尔廷斯首先证明了算术基础和算术代数几何等方面的有关猜想，如沙法列维奇猜想(即关于阿贝尔簇的猜想)、阿贝尔簇分类问题与伽罗瓦表示法分类之间关系的猜想、半单性猜想当$d=1$时的情况等.他进而证明了莫德尔猜想，并因此于1986年获菲尔兹奖.他还在1983年用代数几何方法证明了费马大定理当n固定时，只有有限多个两两互素的正整数解.他还曾于1983年获格丁根科学院的海涅曼奖.

多布奇斯(Daubechies,Ingrid,1954—) 美国女数学家.生于比利时蒙特伦(Houthalen).早年就读于布鲁塞尔自由大学，1975年获学士学位，1980年获博士学位，后留校做研究工作.1987—1994年，任职于AT&T贝尔实验室.在此期间的1991—1993年，曾在拉特格斯大学工作.1995年起，为普林斯顿大学数学教授.1994年，曾应邀在国际数学家大会上作报告.

多布奇斯在小波分析领域有重要贡献.她根据讲稿整理出版的《小波十讲》(1992)对小波理论的理解及应用有重要影响.她发现了小波概念的出处并证明了各种方法间的关系.通过其工作，从1910年起就为人所知的哈尔小波首次被证明是紧支撑非光滑小波的一个完整族，是具分形高阶导数函数的很好的例子，以前此类小波一直没能被很好利用.后来她还与人合作发现了正交威尔森基，首次为找到正交基及高斯基余弦包库提供了途径.现已成为时频分析及偏微分方程的数值分析的标准工具.她与人合作在双正交小波基方面的工作，为小波在图象压缩算法中的应用提供了更灵活的方法.她还与人合作在路线积分及齐性化方面有重要成果，对人们理解多级相互作用及其算法有重要作用.她的工作不仅对数学，而且对自然科学及工程学都有重要意义.因对小波等方面的贡献，多布奇斯曾获1994年美国数学会斯蒂尔数学阐述奖，并于1997年获美国数学会塞特(Satter)奖.

贝　尔(Bell,Steve,1954—) 美国数学家.生于密歇根州伊普锡兰提.1976年获密歇根大学学士学位；1980年获马萨诸塞理工学院博士学位.1980—1981年，在普林斯顿大学作访问研究；1982—1984年任助理教授；1984—1985年任访问副教授.1984年起，任教于普度大学，1985年任副教授，1988年晋升为教授.

贝尔的研究工作涉及复变量函数和偏微分方程等.1980年，他与人合作简化并推广了费弗曼(Fefferman,C.)关于双全纯映射的定理，并开辟了一个新的研究领域.费弗曼曾在强伪凸域上给出了伯格曼核的详细分析，证明了这样两种域之间的双全纯映射可光滑开拓到边界.贝尔与合作者把该结果，从强伪凸域推广到了非强伪凸域及适当的全纯映射.自上述成果发表后，贝尔又在伯格曼核及全纯映射的研究方面做出了重要贡献.1991年，他获得了第二届伯格曼奖.

巴雷特(Barrett,David E.1955—) 美国数

学家. 生于纽约的罗切斯特. 1977 年获奥伯林学院学士学位；1978 年、1982 年先后获芝加哥大学硕士、博士学位. 1982—1984 年，任普林斯顿大学讲师，1984—1987 年任助理教授. 1987 年，任芝加哥大学副教授，1993 年晋升任教授.

巴雷特在多复变理论方面有重要贡献. 他在具实解析边界的 C^2 中构造的域具有伯格曼(Bergman,S.)射影为无界的一个 C^∞ 紧支撑函数这一性质. 这一结果在伯格曼射影算子的研究中起着重要作用. 在他之前的很多有关这种射影的正则结果都限于在伪凸域，但并不知道伪凸域条件是否是基本假设. 另外，他还发现了在迪德里希-福尔卡斯(Diederich - Forrcaess)蛇管域上，伯格曼射影对大的 S 并不能保存索伯列夫空间 H^s. 这一意外的结果，导致了克里斯特(Christ,M.)证明了在这种域上的不正则性. 为此，巴雷特获得了 1997 年的伯格曼奖.

鲁　宾(Rubin,Karl,1956—　) 美国数学家. 生于伊利诺伊州厄巴纳. 1976 年获普林斯顿大学学士学位；1977 年、1981 年先后获哈佛大学硕士、博士学位. 1981—1984 年为国家科学基金会博士后研究人员. 1984 年起，任教于俄亥俄州立大学，初为助理教授，1987 年起任教授，其中 1988—1989 学术年还任哥伦比亚大学教授. 他还到普林斯顿高等研究院、伯克利数学科学研究所访问研究各 1 年；还访问过中国南开大学的数学研究所.

鲁宾在椭圆曲线和岩泽理论方面有重要贡献. 1987 年，他证明了塔特-沙法列维奇群是有限的，并且有伯奇与斯温纳顿-戴尔猜想预测的阶数；而且如果 L 函数在 1 这点有单零点，则有理点群的阶数为 1. 1988 年，他还直接证明了虚二次域岩泽理论的主猜想. 该主猜想在有复数乘法的椭圆曲线的算术方面有非常重要的推论. 他同时还对一些具有复数乘法的椭圆曲线，证明了关于塞尔默群在分圆域的 Z_P 扩张上的行为的马组尔猜想. 1992 年，他曾获美国数学会柯尔代数奖.

唐纳森(Donaldson,Simon Kirwan,1957—　) 英国数学家. 生于英格兰的剑桥. 1979 年获剑桥大学彭布罗克学院硕士学位；1983 年获牛津大学武斯特学院博士学位. 1983—1985 年为牛津大学的初级研究员；同时还是美国普林斯顿高等研究院的访问成员. 1985 年起，任牛津大学数学教授. 他还是伦敦皇家学会会员.

唐纳森在拓扑学的研究上有重要成就. 在研究闭的有向四维流形时，一般会用到一个拓扑不变量，它是由 2 闭链相交性质定义的，并依赖于基的选择、行列式为 ± 1 的对称整数矩阵. 弗里德曼(Фридман, А. А.)证明了对 4 维拓扑流形而言都能出现这类矩阵. 1982 年，还是二年级博士研究生的唐纳森开创性地把杨-米尔斯理论应用到了 4 维流形拓扑的研究，证明了对于四维微分流形，只有等价于单位阵的正定矩阵才会有上述矩阵. 这就证明了拓扑情况与微分情况之间的内在差别，也就是说在欧氏空间上存在着“怪”的光滑结构，即拓扑等价但不微分等价于 R^4 的四维流形，而且只出现在 4 维情况. 他证明了任意代数曲面上瞬子参数空间与代数几何上的可稳定向量丛有一致的纯代数的表述. 他引入了奇数阶 $b^+>1$ 的 4 维光滑流形的与度量无关的不变量，已证明用于区分拓扑等价的 4 维光滑流形很有效. 这些不变量表征了在反自对偶连络模空间的代数拓扑中 4 维光滑流形的微分结构. 最近他给出了任意维流形辛结构存在的新的障碍，证明了如果 (V,ω) 是紧辛流形，ω 为整数或有理数类，则对所有 k，类 $k\omega$ 对偶于辛子流形 $Wk\subset V$. 他的工作使人们对 4 维光滑流形有了更好的理解，发现了 4 维几何的一些未预想到的现象. 唐纳森于 1984 年获伦敦数学会的初级怀特海奖，1986 年获菲尔兹奖，1994 年又获瑞典皇家科学院颁发的国际克拉福德奖.

撰　稿　马国选　王青建　邓明立　刘贤俊　齐治平
杜瑞芝　邵明湖　胡作玄　胡炳生
审　阅　杜瑞芝　张奠宙　胡作玄　梁宗巨

数　学　符　号　史

数学符号(mathematical signs and symbols)　数学专用名词. 指用以表示数学概念、数学关系等的符号和记号. 数学符号大致可分为以下7类：

1. 运算符号. 用以表示若干数学元素(这里将数字、文字、向量、集合、矩阵、函数等能参与数学运算者，均称为数学元素)之间的运算性质的符号，如＋，－，×，÷，⊕，⊗，Δ，$\dotplus$，∑，∏等.

2. 性质符号. 用以表示某个或某些数学元素或数学概念的性质的符号. 如正、负号，又如在公理集合论中用ν，Σ，τ分别表示元素的变元性质符号、公式性质符号，用Cog表示聚合的性质符号，Sol表示二型类的性质符号等.

3. 逻辑符号. 如∵(因为)，∴(所以)，∀(一切)，∃(存在)，￢(非)，⇒(推出)等.

4. 关系符号. 如R(有关系)，$\not R$(无关系)，＜(小于)，＝(等于)，⊂(包含于)等.

5. 特殊函数符号. 如$\wp(x)$(外尔斯特拉斯椭圆函数)，$\Gamma(x)$(伽玛函数)，$B(x,y)$(贝塔函数)，$P_l(x)$(勒让德多项式)等.

6. 专用符号. 在数学的理论研究中具有某些特定内容的符号，如$\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{Z}$，$\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{C}$分别代表自然数集、整数集、有理数集、实数集、复数集等；又如c，ω，$\aleph$表示集合的基数、序数等.

7. 外文缩写符号. 如dom，ran，fld分别表示关系的定义域、值域、域，又如lim(极限)，max(极大)，min(极小)等.

建立一套简明、统一、有效的数学符号体系，可以使数学的文字表达更方便，运算过程更清晰，推演过程更符合逻辑. 数学符号的广泛应用，在一定程度上也促进了现代数学的迅速发展. 从数学史的角度来看，数学符号发展到今天，已经历了漫长的历史过程，大约可分为4个发展阶段. 这里说的4个阶段不是严格的时代分段，每个发展阶段所处的时代也可能是参差不一的. 主要是从符号变化发展的内容来界定的.

1. 文词代数阶段. 这个时代的数学完全是用文字叙述的，对某个问题的解答就像一篇论说文. 如公元6世纪，阿拉伯数学家花拉子米(alKhowārizmī)所著《代数学》就是这样书写的. 直到15世纪末，大多数的数学著作都还是论说文式的书写格式.

2. 以缩写词代符号阶段. 这时亦可能出现少量的非文词缩写的数学符号. 古希腊数学家丢番图(Diophantus)就用未知数和未知数的各次幂的文词缩写表示多项式和方程. 中国宋元时代的天元术中用"天元"表示未知数，方程则用其各项系数表示，在常数项旁记一"太"字(即"太极")，或在一次项旁记一"元"字(即"天元"). 在四元术中则用天、地表二元(即现在的x，y)，用天、地、人表三元，又用天、地、人、物表四元(即4个未知数)，列出方程.

3. 系统地、广泛地使用数学符号阶段. 系统地引入字母和符号，表示数和某些基本概念以及它们的运算和关系. 从15世纪末到20世纪初，某些数学符号经过多次改进后沿用至今. 法国数学家韦达(Viete，F.)对符号代数作了广泛系统的研究，在他所著的《论方程的整理与修正》中，不仅用字母表示未知数，而且还用字母表示已知参数(如方程的系数).

4. 符号的完美、统一阶段，亦即20世纪现代数学阶段. 当时，数学符号已得到系统的发展和广泛的应用. 国际、国内为了使系统、完美的数学符号体系的应用能促进现代数学的迅速发展，都曾对数学符号作过统一的工作. 中国在20世纪30年代前后就编印过统一的数学符号表，在1993年又以中国数学物理名词委员会的名义制定了《数学物理符号表》，其目的就是希望数学物理工作者们能使用统一的、规范的数学物理符号，以利于科学的迅速发展. 但是统一的工作是很难一步到位的，人们总是习惯于自己使用过的符号. 但随着时间的推移，数学符号总会更趋于统一，这是必然的趋势. 例如早期的数学符号"＋，－，×，÷"，中期出现的微分、积分符号

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y},\quad \int$$

和近代出现的"⇒(推出)、$\aleph$(无穷基数)"等已经达到在全世界范围的统一. 因此，要求"符号统一"是人心所向、大势所趋. 本辞书在第一至五卷后面所附数学符号表，是更广泛地搜集了数学各分支的已经被使用着的符号，其目的也是希望在数学符号统一方面做一点微小的贡献，以利于数学科学的迅速发展.

加号(signs for addition)　表示加法运算的符号. 加和减是人类最先掌握的两种数学运算，在最古老的文字遗存中就有加减运算的记载，相应地也有了初步的加减记号，如古埃及阿默斯纸草书中用"ʌ"表示加，而用"ʌ"表示减；古希腊数学家丢番图(Diophantus)把两数并列表示加，用一曲线符号"ɔ"表示减. 中国古代由于注重于利用工具计算，运算是在算筹或算盘上实现的，只记录运算结果，所以一般都没有采用数学符号，记录时只用文字表述运算. 近

代(公元 15—16 世纪)西方多以 $\bar{p}$ 或 p 作加号,以 $\tilde{m}$ 或 m 作减号,这源于拉丁语词 plus(加)和 minus(减)的第一个字母. 最先使用现代的加号"+"和减号"—"的是 15 世纪后期(1486)的德国人. 在德累斯顿(Dresden,德国城市)图书馆保存的古代手稿卷 c. 80 中有这样两个式子

1&—+2& 10—1&

分别表示现代的

$$x^3+2x^2 \text{ 和 } 10-x$$

的意思,正式使用了"+"、"—"表示加减运算. 1489 年,捷克数学家维德曼(Widmann,J.)最早在印刷书籍中使用"+"作加号、"—"作减号;1608 年,德国数学家克拉维乌斯(Clavius,C.)在罗马出版的《代数》一书中,使用了"+"、"—"号;1557 年,英国数学家雷科德(Recorde,R.)在英国首先使用了这两个符号;意大利与荷兰也先后引入了这两个符号. 同时也传往欧洲大陆其他国家,逐渐流行于全世界.

减号(signs for subtraction) 表示减法运算的符号,减法是人类最先掌握的两种数学运算之一. 减号的形成同样经历了从文词代数到确立符号的阶段. 现在世界上通用的减号是"—". 减号的历史演变过程,详见"加号".

乘号(signs of multiplication) 表示乘法运算的符号. 乘也是最早产生的运算之一,人类最早的文字记载中就有了关于乘法的记载. 中国古人不用乘号;古希腊数学家丢番图(Diophantus)也不用乘号——他把两数并列表相乘(与加法同). 近代,德国数学家斯蒂费尔(Stifel,M.)在 1545 年出版的一本算术书中用大写字母 M 表示乘,而用大写字母 D 表示除,其他一些数学家也用这两种记号. 法国数学家韦达(Viete,F.)于 1591 年把 A 与 B 的乘积记为"A in B". 当时的一些手稿和书中还有以并列表示相乘的,如 $6x$,$5x^2$ 等,但必须有字母才行,这种记法一直用到现在. "×"号,西方称为圣安德鲁斜十字(St. Andrew's cross). 在 16 世纪出版的一些数学书中就有应用,但开始并不是现代用法,而是以上式表示现代

315172╲╱295448
395093╱╲174715

$$315172 \times 174715$$

和

$$395093 \times 295448$$

两个乘法,即用"×"表示两个独立的乘法运算. 1631 年,英国数学家奥特雷德(Oughtred,W.)在其著作《数学之钥》《clavis mathematicae》中第一次用"×"表示两数相乘,即现代乘号的意义,后来渐渐流行,直到现在. 1698 年,德国数学家莱布尼茨(Leibniz,G. W.)在给瑞士数学家约翰第一·伯努利(Bernoulli,Johann Ⅰ)的一封信中提出用圆点"·"表示乘,以避免与字母 X 相混淆的情况,以后用"·"表乘的用法也相当流行. 现今欧洲大陆派(德、法、俄罗斯等国)规定用"·"作乘号,其他国家则用"×"作乘号,而用". "作小数点. 中国规定,用"×"和"·"作乘号都可以,但一般在字母前或括号前乘号可略去.

除号(signs for division) 表示除法运算的符号. 德国数学家斯蒂费尔(Stifel,M.)于 1545 年用大写德文字母 D 表示除,后人多有类似用法. 现代用的除号"÷",称为雷恩记号(Rahn's notation),是瑞士数学家雷恩(Rahn,J. H.)在 1659 年出版的一本代数著作中引用的. 1668 年,他的这部书译成英文出版,这个记号也随之流行起来,直到现在. 1668 年,德国数学家莱布尼茨(Leibniz,G. W.)在一篇论文《组合的艺术》(Dissertatio de arte Combinatoria)中首次用符号":"作除号,后来也渐渐通用,至今亦有使用的.

等号(signs of equality) 表示相等关系的符号. 相等是数学中最重要的关系之一,所以数学中很早就出现了表示相等的符号. 古希腊数学家丢番图(Diophantus)用"l^o"(有时用"ч")表示相等,古印度人有用相当于 pha 的字母表示相等. 近代的德国数学家雷格蒙塔努斯(Regiomontanus,J.)、意大利数学家帕乔利(Pacioli,L.)等人用破折号"——"表示相等. 现代用的等号"="称为雷科德符号(Recorde's sign),是英国数学家雷科德(Recorde,R.)在 1557 年出版的一本书《开端》(Début)中第一次作为等号使用的,但其推广十分缓慢. 后来,著名学者如德国数学家、天文学家开普勒(Kepler,J.)、意大利数学家、物理学家伽利略(Galilei,G.)、法国数学家费马(Fermat,P. de)等人一直用文字或缩写语 aequals,ae 等表示相等;法国数学家笛卡儿(Descartes,R.)于 1637 年还用"="表示现代"±"号的意义,而用"∝"作等号. 直到 17 世纪末,以"="作等号才逐渐通用.

大于号(signs for greater) 表示不等关系的符号之一. 现在通用的大于号">"和小于号"<"都是英国数学家哈里奥特(Harriot,T.)于 1631 年开始采用的,但当时并没有为数学界所接受. 直到 100 多年后,才逐渐成为标准的应用符号. 英国数学家沃利斯(Wallis,J.)在 1655 年曾用"¬"表示"等于或大于";1670 年,他又引入"⋝"(等于或大于)和"⋜"(等于或小于)记号. 现在常用的符号是"≥"和"≤"(有的也用"≧"和"≦"),根据德国数学家哥德巴赫(Goldbach,C.)在 1734 年 1 月写给瑞士数学家欧拉(Euler,L.)的一封信中所述,是一位法国数学家布盖(Bouguer,P.)于 1698 年至 1758 年首先采用

的，后来逐渐流行开来．符号“≪”（远小于）和“≫”（远大于）是法国数学家庞加莱（Poincaré，(J.-)H.）和波莱尔（Borel，(F.-É.-J.-)É.）于 1901 年引入的，很快就为数学界所接受，现在也这样用．

小于号(signs for less)　见“大于号”．

远小于号(signs for less by comparsion)　见“大于号”．

远大于号(signs for greater by comparsion)　见“大于号”．

括号(signs of aggregation)　亦称归并符号．表示运算顺序的符号．指表示把某几项先“归并”，然后再进行其他运算．最初用字母表示归并，对较简单的四则运算还好处理，但进行根式运算时，顺序符号就是不可缺少的了，也就是在根式符号产生之时，产生了括号．意大利数学家帕乔利（Pacioli，L.）于 1494 年创用字母 V（Vniversale，全体）表示顺序，他用

$$\mathrm{R\!\!\!\!/}\,\mathrm{V}, \mathrm{R\!\!\!\!/}.\ 20\,\frac{1}{4}.\ \tilde{m}.\ \frac{1}{2}$$

表示现在的

$$\sqrt{\sqrt{20\,\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}}.$$

后来的德国数学家鲁多尔夫（Rudolff，C.）用字母组合 collect（集合）表示此意，如用

$$\sqrt{}\ \text{des collects}\ 17+\sqrt{}\ 208$$

表示现在的

$$\sqrt{17+\sqrt{208}}.$$

法国数学家许凯（Chuquet，N.）于 1484 年则用横线表示括号，他用

$$\mathrm{R\!\!\!\!/}^{2}.\ \overline{14.\ \bar{p}.\ 180}.\ \text{est}.\ 3.\ \bar{p}.\ \mathrm{R\!\!\!\!/}^{2}5$$

表示现在的

$$\sqrt{14+\sqrt{180}}=3+\sqrt{5}.$$

还有人是把横线写在要归并的内容之上，如英国数学家牛顿（Newton，I.）于 1676 年使用

$$\overline{P+PQ^{7}}^{\frac{m}{n}}$$

表示现在的

$$(P+PQ^{7})^{\frac{m}{n}}.$$

后来他又使用

$$\overline{\overline{\overline{y-4}\times y+5}\times y-12}\times y+17=0$$

表示现在的

$$\{[(y-4)y-5]y-12\}y+17=0.$$

这里引入了多重括号的意思．

最早如现在一样使用圆括号“(　)”的是德国数学家斯蒂费尔（Stifet，M.），但他的手稿没有出版．最早在印刷书籍中如现在一样使用圆括号的是德国数学家克拉维乌斯（Clavius，C.），他于 1608 年使用

$$\sqrt{}z(\sqrt{}z15+\sqrt{}z12)-\sqrt{}z(\sqrt{}z15-\sqrt{}z12)$$

表示现在的

$$\sqrt{\sqrt{15}+\sqrt{12}}-\sqrt{\sqrt{15}-\sqrt{12}}.$$

德国数学家埃皮努斯（Aepinus，F. U. T.）于 1751 年用两种圆括号表示不同的运算顺序，瑞士数学家欧拉（Euler，L.）也这样用．而瑞士数学家约翰第一·伯努利（Bernoulli，Johann Ⅰ）则用圆括号和方括号表示不同层次的归并，18 世纪的其他数学家，如法国数学家达朗贝尔（d'Alembert，J. le R.）和拉格朗日（Lagrange，J.-L.）也开始这样使用，渐渐发展为现在的形式．

归并符号(sings of aggregation)　即“括号”．

分数符号(signs of common fractions)　表示分数的符号．分数也是人类最古老的数学知识之一，各文明古国的文化中都有关于分数的记载．古希腊人用 L''表示 1/2，因此，按希腊记数法，

$$\alpha L''=1\,\frac{1}{2},\ \beta L''=2\,\frac{1}{2},\ \gamma L''=3\,\frac{1}{2}.$$

在数字的右上角加一撇点“′”，表示该数分之一，如

$$\kappa\gamma'=\frac{1}{\kappa\gamma}=\frac{1}{23},\ \lambda\beta'=\frac{1}{\lambda\beta}=\frac{1}{32}.$$

后来又以分子加一撇点，分母加两撇点，分母可写一次或两次来表示分数，如

$$L\gamma'\,\kappa\theta''\kappa\theta''=L\gamma'\,\kappa\theta''=\frac{13}{29}.$$

中国古代也很早就采用了分数，《九章算术》中就系统地讨论了分数及其运算，这是世界上最早的分数研究之一．中国古代的分数记法有两种，一种是汉字记法，与现代汉字记法相同：“……分之……”；另一种是筹算记法，如用下图表示带分数 $64\,\frac{38}{483}$：

⊥　||||
≡　Ⅲ
||||　≟　|||

古印度人的分数记法如下：

$$\begin{matrix}1\\3\end{matrix}=\frac{1}{3},\quad \begin{matrix}1\\1\\3\end{matrix}=1\,\frac{1}{3}.$$

最早使用分数线的是阿拉伯数学家海塞尔（al-Hassar）（12 世纪），他用

$$\frac{2+\dfrac{3+\dfrac{3}{5}}{8}}{9}$$

表示现代的分数

$$\frac{332}{589}.$$

意大利数学家斐波那契(Fibonacci,L.)引入了分数线. 15 世纪以后,欧洲逐渐形成现代分数记法,德国数学家鲁多尔夫(Rudolff,C.)于 1530 年计算

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}$$

时,记为

$$\begin{array}{cc} 8 & 9 \\ \hline \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \\ \hline \multicolumn{2}{c}{12} \end{array}, \quad 得\ \frac{17}{12}.$$

后来渐渐采用了现在的分数形式. 1845 年,英国数学家德·摩根(De Morgan,A.)在其《函数计算》(The Calculus of Functions)一文中,又提出用斜线"/"表示分数线,他把分数

$$\frac{a}{b}\ 记为\ a/b,$$

以利于印刷排版,现在印刷书籍中也有采用这种分数符号的.

小数符号(signs of decimal fractions) 表示小数的符号. 最早使用小数的是中国人. 3 世纪,中国数学家刘徽在为《九章算术》作注时指出,开方不尽时,可用十进分数(小数)来表示方根的近似值. 中国宋代数学家秦九韶用名数作为小数符号,如用图 1,表示 18.56 寸;中国金代数学家李冶用位置表示小数,如用图 2,表示 $-8.24x^2+2.673=0$,这是世界上最早的小数记法. 中国之外较早使用小数的是阿拉伯数学家卡西(al-Kāshī),他用十进分数(小数)给出了 π 的有 17 位有效数字的近似值. 比利时数学家斯蒂文(Stevin,S)于 1585 年第一次明确地阐述了小数的理论,他把 32.57 记为

图 1

太

图 2

$$\overset{\textcircled{0}}{32}\ \overset{\textcircled{1}}{5}\ \overset{\textcircled{2}}{7} \quad 或 \quad 32\textcircled{0}5\textcircled{1}7\textcircled{2}.$$

明确地使用符号"."，如现在这样表示小数的第一个人是德国数学家克拉维乌斯(Clavius,C.). 1593 年,他在自己的数学著作中用 46.5 表示

$$46\,\frac{1}{2}=46\,\frac{5}{10}.$$

1617 年,英国数学家纳皮尔(Napier,J.)更明确地采用了现代小数符号,如以 25.803 表示

$$25\,\frac{803}{1000}.$$

从此用"."表示小数逐渐为人们所接受. 1657 年,荷兰数学家斯霍滕(Schooten,F. van)明确地用","(逗号)作小数点,他记 58.5 为 58,5①,后来去掉后面的位数表示①等,也逐渐通用. 现代小数点的使用大体上分两派:欧洲大陆派(德、法、俄罗斯等)用逗号作小数点,圆点"·"作乘号;英美派用圆点"."作小数点,逗号用作分节号;欧洲大陆派不用分节号. 中国使用英美派记法,但近年来,记数亦不用分节号了,采用空位表示分节.

零号(signs for zero) 表示零的符号,也可以作为数零的记号. 零是位值(place value)制记数法的产物. 古代民族如古中国人、古印度人、古希腊人、阿拉伯人及玛雅人等,都对零的认识和零的符号表示做出过贡献.

中国古人在世界上最早采用 10 进位值制记数法,但是长期没有产生专门的零号. 他们是怎样表示 203,2 300 这样的数呢? 首先由于中国语言文字的特点,除了个位数字外,还有表示数位的十、百、千、万等数字,因而说成二百三、二千三百,意义是十分准确的. 有时也说"二百零三",但这个"零"是"零头"之意,就更不会误会了. 其次,由于中国古代很早就普遍采用算筹作基本的计算工具,算筹的使用是中国古代数学的一大特点,用算筹排布的数字(筹算数学)是数学著作中常用的数字,在筹算数字中以空位表示现在零的意思. 中国古代书写习惯不用标点符号,与数字有关的空格即为零,也不会产生误会. 因此,中国古代在长期没有零号的情况下方便地使用了十进位值制记数法.

中国古书中,缺字一般用一方块□表示,数字中的空格,后来也用□表示,在书写时,字体常用行书,方块往往就画成圈了;后来人们有意识地用圆圈表示数中的空格,渐成定例. 这种记法最早在金《大明历》(1180)中采用,后逐渐通用. 注意,中国古代的零号是由书写而非计算引入的. 中国古代的零号是一个圆圈○,不同于现代的扁圆的 0. 最早采用扁圆 0 的是古希腊天文学家、数学家托勒密(Ptolemy),由于古希腊记数法是非位值制的,对零的需要并不迫切,但当时用的角度却是 60 进位值制的(源于巴比伦人),他在记载角度时,明确地使用了扁圆的 0(希腊文 οὐδέν,"没有东西"的第一个字母)表示空位. 如用 $\overline{\mu\alpha}\,o\,\overline{\iota\eta}$ 表示 41°0′18″. 后来印度人的零号,可能受到他的影响.

印度人也较早采用了十进位值制记数法,他们最初也用空格来表示空位,如用 3　7 表示 307,后来为了避免表示的不清楚,就用小点表示空位,即用 3·7表示 307. 现今所发现的最早用扁圆 0 表示数字中的零是印度瓜廖尔(Gwaliur)地方的一个石碑上的刻文,时间为公元 876 年,是印度人第一次把零当作数来使用. 后来,印度数字传入阿拉伯,经过他们的发展形成了著名的印度-阿拉伯数字. 1202 年,经由意大利数学家斐波那契(Fibonacci,L.)把

这种数字(包括0)传入欧洲.13世纪,印度—阿拉伯数学传入中国,由于书写习惯不同(中国汉字竖写,阿拉伯文横写),没有得到应用,直到20世纪初,才开始普遍使用.印度—阿拉伯数字(包括零)逐渐流行于全世界.

负数记号(signs for negative numbers)　表示负数的符号,主要是表示负(与正相对)的记号.最先认识并应用负数的是中国古代数学家,《九章算术》中就引入了负数及其运算法则.在筹算时,采用在数上斜放一根算筹等方法表示负数,书写时,中国金代数学家李冶首创在数字上加斜画表示负数,如右图形式表示

$$4.12x^2-x+136-248x^{-2},$$

这可以说是世界上最早的书面负数记号.西方对负数认识较晚,15世纪后才正式应用负数,使用的符号也是多种多样的,如 $\bar{a}, v, Ta, \rightarrow a$ 等表示 $-a$,直到20世纪初,英国数学家亨廷顿(Huntington,E. V.)才开始采用接近现代形式的符号:

$$^-3, ^-2, ^-1,\ 0, ^+1, ^+2, ^+3,$$

后来才逐渐成为现在的形式.

虚数符号(symbols for imaginaries)　表示虚数,特别是"虚数单位"的符号.最先考察负数开平方运算的是法国数学家许凯(Chuquet,N.),1484年,他在解方程 $4+x^2=3x$ 时,得到

$$x=\frac{3}{2}\pm\sqrt{2\frac{1}{4}-4}.$$

(用现代符号表示他的成果),由于

$$2\frac{1}{4}-4$$

是负数,他认为不可能得到方程的解.

第一个对负数开平运算进行研究并得到虚数及其初步运算方法的是意大利数学家卡尔达诺(Cardano,G.),1545年,在他的著作《大术》中,记载了如下的乘法运算

5*p*:℞ *m*:15
5*m*:℞ *m*:15
25*m*:*m*:15q̃dest　40

即

$$\begin{array}{r} 5+\sqrt{-15} \\ 5-\sqrt{-15} \\ \hline 25-(-15)=40 \end{array}$$

其中℞ *m*:15表示 $\sqrt{-15}$,是最早的虚数表示法.卡尔达诺称负数的平方根为"诡辩量",并且怀疑这种数的运算的合理性.卡尔达诺称正数的根为真实的(real)根,而负数的根为虚构的(fictitious)根.实和虚的用法与现代不同.1637年,法国数学家笛卡儿(Descartes,R.)在他的《几何学》一书中第一次给出虚数的名称"imaginaires"(虚的),与"reeles"(实的)相对.1777年,瑞士数学家欧拉(Euler,L.)在递交给圣彼得堡科学院的论文《微分公式》中首次使用"i"表示 $\sqrt{-1}$,但很长时间没有人注意它.直到1801年,德国数学家高斯(Gauss,C. F.)系统地使用了这个符号,以后才渐渐流行.

指数符号(signs of powers)　表示幂指数的符号.具有"现代"意义的指数符号是17世纪才开始出现的.最初的表示未知数次数的符号中,不用未知数符号,如瑞士数学家、天文学家比尔吉(Bürgi,J.)用罗马数字写于系数数字之上表示未知数次数,如用

$$\overset{\text{VI}}{8}+\overset{\text{V}}{12}-\overset{\text{IV}}{y}+\overset{\text{III}}{10}+\overset{\text{II}}{3}-\overset{\text{I}}{7}-\overset{0}{4}$$

表示现代的

$$8x^6+12x^5-9x^4+10x^3+3x^2-7x-4.$$

罗曼斯(Romans)开始写出表示未知数的字母,他用

$A(4)+B(4)+4A(3)\text{inB}+6A(2)\text{inB}(2)+4A\text{inB}(3)$

表示现代的

$$A^4+B^4+4A^3B+6A^2B^2+4AB^3.$$

英国数学家休姆(Hume,J.)于1636年用小罗马数字放在字母的右上角表示指数,如用 A^{ii} 表示 A^2.法国数学家笛卡儿(Descartes,R.)于1637年用较小的印度—阿拉伯数字表示指数,放在右上角,如 $5a^4$,就是现代的指数表示法.但笛卡儿把 b^2 写作 bb,并且只给出正整指数幂.英国数学家沃利斯(Wallis,J.)于1655年引入分数指数和负指数,但仅使用了

$$a^{-1}=\frac{1}{a},\quad a^{\frac{3}{2}}=\sqrt{a^3}$$

等指数符号.现行的分数指数和负指数符号是英国物理学家、数学家牛顿(Newton,I.)于1676年创设的.最先使用虚指数的是意大利数学家法尼亚诺(Fagnano dei Toschi,G. C.),他在1719年得到关系式

$$\pi=4\ln\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{\frac{i}{2}}.$$

德国数学家莱布尼茨(Leibniz,G. W.)于1679年在一封写给荷兰数学家、物理学家、天文学家惠更斯(Huygens,C.)的信中讨论了方程 $x^z+z^x=b, x^x-x=24$ 等,引入了变指数.

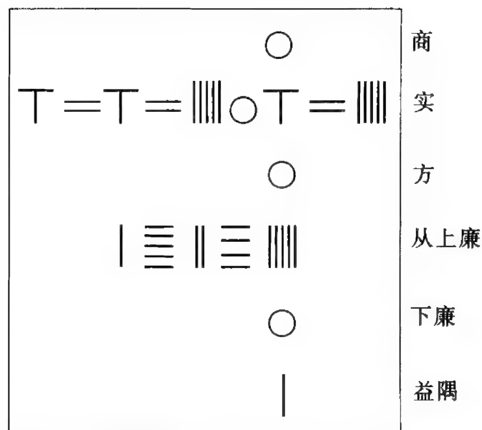
方根符号(signs for roots)　表示开方运算结果的符号.2世纪,罗马数学家尼普萨斯(Nipsus,J.)用拉丁语词Latus(意为"正方形的边")记平方根,后来这个词的第一个字母"L"成为欧洲一个常用的平方根符号.16世纪,法国数学家拉米斯(Ramus,P.)和韦达(Viete,F.)等人仍这样用.欧洲另一个广泛应用的方根符号是℞,来自拉丁语词

Radix（意为"平方根"），最先使用于欧几里得（Euclid）《几何原本》的拉丁文译本的第10卷中.后来意大利数学家斐波那契（Fibonacci，L.）和帕乔利（Pacioli，L.）等都使用这一方根符号，16—17世纪的许多数学家都用℞表示平方根.德国数学家鲁多尔夫（Rudolff，C.）是较早使用"√"表示平方根的人之一，1557年，他在引入"√"后，又用"∿√"表示3次方根，用"∿√"表示4次方根.

比利时数学家斯蒂文（Stevin，S.）用"√"表示平方根，用"√c"表示立方根.法国数学家笛卡儿（Descartes，R.）于1637年用"$\sqrt{\quad}$"作平方根符号.英国数学家奥特雷德（Oughtred，W.）于1647年用"√r"表示平方根，用"√ 12"表示12次方根；英国数学家沃利斯（Wallis，J.）于1655年用"$\sqrt{}3R^2$"表示现代的$\sqrt[3]{R^2}$；哈顿（Hatton，E.）于1721年用"$^3\surd$"、"$^4\surd$"分别表示3次方根、4次方根.1732年，卢贝尔（De la Loubére）用$\sqrt[3]{25}$表示25的3次方根，与现代符号相同了.后来，逐渐各次方根都用这种形式的符号表示，一直沿用至今.

对数符号（signs for logarithms） 表示对某数取对数的记号.对数是英国数学家纳皮尔（Napier，J.）创立的，对数（logarithm）一词也是他创造的，源于希腊文 λoγos（拉丁文 logos），意为"表示思想的文字或符号"，亦为"计算"或"比率"，它和另一个希腊词α′ριθμ όs（数）结合而成 logarithm 一词.德国数学家、天文学家开普勒（Kepler，J.）于1624年把对数简记为 log.意大利数学家卡瓦列里（Cavalieri，(F.) B.）于1632年头一个使用了符号 log.意大利数学家佩亚诺（Peano，G.）于1893年用 log$x$ 记以 e 为底的对数，而用 Log$x$ 记以10为底的对数.同年，斯特林厄姆（Stringham，I.）用 $b$log 记以 b 为底的对数，并把自然对数记为 ln，把以复数模 k 为底的对数记为 $\log_k$.奥地利数学家施托尔茨（Stolz，O.）等人于1902年用 $a$log.b 表示"以 a 为底的 b 的对数"，后来改成现在的形式.

代数方程符号（signs for algebraic equations） 代数方程中涉及的各种符号：未知数符号、指数符号和各种运算符号.中国古人很早就有了关于方程的知识，《九章算术》中就有许多利用方程求解问题的例子.由于中国古代使用算筹计算，利用算筹的位置表示未知数及其次数，只用算筹摆出其系数就可以求解.1247年，中国南宋数学家秦九韶引入了一元高次方程的一般解法，除了用位置表示未知数及其次数外，还用了一些专门术语，如下图所示



它表示一个4次方程

$$-x^4+15245x^2-6262506.25=0.$$

中国金代数学家李冶等人使用了天元术，明确地用"天元"表示未知数一次项，并且建立了设立方程解决实际问题的方法.国外也很早就产生了一些原始的方程表示法.近代法国数学家许凯（Chuquet，N.）于1484年用

$$8^2.\text{ avec. }12^2.\text{ montent. }20^2$$

表示现代的

$$8x^2+12x^2=20x^2,$$

其中 8^2，12^2，20^2 中的"2"是未知数的指数，而不是8，12，20的指数，在方程中却不见未知数符号.

意大利数学家帕乔利（Pacioli，L.）于1491年引用了未知数记号，他用

1. co. m̃. 1. ce. de. ℞ª_____ 36

表示现代的

$$x^2-y^2=36,$$

其中用 co.表示 x^2，ce.表示 y^2.

意大利数学家卡尔达诺（Cardano，G.）于1544年用

1. quad. p̃. 2. pos. aeq. 48

表示现代的

$$x^2+2x=48.$$

意大利数学家邦贝利（Bombelli，R.）于1572年用

$\overset{6}{\smile}$ $\overset{3}{\smile}$
1. p. 8. Eguale à 20

或 1. $\underset{\smile}{6}$p. 8. $\underset{\smile}{3}$Eguale à 20

表示现代的

$$x^6+8x^3=20.$$

比利时数学家斯蒂文（Stevin，S.）于1585年用

1③fera egale à − 2② + 12① + 48

表示现代的

$$x^3=-2x^2+12x+48.$$

法国数学家韦达（Viete，F.）于1615年用

A cubus + *B* plano 3in *A*，aequari *Z* solido 2

表示现代的

$$x^2+3B^2x=2Z^3.$$

法国数学家埃里冈(Hérigone,P.)于 1634 年用

$$154a \sim 71a2 + 14a3 \sim a42/2 \quad 120$$

表示现代的

$$154a-71a^2+14a^3-a^4=120.$$

法国数学家笛卡儿(Descartes,R.)于 1637 年用

$$x^3 -- 9xx + 26x -- 4 \infty 0$$

表示现代的

$$x^3-9x^2+26x-4=0.$$

从此开始用 x,y,z 等拉丁字母表后几个字母表示未知数,直到现在.

英国数学家沃利斯(Wallis,J.)于 1693 年用

$$x^4 + bx^3 - cxx + dx + e = 0$$

表示现代的

$$x^4+bx^3-cx^2+dx+e=0.$$

此后发展为现代方程符号.

函数符号(signs for functions in general) 表示函数概念和函数关系的符号. 瑞士数学家约翰第一·伯努利(Bernoulli,Johann Ⅰ)于 1694 年首次提出函数概念,并用字母 n 表示变量 z 的一个函数. 德国数学家莱布尼茨(Leibniz,G. W.)于 1698 年采用 $\overline{x}|\underline{1}|$,$\overline{x}|\underline{2}|$表示 x 的两个函数;用$\overline{x;y}|\underline{1}|$,$\overline{x;y}|\underline{2}|$表示两个变量 x,y 的两个函数,这是用 x,y,z 等拉丁字母表后几个字母表示自变量的开端. 瑞士数学家欧拉(Euler,L.)于 1734 年用

$$f\left(\frac{x}{a}+c\right)$$

表示$(x/a+c)$的函数,这是第一次用“f”表示函数. 法国数学家达朗贝尔(d'Alembert,J. le R.)于 1745 年用 $\varphi(z)$表示 z 的函数. 18 世纪末,法国数学家拉格朗日(Lagrange,J.-L.)提倡用 f,F,φ,ψ 表示函数,从此这些字母就一直成为表示函数主要采用的字母. 英国数学家赫谢尔(Herschel,J. F. W.)于 1820 年用 $f(x)$表示 x 的函数,并记$f(f(x))$为$f^2(x)$,$f^m f^n(x)=f^{m+n}(x)$. 他还用$f^{-1}(x)$表示其函数 f 为 x 的量,后被意大利数学家佩亚诺(Peano,G.)改进为 $y=f(x)$,$x=f^{-1}(y)$,就是现代通用的反函数符号.

初等几何符号(symbols in elementary geometry) 初等几何中使用的表示几何图形或几何关系的符号. 大致可分为三类:表示几何概念的象形或图形,例如△(三角形);几何学中特有的表意符号,如∽(相似);初等代数符号,如+,-等. 虽然欧几里得(Euclid)的《几何原本》是几何学的开山之作,但它并没有使用几何学符号,最早使用几何符号的是古希腊数学家海伦(Heron,(A.))(150). 历史上使用过的符号甚多,这里只考察现代初等几何符号的最先提出者:“△”(三角形)是古希腊数学家海伦提出的;“⊙”(圆)是古希腊数学家帕普斯(Pappus,(A))于 4 世纪提出的;“∠”(角)是英国数学家奥特雷德(Oughtred,W.)于 1657 年提出的;“⊥”(垂直)是法国数学家埃里冈(Hérigone,P.)于 1633 年提出的;“∥”(平行)是英国数学家琼斯(Jones,W.)于 18 世纪提出的;“$\overset{\frown}{AB}$”(弧 AB)是蒂沃利的普拉托(Plato,(T.))于 12 世纪提出的. 德国数学家莱布尼茨(Leibniz,G. W.)于 1679 年用“∽”表示相似,1710 年,他又用“~”表示相似,现在这两种情况都采用. 哈塞勒(Haseler,J. L.)于 1777 年用“≌”表示全等,德国天文学家、数学家莫尔韦德(Mollweide,K. B.)于 1824 年则用“≅”表示全等,现在这两种符号也都通用.

角度符号(signs for measure of angle) 表示角的量度的符号. 现在采用的角度符号°(度)、′(分)、″(秒)都起源于古希腊. 希腊天文学家、数学家托勒密(Ptolemy)的《天文学大成》中采用了角度符号. 角度的进位制采用了巴比伦人的 60 进位制. 基本单位是 $\mu o\iota\rho\alpha\tau$,常简记为 μ°,第一个 60 分位用一个重音号“′”表示,第二个 60 分位用两个重音号“″”表示,如用 $\mu o\iota\rho\,\overset{\frown}{\omega\upsilon}\mu\xi\mu\beta'\mu''$表示 47°42′40″,还用 $\mu^{\circ}\beta$ 表示 2°. 这可以看作角度符号的起源. 中世纪则不采用简化符号,12 世纪,阿拉伯天文学著作的拉丁文译本中,用 gradus(度)、minatue(分)、secundae(秒)等及其缩写表示角度,如 Gr,Min,Sec 等. 在此基础上后来采用过多种字母符号表示角度. 最早如现代形式采用“°”,“′”,“″”表示角度的是德国数学家、天文学家莱因霍尔德(Reinhold,E.),1571 年,他用°63′13″53 和 62°54′18″两种形式表示角度. 后来,丹麦天文学家第谷(Tycho Brahe)于 1573 年也用了这种角度符号,并逐渐得到广泛采用. 但有时,人们把“°”,“′”等记号写在数字上面,如用 $\overset{\circ}{7}5\overset{\prime}{0}$ 表示7°50′. 而舍文(Sherwin,H.)于 1741 年则强调使用形如 1°28′28″12‴的角度符号,此后得到通用.

三角函数符号(signs for trigonometric functions) 表示三角函数的记号. 第一个使用简化符号来表示三角函数(当时没有函数概念,称为三角线)的是丹麦数学家、天文学家芬克(Fink,T.). 1583 年,他创用“tangent”(正切)和“secant”(正割)表示相应的概念. 随后,他又采用 sin.,tan.,sec.,sin. com.,tan. com.,sec. com. 分别表示正弦、正切、正割、余弦、余切、余割. 前三个符号除了多一个小点外,已与现代符号相同了. 后来人们使用的符号多有变化,瑞士数学家欧拉(Euler,L.)于 1751 年使用的符号为 sin,cos,tan(tg),cot,sec,cosec 已与现代基

本相同，只正切有差别. 1814 年，英国数学家巴罗(Barrow,I.)所用的三角函数符号 sin,cos,tan,cot,sec,cosec 已与现代完全相同，不过现代一般把余割写为 csc，而 tan(正切)，cot(余切)是现在欧洲大陆派所应用的符号. 德国数学家舍费尔斯(Scheffers,G.)于 1886 年用 tg 表示正切，而用 ctg 表示余切，也一直用到现在，是所谓英美派的符号(两派其他四个符号相同). 中国现在使用这两种三角函数符号，中学教科书现使用的是欧洲大陆派符号.

瑞士数学家丹尼尔第一·伯努利(Bernoulli, Daniel Ⅰ)最先用符号表示反三角函数，1729 年，他用 AS 表示反正弦，瑞士数学家欧拉(Euler,L.)于 1736 年用 A.t 表示反正切. 18 世纪 70 年代，法国数学家拉格朗日(Lagrange,J.-L.)、德国数学家朗伯(Lambert,J.H.)等人用 arc.sin 表示反正弦. 后来这种记法逐渐通用，只是去掉了符号中的小点. 现在一般在三角函数前加 arc 表示相应的反三角函数；有时加 Arc 表示反三角函数的主值. 19 世纪，英国数学家、天文学家、物理学家赫谢尔(Herschel,J.F.W.)创用了 $\sin^{-1}x$，$\tan^{-1}x$ 等反三角函数表示法，现在仍有应有.

符号 π(the sign π)　表示圆周率的符号. 1655 年，英国数学家沃利斯(Wallis,J.)在《无穷算术》一书中用一个小方块"□"表示数

$$\frac{4}{3.14149}.$$

最先用一个单独的字母表示圆周率的是德国数学家施图姆(Sturm,J.C.)，他于 1689 年用字母 e 表示圆周率. 英国数学家奥特雷德(Oughtred,W.)于 1652 年曾用比 π/δ 表示圆周率，其中 π 为圆周，而 δ 为直径. 英国数学家巴罗(Barrow,I.)和格雷果里(Gregory,J.)等人也采用了这种记法. 英国数学家琼斯(Jones,W.)于 1706 年引入 π 作为圆周率的符号. 瑞士数学家欧拉(Euler,L.)于 1734 年曾用 p 表示圆周率，用 g 表示圆周之半，但在 1736 年，他也采用了琼斯的符号. 瑞士数学家尼古拉第二·伯努利(Bernoulli,Nicolaus Ⅱ)在 1742 年给欧拉的信中也采用了 π 作圆周率. 后来渐渐流行，直到现在.

符号 e(the sign e)　表示自然对数底的符号. 自然对数引入后，马上就产生了用符号来表示它的底的需要. 德国数学家莱布尼茨(Leibniz,G.W.)曾用 b 表示自然对数的底，英国数学家切恩(Cheyne,G.)于 1703 年曾用 a 表示自然对数的底，而瑞士数学家欧拉(Euler,L.)却首先用字母 e 来表示自然对数的底，他大约是在 1727 年或是 1728 年的手稿里用的，但此手稿直到 1862 年才出版. 而欧拉在其 1736 年出版的《力学》一书中，也用了字母 e 表示自然对数的底. 后来瑞士数学家丹尼尔第一·伯努利(Bernoulli,Daniel Ⅰ)、德国数学家朗伯(Lambert,J.H.)等许多数学家都这样用，于是符号 e 就确定了下来，一直沿用至今.

阶乘符号(signs for factorial)　表示阶乘一自然数的顺序的连乘积的记号. 瑞士数学家欧拉(Euler,L.)于 1751 年用大写字母 M 表示 m 阶乘

$$M=1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot m.$$

意大利数学家鲁菲尼(Ruffini,P.)在 1799 年出版的方程著述中，用小写字母 π 表示 m 阶乘. 德国数学家高斯(Gauss,C.F.)于 1818 年则用 $\Pi(n)$ 表示 n 阶乘. 用符号 $\underline{|n}$ 表示 n 阶乘的方法起源于英国，尚不能确定其创始人，1827 年，由雅莱特(Jarrett)的建议得以流行，现代有时亦用此阶乘符号. 现在通用的阶乘符号"$n!$"是法国数学家克拉姆(Kramp,C.)于 1808 年最先提出来的，后经德国数学家、物理学家欧姆(Ohm,M.)等人的提倡而流行起来，直用到现在.

绝对值符号(signs for absolute value)　表示取"绝对值"的记号. 现在通用的绝对值符号"| |"是德国数学家外尔斯特拉斯(Weierstrass,K.(T.W.))于 1841 年首先引用的，后来为人们所接受. 在实数范围内

$$|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0),\\ -a & (a<0),\end{cases}$$

后来，甘斯(Gans,R.)于 1905 年用这个符号来表示向量的长度 $|\vec{R}|$，有时把这个长度也就称为绝对值. 外尔斯特拉斯就已指出，复数的绝对值是它的模. 用向量解释复数时，模、绝对值、长度都是一致的，可见甘斯的用法是合理的，因而也一直沿用到现在.

排列、组合符号(signs for permutations and combinations)　表示数的排列、组合计数的符号. 法国数学家范德蒙德(Vandermonde,A.-T.)于 1772 年采用 $[n]^p$ 表示从 n 个不同的元素中每次取出 p 个的排列数. 瑞士数学家欧拉(Euler,L.)于 1771 年用符号 $\left[\frac{n}{p}\right]$，1778 年用符号 $\left(\frac{n}{p}\right)$ 表示从 n 个不同元素中每次取出 p 个元素的组合数. 德国数学家埃汀肖森(Ettingshausen,B.A.von)于 1827 年引入了符号 $\binom{n}{p}$ 来表示同样的意义，这种组合符号直用至今. 英国数学家皮科克(Peacock,G.)于 1830 年引入符号 C_r 表示 n 个元素中每次取 r 个的组合数；1869 年，或稍早一点，剑桥的古德文(Goodwin,H.)用符号 ${}_nP_r$ 表示从 n 个元素中每次取出 r 个元素的排列数，这个用法也延用至今. 鲍茨(Potts,R.)于 1880 年用 ${}^nC_r$ 和 ${}^nP_r$ 分别表示从 n 个元素中每次取出 r 个元素的组合数和排列数. 惠特渥斯(Whitworth,A.W.)于 1886 年用 C_r^n 和 P_r^n 表示同样的意

义，他还用 R_n^r 表示可重复的组合数. 英国数学家、物理学家克里斯托尔(Chrystal, G.)于 1899 年用 ${}_nP_r$，${}_nC_r$ 分别表示从 n 个不同元素中每次取出 r 个元素(不重复)的排列数和组合数，用 ${}_nH_r$ 表示同样意义下可重复的排列数，他的这三种符号都延用至今. 德国数学家内托(Netto, E.)于 1904 年用符号 A_n^r 表示上述 ${}_nP_r$ 的意义，用 C_n^r 表示 ${}_nC_r$ 的意义，后者同时也用符号 $\binom{n}{r}$ 表示，这三种符号也一直用到现在.

"因果"符号(signs for "therefore" and "because") 表示"因为"和"所以"的符号. 最先用符号表示"所以"的是瑞士数学家雷恩(Rahn, J. H.)，他在 1659 年出版的一本代数书中用"∴"和"∵"两种符号表示"所以"，不过"∴"用得多些. 在该书 1668 年的英译本中也用这两种符号表示"所以"，但"∵"用得多些. 1706 年，英国数学家琼斯(Jones, W.)也用"∵"表示"所以". 1805 年，英国出版的一本《大众数学手册》中首次用"∵"表示"因为". 在剑桥大学 1827 年出版的古希腊数学家欧几里得(Euclid)的《几何原本》中，用"∵"表示"因为"，同时用"∴"表示"所以"，这种用法日益流行，直到现在.

双曲函数符号(signs of hyperbolic functions) 表示双曲函数的符号. 最先引入双曲函数的是意大利数学家里卡蒂(Riccati, V.)，他于 1757 年引入了双曲正弦 Shx、双曲余弦 Chx. 法国数学家、天文学家索兰(Saurin, L.)于 1774 年用

$$\text{s.h.},\quad \text{c.h.},\quad \text{t.h.},\quad \text{cot.h.}$$

分别表示四种双曲函数，除多了两个小点外，已基本与现代符号相一致. 现代所用的双曲函数符号 sh, ch, th 是英国数学家克利福德(Clifford, W. K.)于 1878 年采用的，后来渐渐通行至今. 19 世纪中叶，法国数学家、天文学家乌埃尔(Hoüel, G. J.)采用 Arg Sh, Arg Ch, Arg Th 来表示反双曲函数，随之许多人都这样用，后为书写方便，又减去了"g". 当双曲函数采用克利福德符号时，就形成了现代的反双曲函数符号 Arsh, Arch, Arth 等.

极限符号(signs for limit) 表示"取极限"的符号. 用"lim."来简化"极限"(limit)的第一个人是瑞士数学家吕利埃(L'Huillier, S.-A.-J.)(1786 年)，其后法国数学家卡诺(Carnot, L. (-N.-M.))(1797)、英国数学家、天文学家布林克利(Brinkley, J.)(1818)等人都这样用. 在法国数学家柯西(Cauchy, A.-L.)的时代(19 世纪 30 年代)，"lim."后的小圆点被去掉，于是通用"lim"直至今日. 19 世纪初，欧洲很多人用"$\text{Lim}_{x=a}$"表示"x 趋近 a 时的极限". 1841 年，德国数学家外尔斯特拉斯(Weierstrass, K. (T. W.))改用 lim 代替其中的 Lim，并采用了

$$\text{"}\lim_{n=\infty} p_n = \infty\text{"}$$

的符号(1854). 意大利数学家里斯(Riesz, F. (F.))于 1905 年引入"→"表示连续地趋向一个极限. 英国数学家哈代(Hardy, G. H.)于 1908 年用

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

的符号记法，并指出可写作

$$\lim_{n\to\infty},\ \lim_{n\to\infty},\ \lim_{x\to\infty}$$

等. 德国数学家帕施(Pasch, M.)于 1887 年引入表示 x 的函数 y 的上极限和下极限的符号

$$\text{"}\lim_{\Delta=\infty} \sup y\text{" 和 "}\lim_{\Delta=\infty} \inf y\text{"}.$$

德国数学家普林斯海姆(Pringsheim, A.)于 1898 年则用

$$\text{"}\overline{\lim_{V=+\infty}}\, a_V = A\text{" 和 "}\underline{\lim_{\Delta=+\infty}}\, a_v = a\text{"},$$

分别表示上极限和下极限. 后来将极限符号下面的"="号换成"→"，就形成了现代用法.

微分符号(signs for differentials) 表示求微分的符号. 英国数学家牛顿(Newton, I.)最早用点号表示导数，他用 v, x, y, z 等表示变量，在其上加一点表示对时间的导数，如 $\dot{x}$ 表示 x 对时间的导数. 这种用法最早见于他 1665 年的手稿. 1704 年，他又引入符号

$$\ddot{x},\quad \acute{x},\quad x,\quad \dot{x},\quad \ddot{x},\quad \dddot{x}$$

其中每一个是前一个的导数，是后一个的原函数. 他还用"$\dot{z}:\dot{x}$"表示 z 对 x 的导数. 德国数学家莱布尼茨(Leibniz, G. W.)于 1675 年引用符号 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 分别表示 x 和 y 的微分，这一符号一直使用至今. 他同时还把导数记为 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y$；当时以 x 表示纵坐标轴，而 y 表示横坐标轴. 除坐标轴符号的变化外，这一符号也用到现在. 法国数学家贝祖(Bézout, É.)于 1791 年用 $\mathrm{d}x^2$ 表示 $(\mathrm{d}x)^2$，用 $\mathrm{d}(x)^2$ 表示 x^2 的微分；法国数学家拉克鲁瓦(Lacroix, S. F.)于 1802 年用 d^2y 表示二阶微分，d^ny 表示 n 阶微分，并用 d^2y^2 表示 $(\mathrm{d}^2y)^2$ 之意，而且一般地，用 d^ny^m 表示 $(\mathrm{d}^ny)^m$ 的意思，这种用法也一直用到现在. 用撇点"′"表示导数的第一个人是法国数学家拉格朗日(Lagrange, J.-L.)，1797 年，他用 y' 表示 y 对 x 的一阶导数，y''，y''' 分别表示二阶和三阶导数；法国数学家柯西(Cauchy, A.-L.)于 1823 年同时用 y' 和 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 表示 y 对 x 的一阶导数. 这种用法也为人们所接受，成为现代用法. 用一个大写字母"D"表示导数起源于瑞士数学家约翰第一·伯努利(Bernoulli, Johann I)，后来也得到通用，有时人们称"D"为"微分算子".

导数符号(signs for derivatives) 见"微分符号".

偏微分符号(signs for partial differentials)

表示求偏微分的符号. 英国数学家牛顿(Newton, I.)等人引入了偏导数的概念,但并没有统一专门的符号. 瑞士数学家欧拉(Euler,L.)于 1776 年用

$$“\frac{\alpha^\lambda}{p}\cdot v”$$

表示对 p 的 λ 阶偏导数. 法国数学家孔多塞(Condorcet, M.-J.-A.-N.-C. M. de)于 1770 年用“dz”表示 z 对 x 的偏微分,用“αz”表示 z 对 y 的偏微分. 此外,他还用“dz”表示全微分,而用“αz”表示偏微分. 法国数学家拉格朗日(Lagrange, J.-L.)于 1786 年明确提出,用 ∂(rounded d)表示偏导数,例如用“$\frac{\partial v}{\partial x}$”表示 v 对 x 的偏导数,这就是现代的偏导数符号. 法国数学家雅可比(Jacobi, C. G. J.)于 1841 年提出用 d 表示全微分,而用 ∂ 表示偏微分. 设 f 是 x 和 y 的函数,则全微分

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y,$$

这一符号也一直用到现在.

偏导数符号(signs for partial derivatives)　见“偏微分符号”.

积分符号(signs for integrals)　表示求积分的符号. 德国数学家莱布尼茨(Leibniz, G. W.)于 1675 年用“omn. l”表示 l 的总和(积分),“omn”是“omnia”(所有,全部的)的缩写. 后来他又用“$\int l$”表示所有 l 的总和(summa),“$\int$”是字母 S 的拉长. 在 1694 至 1695 年间,莱布尼茨在“$\int$”号后置一逗号,即用如“$\int, xx\mathrm{d}x$”. 后来,瑞士数学家约翰第一·伯努利(Bernoulli, Johann Ⅰ)于 1698 年去掉这一逗号,发展为现代用法. 定积分符号则是法国数学家傅里叶(Fourier, J.-B.-J.)最先采用的. 1882 年,他引入

$$\frac{\pi}{2}\varphi(x)=\frac{1}{2}\int_0^\pi\varphi(x)\mathrm{d}x+etc.$$

定积分符号也很快为数学界接受,并应用至今.

符号 $\frac{0}{0}$ $\left(\text{the sign }\frac{0}{0}\right)$　表示 $\frac{0}{0}$ 型不定式的符号. 用以表示分子分母同趋于零的一种不确定的分式极限,有时称为“零分之零型的不定式”. 这种极限最早是法国数学家洛必达(L'Hospital, G.-F.-A. de)讨论的,并且提出确定其极限值的洛必达法则. 但他并没使用符号 $\frac{0}{0}$,这一符号是瑞士数学家约翰第一·伯努利(Bernoulli, Johann Ⅰ)于 1730 年最先使用的,后来渐渐流行,一直沿用到现在.

向量符号(signs for vector)　表示向量的符号. 瑞士数学家阿尔冈(Argand, J. R.)于 1806 年用 $\overline{AB}$ 表示一个有向线段或向量. 德国数学家默比乌斯(Möbius, A. F.)于 1827 年用 AB 表示一个起点在 A 而终点在 B 的向量,现代偶尔也用这种表示法. 19 世纪,爱尔兰数学家哈密顿(Hamilton, W. R.)、美国物理学家、数学家吉布斯(Gibbs, J. W.)等人则用一个小写希腊字母表示向量,现代亦有这种用法. 兰格文(Langvin)于 1912 年用 $\vec{a}$ 表示向量,此后字母上加箭头表示向量就流行起来,尤其在手写稿中. 一些作者为印刷的方便,用黑体小写字母 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 等表示向量,这两种符号也通用至今. 法国数学家柯西(Cauchy, A.-L.)于 1853 年记向径为 $\bar{r}$,记它在坐标轴上的分量分别为 $\bar{x},\bar{y},\bar{z}$,且记

$$\bar{r}=\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}.$$

而丹麦数学家韦塞尔(Wessel, C.)早在 1797 年就把向量表示为

$$x+\eta y+ez$$

的形式,其中 $\eta^2=-1, e^2=-1$. 德国数学家格拉斯曼(Grassmann, H. G.)于 1878 年发表的著述中结合前两人的工作,用

$$p=v_1e_1+v_2e_2+v_3e_3$$

表示一个具有坐标(x,y,z)的点,其中 e_1,e_2,e_3 分别是三个坐标轴方向的单位长度. 哈密顿则记一个向量为

$$\rho=ix+jy+kz,$$

其中 i,j,k 为两两垂直的单位向量,因而有

$$i\cdot j=-j\cdot i=k,$$
$$j\cdot k=-k\cdot j=i,$$
$$k\cdot i=-i\cdot k=j.$$

这种记法,后来与前述向量记法相结合:印刷时把 i,j,k 印成小写黑体字母,手写时上加箭头,并把系数(坐标)写到前面:

$$\boldsymbol{\rho}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}\ \text{或}\ \vec{\rho}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k},$$

就是现代用法.

全称符号(universal symbol)　逻辑学符号之一. 它表示“对所有的 x,命题 $F(x)$ 都成立”的符号,是重要的逻辑量词之一. 德国另一位数学家莱布尼茨(Leibniz, G. W.)是最先提出符号逻辑思想的数学家,他并没有“全称命题”的概念. 但在 17 世纪末,他曾用“$AB\infty A$”表示“所有的 A 都是 B”的意思,似乎就有“全称”的意味,他的表示法可视为最原始的全称符号. 德国另一位数学家朗伯(Lambert, J. H.)于 1761 年用“$A=B$”或“$A>B$”表示“所有的 A 都是 B”的意思. 意大利数学家卡斯蒂隆(Castillon, G. F.)于 1803 年用“$S=A+M$”表示“所有的 S 都是 A”的意思. 本查姆(Bentham, G.)于 1827 年用小写字母“t”表示“全称”之意,用“$tX=tY$”表示“所有的 X 与所有的 Y 相同”. 英国另一位数学家德·摩根(De Morgan, A.)于 1831 年用“$X)Y$”表示“所有的 X 都是 Y”,用的是半个括号. 英国另一位数学家琼斯(Jones, W.)于 1864 年用字母“U”[Universe

(全称)的首母]作全称符号，而德国数学家格拉斯曼(Grassmann，R.)于 1872 年用字母“T”[Totalität(全体)的首母]作全称符号. 德国另一位数学家施罗德(Schröder，F. W. K. E.)于 1877 年用大写希腊字母“Π”作全称符号，这一方法一直用到现在. 在一些现代数理逻辑系统中仍可见到“$\Pi x F(x)$”(即“对任一 x，$F(x)$都成立”)的记法. 意大利数学家佩亚诺(Peano，G.)于 1888 年用大写希腊字母 Λ 的倒置“V”作全称符号(用 Λ 作“无”的符号). 英国数学家怀特海(Whitehead，A. N.)和数理逻辑学家罗素(Russell，B. A. W.)于 1910 年用括号( )作为全称符号：“$(x)\varphi x$”表示“对所有的 x，φx 成立”，这一用法在一些系统中也一直用到现在. 他们两个也用“V”作为全称符号，这一符号也有人一直用到现在. 后来，有人指出为避免与表示析取的“V”号相混淆，可在“V”中间加一横，即以“∀ ”为全称符号，这是现在最常用的全称符号.

存在符号(existential symbol) 逻辑学符号之一. 它表示“存在 x 使命题 $F(x)$成立”，也是最基本的量词之一. 德国数学家莱布尼茨(Leibniz，G. W.)于 17 世纪末采用“AB exists”或者“$AB\ \infty AB\ E_{ns}$”表示“存在某一 A 是 B”这样的命题，可视为存在符号的起点. 1761 年，德国数学家朗伯(Lambert，J. H.)则采用“$A<B$”表示“存在某些 A 是 B”的意思. 意大利数学家卡斯蒂隆(Castillon，G. F.)于 1803 年用“$S=A-M$”表示“存在某些 S 是 A”的命题. 英国数理逻辑学家德・摩根(De Morgan，A.)于 1831 年用两字母并列表示“存在”：“XY”表示“存在某一 X 是 Y”的命题. 德国数学家施罗德(Schröder，F. W. K. E.)于 1877 年用希腊大写字母“Σ”作存在符号，这一用法影响很广，现在仍有人采用这一记法. 1888 年，意大利数学家佩亚诺(Peano，G.)创用“∃ ”作为存在符号，这一符号受到许多人的首肯. 美国数学家穆尔(Moore，E. H.)、英国数理逻辑学家罗素(Russell，B. A. W.)等人都采用这一存在符号，这一符号逐渐普及，直用至现在.

析取符号(disjunction symbol) 逻辑学符号之一. 它表示析取，即逻辑和“或”的符号. 较早采用符号表示析取的是法国数学家热尔岗(Gergonne，J.-D.)，他于 1816 年用字母“H”作为析取符号，或说用字母“H”表示两个命题的逻辑和. 引入逻辑运算的英国数学家布尔(Boole，G.)于 1847 年用加号“+”表示逻辑和，这一符号后来得到广泛的使用，在一些数理逻辑系统中“+”作为析取符号一直用到现在. 美国数学家皮尔斯(Peirce，C. S.)于 1861 年用“$a+,b$”来表示 a 与 b 的析取. 意大利数学家佩亚诺(Peano，G.)于 1888 年引入了记号“⌣”表示“或”的意思，注意这是一个下位弧形记号. 美国数学家穆尔(Moore，E. H.)于 1910 年仍用此“⌣”符号表示“或”，同时他也采用“U”表示一系列集合的析取. 这可视为一个拉长了的弧形，比佩亚诺的记号更明确些，这一记号一直用到现在. 同时英国数学家怀特海(Whitehead，A. N.)和数理逻辑学家罗素(Russell，B. A. W.)则采用“V”表示析取——两个命题的析取，而用“U”表示两个集合的类的逻辑和，后来又用于同样的意义. 现在一般用 V 或 U 表示析取均可.

合取符号(conjunction symbol) 表示合取，又称为逻辑积的符号. 法国数学家热尔岗(Gergonne，J.-D.)于 1816 年用字母“X”表示合取，可能后来由此演化出用乘号“×”作合取符号的用法. 英国数学家布尔(Boole，G.)采用“+”表示逻辑积，有时又用它表示逻辑和，要视上下文而定. 美国数学家皮尔斯(Peirce，C. S.)于 1867 年则采用逗号“，”表示“和”之意，“$a，b$”表示“a 和 b”. 同时他还采用点号“.”表示“和”之意，如“$a.b$”表示“a 和 b”或说“a 与 b 的合取”，这个点号表积的方法在许多逻辑系统中至今仍在采用. 有时，皮尔斯还不用符号，把两个字母并列表示两个命题的合取，如“xy”表示“x 和 y 的合取”，现在也有采用的. 意大利数学家佩亚诺(Peano，G.)于 19 世纪末用上弧形“⌢”表示合取；美国数学家穆尔(Moore，E. H.)则拉长它，用“∩”表示合取，这一符号也一直用到现在. 英国数学家怀特海(Whitehead，A. N.)和数理逻辑学家罗素(Russell，B. A. W.)是采用点号“.”作合取符号的. 后来人们借鉴于佩亚诺和穆尔的工作，用与析取相反的符号表示合取，即用“Λ”表示合取.

否定符号(negation symbol) 逻辑学符号之一. 它表示逻辑上的“否定”或“非”的概念的符号. 应该说，逻辑非是最早产生的逻辑概念. 德国数学家莱布尼茨(Leibniz，G. W.)作为数理逻辑的先驱，曾用“ABdoes not exist”或“ABnot $\infty AB\ E_{ns}$”这种“半符号”表示“并非 A 是 B”的命题，可视为探索否定符号的早期努力. 同样一个命题，德国数学家朗伯(Lambert，J. H.)则采用

$$“\frac{A}{m}=\frac{B}{n}”$$

来表示. 与朗伯同一时代的冯霍兰德(Von Holland，G. J.)用

$$“\frac{S}{1}=\frac{P}{\infty}”$$

表示“凡 S 皆非 P”的意思. 意大利数学家卡斯蒂隆(Castillon，G. F.)于 1803 年用“$S=-A+M$”或“S：$(-A)+M$”来表示“凡 S 皆非 A”的意思，这里他用“−”号作为减号又作为否定符号，分辨它的意义，有赖于上下文. 英国数理逻辑学家德・摩根(De Morgan，A.)于 1831 年用“$X.Y$”(两字母间加一点在下

位，不同乘号“·”在中间)表示“凡 X 皆非 Y”.

最先用减号“－”表示否定的是英国数学家布尔(Boole,G.)，不过他把这一横线写在要否定的命题之上，如用“$\bar{a}$”表示“非 a”. 后来美国的数学家皮尔斯(Peirce,C. S.)、德国数学家格拉斯曼(Grassmann,R.)也这样用，这一符号得到广泛的响应，直到今天，仍有某些系统以字母上“－”小横表示否定的. 德国数学家施罗德(Schröder,F. W. K. E.)用数字“1”作下标表示否定，如“a_1”表示“非 a”，后来他也采用“$\bar{a}$”表示“非 a”. 意大利数学家佩亚诺(Peano,G.)把横线由字母上移到字母前，用“$-a$”表示“非 a”. 1910 年，美国数学家穆尔(Moore,E. H.)也这样用，这一符号在一些系统中也用到现在. 1910 年，英国数学家怀特海(Whitehead,A. N.)和数理逻辑学家罗素(Russell,B. A. W.)采用波形线“～”作为否定符号，也用“－”表示否定符号，但两者的意义不同，“$\sim p$”表示“非 p”，这里 p 是一个命题；“$-a$”表示“不含 a 类的成员的适当类型的一个类”，两者关系由下式表明

$$x \in -a \equiv x \sim \in a.$$

奥地利数学家维特根斯坦(Wittgenstein,L. J. J.)于 1922 年也用“～”表示否定. 这种波线的否定符号在一些系统中也用到现代. 后来，由于“－”易于减号相混，“～”易与相似或表等价的“～”相混淆，在一些系统中人们用“¬”作否定符号，逐渐成为最常用的否定符号.

蕴涵符号(implication symbol)　逻辑学符号之一. 它表示蕴涵关系(“前件蕴涵后件”或“由前件逻辑地推出后件”的关系)的符号. 也就是表示“如果……那么……”的符号. 最先用符号表示这一意义的是法国数学家热尔岗(Gergonne,J.-D.)，他用“⊂”表示“包含于”，其中也部分含有逻辑蕴涵的意思. 美国数学家皮尔斯(Peirce,C. S.)于 1867 年用“$\prec$”表示“包含于”，也有一些“由后件推出前件”的意思. 德国数学家施罗德(Schröder,F. W. K. E.)于 1873 年用“⊃”表示“包含”，亦有后来的“蕴涵”之意，这一个蕴涵符号在一些系统中一直用到现在. 施罗德运用“⊂”表示“包含于”，这一符号和“⊃”也用于后来的集合论中，意思是集合的包含.

法国数学家麦科尔(Mc Coll,H.)于 1906 年用冒号“:”作为蕴涵符号，用“$A:B$”表示“由 A 推出 B”或“如果 A，那么 B”，有时也用三点“∴”，用“$A∴B$”表示上述意义. 意大利数学家佩亚诺(Peano,G.)于 1888 年用“⊃”作蕴涵符号，美国数学家穆尔(Moore,E. H.)于 1910 年用“⊃”，也用“·⊃·”作蕴涵符号，同时还用“‥”，“∷”作蕴涵符号. 英国数学家怀特海(Whitehead,A. N.)和数理逻辑学家罗素(Russell,B. A. W.)于 1910 年用括号“)”，表示“如果……那么……”，即蕴涵符号，而在他们的著作中，显然也用了“⊃”表示蕴涵；更为重要的是他们还用了“→”表示蕴涵，即“$A\to B$”，表示“如果 A，那么 B”，“由 A 推出 B”. 这一符号后来成为最常用的蕴涵符号. 另外，在一些逻辑系统中，有时用“⇒”作为蕴涵符号.

等价符号(equivalent symbol)　表示等价关系的符号. 所谓“A 与 B 等价”指的是“如果 A，那么 B”，同时有“如果 B，那么 A”，或者说“从 A 推出 B”，同时可“从 B 推出 A”. 1761 年，德国数学家朗伯(Lambert,J. H.)利用算术中的等号“＝”作为逻辑等价符号，此后得到相当广泛的使用. 法国数学家热尔岗(Gergonne,J.-D.)于 1816 年用字母“I”表示等价. 英国数理逻辑学家德·摩根(De Morgan,A.)用“$X \parallel Y$”表示 X 与 Y 等价，即“所有的 X 是 Y，所有的 Y 是 X”. 英国数学家布尔(Boole,G.)仍用“＝”表示等价. 美国数学家皮尔斯(Peirce,C. S.)于 1867 年用等号下加逗号的形式表示等价，如

“$a \underset{,}{=} b$”

表示 a 与 b 等价. 德国数学家弗雷格(Frege,(F. L.)G.)于 1893 年用三线“≡”代替“＝”作为等价符号，后来得到广泛的应用，现在也有应用的. 美国数学家穆尔(Moore,E. H.)于 1910 年用“≡”表示全等，同时引入“⊃⊂”及“～”表示等价，这两种等价符号也是现代逻辑系统中常用的. 借鉴于蕴涵符号“→”，有时把等价记为“⇆”，后来又简化为“⟺”和“⟷”，这几个符号都在现代数学系统中得到了应用.

撰　稿　王怀安　孙宏安
审　阅　杜瑞芝

数学团体与研究机构

数学团体与研究机构(Mathematical Societies and Associations and Research Institutes in Mathematics)　在国际上,研究数学或者与数学有关的学术团体很多,根据不完整的资料统计,仅在美国等40多个国家中,就有全国性的这类学术团体60多个.除了全国性的团体以外,还有世界性、跨洲地区性、洲内地区性和国内地区性而又独立于全国性的团体.

据有关资料反映,国际上最早出现的是成立于1660年的英国伦敦皇家学会.该学会虽然是一个综合性的自然科学学术团体,但它对英国乃至国际数学的发展有着重要影响(参见"伦敦皇家学会").1690年成立了国际上第一个数学会——德国的汉堡数学会,1778年荷兰数学会成立.这些都是国际上早期的数学学术团体,并一直保持至今.19世纪30年代开始,学术团体逐步增多,特别是19世纪60年代至19世纪末,莫斯科数学会、伦敦数学会、法国数学会、美国数学会、德国数学会等15个团体相继成立.这些成立较早的数学会和1897年与1900年举行的两次国际数学家大会,是19世纪后半叶数学发达的重要标志,同时又预示了20世纪数学的新发展.20世纪上半叶成立的数学会、协会等有20多个,1950年以后的半个世纪里成立的团体更多,东南亚、非洲、拉丁美洲的很多国家都成立了数学会,而且还成立了诸如运筹学、工业与应用数学、自动控制理论、数学在其他学科领域应用的学会(协会)这些着重于应用数学和数学应用的学术团体.仅运筹学会,自1952年出现了国际上第一个运筹学会——美国运筹学会以后,在欧洲(不包括东欧地区)已有17个全国性的运筹学会.

这么多学术团体,限于资料来源无法全部收入,这里只收入了成立较早,或是有较大影响,或是有一定特色(如美国的女数学家协会),以及国际性的学会和协会,其中包括部分统计学会、协会以及美国的电气电子工程师学会(IEEE)等,后者是因为它的几个二级学会对应用数学及数学的应用有一定影响,因此也根据有关资料予以介绍.国际数学家大会和国际数学教育委员会,虽然现在分别是国际数学联盟每4年举行一次的国际数学家会议和它下设的一个委员会,但因它们的出现均早于国际数学联盟,对数学和数学教育的发展起着独特的作用,在国际数学界影响很大,也把它们单列于"数学团体"进行介绍.国内与数学有关的学会、协会,原则上只收入了一级学会和其他非数学学会中与数学学科有关的二级学会.

在很多国家的数学会之间都签有"互惠协定".签署此协定的学会之间,一方的会员可以优惠的会费加入另一方作为会员,并享有该方学会会员的同等待遇,包括获取该学会向会员免费提供的期刊资料或以优惠价格订阅其出版的学术性刊物等.美国数学会已与20多个类似的数学会签有此协定.在有关学会的介绍中,凡提到"互惠协定"的,不再一一说明.

现在,各国的数学研究机构比团体更多,其中有一些还带有国际性质,有的已成为国际上的数学研究中心.它们的出现是数学科学发展的需要,已成为推动数学发展的重要机构,也择要予以介绍.

国际性数学学术团体

国际统计学会(International Statistical Institute)　外文缩写为ISI.1885年成立于伦敦.在联合国成立之前,学会曾作为一个国际组织在国际上寻求统计方法和统计实践中的一致性,并在其两年一次的会议上给以阐述,向有联系的国家的政府推荐.1948年重组为国际职业学会.1972年8月曾修改过章程,现行章程生效于1984年2月.根据荷兰法律在荷兰登记注册设有常设机构.学会的宗旨是促进统计方法的发展和改进,以及在全世界的应用;鼓励统计工作者协作并相互交流专业知识,激励他们对专业知识发展的兴趣;帮助在统计学会间和对进一步促进统计的国际统一感兴趣的官方与非官方组织间建立联系;为高级的统计研究设立并保持教授、讲习、研究职位;促进对统计工作者的训练;研究统计理论、评价统计方法和实践;促进最合适的统计方法在所有国家的使用、统计数据的国际可比性和对合理的统计活动及统计方法的适用性进行公开评估.学会有一些附属性的国际组织,如"国际区域和城市统计协会"(International Association for Regional and Urban Statistics—IARUS,在1958年刚成立时名为"International Association of Municipal Statisticians—IAMS",即国际城市统计学家协会)、"伯努利数理统计与概率学会"(BSMSP)、"国际测量统计学家协会"(International Association of Survey Statisticians—IASS,1972年建立)和"国际统计计算协会"(IASC)都是其附属组织.

学会在1972—1984年间参加了世界人口出生率的调查.它从1949年开始曾施行过国际统计教育规划.1950年,它在加尔各答与印度统计学会联合建立了一个国际统计中心,在此中心工作的人员主要来自东非、西南亚和太平洋地区.学会通过与国际统计训练中心的合作活动促进统计人员的培训.它还致力于促进在统计专业不同领域中工作的统计工作者的合作,统计学家与用到统计的科学家之间的合作.此外,学会还组织大会和圆桌会议.它每两年举行一次会议.1995年在北京举行了第50届大会.学会出版多种期刊书籍,科学报告,通报和技术公报.学会历史较长,在国际上影响颇大,活动范围很广.其会员分布于世界120多个国家,到1995年为止有普通会员1700多人,包括中国大陆的15名统计学家.从1979年开始,中国统计学会也与其进行广泛的交流活动.中国数理统计学家王寿仁研究员和成平研究员曾在1987—1991年和1991—1995年分别担任其理事.

国际数学家大会(International Congress of Mathematicians) 外文缩写为ICM.国际数学家每4年一次的集会.1897年8月在瑞士苏黎世举行了第一次大会.为促进数学家之间的交往和了解,苏黎世联邦高等工业学院的数学家们于1896年成立了一个委员会,并由其组织了1897年数学家在苏黎世的集会,会议采用了"国际数学家大会"这一名称,一直延用至今.以后每4年举行一次,1912年到1920年,1936年到1950年间曾因两次世界大战而中断.1950年举行的国际数学家大会上通过了成立(实际上是重建)国际数学联盟(IMU)的议案和联盟章程.现在国际数学家大会由国际数学联盟组织召开,并由其程序委员会和工作小组选定在大会和分学科大组会上分别作1小时和45分钟报告的数学家.每位出席大会的数学家都可申请在小组会上作10分钟的学术报告.1924年在加拿大多伦多举行的国际数学家大会上,采纳了在每次大会上授奖的提议,后命名为"菲尔兹奖".1936年的第十届大会上首次授奖.后又由赫尔辛基大学捐赠设立了奈望林纳奖,奖励在信息科学领域的数学方面做出重大贡献的年青数学家,1982年首次颁奖(因国际数学家大会因故推迟到1983年,故实际上于1983年首次颁奖).在每次国际数学家大会的开幕式上由国际数学联盟的领导人宣布菲尔兹奖和奈望林纳奖的获奖人名单并颁奖,后由他人在大会上分别介绍获奖人的研究成果.在1900年举行的第二届国际数学家大会上,希尔伯特(Hilbert,D.)发表了著名的演说,提出了23个问题,对20世纪的数学发展影响甚大.菲尔兹奖的设立,影响更大.因获奖者的出色成就,该奖已被越来越多的人所重视.早在1932年,中国数学家就参加了国际数学家大会.中华人民共和国成立以后,由于各种原因,中国数学家曾中断了与它的联系,1974年中国大陆的数学家又参加了大会,特别从1983年开始,每次都有中国大陆的数学家参加大会,人数也在逐渐增加.

历届数学家大会召开时间、地点和参加人数

届次	召开时间	地　点	参加人数
1	1897	瑞士苏黎世	108
2	1900	法国巴黎	229
3	1904	德国海德堡	336
4	1908	意大利罗马	
5	1912	英国剑桥	708
6	1920	法国斯特拉斯堡	
7	1924	加拿大多伦多	
8	1928	意大利博洛尼亚	836
9	1932	瑞士苏黎世	667
10	1936	挪威奥斯陆	387
11	1950	美国坎布里奇	1700
12	1954	荷兰阿姆斯特丹	1553
13	1958	英国爱丁堡	1658
14	1962	瑞典斯德哥尔摩	3000多
15	1966	苏联莫斯科	4000多
16	1970	法国尼斯	2811
17	1974	加拿大温哥华	
18	1978	芬兰赫尔辛基	3000多
19	1983	波兰华沙	2300多
20	1986	美国伯克利	3500
21	1990	日本京都	3939
22	1994	瑞士苏黎世	2300多
23	1998	德国柏林	3348

国际数学教育委员会(International Commission on Mathematical Instruction) 外文缩写为ICMI.国际数学联盟的一个工作委员会,根据1908年4月在罗马召开的第四届国际数学家大会的决定而成立.它主要进行有关数学教育和理科教育的活动,合理规划各级数学教育的进一步发展,并使公众认识数学教育的重要性.国际数学教育委员会设主席1人,副主席2人,秘书长1人,任期4年,可连任两届,由国际数学联盟任命.国际数学教育委员会在

第一次世界大战期间曾被迫中断工作，在1928年左右恢复工作后，尚未开展多少活动，又因第二次世界大战而再次中断.国际数学联盟成立后，于1952年重建了国际数学教育委员会，并成为联盟的一个工作委员会.中国于1986年正式成为其成员国，并已有数学教育专家参与其工作.国际数学教育委员会资助、支持各种有关数学教育的国际会议、出版刊物.从1969年开始，国际数学教育委员会每4年召开一次国际数学教育大会(ICME)，汇集各国数学家和数学教育工作者交流有关数学教育方面的研究和实验成果，并就数学教育中的有关问题以及数学教育的发展趋势等进行探讨.国际数学教育委员会的机关刊物是《国际数学教育评论》(L'Enseignement Mathematique Revue Internationale)，并印发《ICMI通报》(ICMI Bulletin).国际数学教育委员会还引导对数学教育中的一些重要课题及关键性问题进行研究.自1985年起陆续出版了ICMI研究丛书(ICMI Study Series)，中国已出版其节译本.1992年在加拿大魁北克召开的国际数学教育大会期间，设立了国际数学教育委员会团结基金会，帮助发展中国家改善数学教育.国际数学教育委员会在团结各国数学家和数学教育工作者、协调有关数学教育组织、交流成果、促进数学教育发展中起着积极作用，特别是它主持召开的国际数学教育大会已日益受到各国数学教育界人士的重视.

历届国际数学教育大会
召开时间、地点、参加人数及国家数

届次	召开时间	地　点	参加人数	代表国家数
1	1969.8	法国里昂	650	42
2	1972.8	英国 埃克塞特	1400	72
3	1976.8	联邦德国 卡尔斯鲁塞	1800	76
4	1980.8	美国 伯克利	1800	90
5	1984.8	澳大利亚 阿德莱德	1800	70
6	1988.7—8	匈牙利 布达佩斯	3000	79
7	1992.8	加拿大 魁北克	2671	60多
8	1996.7	西班牙 塞维利亚	3500	100左右

数理统计学会(Institute of Mathematical Statistics)　外文缩写为IMS.1935年12月成立，是由美国数学会和美国数学协会联合建立的一个国际性学会.学会的目的是促进数理统计和概率论的发展、传播及应用.学会加入了国际统计学会(ISI).学会有来自58个国家的3000名会员.学会每年举行一次全体大会，到1986年为止已开过49次.学会除出版通报(杂志)外，还出版了《统计年刊》(Annals of Statistics)和《概率年刊》(Annals of Probability)两种杂志(原来出版的是《数理统计年刊》——Annals of Mathematical Statistics，1973年开始分为现在的两种).这两种杂志在概率统计领域内影响很大.

符号逻辑协会(Association for Symbolic Logic)　外文缩写为ASL.1936年成立，总部建在美国，是一个国际性的组织.其成立目的是为了促进符号逻辑的研究，促进数学家、哲学家及其他在此领域有研究兴趣的人员之间的交流.设立有拉丁美洲、北美洲及会员委员会，以及奖励、出版、逻辑学家权益等委员会，还和美国数学会联合设立了俄语及其他斯拉夫语言翻译委员会.它在美国科学促进协会、国际科学史与科学哲学联盟、美国数学科学会议委员会等都派有代表.协会除每年在美国举行年会外，还每年举行一次春季会议(一般在美国)和欧洲夏季会议.近几年来还每年召开有关计算机科学逻辑的年度专题讨论会，以及科学逻辑、方法论与哲学的国际会议.此外，还与其他组织一起或资助其他组织举行有关国际会议和专题讨论会.协会主办有《符号逻辑杂志》(The Journal of Symbolic Logic)和《哲学逻辑杂志》(Journal of Philosophical Logic)，1995年又新创办了《符号逻辑通报》(Bulletin of Symbolic Logic)，并组织出版数理逻辑方面的丛书.协会从20世纪70年代开始设立了卡普奖.该协会与美国数学会、IEEE计算机学会等组织有着密切的关系，经常同时召开年会.每年的12月号《符号逻辑杂志》上都公布有当年的会员名单.据1994年公布的名单，当年有会员1500多名(包括中国的会员)，研究机构等事业性会员36个.

国际生物统计学会(International Biometric Society)　外文缩写为IBS.1947年9月6日在美国马萨诸塞州的伍兹候耳成立，成为国际生物科学联合会的生物统计部分.目前的联系地址设在美国俄勒冈州立大学统计系.学会宗旨是通过发展定量理论和应用，发展和传播有效的数学方法和统计技术，促进定量生物学科的发展.学会加入了国际统计学协会(International Statistical Institute—ISI).学会的活动除召开国际大会和国际讨论会外，还定期召开地区会议，宣读论文并进行讨论.学会出版的刊物《生物统计学》(Biometrics，在美国出版)在统计学界有一定影响.学会有来自69个国家的超过6000人

的个人会员；19 个国家或地区的单位和 5 个国家的全国性小组的团体会员；还有 3 个国家的 32 个资助合作会员.

国际数学联盟(International Mathematical Union) 外文缩写为 IMU. 世界各国各地区数学学术团体的联合体，国际科学联盟理事会(International Council of Scientific Union—ICSU)的成员. 1950 年 8 月在美国马萨诸塞州坎布里奇举行的国际数学家大会上通过章程，1951 年 9 月正式成立. 1952 年在意大利召开第一次代表大会. 联盟的宗旨是促进国际数学界的合作，支持和资助国际数学家大会及其他有关的学术会议，鼓励并支持有助于数学各领域发展的其他国际数学活动，包括纯粹数学、应用数学和数学教育. 1919 年曾成立过国际数学联盟，负责组织国际数学家大会和其他有关的国际活动. 两次世界大战间曾受政治斗争的影响并时有抵制活动，随着第二次世界大战的爆发，终于自行解散. 1951 年成立的国际数学联盟实属重建. 国际数学联盟的组织机构为代表大会和执行委员会. 联盟每 4 年在举行国际数学家大会期间召开代表大会，改选执行委员会. 执行委员会设主席 1 人，副主席 2 人，秘书长 1 人，委员 5 人，加上前任主席作为当然委员. 联盟的决策主体是代表大会，如 1990 年在日本京都召开的代表大会上就讨论决定了在国际数学家大会上增加作邀请报告的女数学家人数. 代表大会还根据上届执行委员会的推荐决定举行下一届国际数学家大会的地点. 执行委员会通过程序委员会和有关工作小组决定邀请在下届国际数学家大会的大会和大组会上作报告的人选，并通过工作小组进行必要的组织工作和菲尔兹奖与奈望林纳奖的评审工作. 除了国际数学家大会外，联盟还通过以下工作委员会开展其他国际活动：

1. 发展与交流委员会(The Commission on Development and Exchange—CDE)，为发展中国家的数学活动提供部分资助，其中包括对这些国家举行的会议的资助及资助这些国家的数学家访问国际上的一些数学中心. 联盟还用成员组织的捐赠设立了特别发展基金，资助青年数学家参加国际数学家大会.

2. 国际数学教育委员会(ICMI)，除每 4 年召开一次国际数学教育大会外，还支持其他有关数学教育的研究和国际活动.

3. 国际数学联盟还和国际科学史与科学哲学联盟(The International Union for the History and Philosophy of Science—IUHPS)联合设立了国际数学史委员会(The International Commission on the History of Mathematics—ICHM)，在国际科学史大会和国际数学家大会期间组织数学史会议，该委员会还每 4 年一次颁发梅奖，奖励在数学史方面有突出贡献的数学史学家.

国际数学联盟还曾决定 2000 年为世界数学年，并于 1991 年成立了“国际数学年 2000 世纪交替委员会”(WMY2000 Turn of the Century Committee)，具体筹划届时的活动. 国际数学联盟的出版物有《国际数学联盟公报》、代表大会会议录和年度报告，此外还委托美国数学会出版《世界数学家名录》(World Directory of Mathematicians)，截至 1998 年已出第 11 版. 加入国际数学联盟必须履行申请手续，通常由各国全国性或各地区全地区性的学会或相当的组织提出申请，并要在申请中说明申请组织在国内或地区内的数学活动水平. 成员组织必须交纳会费. 成员资格按数学活动水平分成 5 类，各类成员分别拥有 1 票到 5 票不等的表决权，各类成员的会费也不相同. 截至 1994 年为止，已有 55 个国家和地区学术团体、研究机构成为国际数学联盟的成员，按类分组：第一组有喀麦隆、智利、克罗地亚、古巴、埃及、希腊、香港、冰岛、伊朗、象牙海岸、朝鲜民主主义人民共和国、新西兰、尼日利亚、挪威、菲律宾、葡萄牙、罗马尼亚、新加坡、斯洛文尼亚、土耳其、越南、委内瑞拉；第二组有阿根廷、奥地利、保加利亚、捷克共和国、丹麦、芬兰、格鲁吉亚、爱尔兰、韩国、墨西哥、斯洛伐克共和国、南非、南斯拉夫；第三组有澳大利亚、比利时、巴西、匈牙利、印度、以色列、荷兰、波兰、西班牙、瑞典、瑞士；第四组有加拿大、意大利；第五组有中国、法国、德国、日本、俄罗斯、英国、美国. 中国数学会在 1986 年圆满地解决了代表权问题，中国代表团在联盟内拥有 5 票表决权，其中中国数学会为 3 票，位于中国台北的数学会为 2 票. 1990 年，中国海峡两岸的数学家第一次共同组团参加了联盟的代表大会.

国际模拟数学和计算机协会(International Association for Mathematics and Computers in Simulation) 外文缩写为 IAMCS. 1955 年 10 月建立，初建时的名称为“国际模拟计算协会”(International Association for Analogue Computation)，1976 年改为现名. 协会的宗旨是通过组织国际会议和展示设备，促进对模拟计算和计算方法感兴趣的科学家间的信息交流；通过出版物和与科学协会建立经常接触，促进计算方法的研究. 协会与国际自动控制联合会(International Federation of Automatic Control—IFAC)、国际信息处理联合会(International Federation for Information Processing—IFIP)、国际运筹学联合会(International Federation of Operational Research Societies—IFORS)、国际测量联盟(International Measurement Confederation)组成了 5 个国际协会协调委员会(Five International Asso-

ciations Coordinating Committee—FIACC). 协会的主要活动是在模拟系统一般领域中进行研究、编辑出版物,并组织国际会议和科学讨论会,内容涉及工程、物理、社会、生命和环境科学中的数学建模、数值分析、逼近理论,还考虑模拟的计算机硬软件和程序语言等. 会员分正式会员和协作会员,协作会员又有科学协作会员(学术协会)和工业协作会员(工业、公共和私人商行)之分. 其会员来自 33 个国家,其中包括中国.

国际自动控制联合会(International Federation of Automatic Control) 外文缩写为 IFAC. 1957 年成立于巴黎. 现行联合会章程和细则是 1984 年 6 月在布达佩斯制定的. 联合会根据瑞士法律在瑞士注册登记. 联合会的宗旨是通过传递交流信息、通过国际会议,与其他国际组织(或国家)合作出版刊物等,促进控制理论学科和技术的发展,并促使其在最广泛的意义上在各类系统上的应用,其中包括工程、物理、生物、社会和经济等系统. 联合会与国际科协理事会有科学协作关系,是国际技术协会联盟(Union of International Technical Associations—UITA)的成员;与国际药物生物工程联合会等 3 个国际学(协)会保持着经常的合作关系;是 5 个国际协会协调委员会的成员(参见"国际模拟数学和计算机协会"). 联合会设立 14 个委员会,其中数学控制委员会另设 5 个工作组,系统工程委员会另设有 8 个工作组,理论委员会另设 2 个工作组,应用委员会另设 4 个工作组,发展中国家委员会设 3 个工作组. 联合会除通过这些委员会进行活动外,还每隔 3 年召开一次大会,组织讨论会和专题研究讨论会,并与其他国际性学术组织联合召开大会或讨论会. 联合会由 44 个国家的成员组成,每一个成员代表本国与自动控制有关的技(学)术学会. 中国自动化学会是联合会的成员,并是联合会的发起单位之一. 20 世纪 80 年代以来,中国经常有从事控制理论研究和应用的数学家去参加其大会,或参加其组织的国际专题讨论会.

国际运筹学联合会(International Federation of Operational Research Societies) 外文缩写为 I-FORS. 1959 年 1 月由法国运筹学会、英国运筹学会和美国运筹学会发起成立. 联合会的宗旨是激励把运筹学作为一门统一的学科加以发展,并促进其在全世界发展提高. 联合会是 5 个国际协会协调委员会的成员(参见"国际模拟数学和计算机协会"),是国际信息处理联合会(IFIP)的成员. 联合会除每 3 年举行一次大会外,还召开国际会议特别大会,并在发展中国家开展活动. 联合会还与国际自动控制联合会(IFAC)、国际信息处理联合会及国际人类工程学协会(IEA)等举行联合讨论会. 联合会一成立就非常注意汇编和分发国际文摘,1961 年创办了《国际运筹学文摘杂志》(International Abstracts in Operations Research);另外,还出版通报、会议录等. 1975 年 1 月,在联合会内又成立了欧洲运筹学协会(Association of European Operational Research Societies—EURO). 到 1984 年为止,联合会已包括了 34 个国家的运筹学会,其中包括中国数学会运筹学会. 这些学会的会员总数达 30000 多人.

伯努利数理统计与概率学会(Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability) 外文缩写为 BSMSP. 1961 年建立,初建时名为"国际自然科学统计协会"(International Association for Statistics in Physical Sciences—IASPS). 总部设在荷兰. 学会的宗旨是促进概率(包括随机过程理论)和数理统计科学的发展及应用. 学会除设理事会、执行委员会外,还设 6 个常务委员会进行活动:自然科学统计委员会(继续学会前身的活动)、随机过程大会委员会、时间序列委员会、伯努利学会欧洲地区委员会、伯努利学会拉美地区委员会、伯努利学会亚太地区委员会. 学会会员为来自 60 个国家的个人,中国也有其会员.

国际数学学习研究小组(International Study Group for Mathematics Learning) 外文缩写为 ISGML. 1961 年成立于美国帕洛阿尔托(1971 年与加拿大的魁北克省合并),其最近的一届办事机构设在伦敦. 学习研究小组的宗旨为研究数学语言及相关学科,并把研究结果用于教育过程;传播基本研究和课程发展的信息. 学习研究小组活动包括举行国际和学科会议,有关数学的专题讨论会和学习过程研究的大会;介绍心理实验情况和一些数学训练已属基本内容的国家中的现代数学. 学习研究小组主办有《结构学习杂志》,还编辑出版了《数学课程评估法》一书. 学习研究小组在 24 个国家有其研究中心,其成员分集体的、社会事业性的和个人的 3 种.

国际数理生物学会(International Society of Mathematical Biology) 外文缩写为 ISMB. 1962 年 10 月 13 日成立于巴黎,学会办事机构设在法国. 学会的宗旨是在宏观以及微观方面把数学方法直接应用于生物现象,以确定有代表性的数学模型. 学会的活动主要是指导讨论班,在巴黎每 2 年举行一次大会,以英、法语出版《生物数学》(Revue de Bio-Mathematique /Biomathematics). 会员来自 42 个国家,包括中国在内.

国际数理地质协会(International Association for Mathematical geology) 外文缩写为 AMG. 1968 年 8 月在布拉格国际地质大会上成立,其联系地址随当选秘书长的变动而改变. 协会的宗旨是促进数学各学科在地质研究及技术方面的应用的国际

合作.协会理事会下设计划、会员、财务和教育等委员会.协会与伯努利数理统计和概率学会(BSMSP)、国际统计学会(ISI)都有联系,并是国际地质科学会联盟(IUGS)的成员.协会通常通过下列会议进行活动:科学会议、讨论会和专题研讨会(后者一般与国际地质大会和国际统计学会共同举行).另外还出版《数理地质学杂志》(Journal of Mathematical Geology)等3种刊物.协会有来自47个国家的800名会员,其中包括中国会员.

数学规划学会(Mathematical Programming Society) 外文缩写为MPS.1971年成立于荷兰海牙,秘书处设在国际统计学会(ISI)在荷兰所设立的常设机构内.数学规划学会是一个致力于促进数学规划应用、数学规划的计算方法及理论发展的国际性组织,其领导机构为通过选举产生的委员会,设立主席、副主席、秘书长各一人,由秘书处负责会籍、经费使用管理及其他工作.现在学会设立的工作委员会有:算法委员会、出版委员会、研讨会指导委员会、会籍委员会、随机过程委员会等,此外还有富尔克森、丹齐克、皮尔-奥恰特-海斯、塔克尔4个奖励委员会.学会承办《数学规划》(Mathematical Programming)杂志和连续出版物《数学规划研究》(Mathematical Programming Studies).每3年还举办一次数学规划国际讨论会,并资助世界各地其他的有关会议.会员来自40多个国家和地区,其中包括中国会员.

东南亚数学会(Southeast Asian Mathematical Society) 外文缩写为SEAMS.1972年成立.学会的目的是提高东南亚地区的数学教学水平,促进在纯数学和应用数学领域的研究.为此,学会成立后首先进行了组织联络工作,并组织了一系列的专题讨论会和大会,促进了各国数学家的彼此了解与合作.其大会每2年举行一次,地点不固定,主要交流科研与教学方面的成果与看法.现在,专题讨论会已从开始时的小型会议向大型发展.从1978年开始,学会组织了东南亚数学教育会议(SEACME),到1987年为止,已举行过4次.这一学会在东南亚影响较大,其目的是让人们意识到数学教学中存在的问题,并促使其转变.现在学会每年都要主办两次以上的各类会议,并在成员国和地区开展局部活动.此外,学会还主办了季刊《通讯》(Newsletters)和半年刊的学术刊物《公报》(Bulletin).为了促进更广泛的国际联系,学会还与法国、澳大利亚等国联合举办会议,其中法国东南亚数学会议到1988年为止已举行过4次.学会的活动得到了联合国教科文组织(UNESCO)和新加坡李氏基金会(通过新加坡国立大学)的财政资助.学会的活动使东南亚地区的数学从吸收消化外来成果,进入到了自己研究出成果的阶段,并使部分国家和地区组成了自己的数学学术团体.1973年,菲律宾数学会成立,并与东南亚数学会密切合作,建立了培养数学博士的计划,现已有了其自己培养的博士;印度尼西亚也于1976年成立了数学会;在泰国,于1978年建立了促进数学研究中心;后又成立了香港数学会.近年来,中国大陆常有数学家被邀参加东南亚数学会所组织的有关会议,促进了中国大陆数学工作者与东南亚地区数学工作者之间的联系和彼此的了解.东南亚数学会成立时的成员为:印度尼西亚、马来西亚、菲律宾、新加坡、泰国、文莱、越南、老挝、柬埔寨和中国香港,但印度支那国家在1975年以后退出了学会.

国际数学物理协会(International Association of Mathematical Physics) 外文缩写为IAMP.1977年建立,联系地点设在瑞士.协会宗旨为促进数学物理的国际合作,鼓励协调活动.协会的活动除3年一次的大会外,还资助国际数学物理大会的召开,并出版刊物《国际数学物理协会新闻公报》(IAMP News Bulletin).协会会员分个人(普通)会员和组织(协作)会员.

国际统计计算协会(International Association for Statistical Computing) 外文缩写为IASC.1977年12月成立于新德里,是国际统计学会(ISI)的一部分,其联系方式是通过国际统计学会转.协会宗旨是通过世界各国的统计学家、搞计算的同行、组织、研究机构、政府以及一般公众间的国际接触,促进对有效的统计计算的兴趣和了解.协会与国际信息处理联合会有联系,与国际区域与城市统计协会有合作关系.协会每2年举行一次计算统计讨论会,自1979年开始每2年还召开一次一般会议,两会召开年份错开.协会还出版了《国际统计信息》(International Statistical Information)、《统计软件快报》(Statistical Software Newsletter)两种期刊和讨论会会议录.协会会员由来自57个国家的人员组成,包括中国的会员.

澳大利西亚组合数学会(The Combinatorial Mathematics Society of Australasia) 外文缩写为CMSA.1979年建立,办事机构设在澳大利亚的蒂金(Deakin)大学.学会的宗旨是为促进组合数学的研究、构造和离散结构的应用.通过其新闻快报和《组合学》(Combinatorics)杂志传递组合论和组合论工作者的信息.学会每年召开年会一次,并编汇出版会议录.学会会员分布在8个国家.

亚太运筹学会(The Association of Asian—Pacific Operational Research Societies) 外文缩写为APORS.1984年8月在美国华盛顿举行的第十届国际运筹学联合会(IFORS)会议期间,亚太地区8个成员国的代表通过座谈提议组建亚太运筹学会,

并于1985年在日本召开了第一次理事会，宣告了学会的正式成立．它是国际运筹学联合会内的一个地区性组织，其主要目的是促进亚太地区运筹学的发展．1988年8月在韩国召开了以“亚太地区运筹学与管理(OR/MS)所面临的新挑战”为主题的第一届学术讨论会，并确定了第二届会议于1991年在北京举行，其主题是“运筹帷幄，决胜千里”．新加坡运筹学会于1984年创刊的学术刊物《亚太运筹杂志》(Asian－Pacific Journal of Operation Research)，从1986年起转为亚太运筹学会的学术刊物．其成员有澳大利亚、中国、日本、韩国、新加坡、中国香港、新西兰等国和地区的运筹学会．学会的首任主席是韩国的Rha，副主席是中国的徐光辉．第二届主席是中国的徐光辉．

泛华统计协会(International Chinese Statistical Association)　外文缩写为ICSA．1987年8月在美国旧金山成立．是以教育、慈善及科学为目的一个非营利性组织．协会由出席1986年8月在芝加哥召开的美国统计协会的华裔统计工作者聚商成立．成立时理事长是刁锦寰，新任理事长为傅权．协会的宗旨为：通过学术会议出版杂志以及其他教育项目的活动，提高统计学科的理论和应用；推广统计方法在社会各领域中的应用，促进广大群众对统计方法及其应用有更好的理解和兴趣；通过开拓标准和普通术语以促进更好地交流，鼓励在统计活动中教育、科研、工业及政府等各方面人员的合作．协会对会员进行了分组和划区组织，每一个组包括统计方法、理论或应用的一个领域，同时按地理位置划区，每一个会员仅属一个划区．协会除定期召开大会外，还通过各组或划区进行活动，如就某一特定领域中最新研究和发现等召开专题会议，举办专题演讲会或就某一新领域中的应用召开深入的研讨会等．会员对象主要是世界各地的华人统计工作者．现在其会员分布在中国大陆、台湾、香港、美国和欧洲等地．

欧洲工业数学联合会(European Consortium for Mathematics in Industry)　外文缩写为ECMI．1987年建立，秘书处设在荷兰的恩特赫文(Eindhoven)大学．联合会成立的宗旨是：推动数学模型在工业中的应用；教育培养“工业数学家”，以满足社会对这类专家日益增长的需要；以欧洲作为其活动范围．主要活动有：

1．为工业提供服务，即向应用单位提供问题的识别和系统地阐述问题；选定专家；组织联合攻关；培养有学位的工业数学家；培训工业部门的工作人员等．

2．每年召开年会，到1989年为止已召开4次，还及时组织一些小型专题讨论会和专业会议．

3．出版年会、讨论会和专业会议的会议录、案例及专著，还出版每年2期的《快讯》向团体会员提供各种活动信息．1989年，ECMI的主席发表文章称：“ECMI集中精力于已明确的应用数学领域开展研究和进行研究生后训练．”它已建立了博士后培训计划(培训对象为数学家和有关数学领域的博士生)，并在有关团体会员中建立了ECMI中心，具体实施这一计划．还计划在欧洲建立一个学术小组网络，并使其覆盖数学在工业中应用的一切领域．还将要加入由欧洲数学理事会指导下建立的数学家数据库，以提供工业应用数学专门技术的信息．此外，ECMI对欧洲以外的国家，特别是正在发展工业并与一个或多个欧洲国家有联系的国家，也将发挥其作用．ECMI只吸收团体会员．会员有工业性和学术性两类，分布在奥地利、德国、芬兰、法国、英国、爱尔兰、意大利、荷兰和挪威等国．

国际线性代数学会(International Linear Algebra Society)　外文缩写为ILAS．学会成立于1987年在加拿大维多利亚(Victoria)举行的“组合矩阵分析会议”期间，目的是围绕线性代数在各方面的应用以及理论矩阵分析和抽象线性代数开展研究，鼓励与支持召开会议和出版学术书刊等活动．ILAS的首次会议于1989年8月在美国犹他州普罗沃举行．除ILAS会议外，还举办其他有关线性代数的会议，出版通报性刊物《概念》(Image)，以提供讨论和发表意见的论坛．它设有传递ILAS活动通告以及线性代数学家感兴趣的其他消息的电讯服务，并建有ILAS信息中心，那里有能提供国际线性代数会议和线性代数期刊等消息的在线系统(on－line system)．

欧洲数学会(The European Mathematical Society)　外文缩写为EMS．欧洲数学界的学术团体．1978年在赫尔辛基召开的国际数学家大会期间开始酝酿，经欧洲数学理事会讨论，1990年成立于波兰．按芬兰法律建立并在赫尔辛基设立总部．最高领导机构为由成员学会和个人会员代表组成的委员会．该委员会每2年召开会议一次，具体工作由执行委员会负责．学会设主席、秘书长、书记各一人，任期4年．为促进欧洲在数学各领域发展而建立的欧洲数学会，其主要目的是要促进数学及其应用的研究；在数学教育问题上给以支持并提出建议；考虑数学与社会的广泛关系，寻求在欧洲数学家之间建立一种同一意识．欧洲数学会已在数学家与欧洲联盟官员的关系中占有特殊的地位．学会开展以下活动：

1．每4年召开一次欧洲数学大会，为与会者提供纯粹数学与应用数学方面的各种新信息，为讨论数学与欧洲社会的关系提供论坛，以加强欧洲各国数学家的合作．

2．组织狄德罗数学论坛，即同时在3个欧洲城

市召开“数学联会”，分别就基础数学、应用数学及它们与社会的关系3个主题进行演讲，再通过电信互相交流. 这种会议每年召开2次.

3. 每2年组织一次欧洲数学讲座，即邀请一位杰出数学家访问某个单位，开设与当前研究兴趣的某一方面有关的系列讲座.

4. 组织夏季学校，以鼓励青年数学家相互交流、相互促进. 每年在纯粹数学与应用数学方面各组织一个学校，每次大约有百名尚未获博士学位的学生参加此类学校.

学会计划创办一种《欧洲数学会杂志》，现已出版了每年4期的《快讯》，向所有会员提供会议消息、书评、问题及一般性文章等. 学会还提供欧洲数学信息服务，其中包括一个电子图书馆，除能提供各种信息外，还能免费阅读电子图书馆的电子杂志、印刷型杂志的电子版及会议录的电子卷本等. 存入电子图书馆的资料，需经学会的电子出版委员会批准，以保证质量. 学会会员分两类：团体会员与个人会员. 团体会员包括欧洲各国的所有数学会，个人会员入会可通过所在国数学会或直接向欧洲数学会书记提出申请. 现有个人会员2000人左右.

中国数学学术团体

中国数学会(Chinese Mathematical Society) 外文缩写为CMS. 中国数学工作者的学术性群众团体，是中国科学技术协会的组成部分. 中国数学会的宗旨是认真贯彻执行科学技术为社会主义服务的方针，团结全国数学工作者，为促进中国数学事业的发展，为繁荣中国的科学事业，为实现社会主义现代化作出贡献. 中国数学会的主要工作有：组织学术交流活动，编辑数学刊物，进行国际学术交流，开展促进数学教育水平提高的活动，开展普及工作和咨询服务等.

中国数学会于1935年7月27日在上海成立. 成立大会于7月25日—7月27日在上海交通大学图书馆举行，出席大会的代表有33名. 创建时的组织机构设董事会、理事会与评议会，其主要成员有胡敦复、顾澄、冯祖荀、周美权、姜立夫、熊庆来、陈建功、苏步青、江泽涵、钱宝琮、傅种孙、朱公谨、范会国等. 1936年创办了学术期刊《中国数学会学报》(苏步青任总编辑)及普及性刊物《数学杂志》. 1952年与1953年这两个刊物先后改为现名《数学学报》与《数学通报》. 中国数学会成立时的会址设在上海中国科学社. 中国数学会的成立，促使中国数学界人士联合起来，积极开展国内外的学术交流活动，使中国数学的发展进入了一个新的阶段. 成立后不久，由于在抗日战争期间交通不便，开展活动非常困难. 昆明的数学工作者于1940年发起成立了“新中国数学会”，在极其艰难的条件下开展了一些活动，1942年在西南联合大学集会，纪念牛顿(Newton, I.)诞辰300周年. 1949年，中国数学会在北京复会，此后会址一直设在北京中国科学院数学研究所. 1951年8月在北京、1960年2月在上海先后召开了中国数学会第一、二次全国会员代表大会，华罗庚任理事长. 1966—1977年“文化大革命”时期，数学会的活动被迫中断. 1978年开始恢复活动，1978年11月在成都召开了中国数学会第三次全国会员代表大会，华罗庚连任第三届理事长. 1983年10月在武汉召开了中国数学会第四次全国会员代表大会，选出的学会负责人为：理事长吴文俊，副理事长王元、谷超豪、胡国定、程民德，秘书长杨乐. 1987年中国数学会用通讯选举方式选出了第五届理事会(任期为1988—1991年)，负责人为：理事长王元，副理事长丁石孙、伍卓群、严士健、石钟慈，秘书长李忠. 1991年仍用通讯选举选出了第六届理事会(任期为1992—1995年)，负责人为：理事长杨乐，副理事长石钟慈、严士健、张恭庆、胡和生、潘承洞，秘书长李忠. 1995年5月在北京举行了中国数学会第七次全国会员代表大会暨中国数学会成立60周年年会，选举产生了第七届理事会(任期为1996—1999年)，理事长张恭庆，副理事长丁伟岳、刘应明、李大潜、林群、潘承洞，秘书长李文林. 1999年6月在北京召开了中国数学会第八次全国会员代表大会，选举产生了中国数学会第八届理事会及常务理事会(任期为2000—2003年)，理事长马志明，副理事长丁伟岳、刘应明、李大潜、张继平、侯自新、袁亚湘，秘书长彭立中.

1985年12月在上海举行了中国数学会成立50周年年会，到会代表200多人，还邀请了国外10个国家和地区的15位数学家参加，进行中外学术交流活动，隆重纪念中国数学会成立50周年.

目前由中国数学会主办编辑的学术期刊有《数学学报》(中文版、英文版)、《应用数学学报》(中文版、英文版)、《数学进展》、《数学的实践与认识》、《应用概率统计》、《数学通报》和普及性刊物《中学生数学》与《中等数学》. 中国数学会从1956年开始举办中学生数学竞赛，除“文化大革命”期间外，每年举行. 这一活动激发了学生学习数学的兴趣，有助于发现和培养人才. 从1985年开始，每年从全国选拔和培训数名中学生，参加国际数学奥林匹克竞赛，并取得了较好的成绩. 全国34个省、自治区、直辖市除香港、澳门、台湾省外，都建有在该地区科协领导下的数学会，独立开展各项活动. 中国数学会下属的学科分会有计算数学分会、概率统计分会、数学史分会. 会员资格规定为在科研、教育、生产企业等部门从事数学或与数学有关的工作，有相当于讲师、助理研究

员、工程师以上职称的数学工作者. 1965年中国数学会会员约有5500人,1985年会员增至2万多人. 目前,中国数学会的工作机构有:学术交流工作委员会、编辑出版工作委员会、国际交流工作委员会、普及工作委员会、传播工作委员会、教育工作委员会、数学名词审定委员会、组织工作委员会、学会办公室. 中国数学会于1986年7月加入国际数学联盟. 已经和10多个国家和地区的数学会建立了联系并开展了学术交流.

中国现场统计研究会(Chinese Association of Applied Statistics) 外文缩写为CAAS. 由张里千、孙长鸣、林少宫、杨纪珂、刘婉如、汪仁官等发起,于1979年8月成立的学术性群众团体,是中国科学技术协会的组成部分. 中国现场统计研究会的宗旨是推进数理统计与管理等方法的实际应用,面向生产,普及提高,注重实效. 中国现场统计研究会设有软件开发、多元分析、社会经济统计、生物统计、体育统计、气象地质统计、质量控制、试验设计、可靠性工程等9个专业委员会. 中国现场统计研究会主办有学术刊物《数理统计与管理》(双月刊). 中国现场统计研究会理事长为张里千,副理事长为林少宫、敖硕昌、艾提、杨纪珂、成平、陆首群,秘书长为严擎宇,副秘书长有李从珠等. 中国现场统计研究会的会址设在北京中国科技大学研究生院.

中国统计学会(National Statistical Society of China) 外文缩写为NSSC. 1979年成立. 是中国研究统计科学的群众性学术团体. 会址设在北京. 其宗旨是以马克思主义、毛泽东思想为指导,坚持四项基本原则,贯彻理论联系实际和百家争鸣、洋为中用的方针,研究统计科学理论和国内外的统计制度、方法、技术,以提高中国统计理论的科学水平,建设有中国特色的统计工作理论体系,为社会主义现代化建设服务. 中国统计学会的理事会由会员代表大会选举产生,学会设会长、副会长和秘书长,并设立秘书处负责日常工作. 学会设立若干专题统计学术研究组,研究重大的统计理论和实际问题. 学会的主要任务是:组织、指导、推动会员积极参加统计学活动;研究、总结和交流中国统计科学研究和统计工作经验;举办统计学术报告和统计科学讨论会,组织编译和出版统计书刊;协助有关部门加强统计专业教育,积极开展统计干部培训工作;协助有关部门调查研究统计工作中的问题,提出改进建议;开展统计学术的国际交流活动,研究介绍外国统计科学的研究成果和统计工作的发展情况;奖励研究成果卓著的单位和个人等. 学会于1980年创办不定期丛刊《统计研究》,1984年改为季刊. 学会会员分个人与集体两类,个人会员通过全国各地方和部门统计学会或统计研究会(组)定期申请,学会批准. 集体会员由全国各地方和部门统计学会或统计研究会(组)自愿申请,学会认可.

中国珠算协会(The Chinese Zhusuan Association) 外文缩写为CZSA. 中国从事珠算普及与科学研究的全国性群众学术团体,中国科协成员. 中国珠算协会于1979年成立,成立大会于10月31日至11月6日在河北省秦皇岛市召开,出席会议的代表有200余人. 会议通过了《中国珠算协会章程》,选举了第一届理事会理事70人,其中常务理事23人. 名誉会长为陈如龙、董纯才,会长为姜明远,顾问为华印椿,副会长为姚耐、陈梓北、李新、殷长生,秘书长为李新. 协会每4年召开一次全国会员代表大会,会议期间选举产生下一届理事会. 理事会设会长1人,副会长、常务理事若干人,秘书长1人. 每届理事任期4年. 协会的宗旨是:以建设有中国特色的社会主义理论为指导,坚持以经济建设为中心,坚持四项基本原则,坚持改革开放,贯彻理论联系实际原则,充分发挥珠算的计算功能和教育启智功能,繁荣珠算事业,为社会主义现代化建设服务.

协会的主要任务是:组织珠算理论研究,进行珠算学术交流;开展珠算的宣传和教育,普及珠算科技知识;开展珠算技术等级鉴定,组织珠算技术比赛;进行算具改革,组织推广应用;组织评议珠算科研成果,进行学术奖励表彰;编辑出版珠算书刊,提供珠算科技咨询服务. 理事会下设算理算法、珠算史、三算教学(口算、笔算、珠算)、珠算教学、算具5个专业委员会和比赛裁判、全国学生通讯比赛两个工作委员会. 协会编辑出版会刊《珠算》(双月刊)和《珠算报》(月报). 会员分团体与个人两类. 团体会员为与本协会专业有关、具有一定数量的科技队伍,愿意参加活动的有关群众性学术团体,包括省、自治区、直辖市、计划单列市和系统珠算协会. 个人会员为科技界、教育界、财政金融界、工商企业界等,热心珠算研究,从事珠算教育,珠算协会工作的人员和珠算爱好者. 在学术上有较高成就,对中国友好,并愿意与本协会合作的外籍科技工作者,经本人申请,可聘为通讯会员. 协会现有会员3万人左右.

各省、市、自治区珠算协会一览表

次序	名　称	成立时间	地　点
1	浙江省珠算协会	1979.4.25	杭州市
2	广西壮族自治区珠算协会	1979.7.10	南宁市
3	江苏省珠算协会	1979.9.25	南京市
4	河南省珠算协会	1979.10.6	郑州市
5	黑龙江省珠算协会	1979.10.16	哈尔滨市

次序	名　称	成立时间	地　点
6	北京市珠算协会	1980.2.22	北京市
7	辽宁省珠算协会	1980.4.11	沈阳市
8	广东省珠算协会	1980.4.22	广州市
9	上海市珠算协会	1980.4.23	上海市
10	山西省珠算协会	1980.4.24	太原市
11	湖南省珠算协会	1980.4.29	长沙市
12	江西省珠算协会	1980.5.19	南昌市
13	山东省珠算协会	1980.5.27	济南市
14	吉林省珠算协会	1980.6.3	长春市
15	河北省珠算协会	1980.6.5	石家庄市
16	内蒙古自治区珠算协会	1980.6.18	呼和浩特
17	福建省珠算协会	1980.6.26	福州市
18	湖北省珠算协会	1980.8.2	武汉市
19	天津市珠算协会	1980.9.9	天津市
20	陕西省珠算协会	1980.9.14	西安市
21	宁夏回族自治区珠算协会	1980.9.22	银川市
22	甘肃省珠算协会	1980.10.10	兰州市
23	青海省珠算协会	1980.10.15	西宁市
24	四川省珠算协会	1981.6.18	成都市
25	新疆维吾尔自治区珠算协会	1981.7.20	乌鲁木齐
26	安徽省珠算协会	1982.5.4	合肥市
27	云南省珠算协会	1982.6.15	昆明市
28	贵州省珠算协会	1983.8.26	贵阳市
29	西藏自治区珠算协会	1983.10.24	拉萨市

香港数学会（Hong Kong Mathematical Society）　外文缩写为HKMS. 1979年成立，是香港地区数学界的学术团体. 在港府注册为非牟利、可接受免税捐款的机构. 由香港大学、香港中文大学、香港理工学院和浸会学院的数学教师发起成立，目的为促进同行之间的学术研究与意见交流，为数学教育的理论研究与实践创造条件. 无常设机构，大多由在任会长所在校、系为工作机构. 由年会选举产生董事会，董事会包括会长、两位副会长、秘书，并设有由董事负责的节目和外交组，会长任期两年. 学会下设国际奥林匹克小组会. 香港数学会为东南亚数学会会员，并于1982年加入国际数学联盟(IMU). 学会还以所筹得的基金及资助用于本地区院校召开会议或讲习班. 学会曾分别于1980年和1990年成功地举办了东南亚数学会议和亚洲数学会议，1988年还召开了第一届国际代数结构及数论研讨会，为中外数学家的学术交流与合作做出了贡献. 香港数学会与东南亚、加拿大、日本、韩国、英国、美国、德国、法国等国的数学会，与大陆、台湾的数学会都建立了密切的关系，并和美国数学会有互惠协定. 香港数学会现负责编辑东南亚数学会学报，并在1996年创刊了《香港数学会通报》(Bulletin of Hong Kong Mathematical Society). 会员分布在香港地区的14所高等院校.

中国系统工程学会（The System Engineering Society of China）　外文缩写为SESC. 1980年11月在北京成立，是系统工程工作者的学术性群众团体，是联系广大系统工程工作者的纽带和桥梁，是中国科学技术协会的一个组成部分. 名誉理事长钱学森，首届理事长关肇直，副理事长刘豹、宋健、李国平、张钟俊、陈　、蒋葆鼎（以姓氏笔画为序），第二届理事长许国志，副理事长刘豹、陈　、汪应洛、郭树枋. 其宗旨是团结广大系统工程工作者，进行学术交流，积极促进系统工程理论、方法的普及与提高，促进系统工程在各个领域的广泛应用，以提高中国组织管理技术水平，为国民经济建设和四个现代化服务. 主要工作有：

1. 组织学术交流，推广系统工程科研成果和实践经验，提高系统工程学术水平.
2. 开展系统工程的国际学术交流.
3. 宣传普及系统工程知识，举办各种训练班.
4. 编辑出版学术刊物.
5. 对国家、地区或部门的一些重大系统工程发挥咨询作用.

学会除在其理事会内设有多个委员会作为工作机构外，还设有军事系统工程、系统理论、社会经济系统工程、模糊数学与模糊系统、农业系统工程等专业委员会，以及法制系统科学、信息系统工程和教育系统工程等专业组. 在学会内还成立了中国系统工程学会社会经济系统工程学会、中国系统工程学会模糊数学与模糊系统学会、中国系统工程学会农业系统工程学会等专业学会. 在地方还成立了省、市级分会. 学会出版会刊《系统工程学报》(1985年正式创刊，编辑部设在天津大学)和《系统工程理论与实践》(1981年创刊，编辑部设在中国科学院系统科学研究所). 模糊数学与模糊系统学会出版了《模糊系统与数学》(1987年创刊，编辑部设在国防科技大学系统工程与数学系). 湖南系统工程学会也出版了《系统工程》杂志. 此外，学会还编辑出版了《系统工程丛刊》、《系统工程讲义》和《系统工程教育与普及丛书》等图书. 现在中国已有很多从事系统理论、控制理论、运筹学、模糊数学等方面研究和教学的数学工作者加入了中国系统工程学会. 两届理事长关肇

直和许国志都是有名的数学家.在其常务理事和理事中,从事数学工作的人员均达到五分之一左右.

中国运筹学会(Operations Research Society of Chinese Mathematical Society) 外文缩写为 ORSCMS. 1991年成立,其前身为1980年在山东济南市成立的中国数学会运筹学会.它是全国运筹学工作者的学术性群众团体,是中国科学技术协会的组成部分.会址设在中国科学院应用数学研究所.根据学会章程规定,理事长不能连任,第一届理事长为华罗庚,第二届理事长为越民义,第三届理事长为徐光辉.学会宗旨是团结广大运筹学工作者,进行国内外运筹学学术交流,积极促进运筹学的普及与提高,为运筹学的发展做出贡献,特别要在中国四个现代化建设中发挥作用.为此,它除每4年召开一次全国会员代表大会外,还组织各种形式的学术会议,交流有关运筹学的科研成果和实践经验,举办各种讲座和学习班,以及介绍运筹学在应用方面的新发展,并以地方协作组或分学会的名义开展与以上类似的各种活动,以提高与普及有关运筹学的理论和方法.在开展国际性的运筹学学术交流方面,除派代表参加国际运筹学联合会(IFORS)和亚太运筹学会(A-PORS)召开的大会外,还接待或邀请外国专家学者的来访或讲学.学会还支持大专院校开设有关运筹学的课程,协助提高运筹学的教育水平,其教育委员会曾组织会议讨论确定了教学大纲、计划,讨论了教材,并就研究生培养等问题组织过交流.学会还编辑并协助出版部门出版有关运筹学的书籍和刊物,目前,编辑出版《运筹学杂志》和《运筹通讯》两种刊物(后者为内部刊物),并开始组织出版《运筹学丛书》.此外,它还发挥对中国社会主义建设的咨询作用,并鼓励会员向有关部门提出合理化建议.学会从1988年开始设立"青年运筹学奖",1990年首次颁奖.

中国优选法统筹法与经济数学研究会(Chinese Research Society of Optimum Seeking Method, Operational Research and Economic Mathematics) 由著名数学家华罗庚等发起,于1981年3月在北京成立,是中国科学技术协会的组成部分.会址设在北京中国科学院科技政策与管理科学研究所.中国优选法统筹法与经济数学研究会的宗旨是开展优选法、统筹法、经济数学与管理科学的理论研究、发展研究与普及推广工作;解决国民经济与国防建设中有关的技术管理问题;开展有关软件的研究,并与电子计算机、微处理机结合形成一些有用的体系,以提高中国的技术管理水平;举办有关的训练班,推广普及行之有效的方法;开展国内外学术交流,推动本学科的发展.中国优选法统筹法与经济数学研究会主办的学术刊物有《优选与管理科学》(季刊).中国优选法统筹法与经济数学研究会的首届理事长为华罗庚,第二届理事长为陈德泉,副理事长为伍子玉、李廣庚、吴祖基、岳枫、张维信、潘纯、计雷、谢庭藩,秘书长为计雷(兼).

中国工业与应用数学学会(Chinese Society for Industrial and Applied Mathematics) 外文缩写为 CSIAM. 1990年11月1日至3日在北京清华大学召开了第一次会议,学会正式成立.由萧树铁任理事长,王基铭、李大潜、林敢为、郭友中、吴方任副理事长,蔡大用任秘书长.学会办公室设在清华大学应用数学系.在第一次大会上通过的学会章程规定,学会的宗旨是建立应用数学界和工业界之间稳定的联系渠道,促进应用数学工作者和工程技术人员、生产管理人员紧密结合,协力解决工农业生产和技术进步面临的各种数学问题;促进能够导致新技术发展的应用数学的基础研究,使科学技术成果迅速转化成生产力.学会的主要任务是:开展国内外学术交流,促进工业界和高等学校及科研单位的合作,促进不同行业、不同学科间的交流与合作;积极开展工业与应用数学的普及活动;对有关重大科技项目接受咨询、进行评议、推广成果;编辑出版书刊资料;表彰、奖励有突出贡献的工业与应用数学工作者.学会接纳个人会员和团体会员.从事工业与应用数学工作,具有相当于讲师以上职称(或硕士以上学位,或工作3年以上,并有一定学术水平)的科技人员,热心支持学会工作的领导干部、企业家等均可申请个人会员.热心支持学会工作的学校、科研、设计部门、厂矿、公司等单位均可申请团体会员.会员享有优先参加学会组织的各种活动及优先获得有关学术资料等权利,并要承担一定的义务.(本条目根据姜启源的"中国工业与应用数学学会第一次大会在京召开"一文摘录,原文见《数学的实践与认识》,1991年第2期第96页.)

外国数学学术团体

伦敦皇家学会(Royal Society of London) 1660年建立.它是世界上最古老的科学学会之一,1662年被赐予皇家特许状.其正式的名称为"The Royal Society of London for the Improvement of Natural Knowledge",但很少使用.学会的目的是以其科学出版物为媒介,传播重要的基础性发现的信息,促进科学研究.学会在1665年就创办了世界上最早的科学期刊《皇家学会哲学学报》(The Philosophical Transactions),1832年又创办了《皇家学会会刊》(Proceedings of the Royal Society),这两种杂志现在都还在出版,并都分成A、B两辑,分别刊登数学及自然科学和生物科学的论文.皇家学会在

1701 年开始设立了克鲁恩讲座，这是学会史上最早设立的讲座，并一直延续至今. 在 1727 年以后的一个世纪内，学会曾一度衰落，科学事业在学会中被冷落. 1820 年开始逐步复苏. 19 世纪后期，学会积极参与并促进科学活动的国际交流与合作，1899 年它与法国、德国、俄国的科学院以及瑞典皇家学会一起发起并建立了国际科学院联合会. 联合会于 1918 年解散，并于 1919 年重新建立了国际研究理事会. 1931 年由伦敦皇家学会提议改组为国际科学理事会，并由皇家学会作为英国代表. 长期以来，皇家学会一直协助皇家格林威治天文台的工作. 现在学会不仅参加联合国教科文组织的自然科学方面的活动，且与西方多国有科学交流计划. 学会现设有多种讲座和奖项. 20 世纪 70 年代以来，学会资金雄厚，科学研究和其他科学活动都很活跃. 学会在国内还向英国政府提供科学咨询，政府的各咨询机构都有皇家学会会员参加活动. 纵观其历史，伦敦皇家学会是一个非政府性的、综合性的自然科学学术团体，但它对数学的贡献是很值得注意的. 除上面提到的两种杂志对数学重视以外，学会早期曾集资出版过不少科学著作，其中就有牛顿(Newton，I.)的《自然哲学之数学原理》一书. 早在该学会成立之前的酝酿时期，就有数学家沃利斯(Wallis，J.)参与其间. 学会的第一任主席布朗(Brown，G.)是杰出的数学家，后又有牛顿任过主席. 在牛顿任主席时，曾聚集了科茨(Cotes，R.)泰勒(Taylor，B.)和马克劳林(Maclaurin，C.)等数学家. 学会设有的两项皇家金质奖章，其中之一是奖给在数学物理方面做出贡献的科学家，另外还设有西尔维斯特数学奖章. 伦敦皇家学会对新会员的人会资格，以及学会官员的任期都有严格的规定.

汉堡数学会(Mathematische Gesellschaft in Hamburg)　1690 年建立，是国际上所有数学会中成立最早的一个. 由汉堡的一批数学家行会人员建立，但一开始就有相当数量的国内外成员. 从 1881 年开始，出版《汉堡数学会通报》(Die Mitteilungm der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg)，每年出一期. 每年秋季学会都要举办一次有特定主题的会议，会期 2 天. 1990 年 3 月，它与汉堡大学数学、物理、计算机科学等系及计算中心联合举办了庆祝学会建立 300 周年的国际会议，会议安排了 9 个专题组举行科学报告会，并有德国国内和美、苏、法、意等国数学家参加. 学会现有会员 350 人左右，并与美国数学会签有互惠协定.

皇家统计学会(英)(The Royal Statistical Society)　1834 年成立，1887 年被授予皇家特许状. 学会分 6 个组，即研究组、商业与工业组、一般应用组(包括多元研究小组和政府统计事业研究小组)、医药组、社会统计组、统计计算组和 17 个地方小组，这些组都向会员开放. 其中研究组的目的是关心统计理论、统计方法的发展，以及已有方法的新应用. 每年除 7—9 月外，学会每月都举行一次一般会议. 这期间，研究组还另举行 5 次会议. 各组和地方小组也几乎每月都举行讨论会. 学会在伦敦大学学院设有图书馆，每周 5 天对会员开放，且可邮借图书. 其会员还可从大不列颠图书馆借阅学会图书馆没有的图书. 学会在 1838 年就出版了《皇家统计学会杂志：A 辑》(Journal of the Royal Statistical Society, Series A)，20 世纪 30 年代和 20 世纪 50 年代又分别创办了该杂志的 B 辑和 C 辑.

美国统计协会(American Statistical Association)　外文缩写为 ASA. 美国统计协会是一个科学性和教育性的组织，成立于 1839 年. 1841 年向政府注册登记成为非营利实体，其总部设在华盛顿. 协会宗旨是以多种多样的方法促进统计学的发展及其广泛的应用，以提高统计对人类福利的贡献. 一切从事统计理论和统计方法实际应用的人员均可以参加该协会. 协会在各地设有 63 个分会. 其主要活动是通过所设的 8 个专业部和 35 个专业委员会进行的. 其下设的 8 个部为：企业经济统计部、社会统计部、教育统计部、物理与工程统计学部、生物统计学部、统计计算部、调查研究方法部、生物制药统计部. 协会除主办各种会议外，还曾与美国科学促进会共同为外国驻华盛顿使馆的科学参赞及随员举办过“决策用的统计学”讲习班. 它还与美国质量控制学会等其他专业学会联合举行各种与统计有关的专题讨论会. 协会鼓励其会员将个人藏书捐赠给发展中国家的大学. 协会出版《美国统计协会杂志》(JASA)、《统计学家》(Statistician)、《技术度量》(Technometrics，与美国质量控制学会合办)等杂志. 协会所开展的各种活动，对统计专业人员和研究人员以及推动美国和国际统计工作是十分有益的，并起着极其重要的作用. 学会现有会员 14000 多人，并接纳外国籍会员.

捷克斯洛伐克数学家和物理学家联合会(The Union of Czechoslovak Mathematicians and Physics)　1861 年，一些学数学的学生起草了“布拉格数学和物理自由讲演学会”的章程，并于 1862 年 3 月 28 日召开了成立大会. 后于 1869 年改名为“捷克数学家联合会”(Union of Czech Mathematicians). 学会一成立就得到了各大学的支持，发展也较快，成立时仅有会员 15 人，到其成立 10 周年时已有会员 332 人. 学会成立后，一直坚持着活动，即使在捷克斯洛伐克被纳粹占领期间，虽遭到严重破坏，但其活动没有停止. 1952 年，捷克斯洛伐克科学院成立后，联合会修改了章程，并隶属于科学院领

导，同时改为现名.1872年，联合会成立10周年时创办了《数学和物理培养杂志》(Căsopis Propěstovani Mathematiky a Fgsiky)，《捷克斯洛伐克数学杂志》(Czchoslovak Mathematical Journal)是其后续出版物之一.联合会的活动范围是整个捷克斯洛伐克，在20多个城市都有其分会.它设有4个委员会，根据会员对数学或是对物理，对应用或是对教育的兴趣，组织会员活动.联合会从两个方面努力促进国际科学合作：通过其会员与国际组织，特别是欧洲物理学会(European Physics Society)、欧洲数学理事会(European Mathematical Council)、伯努利学会(Bernoulli Society)的积极合作或参与活动；通过与保加利亚、匈牙利、波兰和原民主德国的数学和物理学会的双边协定.在国内它积极与捷克斯洛伐克科学院、教育部、研究机构、大学和其他有关机构进行合作.它不仅为研究人员和大学教师提供论坛，还为中学数学、物理教师，甚至小学教师提供论坛.根据与教育部的协议，它参与新课程、新教育大纲和新教材的准备与评估工作.它还组织奥林匹克等竞赛，普及并解释数学和物理教学的新方法.1987年3月举行了联合会成立125周年庆祝活动，同年8月召开了联合会第十届大会.到1987年为止，联合会有会员6500多人(包括1969年成立的"斯洛伐克数学家和物理学家联合会会员).

莫斯科数学会(Московского Математического Общества) 1864年成立.学会的宗旨是开展会员相互交流，促进数学科学事业的发展.成立初期，会员曾分工负责定期介绍某些学科的情况，并要在规定时间内对自己的工作做出书面报告或口头说明；同时学会还开展了科普工作.1866年，学会创刊了《数学汇刊》，它是国际上在19世纪所创办的少数几种数学专业杂志之一.莫斯科数学会对俄国数学事业的发展起了重要作用.苏联时期，国内在数学方面的重要研究成果一般都在其举行的会议上报告.它还邀请国外的著名数学家赴苏作短期访问讲学.学会还非常重视对数学教育的研究，它所设的中学和大学两个组都把主要兴趣放在与数学教育，特别是与不同层次的数学教育内容有关的问题上.学会对国内数学教学大纲的修订、数学教材的更新、数学教师的培训等问题也都提出过很好的建议.它参与列宁奖和苏联科学院奖获奖候选人的提名，其本身还另为做出重要成果的青年数学家颁奖.此外，莫斯科数学会还积极参加由大学举办的学校数学奥林匹克竞赛活动和指导学校数学小组.现在学会除出版《数学汇刊》外，还不定期出版《莫斯科数学会文集》.从20世纪60年代开始设立的统计组，除组织概率论、数理统计以及它们的应用报告外，还负责统计丛书的出版.

伦敦数学会(The London Mathematical Society) 外文缩写为LMS.1865年成立，是英国全国性的数学会.伦敦数学会由伦敦大学学院的青年学生发起而组成，成立时的宗旨是"增进和扩大数学知识".学会成立后，理事会坚持每月一次例会，且在会后的晚上都有学术会议，宣读论文并讨论.学会一成立，就出版了《会刊》(Proceedings)，那时除了召开会议外，组织发表会员的原始论文、编印和传递《会刊》就是学会的重要活动内容.在伦敦数学会成立100周年时，《会刊》已编印了105卷(分3辑).1926年又创办了《杂志》(Journal).在20世纪60年代，学会每2年举行一次与活跃的数学分支有关的专题大会，如泛函分析、概率、代数数域等，并邀请国内外英籍数学专家到会.还将每月一次例会后的学术会议改成了邀请外国访问数学家的讲学.伦敦数学会还参与组织或举办"英国数学学术讨论会"(讨论会每年一次).学会为纪念哈代(Hardy，G. H.曾任伦敦数学会两任秘书和两任主席)，从1967年开始设立了哈代讲座，每2年举行一次.在讲座期间，由主持人轮流到各大学讲课和座谈，以促进数学家之间、数学家和学生之间的交流.讲座主持人都是知名的数学家.伦敦数学会是国际上历史较长的数学会之一.它一建立，就汇集了一批英国当时著名的数学家，如德·摩根(De Morgan，A.)、西尔维斯特(Sylvester，J. J.)、凯莱(Cayley，A.)、麦克斯韦(Maxwell，J. C.)等，前3人曾任学会开始时的三届主席，对英国数学的发展起了良好的促进作用，对国际数学界也有影响.伦敦数学会现有会员1200多人，其中包括团体会员.

法国数学会(Societe Mathematique de France) 1872年成立.学会的宗旨在于推进纯数学和应用数学研究的发展.其活动主要是出版学术刊物和举行研讨会.学会每年除7月15日至10月15日为休会期外，每月都举行两次例会.《通报》(Bulletin)是学会的主要刊物，创刊于1873年.学会还吸收外籍学者入会，但外籍会员要参加每月的例会，必须要有一位法籍会员引荐.

日本数学会(Mathematical Society of Japan) 学会的前身是成立于1877年的东京数学会，后改名为日本数学物理学会，1945年12月宣布解散.在此基础上，1946年又分别组建了日本数学会和日本物理学会.1977年举行了日本数学会创立100周年纪念会.日本数学会成立的目的是为了促进数学的研究与普及，协调各方面的关系，促进学术文化的发展.学会每年春季召开年会，秋季召开例会，会上都安排有学术报告.此外还组织各种专业、专题会议.学会还用英、日文分别出版机关刊物《数学》(日文)和《日本数学会杂志》(英文，Journal of the Mathe-

matical Society of Japan)以及其他刊物、专著、会议录、丛书等. 日本数学会从 1947 年着手编纂《岩波数学词典》(中译本名为《数学百科词典》),1954 年正式出版,1960 年出版了增订版. 1968 年出版修订过的第二版,1986 年出版增订过的第三版. 1977 年经日美双方专家合作又出版了英译本,1984 年出版了中译本. 从这本词典的编纂与英、中文版本的出版,可看到日本数学会为普及数学知识所做的努力及其对国际数学界的影响. 日本数学会现有会员 4200 多人,资助会员(公司企业等)46 个.

爱丁堡数学会(Edinburgh Mathematical Society) 外文缩写为 EMS. 1883 年成立,其目的是为了使其成员能共同提高数学科学水平,包括纯数学和应用数学. 学会在每个科学年度(从 10 月至下年 6 月)内,通常安排 8 次会议,4 次在爱丁堡召开,另 4 次在苏格兰的一些大学中召开. 学会经常与伦敦数学会联合举行会议. 学会每 4 年还举办一次夏季学校,请三、四位国际上知名的数学家作短期讲课,此外,还举办各种非正式的讨论班. 学会从 1884 年开始出版杂志《会刊》(Proceedings),现每年出一卷. 学会在爱丁堡大学设有图书馆,供会员查阅或外借书刊. 为庆祝学会成立 100 周年,1983 年建立了百年基金会,支持包括研究访问、会议、出版等的各种数学活动,凡其会员都可向基金会申请资助经费. 学会会员来自苏格兰各大学、其他教育工作者、国内外工业与经济界的数学家,以及对其有兴趣的人,现有会员 320 人. 学会与美国数学会、澳大利亚数学会、印度数学会、汉堡数学会、新西兰数学会和尼日利亚数学会等签有互惠协定.

美国数学会(American Mathematical Society) 外文缩写为 AMS. 1888 年成立,成立时名称为"纽约数学会"(New York Mathematical Society),会址设在纽约哥伦比亚大学. 1894 年改名为"美国数学会",会址也于 1923 年迁至普罗维登斯(Providence,罗得岛州首府). 美国数学会是美国数学家和数学教育工作者的专业学术团体,其宗旨在于促进数学研究,激励对数学各分支的兴趣,并竭诚支持有关计算机与数学研究方面的情报服务. 美国数学会每年举行八、九个分组会议. 每年冬夏两季的大会,除了讨论科学规划外,还针对教育、科学政策和行政管理等课题提出大量的报告,并开展广泛的活动. 它还主办小型讲习会、讨论班和专题讨论会. 1984 年,它又和美国数学协会(MAA)、美国工业与应用数学会(SIAM)共同发起成立了数学的"华盛顿联络会"(Washington Presence),联络会的主要办事机构是"发展数学联合政策委员会"(Joint Policy Board for Mathematics—JPBM). 美国数学会现与 30 多个姐妹学会有互惠协定,以大约一半会费向有协定的学会会员提供会员资格. 美国数学会是当今世界上重要的数学书刊出版者之一,它出版 5 种主要的研究杂志、多种俄文的英译本杂志、12 套丛书和 3 套译丛. 1988 年 1 月又新创了季刊《美国数学会杂志》(Journal of the American Mathematical Sociey). 它还在编辑方面与资金上援助其他数学杂志的出版.

美国数学会在数学情报服务方面做出的贡献在各国数学会中是独一无二的,其主办的《数学评论》(Mathematical Reviews—MR),在世界各地拥有近 12000 名评论员,评论了世界上几乎所有已发表的它能获得而又有一定参考价值的数学文献,是使用最广的检索性数学刊物之一. 现在学会已把其出版工作纳入了 TEX 计算机排版系统,并研制了通用 TEX 软件包和使用手册. 该系统还可以提供向 MR 数据库联机检索服务. 学会除了提供学术情报服务外,还提供非学术性的重要消息,如美国数学家和大学数学教师名录、数学学科职业信息等. 美国数学会目前是世界上人数较多、在国际数学界影响较大的数学会,据 1986 年统计材料,该年已有会员 20000 余名,其中绝大多数来自美国,也有来自加拿大和其他国家的,它汇集了一批当今世界上的一流数学家.

德国数学会(Deutsche Mathmatiker－Vereiningung) 外文缩写为 DMV. 1890 年成立于不莱梅(Bremen),是从 1822 年成立的德国自然科学家和医生团体中产生的,在蒂宾根(Tubingen)地方法院登记注册. 康托尔(Cantor,G. (F. P.))曾任首任主席,克莱因(Klein,(C.)F.)、希尔伯特(Hilbert,D.)、外尔(Weyl,(C. H.)H.)等都相继任过主席. 目前,会址设在弗赖堡. 学会成立的任务是从各方面促进和进一步发展数学科学;使数学各分支有机地联系起来并相互促进;使数学在精神生活中占有应有的地位;为会员和青年数学爱好者提供自由交往和交流思想、经验和希望的机会. 为实现以上任务,学会举办科学年会和 DMV 讨论班. 年会期间除相互交流以外,还向会员提供数学领域报告简介和新的发展方向等资料. 1979 年以来,学会每年举办大约 5—6 次 DMV 讨论班,每次为期一周. 此外,学会出版《德国数学会杂志》(Jahresberich der Deutschen Mathematiker－Vereinigung)和《德国数学会通讯》(Mitteilungen der Deutschen Mathematiker－Vereiningung)两种杂志. 学会还代表德国数学界参加国际数学联盟,与其他学术团体如德国应用数学与力学学会、计算机学会以及奥地利数学会等进行联系. 学会还与美国数学会等其他国家数学会有互惠协定. 学会现有会员 2100 人.

印度数学会(The Indian Mathematical Society) 1907 年建立. 开始是由代理税务兼地方行政

长官爱耶(Aiyyar,V. R.)建立的一个“分析俱乐部”(Analytical, Club),其目的是订购数学期刊,并在其成员中传阅.到 1910 年末,其名称更改过两次,先改为“印度分析俱乐部”(Indian Analytical Club),后改为“印度数学会”.总部设在波那(Poona),1950 年迁到德里.现在是印度全国性的学会.学会每 2 年在印度的不同地方召开一次会议,并在各大学中心举行各种会议,以使印度全国的数学家能聚集在一起讨论相互关心的问题.它指导对数学教学和中学、高等院校中数学考试现状的探究,并介绍某些改革观点.它还试图建立对研究工作的奖励制度.学会 1909 年就创办了研究性杂志,即后来的《印度数学会杂志》(Journal of the Indian Mathematical Society).1932 年在学会成立 25 周年庆祝活动以后又出版了鼓励学生和教师研究的《数学学生》(The Mathematical Student)杂志.1958 年在波那大学举行了学会成立 50 周年的庆祝活动(因筹备原因,活动推迟了一年).印度数学会与美国数学会等签有互惠协定.

美国数学协会(Mathematical Association of America) 外文缩写为 MAA.1915 年 12 月在美国数学会芝加哥分会会议上成立.1920 年协会注册登记为非营利的实体.它是一个关心数学教学,特别是大学数学教学的学术团体.成立初期曾提出要使美国大学的每一个数学教师都成为其会员的口号,并要使会员感到成为其会员是值得的.协会成立的目的是在美国促进对数学的兴趣,特别是在大学里.为达此目的,除在每年 2 次的全国性会议上有学术报告外,每年都要举行几次地区性(由分部组织)的学术会议;出版数学书刊,包括数学专著;指导旨在改进数学教学的研究;与其他组织联合举办夏季讨论班和夏季大学数学教师讨论班,还经常与美国全国数学教师理事会一起对美国的数学教学进行调查研究.协会还资助一年一次的普特南数学竞赛活动(参赛者为大学在校学生).协会成立的早期,在理事会内就组成了数学词典委员会,编辑出版数学词典.《美国数学月刊》(American Mathematical Monthly),虽创刊于协会成立之前,但协会成立后就成了协会的机关刊物.协会与美国数学会关系密切,其会员中很多都是美国数学会会员,它们的年会经常在同一时间、同一地点举行.1984 年,与美国数学会、美国工业与应用数学会一起成立了数学的“华盛顿联络会”.协会现有 19000 多名会员,有 15 个企业性会员,其中包括 5 家美国较大的出版公司.

日本数学教育学会(Japan Society of Mathematical Education) 1918 年 12 月在日本全国中等学校数学教育协议会期间提出,于 1919 年 2 月正式成立.成立时的名称是“日本中等教育数学会”,1941 年改名为“日本数学教育会”,后因国际交流增多,为与欧美地区的数学教育学会的名称一致,在 1970 年改为现名.其目的是研究中等教育中数学及教学法等事项.学会除每年召开年会和地区性会议外,还组织各种类型的研究会、演讲会,如大学入学考试恳谈会、研究论文发表会等.其小学、中学、高校等各部还分别就学习指导及数学教育诸问题开展活动或组织专题会议.学会还专门收集各种书籍范本,出版数学教育史方面的书籍.学会现已是日本的全国性组织,代表日本与世界各国的数学教育学会进行交流.它出版有《日本数学教育学会志》杂志.1988 年 8 月在静冈市举行了学会创立 70 周年纪念活动.现在学会会员的构成已从初建时的以“除小学、大学以外的数学教师为主”发展到包括幼儿园、小学、中等学校和大专院校的数学教育人员.现有正式会员 3300 多人,另有“论研”会员 1100 多人,赞助团体会员 53 个.

波兰数学会(Polskie Touarzystwo Matematyczne, Polish Mathematical Society) 1919 年建立.初建时为“克拉科夫数学会”,是一个地区性学会.在其之前,1917 年已在利沃夫成立了数学会,其后又在 1923 年成立了华沙等 3 个地区性的数学会.1924 年初,这些地区性的数学会合并成全国性的“波兰数学会”,办事机构设在克拉科夫.1937 年总部迁到华沙.学会的地区性活动较多,有些地区几乎每周都有学术会议,会员的研究成果都在会上报告.从 1919 年至 1939 年,会员共提交报告 1143 页.1927 年学会召开了首次全国性数学会议,后又在 1931 年和 1937 年召开过两次全国性数学会议.第二次世界大战期间,因被德军侵占,学会被迫停止活动.战后,数学会很快着手进行了波兰数学的重建工作.学会负责筹建了数学研究所,同时恢复了全国性的数学会议.1953 年第 8 次数学会议以后,把全国性的一般会议改用专业性会议或专题讨论会代替.后于 1969 年又开始恢复了全国性的一般数学会议,并设立了分组学科讨论会,其他专题讨论会仍坚持不变.现在学会每年都有几个专题讨论会和相关的暑期学校.各地区的学会仍如战前一样,组织科学报告会.学会与国际数学界的联系和交流也较频繁,1983 年的第 19 次国际数学家大会就是在华沙召开的.学会与美国数学会有互惠协定.学会出版的主要杂志有:《波兰数学会年刊》(Annals of the Polish Mathematical Society)、《数学基础》(Fundamenta Mathematical)和《数学研究》(Studia Mathema-tica).波兰数学会的一系列活动,为波兰的数学在国际数学界树立了形象.学会现有会员 2000 多人.

全国数学教师理事会(美)(National Council of Teachers of Mathematics) 外文缩写为 NCTM.

1920 年成立. 理事会旨在关心并帮助提高中、小学及两年制学院和师范学院的数学教育水平. 在理事会的年会上，除了讨论会务问题以外，还就数学教育和课程建设等问题宣读研究论文并展开讨论，教学法和课程评估等与数学教育有关的问题也常受到会议的关注. 它有时还与美国教育研究协会一起召开有关专题的会议，并常与美国数学协会等联合组织与数学教育有关的活动. 理事会出版《数学教师》(Mathematics Teacher)、《算术教师》(Arithmetic Teacher)、《数学教育研究杂志》(Journal for Research in Mathematical Education)等刊物. 理事会还从 1926 年开始出版年鉴，并根据需要集中于某个专题介绍数学教育问题. 此外，还出版数学教育的辅助材料，并通过其《新闻公报》(News Bulletin，报纸)向会员提供与数学教育有关的信息. 理事会现在在美国和加拿大设有 189 个附属小组，并在组织上和资金上帮助这些小组开展活动. 据 1988 年初的统计材料，理事会有 69850 名会员，其中个人会员 48872 人，团体会员 20978 个. 凡对数学、数学教学以及对数学有关问题有兴趣的个人和团体都可参加. 美国全国数学教师理事会在美国数学教育界起着交流中心的作用.

意大利数学联盟(The Unione Matematica Italiana)　外文缩写为 UMI. 1922 年成立，1923 年被承认为公开社团，其办事机构设在波伦亚大学数学系. 联盟成立的目的为发扬并扩大数学知识. 它组织有关数学研究和数学教学的讨论会，其各委员会为会议准备或推荐文件，并与官方接触就某特定问题向数学界提出意见. 联盟首任主席平凯莱(Pincherle, S.)曾在 1928 年成功地在波伦亚组织了第 8 次国际数学家大会. 联盟与美国数学会、伦敦数学会等都签署有互惠协定. 联盟出版《新闻报道》(Notiziario)和《通报》(Bollettino)等刊物. 此外，还出版专著、讲义和意大利知名数学家的文集等丛书. 联盟现有会员 3000 人左右.

加拿大数学会(Canadian Mathematical Society/Societe Mathematique du Canada)　外文缩写为 CMS. 1945 年成立，初建时的名称为"加拿大数学代表会议(Canada Mathematical Congress)，1976 年改为现名. 1979 年根据加拿大"社团法"申请成为慈善、非营利的全国性社团组织，其宗旨是：促进数学研究；帮助改进加拿大大专院校和中小学的数学教学；鼓励支持数学和数学教育的发展. 学会除理事会外，还设有加拿大奥林匹克委员会、教育委员会、财政委员会、基金筹集委员会、国际奥林匹克委员会、研究委员会等 11 个委员会. 学会每年举行 2 次会议(5 月或 6 月召开一次，12 月召开一次)，会议期间有各种学术活动和"教育集会". 学会还每年组织为期两周的夏季讨论班，以及以专题讨论会为形式的更集中的会议. 这些活动主要由加拿大大学主办，与学会研究委员会联合组织，研究委员会负责会议的内容能够覆盖加拿大研究人员当前感兴趣的各领域. 学会在教育方面的活动包括支持地方组织的数学竞赛，组织加拿大数学奥林匹克竞赛，选拔和训练参加国际数学奥林匹克竞赛的加拿大代表队，出版大量教育资料等. 学会出版 2 种研究性杂志：《加拿大数学杂志》(The Canadian Journal of Mathematics)，《加拿大数学通报》(The Canadian Mathematical Bulletin). 此外，还出版了适合数学教育工作者的《数学难题》(Crux Mathematicorum). 学会每月向会员分发 CMS 通告. 1983 年开始编辑出版加拿大数学会专著丛书(由美国 J. Wiley and Sons 出版公司出版)，现已出版 10 卷. 在 1980—1984 年间，还曾出版过加拿大数学会会议录丛书. 学会与其他 13 个国家级数学会有互惠协定，并与美国数学会和美国数学协会有特殊协定. 学会现有会员 1052 人，团体会员 40 个.

计算机协会(美)(The Association of Computing Machinery)　外文缩写为 ACM. 1947 年成立，其宗旨是：

1. 促进信息处理科学和信息处理技术的发展，包括现代机器的研制、设计和应用，计算技术，以及用于一般信息处理、科学计算的语言，用于各种数据的识别、存储、恢复和处理的语言，用于过程自动控制和模拟的语言.

2. 按科学传统和职业传统，促进在信息处理科学和信息处理技术领域自由地交流信息.

3. 发展并维护从事信息处理科学和信息处理技术实践的个人的诚实和权能.

协会的会议和专题讨论会较多，它每年要举办多个分专题的年会，还举办多种定期的专题讨论会. 协会还与 IEEE 的有关专业学会联合召开有关的会议. 协会还出版有 12 种杂志，其中有多种杂志与计算方法和数学软件等有关.

运筹学会(英)(Operational Research Society)　外文缩写为 ORS. 1953 年成立，其前身是"运筹学俱乐部"(Operational Research Club). "运筹学俱乐部"是第二次世界大战时，英国从事运筹工作的一批人组成的一个非正式的讨论小组，成立于 1948 年. 其目的是聚集其成员讨论与他们工作有关的问题，并帮助发展运筹学方法. 为此，俱乐部每年要举行 6 次讨论会. 在 1953 年举行的俱乐部全体成员参加的年会上，正式成立了运筹学会. 学会活动坚持学术性和应用性. 学会每年举行一次年会，并经常单独举办或与其他组织合办各种专题讨论会. 学会设立有 Goodeve 和 President 等奖. 学会下设了 10 个地方

分会(小组).在1979年,由其一个地方分会发起组织了中学运筹学竞赛.从下一年度开始,这一竞赛在全英国举行.在学会正式成立前,"运筹学俱乐部"在1950年创办了《运筹学季刊》(The Operational Research Quarterly).学会成立后,《运筹学季刊》即定为机关刊物(现改名为《运筹学杂志》,月刊).该杂志每期都印有学会对运筹学所下的定义.1957年,学会与美国和法国运筹学会共同发起召开了第一次国际运筹学会议.学会是国际运筹学联合会的最早成员之一,被誉为运筹学领域的先驱.若其历史从"运筹学俱乐部"成立算起,则是国际上该领域中的第一个学术团体.

工业数学会(美)(The Industrial Mathematical Society)　1949年成立.学会宗旨是扩大工业界对数学的了解,以及数学在工业上的应用.它是企图促进数学与工业间的关系紧密化的第一个学术组织.学会每月举行一次会议,会上都有提交的论文.此外,它还主办由美国著名科学家和工程师主讲的各种讲座.学会出版有《工业数学》(Industrial Mathematics)杂志.学会的成员都是关心在工业中有效地应用数学的工程师、科学家和数学家等.

美国工业与应用数学会(Society for Industrial and Applied Mathematics)　外文缩写为SIAM.1952年成立,是美国重要的综合性数学团体之一.学会宗旨是开展数学基础理论研究,将新的数学方法和计算技术应用于工业和科学领域;促进数学家和其他工程技术人员的信息交流;颁奖;召开学术会议和专题讨论会,编辑出版学术刊物和图书,传播新的专业知识.学会每年都召开全国和州级年会.为了更有效地开展活动,学会先后组建了"控制和系统理论组"、"离散数学组"、"线性代数组"、"最优化组"、"超速计算组"等活动小组,并设立了8种奖.此外,还举办各种讲座和短期进修班.1984年,学会与美国数学会、美国数学协会一起发起成立了数学的"华盛顿联络会",其活动除了在美国国内外,有推向国际的趋势.1987年,学会与其他团体组织一起成功地联合主办了在法国巴黎召开的第一届国际工业与应用数学会议,并于1991年7月在美国华盛顿举行了第二届会议.学会出版有12种期刊、3种丛书,其中有的期刊质量较高,在国际数学界有一定影响.美国工业与应用数学会是应用数学家、统计学家、计算机科学专家以及其他从事数学和计算技术应用的科技人员的专业性学术团体.现有会员6500多人,团体会员280个,其会员除来自美国外,还有世界各国的学者.

美国运筹学会(Opreations Research Society of America)　外文缩写为ORSA.1952年成立.是国际上成立最早的一个运筹学会.学会的宗旨是交流信息,促进运筹学发展,建立并坚持运筹学工作的学术标准,改进运筹学的方法和技术,鼓励并培养运筹学的优秀人才.美国运筹学会与有关组织保持着密切的联系,它是国际运筹学联合会的创建成员之一.它参加了美国科学促进会的几个专业分会,与美国管理科学学会合作出版了数种刊物.从1976年开始,学会每年两次的会议,也都与美国管理科学学会联合召开.此外,它还组织召开运筹学专业性会议和地区性会议.学会设有10个专业组(技术分会)、14个地区分会和13个学科分会.会员除部分从事理论研究外,大部分会员从事实践工作,范围涉及国防系统、刑事审判、工业应用、城市与经营管理、财政与决策等各方面.学会的特点是会费低,且除按优惠价格向会员提供本学会和美国管理科学学会的出版物外,还免费向会员提供学术刊物《运筹学》和美国运筹学会——管理科学学会新闻公报《今日运筹学—管理科学》(OR/MS Today,与管理科学学会合办),以及这两个学会的联合会员名录.学会现有会员7000人.

加拿大运筹学会(The Canadian Operational Research Society)　外文缩写为CORS.1958年成立.学会的主要宗旨是传播运筹学信息和促进运筹学工作者之间的联系.其活动主要是举行年会和出版杂志及会议录.为了更好地开展活动,学会鼓励成立地区分部,大多数学术活动都在分部内展开.各分部除了夏季以外,每月都举行会议.各分部还利用所在地区的大学在晚上举办讲座,这反映了其基层较浓的学术空气.它与美国运筹学会和美国管理科学学会有密切关系,有时还举办联合年会.学会并与以上2个学会有协定,凡加拿大运筹学会会员参加该2学会,会费减少20%.学会现有会员1100多人,其中包括在工矿企业、交通运输、国防等方面从事技术、管理和研究的运筹学工作者.

数学科学联合委员会(美)(The Conference Board of the Mathematical Sciences)　外文缩写为CBMS.1960年正式成为非营利的教育性组织,其前身是1942年由美国数学会、美国数学协会和洛克菲勒基金会建立的战争政策委员会(War Policy Committee).第二次世界大战以后,以数学政策委员会(Policy Committee for Mathematics)继续活动,1958年改组成数学科学联合组织,并制订了章程及细则,1959年通过卡内基公司对美国数学协会的资助,数学科学联合组织在华盛顿建立了总部,1960年成为正式实体,改为现名.其主要目的是:

1. 为其成员学会代表的数学界与华盛顿的有关政府部门及其他机构之间,提供双方交流的渠道.

2. 为其成员学会关心的问题和项目提供讨论论坛,且发挥中心的作用.

联合委员会通过与联邦政府代理人的直接接触，或通过科学学会主席委员会、美国科学促进协会、美国教育理事会、科学人力委员会、国家科学研究理事会数学科学办公室的代表与有关政府部门进行交流.成员学会间的交流主要是通过其编发的《新闻快报》(Newsletter)作谋介进行的.《新闻快报》刊载有数学界感兴趣的华盛顿消息、国内外数学事件的通报和报告、数学研究和数学教育资助经费的消息及资料、人力综述等，且还出版数学科学职业专辑.联合委员会每半年召开一次理事会，并就某些有意义的主题进行公开的专门小组讨论；联合委员会还计划资助其成员学会在举行它们的全国性会议期间进行这种专门的小组讨论.1969年以来，按照其与国家科学基金会的合同，对12个左右的地区性会议进行管理，这些会议一般为期一周，以当前数学科学的研究兴趣为主题，各成员学会举办这种地区性会议的经费由国家科学基金会提供.联合委员会委托美国数学会和工业与应用数学学会作为专著出版这些会议的报告.它感兴趣的项目还有：数学科学情报服务研究；大学生和研究生数学教育系列综述，以及中学数学教育综述；数学科学所需建筑和设备的早期研究，及数学科学的理解及其应用项目等.

联合委员会具有选举权的成员学会有6个，附属成员学会6个，其中有选举权的成员学会有：美国数学会(AMS)、符号逻辑协会(ASL)、数理统计学会(IMS)、美国数学协会(MAA)、全国数学教师理事会(NCTM)和工业与应用数学学会(SIAM)；附属成员学会有：美国统计协会(ASA)、计算机协会(ACM)、女数学家协会(AWM)、美国运筹学会(ORSA)、保险统计员学会(SA)和管理科学学会(TIMS).

电气电子工程师学会(美)(The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc.)　外文缩写为IEEE.1963年由美国电气工程师学会(The American Institute of Electrical Engineers－AIEF, 1884年成立)和无线电工程师学会(The Institute of Radio Engineers－IRE, 1912年成立)合并而成，是目前世界上最大的跨国学术团体，总部设在纽约.会章规定，学会有两个方面的目的：

1. 科学和教育方面：通过召开学术讨论会、出版学术刊物，为会员和广大技术人员提供交换、讨论新技术新观点的场所，以提高电气工程、电子工程、无线电、计算机以及与此有关的学科工程的理论水平.

2. 职业方面：通过编辑出版与会员职业有关的报告和评述，建立评价标准和职业道德规范，并与其他公众团体和学会合作，为整个工程界谋利益，提高会员所从事职业的地位.

此外，它还促进电气电子技术的应用，以提高人类的生活水平，并力求让人们了解这种技术的应用对公众福利所产生的影响.其在职业方面的活动仅限于美国国内.因为学会不仅会员多，而且分布面很广(现有遍及世界130个国家的27万多名会员)，所涉及专业多，故其组织较庞大，层次较多.在总部除设有理事会外，还设有10个专业部，以及其下属的33个专业学会.为管理方便，还按地理位置，设立了10个地区组织，以及其下属的260个分部.在中国设有3个分部：北京分部、台北分部和港澳地区的香港分部.中国的3个分部同属于IEEE的第10大区.分部下又设专业性学术组织——学组，可与总部的专业学会挂钩联系.这些组织除总部有500名专职人员外，都由会员中的志愿人员组成.学会活动分地区活动、学术活动、职业活动、出版活动、标准活动、继续教育活动、历史研究、公众信息、奖励和IEEE基金等.学术活动有由各专业学会主办的，也有由各地区组织或分部组织的.学会规定，各分部每年召开的学术会议不得少于5次.学会出版的刊物已多达70多种.IEEE所属的33个专业学会中，计算机学会、可靠性学会、控制系统学会、信息论学会以及系统、人和控制论学会等专业学会都与数学有着不可分割的联系.这些学会中的有些会员，同时又是美国数学会和工业与应用数学会等相关学会的会员.这些学会每年都要单独、联合或与其他学术组织一起举办各种类型的学术会议或讨论班等.IEEE以其众多而面广的会员的活动，以其众多的专业学会所主办的学术会议和它们出版的学术刊物(每一个专业学会至少出版一种刊物，且在刊名前统一冠以“IEEE Transactions on”)在国际上产生了广泛影响，在应用数学、统计学、计算机科学等领域同样起着重要作用.

数学及其应用学会(英)(Institute of Mathematics and Its Applications)　外文缩写为IMA.1964年成立，其宗旨是通过组织大会、讨论会和小型会议，讨论科学技术、商业、管理及有关教育层次中的数学及其应用.IMA在上述范围内对数学教育提出建议、指导考试，且与有关教育和科学部门一起主办签发数学、统计和计算等方面的高级国家证书.学会与英国物理与自然科学学会、皇家化学学会、英国生物学学会、冶金学家学会有着密切的关系，这些学会的高级官员常在一起商讨共同事务.学会还与电气工程师协会、电子与无线电工程协会、物理与自然科学学会组成了相关学会的常委会，就共同关心的课题合作组织大会.学会还出版了《IMA数值分析》等多种杂志.学会会员分荣誉会员、会员、协作会员、研究生会员、从业共事会员和学生会员.理事会由第二、第三两种会员选举产生.学会会员包括如此

广泛的人员是为了保证学会在从事数学工作的人员中得到最佳承认，并使其具有广泛的代表性.

女数学家协会(美)(Association for Women in Mathematics)　外文缩写为AWM. 1971年由美国女数学家发起成立，其目的在于鼓励妇女和女青年继续她们的数学研究(学习)；创造一种支持妇女在数学及相关领域中谋职的方式；促进妇女在数学界享受到等同的机会和待遇. 协会每年冬夏两季举行2次全国会议，地区性和局部性的会议长年都有. 其全国性会议一般与美国数学会和美国数学协会联合举行. 从1980年开始，在其冬季会议上举办埃米·诺特系列讲座，由著名女数学家演讲. 协会设有一个发言人办事处，组织合适的人选在其各种会议上和举办的讲座上，就其关心的有关问题发表讲话或讲课. 现在全美国已组成了一个拥有200多人的发言人网. 协会每2个月出版一次《新闻信札》，还出版《数学界妇女生涯》的小册子. 协会曾就历史上著名的女数学家举办过专题讨论会，还就促进中学女学生的数学学习和女生中数学及计算机知识教育组织过活动，并实施过夏季中学数学女教师培训计划. 协会还利用国际数学家大会的机会，组织专门的小组讨论会，与其他国家的数学家一起讨论同数学界妇女有关的问题. 由于协会的工作，妇女在美国数学界的状况已有改观. 在数学方面的女研究生和女博士生在比例和绝对数字方面都较协会成立前有了较大增加，妇女的学术地位也有了明显提高. 协会成立初期曾在美国各地举行地方会议，开展基层工作，发展组织，现已拥有1800多名会员. 会员来自美国各地和世界各大洲的教育、科学技术、工业、商业和政府部门等. 会员中还有教师和学生. 会员不只有女性，也有男性.

意大利应用与工业数学会(Societa Italiana di Mathemeatica Applicatae Industriale)　外文缩写为SIMAI. 1988年12月成立，1990年12月正式开始活动，其成立的目的是为鼓励和促进工业和应用数学各方面以及与其有关的学科的发展，在项目、会议、课程、讨论班、信息传布等方面，就数学在工业和技术中的应用进行国内外的合作，特别是促进国内的大学、研究机构和工业界在应用数学各领域内的更有效的合作. 它是国际工业与应用数学会议委员会(The Committee for International Conference in Industrial and Applied Mathematics)的成员，它不仅通过该国际会议委员会与国外的同类组织建立了联系，还参与了主办第二届国际工业与应用数学大会. 到1991年4月为止，学会已有会员400多(包括团体会员与个人会员)，估计到1993年将有会员1000左右.

1950年以前成立、未详细介绍的数学会

成立时间	中文名称	外文名称	所在国
1778	数学会	Wskundig Genootschap	荷兰
1868	芬兰数学会	Finnish Mathematical Society	芬兰
1871	数学协会	Mathematical Association	英国
1873	丹麦数学会	The Danish Mathematical Society	丹麦
1884	巴勒莫数学会	Circolo Matematico di Palermo	意大利
1899	柏林数学会	Berliner Mathematische Gesellschaft	德国
1903	奥地利数学会	Osterreichische Mathematische Gesellschaft	奥地利
1908	加尔各答数学会	Calcutta Mathematical Society	印度
1910	瑞士数学会	Schweizerische Mathematische Gesellschaft	瑞士
1918	挪威数学会	Norwegian Mathematical Society	挪威
1921	比利时数学会	Societe Mathematique de Belgigue	比利时
1925	荷兰数学联盟	Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraen	荷兰
1943	墨西哥数学会	Sociedad Mathematica Mexicana	墨西哥
1947	亚诺什·波尔约数学会	János Bolyai Mathematical Society	匈牙利
1949	罗马尼亚数学会	The Mathematical Science Society of Romania	罗马尼亚

中国数学研究机构

中国数学研究机构(Chinese Research Institutes in Mathematics)　中国现代第一个数学研究机构是中央研究院数学研究所，1941筹建于昆明，1947年7月在上海正式成立. 1948年初迁往南京. 所长姜立夫(初期委托陈省身主持)，专任研究员有陈省身、陈建功、华罗庚、李华宗；兼任研究员有苏步青、江泽涵、许宝騄、樊𰋀、段学复、周炜良. 研究工作

主要在纯粹数学方面.涉及数论、抽象代数、级数论、微分几何、拓扑学与数理统计等.1949年迁往台湾.中华人民共和国成立后，于1950年开始筹建中国科学院数学研究所，1952年正式成立.在文化大革命期间，曾被迫停止研究活动，到20世纪70年代初才有所恢复.1979年国家从中国科学院数学研究所抽调部分人员，同科学院原应用数学推广办公室的人员一起，组建"系统科学研究所"和"应用数学研究所".数学研究所的研究工作也逐步走上现在的方向(分别见各研究所条).除了中国科学院所属的研究机构外，中国许多高等院校还成立了一批数学研究所(室)，研究内容涉及纯粹数学、应用数学、计算数学和数学教育等领域.

中央研究院数学研究所(Institute of Mathematics, Academia Sinica.) 见"中国数学研究机构".

中国科学院数学研究所(Institute of Mathematics, Chinese Academy of Sciences) 1950年筹建，1952年7月1日经中国科学院批准正式成立.历任所长：华罗庚、王元、杨乐、龙瑞麟、李炳仁(代理所长)、王跃飞.中国科学院数学研究所是从事数学研究，培养高、中级数学人才的学术机构，是中国主要的基础数学研究中心.1985年，中国科学院正式批准数学研究所为首批对外开放的研究所；1986年数学研究所成为国家博士后流动站的首批建站单位之一.数学研究所设有8个研究室，主要研究方向为代数、群论、超越数论、解析数论、微分几何、代数几何、微分拓扑、代数拓扑、多复变函数论、单复变函数论、实分析、流形上的分析、泛函分析、偏微分方程、常微分方程、动力系统、数值分析、知识工程、数据库及计算机科学理论.其主要学术活动为吸引国内外同行专家举办各类型的讨论班与学术会议；邀请或接受国外著名学者前来访问或合作研究.数学研究所还是中国数学会的依托挂靠单位，并受中国数学会委托主编《数学学报》中、英文版，主办《数学译林》，出版《数学研究所研究年报》，编发研究论文的预印本.这些出版物及预印本都在国内外进行交流.

建所以来研究成果颇丰，获国家自然科学奖8项：其中，"典型域上的多元复变函数论"(华罗庚)，"拓扑学中的示性类与示嵌类"(吴文俊)，"关于哥德巴赫猜想的研究"(陈景润、王元、潘承洞)获国家自然科学奖一等奖；"函数值分布理论"(杨乐、张广厚)，"复几何及相关问题"(钟家庆)，"非线性微分方程及其在几何中的应用"(丁伟岳)获国家自然科学奖二等奖."典型流形与典型域"(陆启铿)，"典型群的同构理论"(万哲先、任宏硕等)获国家自然科学奖三等奖.获国家科技进步奖二等奖2项："天马人工智能专家系统"(陆汝钤)，"有限元程序自动生成系统"(梁国平).获中国科学院重大科技成果奖、自然科学奖和科技进步奖44项，其中，"系列软件计划"(陆汝钤)，"数论在近似分析中的应用"(华罗庚、王元)获中科院重大科技成果奖一等奖；"流形上共边极度小曲面"(王光寅、吉敏)；"多复变与李群"(周向宇)获中科院自然科学奖一等奖.另外，该所还获得其他许多重要奖励，包括陈嘉庚物质科学奖2项，何梁何利基金奖3项，求是杰出青年学者奖3项，陈省身数学奖2项，华罗庚数学奖3项，中科院青年科学家奖5项，国家图书类奖10项等.

复旦大学数学研究所(Institute of Mathematics, Fudan University) 经国家教育部批准，于1956年中国科学院在复旦大学成立数学研究室，由学部委员苏步青教授任室主任.1958年成立中国科学院上海数学研究所，由复旦大学和中国科学院共同领导.1962年调整后该所完全归属复旦大学，并改名为复旦大学数学研究所.历任所长：苏步青(1956—1986年)、谷超豪(1986年始)、洪家兴.该所的创办宗旨是：为国家培养高级数学人才和承担国家重点科研项目(现代数学的理论和方法)的科研任务.该所在1964年增加了专职编制，开始设立微分几何、函数论与泛函分析、微分方程、概率论与数理统计等4个研究室."文化大革命"中被迫解散.粉碎"四人帮"后，在党和国家的亲切关怀下，在所长苏步青教授领导下迅速地恢复了微分几何、泛函分析(包括函数论)、微分方程(常微和偏微)、概率论与数理统计、应用数学(计算数学、控制论、运筹学)等5个研究室.1978年春季在全国率先恢复招收研究生，现在该所已建立了博士后流动站.1980年起，受国家教委的委托，负责创办了《数学年刊》，1983年起又分(A)、(B)两辑出版，其中(A)辑为中文版，(B)辑为英文版.(B)辑已被列为美国科学引文索引(SCI)世界核心期刊中纯数学期刊，(A)辑也由美国阿伦顿出版公司翻译为英文在美国发行.

复旦大学数学研究所在陈建功、苏步青等老一辈著名数学家的带领下，一直坚持小型科学讨论班这一行之有效的传统治学方法，重视填补和发展新学科，重视新生力量的培养.此外，多年来该所还与全国很多高等院校的数学系和研究所有着经常的学术交流和联系.1977年以来又加强了与美国、西欧、日本、苏联(俄国)和东欧国家的同行的联系，并签订了若干项交流协议，主办和参加主办过多次国际性和全国性的学术会议.主办的国际性会议有：1981年第二届国际双微会议(参加主办)，1982年第三届国际双微会议，1985年第六届国际双微会议，1986年第三届数学研究生暑期教学中心讲习班，1989年国际非线性物理会议(与中国科技大学联合主办).主办的全国性讲习班有：1978年大范围微分几

何讲习班，1979 年拓扑学讲习班，1981 年分布参数系统控制理论讲习班，1982 年算子理论讲习班，1984 年常微分方程理论讲习班，1985 年大范围微分几何讲习班，1986 年暑期微分方程讨论班. 另外，还主办过微分几何、孤立子理论、规范场理论、微局部分析、控制论等学术讨论会.

自 1956 年以来，复旦大学数学研究所已有 24 个项目先后获国家自然科学奖、国家科技进步奖、国家科委科技进步奖、上海市科技进步奖和部级重大科技成果奖，其中：K 展空间和一般度量空间的几何学，射影空间曲线论（苏步青，1956 年）和非线性双型方程组和多元混合型偏微分方程的研究（谷超豪、李大潜，1982 年）获国家自然科学奖二等奖；规范场的数学理论（谷超豪、胡和生）和泛函分析及其在物理上的应用（夏道行、严绍宗）获 1982 年国家自然科学奖三等奖；单叶函数（夏道行等）和环的结构（许永华）获 1982 年国家自然科学奖四等奖；内燃机配气机构计算方法程序和应用（尚汉冀）获 1985 年国家科技进步一等奖；计算机辅助几何设计（苏步青、刘鼎元）和曲面法船体曲线型设计（苏步青、刘鼎元与上海交大合作）获 1985 年国家科技进步二等奖. 还有 3 个项目获国家教委科技进步一等奖，7 个项目获国家教委科技进步 2 等奖；另外，获上海市科技进步奖一、二等奖各 1 项；获部级重大科技成果奖 3 项.

北京大学数学研究所（Institute of Mathematics Peking University） 经国家教育部批准于 1978 年成立. 历任所长：程民德、张恭庆、丁伟岳. 该所的研究方向包括基础数学、应用数学与计算科学. 基础数学方面又有动力系统与常微分方程、非线性分析、复分析、调和分析与逼近论、不动点理论与低维拓扑、有限群及其表示、微分几何、偏微分方程等. 应用数学方面有数学物理、组合数学与图论、图形识别与人工智能、数理统计、信号分析、偏微分方程在工程中的应用等；计算数学方面有非线性问题中的计算方法、计算流体力学、数值代数等. 近年来，该所与国际数学界有着广泛的交流. 各方面的世界知名数学家都曾到该所做过学术报告或系统讲演. 该所曾举办过 1983 年第四届国际双微会议、1984 年国际群论会议、1984 年国际分析学讨论会、1985 年函数逼近论国际会议、1988 年拓扑不动点理论及其应用国际会议等；另外，该所还主持过多次专题讲习班. 现在，该所与北美、欧洲、俄国、日本、澳洲、香港特别行政区等都有着十分广泛的交流. 现在该所执行开放政策，除每年保持 4—5 名博士后研究人员外，还经常举办学术会议和讲习班，并且每年接受访问学者进行短期或长期访问，同时还接受进修教师. 此外，每年还接受 20—30 人周的客座研究人员. 该所与北京大学数学系有着极其密切的关系. 研究所特别支持与所、系有合作研究项目的客座研究人员访问该所. 该所的研究成果都及时编成科学报告，以预印本的形式与国内外交流.

北京大学数学研究所受中国数学会委托，与北京大学数学系合作编辑出版《数学进展》杂志，还与南京大学数学系等合作，编辑出版国际性英文版《逼近论及其应用》（Approximation Theory and Its Applications）杂志.

近年来，北京大学数学研究所的研究成果颇丰，其中重大成果有：廖山涛教授在拓扑与动力系统方面的研究，数项成果曾分别获 1982 年国家自然科学奖，1986 年第三世界科学院首届数学奖，1987 年国家自然科学奖一等奖；张恭庆教授在非线性分析方面的研究，有几项成果曾分别获 1982 年国家自然科学奖三等奖，1986 年陈省身数学奖，1987 年国家自然科学奖二等奖；姜伯驹教授在不动点理论方面的工作，有几项成果曾获 1982 年国家自然科学奖三等奖，1987 年国家自然科学奖二等奖，1988 年陈省身数学奖. 另外还有多位研究人员在常微分方程、复分析、计算流体力学等方面的研究成果获得了国家教委的科技进步奖，在年轻的博士中，张继平在导师、学部委员段学复教授指导下的有限群及其表示方面的研究成果，徐雷在信息科学中的研究成果都曾获霍英东青年教师奖；王雪平在数学物理方面的微分算子的研究成果曾获国家教委科技进步奖一等奖和霍英东奖.

吉林大学数学研究所（Institute of Mathematics, Jilin University） 经国家教育部批准于 1978 年建立. 历任所长：江泽坚、李荣华. 该所是从事基础数学、计算数学、应用数学和概率统计基础理论和应用研究的专门机构，承担着国家的有关科研项目和国民经济中重要课题的研究任务. 该所曾主办过 1982 年第三届国际双微会议长春讨论会，1978 年全国研究生暑期教学中心，1987 年全国高校计算数学第三次学术会议. 该所从建所以来有 2 个项目获国家自然科学奖三等奖，7 个项目获国家教委科技进步奖二等奖，4 个项目获全国科学大会奖，载入国家《科学技术研究成果公报》的有 11 个项目. 此外，还有省部级重大科技成果 7 项.

四川大学数学研究所（Institute of Mathematics, Sichuan University） 1978 由四川大学批准成立. 1983 年获国家教育部批准. 历任所长：柯召、陆文端、蒲保明、刘应明. 该所成立的宗旨是从事纯粹数学与应用数学的研究. 主要研究领域为：数论及其应用、组合论、微分几何与拓扑学、泛函分析、偏微分方程与生物数学、数理统计、不分明集与系统. 该所除承担国家自然科学基金研究项目和国家教育部博

士点基金研究项目外，还与国内有关单位合作研究为经济建设服务的课题，培养博士与硕士学位的研究生.该所与四川大学数学系和四川省数学会合作主办过全国性的学术会议.该所已有《不分明拓扑学基础性研究》等4个项目分别获1978年全国科学大会奖、1982年国家科委自然科学奖；《子流形的高阶平均曲率与刚性、惟一性定理》等23个项目分别获部、委及四川省科委科技进步奖.该所每年在学术刊物上发表论文50多篇，其中有五分之一左右发表在国外杂志上，现已出版《组合论》、《快速数论变换》等6部专著.

中国科学院应用数学研究所(Institute of Applied Mathematics, Academia Sinica)　经中国科学院批准于1979年10月成立.由中国科学院原应用数学推广办公室、数学研究所的运筹学研究室和概率统计研究室组成.首任所长华罗庚，副所长王寿仁、越民义、秦元勋；第二任所长吴方，副所长方开泰、江文华.应用数学研究所着重于研究有鲜明实际背景的数学基础理论，发展和创造带着普遍意义的应用数学方法，在国家攻关项目、国民经济中重大项目、尖端科学技术和军事科学中发挥重大作用.研究领域包括：数学规划的理论与应用、管理信息系统以及各级决策支持系统的理论和设计、随机运筹学、可靠性理论、图论、概率与统计理论、多元分析、多元分布理论、实验设计、时间序列分析、随机分析、随机渗漏与控制、常微分方程、计算物理、数学经济模型理论与应用、计算机模拟在国民经济中的应用、人机系统、管理与决策科学、数值分析的理论与应用等.建所以来合作主办过2次国际会议，并组织了各种学术会议和讨论班.因该所是中国运筹学会、计算物理学会、多元分析专业委员会、时间序列专业委员会、可靠性专业委员会、多指标随机过程论专业委员会、"马尔科夫"决策专业委员会和计算机模拟学会的长期挂靠单位，这些学会和专业委员会所组织的学术会议，该所一般都是主办单位.该所还担负着《应用数学学报》中、英文版的编辑出版工作.另外，该所的许多研究人员还在国内的一些学术团体中担任领导工作.

多年来，该所科研人员以勤奋、严谨和创新的精神指导研究，取得了一批丰硕的成果.特别是改革开放以来，在基础研究和应用领域都做出了很好的工作.如："狄氏型与马氏过程"的研究取得重大突破，圆满地解决了该领域存在20年之久的难题，并因此而创建了拟正则狄氏型这个新的数学框架，建立了狄氏型与马氏过程的一一对应关系，使得狄氏型理论发展成为纯分析与概率论有机结合起来的一个数学分支；"斯坦纳比猜想的证明"被评为1992年国家十大科技成就之一，这一题目是美国贝尔实验室长期研究未决且具有应用背景的数学难题；"不稳定试井方法评价油气藏特征"的研究，应用渗流力学、微分方程、误差分析、近似计算及非线性规划等理论，得到了有效的计算方法.该成果已应用于新疆塔北等四大油田，取得了重大成功；"均匀设计法"应用到军事工程、医药、化学、纺织、冶金、电子等工业领域，取得了丰硕的成果和巨大的经济效益；"国家经济信息系统投资项目评价系统"的研究工作，提出了基于运筹学中的投资预测模型，并给出了该模型的算法，利用该模型可对非盈利组织的投资预测和决策问题进行分析评价.该项研究还获得第十四届国际运筹联合会运筹学进展奖一等奖.

中国科学院应用数学研究所建所以来，已获得国家级奖6项，其中一等奖1项，二等奖3项，三等奖2项；获得中科院及院部级奖54项，其中一等奖8项，二等奖16项，三等奖30项；获得其他奖项22项.

中国科学院系统科学研究所(Institute of Systems Science, Academia Sinica)　经国务院批准于1979年10月30日成立.历任所长：关肇直、成平.该所以系统科学研究为主，着力推进中国的系统科学以及近代数学若干分支的发展.主要研究领域有：控制理论、运筹学、管理科学、系统工程、系统分析、统计数学、数学机械化、数学物理、应用泛函、代数与编码、拓扑学、组合数学与图论等.该所研究人员开展了基础理论的研究，并用系统科学、系统工程和数学的方法解决了中国国民经济和国防建设中提出的实际问题.在国内，与中央及地方30多个部门或企业建立了横向联系的协作关系.在国际上，与美国等20多个国家的数十个研究机构和高等学校有着学术联系和人员来往.该所已主办过或合办过的国际会议有："中美双边系统控制会议"、"中美国际图论会议"、"中美国际统计会议"、"系统科学和系统工程国际会议"、"IFAC辨识与系统参数估计会议"、"中日双边统计会议"等.同时，还举办与该所研究领域有关的国内各类会议和讨论班.该所还编辑了《系统科学与数学》(中、英文版)和《数学的认识与实践》等刊物.

系统科学研究所自成立以来，累计获奖161项，其中第一届国家最高科学技术奖1项(2000)；国家自然科学奖8项：示性类及示嵌类的研究(一等奖)，飞行器弹性控制理论研究(二等奖)，补偿列紧原理与熵气体动力学方程组(二等奖)，几何定理机器证明理论与算法的新进展(二等奖)，迁移算子占优本征值研究(三等奖)，典型群的同构理论(三等奖)，动态系统的辨识与适应控制(三等奖)，自适应估计与控制的基础理论(三等奖)；国家科技进步奖11项：尖兵一号通用型卫星及东方红一号卫星(特等奖)，

人口系统定量研究及其应用(一等奖),建筑结构统一设计标准一安全度研究(二等奖),黄淮海平原中低产地区综合治理和综合发展的研究(二等奖),全国农业投入产出表及其在粮食产量预测中的应用(三等奖),三江平原区域农业自然资源遥感复查及其综合治理建议(三等奖),长江上游生态环境和社会经济条件研究与评价(三等奖),中国控制系统计算机辅助设计 CADCSC(三等奖),全国粮食产量预测(三等奖),引青水利自动化系统工程(三等奖),中国国情分析(三等奖).

获中国科学院自然科学奖 8 项:有限元外推技术(一等奖),自适应估计与控制的研究(一等奖),几何定理机器证明理论与算法的新进展(一等奖),有限域上典型群的几何学及其应用(一等奖),向量优化中的变分模型与极植分析(一等奖),拟线性双曲型方程组的整体解(二等奖),非线性控制系统的几何理论(二等奖),向量极值问题的数学理论与算法的新进展(二等奖);中国科学院科技进步奖 12 项:黄淮海平原中低产地区综合治理和综合发展的研究(特等奖),移位寄存器系列(一等奖),补偿列紧与气动力学方程组(一等奖),黄淮海平原区域综合治理技术和农业发展战略研究(一等奖),全国粮食产量预测研究(一等奖),长江上游生态环境和社会经济条件的研究与评价(一等奖),中国国情分析(一等奖),流形到流形的浸入(二等奖),投入产出技术在企业管理中的应用研究(二等奖),投资决策支持系统(二等奖),国民经济宏观管理中的决策方法研究(二等奖),引青水利自动化系统工程(二等奖);中国科学院重大科技成果奖 5 项:正交实验法的普及推广(一等奖),最小树形图(一等奖),嵌入定理及应用(一等奖),极值控制理论在特定武器控制系统原理方案上的应用研究(一等奖),某些微分方程的计算方法(二等奖).另外,获重要国际奖励 7 项,其他奖励 109 项.

武汉大学数学研究所(Institute of Mathematics,Wuhan University)　1979 年 11 月由国家教育部批准成立.历任所长:李国平、路见可.该所成立的宗旨是从事纯粹数学和应用数学的研究.研究所设有函数论、微分方程、几何与代数、概率与统计、计算数学、应用数学与力学、应用软件等研究室.主要研究领域有:单复变函数论及其应用、调和分析、位势论、泛函分析、算子理论、断片几何、微分几何、微分拓扑、群论、环论、随机过程、随机分析、数理统计、偏微分算子、稳定性理论、微局部分析、数值代数、微分方程数值解法、数学物理、分叉理论、计算力学、非线性力学的数学方法、最优化、并行算法等.该所曾与其他单位合作主办过多次学术会议(包括国际会议),与美、英、法、日、德、澳大利亚等国的学术界有经常联系,平时活动以各学科小组的讨论班为主.该所与武汉大学数学系关系密切.湖北省数学会和武汉数学会的学会办公室及《数学杂志》均设在该所内.该所获奖成果有:偏微分方程或国家自然科学奖四等奖,该所获奖成果有:偏微分方程获国家自然科学奖四等奖,并行算法获国家教委科技进步奖一等奖,在函数论、泛函分析、概率论方面有 4 个项目获国家教委科技进步奖二等奖.

浙江大学应用数学研究所(Institute of Applied Mathematics, Zhejiang University)　经中国科学院批准于 1980 年建立.所长:董光昌;副所长:郭竹瑞.该所着重于应用数学理论与应用的研究及解决生产实际中出现的有关重大课题.研究方向有函数逼近论、偏微分方程、计算几何、常微分方程与控制论、数理统计与运筹学、近代分析.该所承担国家和省自然科学基金资助及国家教育部资助的研究课题.按研究方向组织有 10 余个讨论班,曾先后与美国、德国、澳大利亚的科学家进行过科学研究交流,所内设有 CAD 与图形学国家重点实验室,现正在与浙江大学其他系一起共同开展图形学及其应用的研究.该所研究人员每年在国内外杂志上发表论文 80 余篇,其中"船体数学放样——回弹法"获全国科学大会奖,"正负法数控绘图图形包"获全国 1984 年度微机应用成果二等奖.还有 4 个项目获国家教委科技进步奖.另外,还出版了《二阶线性偏微分方程》、《非线性偏微分方程》(董光昌著)和《计算几何》(梁友楳著)等专著.

南开数学研究所(Nankai Institute of Mathematics)　经国家教育委员会(现国家教育部)批准,于 1985 年 10 月成立.所长:陈省身;副所长:胡国定、姜伯驹.南开数学研究所是一所在国家教育部直接领导下的对国内外开放的研究所.创办人陈省身教授提出的办所宗旨是:"立足南开,面向全国,放眼世界."研究所每年从世界各国邀请 20 余名代表当今世界数学水平的外国数学家和一大批中国著名数学家来所讲学、研究,同时带领大批青年研究生和数学工作者深入到研究前沿,针对重大课题进行有组织的研究.1985 年以来,已就偏微分方程、微分几何与拓扑、理论物理、调和分析、概率与统计、代数几何等方面组织了全年性的讲习或讨论班活动,并将陆续组织动力系统、计算机科学、复变函数论、计算数学等方面的学术活动.世界著名的斯普林格出版社(Springer-Verlag)将系列出版该研究所的成果和专著.研究所除有专职研究人员外,常年有流动的研究人员到所从事研究工作.

南京大学数学研究所(Institute of Mathematics, Nanjing University)　1979 年 9 月由南京大学批准成立.所长:叶彦谦、仇庆九.该所成立的宗旨是

加强并促进数学理论与应用工作的研究，使之更快地达到国际先进水平．主要活动有聘请国内外专家教授到校讲授；介绍有关分支的最新发展情况和专题研究的最新成果；举办中、小型学术会议或研讨会．研究所成员分别在所在教研室组织或参加有关学科的讨论班，年终时汇报交流各人一年中所取得的研究成果．现已有“平面二维流形上的非线性微分方程的大范围分布”和“数理逻辑及其对计算机的应用”2个项目获国家教委二等奖，还另有2个项目获江苏省三等奖以及其他一些研究成果．

北京师范大学数学与数学教育研究所（Institute of Normal and Mathematical Education, Beijing Normal University） 1983年9月由北京师范大学校务委员会批准成立．历任所长：严士健、刘绍学．该所成立的宗旨是活跃数学诸学术分支的研究工作，培养高一级的数学教学与科研人员，促进对外学术交流，吸收专业人才．研究所设有国家教育部重点学科2个，博士点3个，国家专业实验室1个．研究所已开展的主要活动有：主管本校数学系硕士生与博士生的招生、教学、筛选工作；主办了国际“纪念秦九韶《数书九章》成书740周年”学术会议和全国师范概率年会；邀请了近30名国外教授来访；开展各种讨论班活动，如粒子系统讨论班等4项．该所研究人员已在国内外有关刊物上发表论文约300篇，并有1个项目获国家自然科学奖四等奖，2个项目获国家教委科学进步奖一等奖，4个项目获国家教委科学进步奖二等奖，1个项目获优秀成果奖，1个项目获霍英东青年科学奖等．

中国科学院数学与系统科学研究院（Academy of Mathematics and System Sciences, CAS） 作为中国科学院知识创新工程首批试点单位之一，数学与系统科学研究院于1998年12月28日正式成立．院长：杨乐，常务副院长：章祥荪，党委书记：李福安，副院长：袁亚湘，副院长：刘卓军．它的发展目标是建成中国的数学与系统科学研究的创新基地、在国际上有影响的研究中心、培养尖端数学与系统科学研究人才的中心、国际学术交流中心以及国民经济有关问题的咨询中心．

研究院的组成结构为：4个研究所：数学研究所、应用数学研究所、系统科学研究所、计算数学与科学工程计算研究所．2个中心：晨兴数学中心、数学机械化研究中心．3个开放实验室：科学与工程计算国家重点实验室、系统控制开放实验室、管理决策与信息系统开放实验室．

研究院的行政管理机构由6个职能处、2个科研辅助部门、园区物业管理中心及学会、编辑部组成．6个职能处为：院办公室、科学研究处、党群办公室、人事教育处、学术交流处、计划财务处．2个科研辅助部门为：图书馆、网络服务部．挂靠在研究院的全国性学会有：中国数学会、中国系统工程学会、中国运筹学会、亚太运筹学中心等．学术期刊编辑部有：《数学学报》编辑部、《系统科学与数学》编辑部、《应用数学学报》编辑部、《系统工程理论与实践》编辑部、《计算数学》编辑部、《数学译林》编辑部等．

各研究所是科技活动的主要组织者，负责本所主要学术方向的规划以及课题的组织．研究院对于跨所的科研课题起主要组织作用．对基础性研究，由研究院提供宽松的科研环境．另一方面，研究院面向国民经济主战场和国家发展的战略性问题，组织跨学科、跨研究所的重大应用性课题．

研究院目前主持了一系列重大科学研究项目，分别是：“973”项目3项；“863”项目1项；攀登研究项目1项；国家自然科学基金重大项目4项（合作支持），重点项目27项，国家杰出青年基金项目11项；中国科学院重大项目4项，重点项目4项，百人计划12项；中国科学院院长特别支持项目1项，中国科学院院长基金项目1项；面上项目42项，青年项目23项，其他项目43项，中国科学院创新经费项目75项．

近年来科研获奖情况有：中国科学院"百人计划"入选者17人．国家杰出青年科学基金获得者20人．中国青年科学家奖获得者2人．中国科学院青年科学家奖：一等奖8人，二等奖7人．中国科学院科学创新奖获得者2人．何梁何利科技进步奖获得者7人．香港求是杰出青年学者奖获得者8人．

2000年度重要获奖情况是：国家最高科学技术奖：吴文俊．中国科学院自然科学奖：余其煌、王世坤等（一等奖），李嘉禹（二等奖）．何梁何利基金科技进步奖：丁夏畦、石钟慈．哈灵顿．石川质量专家奖：刘源张．国际具有影响力的经典引文奖（Citation Classic Award）：陈光亚．

外国数学研究机构

斯捷克洛夫数学研究所（Steklov Mathematical Institute） 在苏联数学家、力学家斯捷克洛夫建议下于1921年成立．它是苏联科学院的一个研究所，初建时的名称为物理数学研究所．斯捷克洛夫任所长，直到他于1926年去世．他去世后，研究所即于当年被命名为斯捷克洛夫物理数学研究所．1934年，研究所分成为斯捷克洛夫数学研究所和列别杰夫物理研究所，由维诺格拉多夫（Виноградов, И. М.）任斯捷克洛夫数学研究所所长，直至他于1983年去世．1971年举行了研究所建所50周年庆祝活动．研究所内聚集了一批优秀数学家．所内现设量子场论、统计力学、代数、数学物理、偏微分方程、代数与几

何、复变函数论、数论、常微分方程、统计数学、概率、力学和实变函数论等13个研究室.全所现有研究人员150人左右.该研究所对国内外开放,在苏联时期所内访问学者以苏联本国人为主,国外的主要来自社会主义国家,来自欧美的学者较少.

亨利·庞加莱研究所(Henri Poincaré Institute/Institut Henri Poincaré) 外文缩写为IHP.一个国际性的研究所.1928年11月17日正式成立,创建时所址在巴黎大学内.首任所长为波莱尔(Borel,É.).其图书馆以馆藏丰富而闻名.1928年开始,研究活动主要集中于由两位教授主持的领域:波莱尔主持的概率论和由布里卢伊主持的理论物理.1947年增设了主持量子物理和相对论的教授职位.1930年到1968年间,一些知名数学教授和理论物理教授都在这里有他们的办公室.1953年在嘉当(Cartan,H.)和韦伊(Weil,A.)的建议下,开始了每周一次的"数学家茶会"活动,使学者、教授们相聚一起在家庭式气氛中讨论科学问题.1931年创办了《亨利·庞加莱研究所汇刊》(Annales de l'Institut Henri Poincaré),在研究所讲学的讲稿一般发表于此刊.

根据1968年颁发的法国"教育改革法",巴黎大学于1969年被分成几所大学,使研究所的建筑设施陷于失修,1970—1986年间曾一度停止活动.在法国科学家的呼吁下,1990年法国总理签署法令促成了该研究所的新生,并由法国高等教育部研究与博士学习处拨款保证了对研究所建筑的综合装修和更新.研究所已于1993年10月到1994年2月间逐步恢复了各项活动,现在它由波莱尔国际研究中心、数学馆、亨利·庞加莱图书馆与文献中心、大会堂4部分组成.主要研究活动由波莱尔国际研究中心组织.研究所现设科学指导委员会,负责制订研究中心的研究计划,且计划一般提前一年确定.现在研究中心实施数学与理论物理的一年或半年主题计划.1994年和1995年春分别实施了辛几何、非线性波和代数曲线等专题计划.

研究中心的活动除高水平的研究外,还开展旨在吸引与训练青年研究人员的活动,参加者大多是副教授和博士后研究人员.应邀而来的教授参与对青年研究人员的指导.研究中心所办讨论班中的研究生课程及讲座资料,一般在主题计划主持人指导下予以出版.数学馆主要为一般兴趣的活动和交流提供场所.亨利·庞加莱图书馆与文献中心收藏的资料也已经过重新组织、充实,其藏书中有数学史和古代著作(包括著名数学家的通讯信件等).有两个会议大厅的大会堂,可为研究所所在地区的大学和波莱尔研究中心的博士后提供会议及共同讨论的场所.

普林斯顿高等研究院(Institute for Advansed Study in Princeton) 1930年由美国教育家弗莱克斯纳(Flexner,A.)创立,同年获美国新泽西州政府颁发的特许状.1932年成立了第一个研究所——数学研究所(School of Mathematics).研究院现设有4个研究所,除数学研究所外,还有自然科学研究所、历史研究所和社会科学研究所.研究院创立时的经费由拜姆伯格(Bamberger, L.)和他妹妹富德(Mrs. Fuld,F.)夫人捐赠.现在研究院80%的费用靠本院基金,20%的费用靠来自美国国家科学基金会和其他基金会的资助.研究院设立由15人组成的理事会,由理事会选举产生院长,负责全院学术工作.研究院的成员分长期与短期两种,长期成员仅20人,他们是研究活动的核心.研究院每年邀请160多位短期成员到院内工作,其中三分之一来自国外(大部分来自西欧的主要学术中心).短期成员在院工作时间一年或一学期不等,也有少数为期两年的访问学者.到研究院作短期研究的人除需本人向院长提交申请书外,还需经由长期成员组成的教授委员会投票通过,被邀请的一般都是有成就、有发展前途的科学家、学者.约有一半短期成员的资助费由各研究所基金和高等研究院的基金支付,其余短期成员的费用由成员所在单位、美国政府或外国政府支付.高等研究院数学研究所的工作范围包括拓扑、分析和大范围分析、李群、代数群、自守函数与数论、代数几何和逻辑等.该所还和普林斯顿大学共同编辑出版了在国际数学界有影响的《数学纪事》(Annals of Mathematics)杂志.在自然科学研究所工作的主要是理论物理学家、天体物理学家和天文学家.历史研究所在其广泛的研究内容中包括了数学史与科学史.社会科学研究所主要研究社会学、人类学、经济学和政治学等.自高等研究院创立以来,已有3000多名科学家和学者在此工作过,其中包括著名物理学家爱因斯坦(Einstein,A.).数学研究所一成立,就由维布伦(Veblen,O.)任首任所长,并在1933年、1935年相继邀请了外尔(Weyl,(C. H.)H.)、冯·诺伊曼(von Neumann,J.)、亚历山大(Alexander,J. W.)、莫尔斯(Morse,H. M.)等著名数学家到所工作.因此在成立之初,数学研究所就成了当时动乱世界的数学研究中心.到目前为止已有10多位在该所工作过的数学家获沃尔夫数学奖、近10位获菲尔兹奖,其中包括陈省身和丘成桐.

高等研究院初建时,办公场所设在普林斯顿大学.1939年,高等研究院自己的第一座建筑物落成后,逐渐发展成了一个独立的建筑群,现拥有供研究人员使用的宿舍、实验室、图书馆、餐厅等.高等研究院的图书馆规模不大,但研究人员可自由地使用普林斯顿大学的图书馆.这些都为研究人员提供了较

好的工作与生活条件. 中国数学家华罗庚、段学复、闵嗣鹤、吴文俊、陈景润等，都在这里工作过.

库朗数学科学研究所(Courant Institute of Mathematical Sciences) 1954年11月29日正式落成，其创始人库朗(Courant，R.)曾为之做了10多年的努力. 1940—1941年库朗就为建立一个基础和应用科学研究所向有关方面写过3个备忘录，1941年9月他曾宣布“应用数学研究所”成立，但人员和资金都没有得到保证. 在第二次世界大战中，美国参战以后成立了一个应用数学专门小组(AMP)，库朗参加了该组，并领导了AMP设在纽约大学的分组——应用数学小组(AMG). 该小组不断发展扩大，并延续到战后. 1947年库朗又使用了“纽约大学数学与力学研究所”的新名称，但实际上仍为应用数学小组. 1953年，经库朗多方争取，从“原子能委员会”(Atomic Energy Commission)得到了一台大型电子计算机，使应用数学小组的实力得到了加强. 因此，研究所在1954年正式举行落成典礼，并取名为“纽约大学数学科学研究所”(Institute of Mathematical Sciences at New York University). 库朗任首任所长，直到1958年退休. 后来研究所又逐步发展扩大. 1961年，从斯隆基金会、福特基金会和美国国家科学基金会获得一笔可观资助，使研究所得以建造了一座新楼，并开设了博士后研究工作，同时开始了统计、数学物理方面的新的研究计划. 1965年，一座设备先进的大楼落成，研究所正式改为现名. 现在美国国家科学基金会每年均给以资助. 20世纪40年代，库朗领导的应用数学小组就进行过水下声学和爆炸理论的研究，在战争时期共完成了194个研究项目. 20世纪50年代，研究所成立前后，又成功地用大型计算机对河流洪水流量进行了计算. 因此，它在美国有着较高声誉. 1985年10月，研究所举行了其在应用数学和计算机科学方面领先研究和教学50周年的纪念活动. 现在它在数学、应用数学和计算机科学方面培养研究生. 1986年初，它又开始组织了美国大学生科学竞赛，涉及内容主要在数学、应用数学(数学模型、数学在其他领域的应用、物理和工程科学中的数学等)方面.

高等科学研究所(Institut des Hautes Etudes Scientifiques) 外文缩写为IHES. 1958年建立的非官方研究机构，是一个国际性的数学与理论物理研究所. 1965年由法国政府接管，但只起监督作用，没有改变其非官方的性质. 1981年，研究所成立了公益机构性的基金会. 现在研究所设有行政管理委员会和学术委员会，后者在前者监督下组织管理学术活动，前者负责行政管理及经费的筹集与管理等，但不干涉学术事务. 学术委员会由常任教授、所长和若干名非研究所的学者组成，后一类人员进入学术委员会主要是为防止因“近亲繁殖”而引起的退化，帮助把握未来发展的大趋势. 学术委员会有权邀请学者到所里工作，决定主攻方向等. 研究所的研究人员分为3类：常任教授、长期访问学者和一般访问学者. 常任教授的挑选按其工作的深远性及广泛性确定，被聘者年龄一般在27岁到40岁之间. 这类人员只有6名左右，他们终身受聘，但可自由离去. 一般访问学者只参加年内的讨论班，在所内停留时间一般为两个半月，个别最长可延长至3年. 访问学者需由个人提出申请，再由学术委员会邀请，这类人员每次限制在40名以内. 长期访问学者介于以上两类人员之间，允许在研究所停留5年，且还可适当延长，其人数与常任教授相近. 研究所除组织讨论班等讨论交流活动外，还为研究人员提供了宽松的研究思考环境. 常任教授可自由选择研究方向、自由参加各类学术活动.

高等科学研究所座落在一个花园中，自然环境优美，附近还有巴黎第六大学、高等工业学校的数学和物理研究中心、原子能委员会理论物理中心等，对研究人员之间的自由交往与学术交流很有利. 研究所先后已有5位在此工作过的青年数学家获得菲尔兹奖. 现在的常任教授中有1993年沃尔夫数学奖得主哥罗莫夫(Gromov，M.). 研究所配备有图书馆及一些现代化的设备. 研究所除编印研究人员成果的预印本外，还出版丛书《高等科学研究所出版物》，现由沃尔夫数学奖获得者、法兰西学院教授蒂茨(Tits，J.)任主编. 研究所经费开支的四分之三由法国教育部的研究基金拨款，其余靠资助. 资助者有德国麦克斯·普朗克研究所、英国工程物理研究委员会、瑞士自然科学院、比利时的国家学术团体及机构事务指导局等，美国自然科学基金会也给予资助. 另外法国有关银行及企业公司也给予了部分捐助资金.

苏黎世联邦高等工业学院数学研究所(Forschungsinstitut fur Mathematik der Eidgenossische Technische Hochschule Zurich) 1964年由瑞士联邦高等工业学院教授埃克曼(Eckmann，B.)创立. 它鼓励在数学的各个领域进行研究. 创立者利用苏黎世位于旅行讲学必经之路的有利地理条件和文化等其他有利条件，邀请世界各国数学家到研究所讲学或进行研究，以加强互相接触了解. 研究所的主要活动是讨论班，讨论班分两类：一类是主题时时改变的单次型讨论班；另一类是主题不变的连续型讨论班. 常举办的有微分几何(曲面、黎曼几何)、数值分析、不同类型的应用数学讨论班. 代数和拓扑讨论班已持续了20多年没有间断，还有数论和分析、概率论和统计、数学物理、分析和动力系统等讨论班. 1983年开始还为整个瑞士的数学家举办讨论班

(第一年的主题是相交同论,第二年主要在D模).研究所还与苏黎世大学联合组织了一个复杂性理论讨论班.除一般讨论班以外,在研究所的早期还有拓扑、环论、K理论和范畴论等学期重点,1982年夏,曾集中于微分几何.研究所还组织过几次解析数论和理论计算机科学的专题讨论会.研究所比较强调长期访问者(6个月到一科学年)的作用,也十分重视短期访问者的作用.其特点是不像美国近年来建立的研究所那样有年度规划,它的活动完全是围绕着联邦高等工业学院的教学科研人员和被邀请的学者的兴趣进行的.但经常也有一年或一学期的一个或几个重点专题,这主要反映在讨论班、专题讨论会(或小型会议)上.研究所有一个宽松的非正式的气氛,使一些利用原单位休假而来的数学家们能在这里把他们的精力集中于他们所研究的问题.这一特点使研究所得以挤身于世界一流的研究中心之列.

伯克利数学科学研究所(Mathematical Sciences Research Institute in Berkeley) 1981年由美国国家科学基金会(NSF)建立,位于加利福尼亚州的伯克利,是一个非营利的实体.首任所长是陈省身教授.研究所主要在纯粹数学与应用数学中被认为取得重大进展的时间已成熟的方面从事研究,每年选择两个方向作为研究重点.成立后第一年的研究重点是非线性微分方程和统计的数值方法两个方面.1990—1991年的重点是非线性偏微分方程和连续统一体力学.研究所成立初期拥有50名初高级研究学者.研究人员可在任何时间参加研究工作,工作时间可从3个月到2年不等.研究所希望能有更多的人利用原来大学的休假期或其他形式参加其部分资助的研究工作.美国国家科学基金会每年提供160万美元的经费,西海岸13所大学和1个实验室也向其提供了资助.研究所每年将其经费的三分之二用于当年的两个重点研究方面(即每一方面使用总经费的三分之一),另外的三分之一用于支持数学科学其他领域的研究工作.研究所设理事会和科学顾问委员会.理事会由资助团体各出1名代表、10名数学家代表和正副所长组成.为使理事会中的数学家代表能在学科和地理位置方面得到平衡,且保证理事会能反映全美的数学界,这部分代表每年都在美国全国或国际上挑选.理事会每年聚会一次.顾问委员会由8人组成,包括正副所长.除正副所长外,其他成员每年从美国数学界代表数学各个重要方面的人员中挑选.顾问委员会每年聚会2次,并配合正副所长制订规划、选择人员和处理其他问题.每年的两个研究重点也要由顾问委员会商定.

麦克斯·普朗克数学研究所(Max Pianck Mathematical Institute) 1982年1月正式成立,属德国麦克斯·普朗克协会(MPG)领导,研究所设在波恩.为促进原西德的数学研究,一批德国数学家曾为成立此研究所做了20来年的努力.1959—1960年间就正式考虑过成立麦克斯·普朗克数学研究所的设想,并已落实了所长人选,但因数学家们对怎样才有利于数学研究的问题意见不一,以致MGP审查委员会最后避而不谈建所之事,不了了之,没有建成.20世纪70年代末重提建立数学研究所,经审查后MPG评议会同意建立,并保证财政资助.其主要活动有:

1. 1957年开始的成果报告年会,现在由研究所组织;1984年举行了第25届成果报告会,参加人数多达250人,并有苏联等国数学家参加,内容涉及面广,受到了德国数学家的好评.

2. 组织多种讨论会和专题讨论班,讨论会或讨论班的主持人都是国内外某一个领域的著名专家.

明尼苏达大学数学及其应用研究所(The Institute for Mathematics and Its Applications of the University of Mennesota) 外文缩写为IMA.1982年由美国国家科学基金会建立,其建立的目的是:把各领域的数学家聚集在一起,形成一个为重要课题而共同研究的协调的环境;促进各领域的重要数学问题的解决;鼓励发展并研究与其他学科有关的新的数学概念和问题.研究所每年都有年度规划,如1988—1989年为“非线性波”,1989—1990年为“动态系统及其应用”,1990—1991为“相位平移和自由边界问题”,“应用线性代数”是1991—1992年度的研究课题.研究课题强调数学的应用.研究所每年还组织多次小型专题讨论会.研究所没有固定的研究人员,仅有访问学者,现有学者500多人,其中150—200人来自国外.研究所还每年吸收10名博士后研究人员做为期一年的研究工作.在几年的实际中,研究所在数学家、工程师和科学家之间建立了联系.该所实际上是数学家和非数学家的一个混合体,这是其独特的特点.研究所每年从美国国家科学基金会获得100万美元的研究经费,还从美国军方获得资助.现在已有美国中西部的17所大学和4个公司参与了研究所管理委员会(研究所决策机构)的工作.

菲尔兹数学科学研究所(Fields Institute for Research in Mathematical Sciences) 1992年6月正式成立.由滑铁卢大学、多伦多大学、麦克马斯特大学发起创办,得到了安大略省学院与大学部和加拿大国家科学与工程研究理事会(NSERC)的支持与资助,同时还有加拿大14所大学参与协办.办所宗旨是促进数学科学的研究与教育,加强与其他科学领域及工业界的联系.研究所设立顾问小组和理事会,由顾问小组负责学术工作,理事会则负责管理工作和与数学会、大学研究管理部门、商界和政府部

门等各资助单位及有关方面的联系.研究所还设立了由资助单位(包括协办大学)代表参加的董事会.首任所长由美国伯克利加利福尼亚大学的马斯登(Marsden,J. E.)担任.不设固定成员,而是资助一个或多个学期的研究项目.项目由顾问小组在全加拿大征求意见后确定;每一个项目都包含有研究生的短期课程.研究所面向世界,邀请各国有名专家来所讲学和主持讨论会或讨论班.其活动在研究所正式成立之前的1992年初已经开始,当时集中于加拿大有一定优势的控制理论方面,特别是可稳定性、控制和挠性结构设计与机械系统的控制等.国家科学和工程研究理事会为研究所提供除夏季工资以外的研究费用,其中包括旅费、设备及其他非工资的研究经费;安大略省学院与大学部及建所发起学校都给予资助,14所协办大学负责支付来所访问学者的不超过40%的工资.

牛顿数学科学研究所(Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences) 英国剑桥大学的一个国际性研究所.1993年7月建成并正式开始活动,但领导机构早在1990年就组成,它们是管理委员会和科学指导委员会,由阿蒂亚(Atiyah, M. F.)任首任所长,另设专职副所长一名.管理委员会负责实施研究工作的各项活动、出版研究成果、对外联络及其他行政事务;科学指导委员会负责确定科学政策,制定研究计划.研究活动涉及数学的各分支,包括纯粹数学、统计、数值方法、应用数学、理论物理、数理经济、理论计算机和数理生物学等.其目的是通过组织系列专题计划促进这些领域的研究,把英国各大学的数学家和国外有名专家邀集到一起研究有关专门课题,并通过讲座、专题讨论会交流思想,并通过非正式接触扩大影响.研究所主要是按专题计划接受访问学者,进行研究工作.研究所同时安排两个专题计划(6个月左右),每年安排4个专题.所里的来访学者通常保持20人到25人,停留时间为2周至6个月不等,与相应的专题计划保持一致.每一专题计划都包含系列讲座、专题讨论会、讨论班和研究生课程等,并由3—4位专家主持.如所涉及的学科是英国较强的领域,则由本国专家主持,否则邀请外国专家主持.第一年的4个计划的主题分别为"低维拓扑与量子域理论"、"动力理论"、"L函数与算术"、"流行病模型".怀尔斯(Wiles, A.)于1993年6月在此第一次宣布了他在费马大定理研究方面的进展.研究所除专题计划外,还组织适合更多人兴趣的讲座、专题讨论会或演讲会等.所内研究人员除了使用本所的图书馆外,还可自由使用剑桥大学中心图书馆和有关系的图书馆.剑桥大学圣约翰学院和三一学院为研究所提供了启动经费.此外,研究所还获得了剑桥其他学院以及伦敦数学会、科学与工程研究委员会、物理学会等的资助.美国、法国、日本的有关方面则为各自本国研究人员到牛顿数学科学研究所工作提供资助.研究所开始活动的第一年度(1992—1993)中,接受访问人员共200多人,其中大多数来自世界各国.

撰　稿　马国选　马忠林　任南衡　杨春宏　张奠宙　郭刘龙
审　阅　任南衡　李福安　张奠宙

数学竞赛与数学奖

数学竞赛

数学竞赛(mathematical competition) 以解答数学问题为比赛内容的一种业余的学术活动,是一种高水平的智力竞赛.因其与体育竞赛有同样的精神和许多相似之处,所以也称为"数学奥林匹克".历史上,最早的数学竞赛是意大利的两位数学家塔尔塔利亚(Tartaglia,N.)和菲奥尔(Fior,A.M.)之间于1535年进行的:两人各给对方出30道解三次方程的问题,解得最多最快者为优胜者.现代数学竞赛主要在学生(尤其是中学生)之间进行.最早举办中学生数学竞赛的国家是匈牙利,自1894年开始,到今已有百余年的历史.现在,中学生数学竞赛已盛行于很多国家,根据参加对象的不同,可分"小学数学竞赛"、"初中数学竞赛"、"高中数学竞赛"及"大学数学竞赛"等类型.例如,中国举办的"小学数学奥林匹克"是由小学生参加的数学竞赛;美国举办的"普特南数学竞赛"是由大学生参加的数学竞赛.根据举办单位和参加范围的不同,又有学校内部的数学竞赛、地区(如省、市)数学竞赛、国家数学竞赛以及最高级别的国际数学奥林匹克(IMO)等级别.数学竞赛的主要目的是发现和培养数学人才.同时它对于提高学生的数学学习兴趣、推动数学课外活动的开展,对于提高数学教学质量,促进数学教学改革,都有着重要的意义.因此,数学竞赛教育和奥林匹克数学的研究,已经成为现代数学教育的一个重要组成部分,受到数学教育界的普遍重视.

东欧的数学竞赛(East European mathematical competition) 现代的数学竞赛起源于东欧,约有百余年的历史.最早举办中学数学竞赛的国家是匈牙利.从1894年匈牙利物理-数学协会通过举办中学生数学竞赛的决议起,除了因两次世界大战和1956年因故暂停间断了7年外,每年10月都举行这种竞赛.该项竞赛每次有3道试题,限4小时完成.匈牙利数学竞赛发现和培育了许多优秀数学人才,历届数学竞赛的优胜者中,有的后来成为世界著名数学家.例如1897年的优胜者费耶尔(Fejer,L.)(被誉为匈牙利现代数学之父),1898年的优胜者卡门(Kármán,T. von)(现代航天动力学奠基人),1903年的优胜者哈尔(Haar,A.)(哈尔测度创建者),1904年的优胜者里斯(Riesz,F.)(对泛函分析有重大贡献),1912年的优胜者塞格(Szegö,G.)等.数学竞赛对匈牙利的数学发展起了重大推动作用,它使得匈牙利成为20世纪的一个数学大国.其他一些东欧国家开展数学竞赛的活动也较早.罗马尼亚于1902年,波兰和保加利亚于1949年,捷克于1951年,民主德国于1961年分别开始组织中学生数学竞赛.罗马尼亚还是国际数学奥林匹克的发起国.这些国家的竞赛成绩也较好,其中罗马尼亚、德国、保加利亚等的代表队均属世界强队.

俄国的数学竞赛(Russian mathematical competition) 本文主要介绍苏联时期的数学竞赛.苏联是数学大国,其代表队是国际数学竞赛中的强队.苏联首先把数学竞赛命名为数学奥林匹克,从而使数学竞赛与体育竞赛相提并论,并与数学科学的发源地之一的古希腊联系在一起.苏联早在1934年和1935年就分别在列宁格勒和莫斯科举办了地区性的中学生数学奥林匹克.1960年到1970年的10年里,苏联开展了大量的数学竞赛活动,首先设立了国家数学奥林匹克,1961年开始举办全俄中学生数学竞赛,1962年开始举办全苏中学生数学奥林匹克.苏联的数学竞赛是分层次、分年级进行的,试题分为第一试和第二试,并按七、八、九、十年级分别进行.全苏数学奥林匹克每届分两天进行,每天解答4道题,是苏联最高级别的全国竞赛.苏联的数学奥林匹克有五轮比赛:

1. 学校数学竞赛,大多数学生参加;
2. 县城数学竞赛,约10万人参加;
3. 地区数学竞赛,有1万人参加;
4. 共和国数学竞赛,有1千人参加;
5. 全苏数学竞赛,有165人参加.

这种制度使数学竞赛成为广大中学生参加的群众性数学普及活动.为了培养优秀的数学人才和提高参与国际数学竞赛的水平,苏联还在莫斯科、列宁格勒等地建立了六所物理-数学寄宿学校.

美国的数学竞赛(American mathematical competition) 美国举办中学生数学竞赛较晚,1950年才举办了第一届高中数学竞赛,迟至1974年才开始参加国际数学竞赛.但美国代表队是数学竞赛中实力雄厚的强队,其团体总分经常名列前茅.美国的数学竞赛活动很普及,有众多的地方性数学竞赛和不同层次的全国性数学竞赛:

1. 美国中学数学竞赛(AHSME).自1950年起,至今已举办了48届.其初期仅限于在纽约地区进行,1957年发展成为全国性竞赛,现已发展成为

国际性比赛.除美国之外,还有加拿大、英国、爱尔兰、澳大利亚、意大利、比利时等多国参加. 1983 年起,中国的北京市和上海市也参加了该项比赛. 1985 年参加该项竞赛的中学生超过了 38 万.该项竞赛的特点是试题完全以标准的中学课程为基础,面向中学的几种不同水平的学生.试题全部采用选择题的形式,30 道题,满分为 150 分,要求在 90 分钟内完成.该项竞赛不是专门为高水平学生而设立的,一般学生也能参加,但要取得满分却不容易.凡成绩超过 100 分的学生可载入光荣册,大学数学专业可根据光荣册选录学生.

2. 美国数学邀请赛(AIME). 1983 年至今已举办了 15 届美国数学邀请赛.凡在美国中学数学竞赛中得分超过 100 分的学生,将被邀请参赛,其优胜者将获得参加美国最高级别数学奥林匹克的资格.邀请赛共有 15 道填充题,每题 1 分,满分为 15 分,要求在 3 小时内完成.其试题每题的答案均为不超出 999 的正整数,试题内容广泛,新颖别致.

3. 美国数学奥林匹克(USAMO). 从 1972 年起,至今已举办了 26 届美国数学奥林匹克.它是美国最高级别的数学竞赛,并且在国际上有一定影响.凡是在美国数学邀请赛中得分超过 8 分的学生均可参加.竞赛有 5 道试题,要求在 3.5 小时内完成.对成绩最好的前 8 名优胜者授予荣誉称号,并颁发银盘和奖金.同时,由这些优胜者组成美国数学奥林匹克代表队,进行为期三周的参加国际数学奥林匹克的赛前集训.

4. 美国初中数学竞赛(AJHSME). 自 1985 年起,至今已举办 13 届.该项竞赛由七年级和八年级的学生参加.试题为 25 道选择题,要求在 40 分钟内完成.美国、加拿大等国的 10 余万初中学生参加该项竞赛.

5. 普特南数学竞赛. 1938 年由美国数学协会设立,是美国举办最早的一种大学生数学竞赛.美国和加拿大数百所大学的数千名学生参加该项竞赛.

中国的数学竞赛(Chinese mathematial competition) 中国的数学竞赛活动起步较晚.自 1956 年在北京、上海、天津、武汉四市开始举办中学生数学竞赛起,现已发展成为规模大、层次完备的一项群众性的数学竞赛活动.中国数学竞赛的发展历史可分为三个时期:

第一时期(1956—1965)是中国数学竞赛的初创阶段,其特点是竞赛仅在一些较大的城市开展. 1956 年,中国数学会决定在北京、上海、天津、武汉四市举办首届数学竞赛.著名数学家华罗庚担任了竞赛委员会主席,并主持了命题工作.当年,北京有 62 所中学 622 名高三学生参加了竞赛. 1957 年,以上四市又举行了第二届数学竞赛,各地的著名数学家主持了竞赛工作,并向中学生作了数学报告.这些数学竞赛活动取得了很好的效果.此后,北京市在中断了 4 年之后,于 1962、1963、1964 年又举行了 3 届数学竞赛.竞赛在高二和高三两个年级分两试进行.第一试要求在 1 小时内解答 4 个题或 5 个题,侧重于考查学生的基础知识和演算速度;第二试要求在 2 小时内解答 4 个题,侧重于考查学生的思维能力和灵活性.此后,中国各地,如哈尔滨、西安、成都、南京等城市先后举办的数学竞赛,均采用了这个模式.

1966 年至 1977 年,中国的数学竞赛中断了 13 年.

第二时期(1978—1985)是中国数学竞赛的普及阶段,其特点是开展了全国性的数学竞赛,并增设了初中数学竞赛. 1978 年和 1979 年,国家教育部和中国科协联合举办了全国中学生数学竞赛,并由城市竞赛发展成为全国竞赛,各省、市的数学竞赛活动也随之迅速开展起来. 1978 年的首届全国中学生数学竞赛由北京、上海、天津、陕西、安徽、四川、辽宁、广东等 8 省、市共 350 名学生代表参加.这些学生代表是通过以上 8 省、市各级预赛,从 20 多万参赛高中学生中层层选拔产生的.首届全国数学竞赛的 57 名优胜者全部免试升入了重点大学. 1979 年举办了第二届全国中学生数学竞赛,29 个省、市、自治区参加了此次竞赛.赛前各省、市、自治区都举行了从县(区)到地、市的逐级选拔赛.这些活动虽然使竞赛活动普及到县(区)基层,但也明显地加重了学生的学习负担.鉴于此,国家教育部决定暂停全国数学竞赛.为了使数学竞赛活动健康地发展,并为参加国际数学奥林匹克做准备,中国数学会普及工作委员会在 1980 年的大连会议上,确立了改革全国竞赛的三项原则:

1. 民办公助.全国竞赛由中国数学会及参加的省、市联办,由教育行政部门及科协资助.

2. 自愿参加.不搞层层选拔,不组织代表队.

3. 精简节约,以精神奖励为主.

这样,在中国数学会普及工作委员会的组织领导下,于 1981 年举行了有 25 个省、市、自治区参加的全国联合高中数学竞赛.现在,全国 31 个省、市、自治区(除台湾省外)全部参加了此项联赛. 1985 年,中国数学会又举办了首届全国初中数学竞赛.此项竞赛对推动初中数学课外活动,促进初中数学教学质量的提高和及早发现人才都起到了积极作用.

第三时期(1986—1995)是中国数学竞赛的提高阶段,其特点是参加了国际上的数学竞赛,并取得了优异成绩. 1985 年,中国首次派出两名学生非正式地参加了第 26 届国际数学奥林匹克(IMO),成绩一般.为了在第 27 届 IMO 中取得好成绩,1986 年 1 月,在南开大学举办了首届全国中学生数学冬令营.

全国高中联赛中的76名优胜者参加.集训竞赛仿照IMO,分两天进行,每天4.5小时,解答3道题.通过冬令营,选出21名优胜者组成中国数学奥林匹克集训队,由一些著名的数学家担任教练,中国数学会普及工作委员会主任裘宗沪教授任主教练,对集训队员进行了系统的训练,并从中选拔出6名学生组成了中国数学奥林匹克代表队,正式参加国际数学奥林匹克.1987年以后,分别在北京大学、复旦大学和中国科学技术大学等高等学校举办了多届全国中学生数学冬令营,选拔国家集训队队员.通过集训选拔出6名学生组成国家代表队,参加IMO.这种选拔和组队方法延续至今,形成了产生中国代表队的具体方法.中国自1986年正式参赛至1997年为止,在10年的IMO中,共获49枚金牌、18枚银牌和4枚铜牌,7次荣获总分第一名.中国队所以能在短期内成为世界强队之一,其主要原因如下:

1.中国数学会普及工作委员会和奥林匹克委员会在领导和组织数学竞赛工作时,能审时度势,及时指导,正确决策.早在1980年,普及工作委员会就确立了与各省(市)数学会合办数学竞赛的三项原则,解决了中学正常教学与数学竞赛之间的主辅关系,规定了数学竞赛活动属学生课外活动的性质,从而保证了竞赛活动的顺利发展.当国内竞赛活动已有较好的基础后,普及工作委员会适时地于1984年决定加入国际竞赛行列,并确定在1985年先派两名选手参加第26届IMO,以求了解情况,取得经验.然后,从1986年起再由6名选手组队正式参赛.普及工作委员会还及时地制订了公正的和科学的选拔、培训国家代表队的方法和制度.从1986年起每年举办一次全国高中数学冬令营(后改名为中国数学奥林匹克),选拔20余名学生组成中国数学奥林匹克集训队,并聘任若干数学家组成教练组对学生进行集训与测验.根据集训中的表现,最后确定6名学生组成中国代表队.这种选拔制度和集训方法,保证了代表队队员的水准和临考经验.普及工作委员会还建议中国科学技术协会及中国数学会共同组建中国数学奥林匹克委员会.该委员会由一批多年来一直参与命题和训练工作的专家组成,在指导全国联赛、冬令营考试命题及集训队培训方面,起到了重大作用.此外,当国内出现竞赛活动过多,试题过难的偏向后,普及工作委员会又及时地在1990年制订了中国数学竞赛大纲,限定了命题范围,降低国内竞赛试题难度,从而正确地处理了普及与提高的关系,使竞赛活动更加健康地发展.

2.一批数学家积极参与了竞赛活动的组织领导和各种业务工作.著名数学家华罗庚教授是中国数学竞赛活动的发起者,他曾担任数学竞赛委员会主席,主持命题工作,并多次为中学师生作数学的科学普及报告.在华罗庚的影响下,许多数学家开始积极参与此项活动.华罗庚逝世后,王寿仁、王元、梅向明、许以超、裘宗沪等数学家继续了这一工作,领导各级教师,由小到大,由国内到国际,逐步发展了中国的数学奥林匹克事业.在1980年后的10余年中,裘宗沪教授具体组织和领导了中国各级数学竞赛,团结了许多数学家,发动了广大中学数学教师参加各项工作.他主持普及工作委员会及时决策,对中国和国际数学奥林匹克事业做出了卓越的贡献,为此荣获了国家数学竞赛世界联盟颁发的爱尔特希奖.一批经验丰富的大学数学教师参与数学竞赛业务工作,是使竞赛水平迅速提高的决定因素.他们在命题及解题方法方面开展了研究,参与了对国家集训队和代表队的培训工作,逐步创设了数学奥林匹克大学课程和硕士研究生课程,为各地中学教师开设了相应的讲座.有关部门对其中一些专家给予了表彰,如1987年,国家教委等五部委授予常庚哲教授、单墫教授、叶景梅教授、夏兴国教授"全国优秀青少年科技辅导员"称号;1995年,中国数学会奥林匹克委员会评定杜锡录教授、李成章教授为"在数学奥林匹克活动中有突出贡献的专家",并授予首届中国数学奥林匹克奖.

3.中学数学教师在中学课外活动中广泛和主动地开展了数学竞赛工作.中国中学生数学竞赛的初步培训是在各自的中学里完成的.许多中学教师在完成本身教学工作的同时,努力学习新知识,钻研数学奥林匹克业务,利用课余时间培养学生.他们的积极工作使中国数学奥林匹克具备了厚实的基础,保证了国家集训队的充足生源.许多中学十分重视此项活动,不断为中国代表队输送优秀队员,成绩卓著.其中,仅来自北京大学附中、湖北黄岗中学、武钢三中等三所中学的学生,在1986—1995年的10年中,就获得了IMO的20枚奖牌:北京大学附中获5枚金牌,2枚银牌,1枚铜牌;湖北黄岗中学获2枚金牌,5枚银牌,1枚铜牌;武钢三中获3枚金牌,1枚银牌.此外,中国数学奥林匹克委员会还制订了数学奥林匹克教练员等级制度.根据教师参加数学奥林匹克培训的程度,以及开展数学竞赛工作的业绩,分别授予高级、一级和二级教练员的称号.这一制度对于促进中学数学教师学习有关知识,开展竞赛活动,起到了良好的作用.

此外,从1986年起,还举办了"华罗庚金杯少年数学邀请赛",全国有22个市、县的小学高年级和初中一年级学生150万人参加了此项竞赛.1991年又举办了全国小学数学奥林匹克竞赛.至此,中国数学竞赛已形成一套可行的规则,并走上正规化的健康发展道路.

中国选手在国际数学奥林匹克中获奖情况一览表

时间	届次	正、副领队	选手姓名	所在学校	奖牌
1985	26	王寿仁　裘宗沪	吴思皓	上海向明中学	铜牌
1986	27	王寿仁　裘宗沪	方为民	河南实验中学	金牌
			张　浩	上海大同中学	金牌
			李平立	天津南开中学	金牌
			荆　秦(女)	西安八十五中	银牌
			林　强	湖北黄冈中学	铜牌
1987	28	梅向明　裘宗沪	滕　峻(女)	北京大学附中	金牌
			刘　雄	湖南湘阳一中	金牌
			潘子刚	上海向明中学	银牌
			林　强	湖北黄冈中学	银牌
			高　峡	北京大学附中	铜牌
			何建勋	华南师大附中	铜牌
1988	29	常庚哲　舒五昌	何宏宇	四川彭县中学	金牌
			陈　晞	复旦大学附中	金牌
			韦国恒	湖北武钢三中	银牌
			王健梅(女)	天津南开中学	银牌
			查宇涵	南京第十中学	银牌
			邹　钢	江苏镇江一中	银牌
1989	30	马希文　单　墫	罗华章	四川重庆永川中学	金牌
			蒋步星	新疆石河子五中	金牌
			俞　扬	东北师大附中	金牌
			霍晓明	江西景德镇景光中学	金牌
			唐若曦	四川成都树德中学	银牌
			颜华菲(女)	北京人大附中	银牌
1990	31	单　墫　刘鸿坤	汪建华	陕西汉中西乡中学	金牌
			周　彤	湖北武钢三中	金牌
			王　崧	湖北黄冈中学	金牌
			张朝晖	北京四中	金牌
			余嘉联	安徽铜陵一中	金牌
			库　超	湖北黄冈中学	银牌
1991	32	黄玉民　刘鸿坤	罗　炜	哈尔滨师大附中	金牌
			张里钊	北京大学附中	金牌
			王绍昱	北京大学附中	金牌
			王　崧	湖北黄冈中学	金牌
			郭早阳	湖南师大附中	银牌
			刘彤威	北京大学附中	银牌
1992	33	苏　淳　严镇军	沈　凯	南京师大附中	金牌
			杨保中	河南郑州一中	金牌
			罗　炜	哈尔滨师大附中	金牌
			章　宣	四川成都七中	金牌
			何斯迈	安徽安庆一中	金牌
			周　宏	北京大学附中	金牌

时间	届次	正、副领队	选手姓名	所在学校	奖牌
1993	34	杨　路　杜锡录	周　宏 袁汉辉 杨　克 刘　炀 张　镭 冯　炯	北京大学附中 华南师大附中 湖北武钢三中 湖南师大附中 山东青岛二中 上海向明中学	金牌 金牌 金牌 金牌 金牌 金牌
1994	35	黄宣国　夏兴国	姚健钢 张　健 彭建波 王海栋 奚晨海 李　挺	北京人大附中 上海建平中学 湖南师大附中 华东师大二附中 北京大学附中 四川内江市安岳中学	金牌 金牌 金牌 银牌 银牌 银牌
1995	36	张筑生　王　杰	琲　耸 常　成 朱辰畅(女) 王海栋 林逸舟 姚一隽	济南实验中学 哈尔滨师大附中 湖北武钢三中 华东师大二附中 济南实验中学 上海复旦大学附中	金牌 金牌 金牌 金牌 银牌 银牌
1996	37	舒五昌　陈传理	陈华一 阎　君 何旭华 王　烈 蔡凯华 刘　锦	福建省福安一中 北京市二十二中 重庆市十八中 辽宁省沈阳市育才学校 江苏省启东市中学 上海市复旦附中	金牌 金牌 金牌 银牌 银牌 铜牌
1997	38	王　杰　吴建平	邹　瑾 倪　忆 韩嘉睿 孙晓明 安金鹏 郑常津	湖北武钢三中 湖北黄冈中学 广东深圳中学 山东青岛二中 天津一中 福建福安一中	金牌 金牌 金牌 金牌 金牌 金牌
1999	40	王　杰　吴建平	李　鑫 刘若川 程晓龙 瞿振华 孔文斌 朱琪慧	华南师大附中 东北育才中学 湖北武钢三中 上海市延安中学 湖南师大附中 华南师大附中	金牌 金牌 金牌 金牌 银牌 银牌
2000	41	王　杰　陈永高	恽之玮 刘志鹏 李　鑫 朱琪慧 袁新意 吴忠涛	江苏常州高级中学 湖北长沙一中 华南师大附中 华南师大附中 湖北黄冈中学 上海中学	金牌 金牌 金牌 金牌 金牌 金牌

国际数学奥林匹克(International Mathematical Olympiad)　简称IMO，是国际上举行的级别最高、水平最高的中学生数学竞赛.它的发起国是罗马尼亚.1959年7月，第1届国际数学奥林匹克在罗马尼亚古都布拉索举行，共有东欧6个国家派出代表队(每队8名队员)参赛，此外苏联也派出了4名选手.此后，除了1980年因东道国蒙古经济困难而停办一次外，IMO每年举办一次，到1997年共举办了38届.自1967年起，参赛国逐渐增多，先后有英国、法国、意大利、瑞典等国家派队参赛.20世纪70年代起，又有古巴、美国、加拿大、澳大利亚、越南、土耳其等国派队参赛.到1997年的第38届，参赛的国家(地区)代表队达82个，参赛学生达460余名.各国(地区)代表队的人数最初为每队8人，从1983年起改为6人.竞赛地点轮流设在各参加国(地区).按照逐渐形成的惯例.

国际数学奥林匹克在每年7月中旬的两个上午举行.每次4.5小时，完成3道题，每题7分，满分为42分.对成绩优秀的个人授予一等奖(金牌)、二等奖(银牌)和三等奖(铜牌).此外，还设有特别奖，授予那些对某一道题有独特解法的学生.规定得奖总人数不超过参赛人数的50%，而一、二、三等奖的人数比例为1∶2∶3.

国际数学奥林匹克以英、法、德、俄四种语言为官方语言.由于IMO的试题是由各个不同文化背景的国家提供的，又都是数学专家学者命题的，因而取材广泛，题型新颖，解法独特，技巧性强.这些试题不少是训练数学思维、发展智力、培养创新和探索能力的好题目.这种试题所代表的是一种特殊的数学，称为奥林匹克数学，它包含了微积分前的数学.试题的难度不在于解题所需要的数学知识的多少，而在于是否具有创造力和数学的机智.

国际数学奥林匹克的开展对数学人才的发现和数学事业的发展起了积极的促进作用.很多IMO优胜者后来从事了数学工作，成为著名数学家.例如，在世界数学家大会上作过1小时邀请报告的数学家中，至少有8人是IMO优胜者；在获得数学菲尔兹奖的数学家中，也有1人是IMO的优胜者.

历届IMO都是由国际数学奥林匹克场所委员会确定主办国，由主办国组成IMO组织委员会管理本届竞赛.中国数学会向场所委员会申请并被批准主办了第31届IMO，该届赛事于1990年7月在中国北京举行.李铁映(前中华人民共和国国务委员、国家教委主任)任组织委员会主任，王元(前中国数学会理事长，中国科学院数学研究所所长)、柳斌(国家教委副主任)、陆禹澄(北京市副市长)、曹令中(中国科学技术协会书记处书记)、王仁(国家自然科学基金委员会副主任)任副主任，王寿仁(中国数学奥林匹克委员会主席)任秘书长，裘宗沪(中国数学会普及工作委员会主任，中国数学奥林匹克委员会秘书长)任常务副秘书长.

组织委员会下设国际数学奥林匹克主试委员会(国际评审委员会)，有关竞赛的任何重大问题必须经主试委员会表决通过后才能施行.主试委员会由一位主席(由东道国的数学家担任)、副主席及参赛的各代表队领队组成.经主席同意，副领队、观察员、协调员和主席的助手也可以参加主试委员会会议，并享有发言权.领队缺席时，可以由副领队代替出席会议，并代表领队参加投票.主试委员会的职责如下：

1.选定试题.主试委员会对选题委员会所提供的20—30道备选题进行充分的讨论和磋商，最后以无记名投票方式从中确定6道(正式)试题.

2.确定每道题的正确解答及评分标准.审定使用英、法、德、俄四种文字准确地表达的试题，再由各国领队、副领队将其翻译成本国文字.

3.确定对于学生在竞赛时用书面提出的有关试题的疑问的答复范围和界限.

4.解决个别领队与协调员之间关于评分的不同意见.

5.决定一、二、三等奖的分配，并决定特别奖的颁授.

在开会期间，主席与领队都有一票表决权.当赞成票与反对票票数相等时，主席的票有决定权.

主试委员会可以下设若干特别委员会，来解决特殊问题.常设的有“选题委员会”和“协调委员会”，按照国际数学奥林匹克章程规定，每个参赛国应于每年4月15日前向竞赛组织者(东道国)送交用数学奥林匹克官方语言写就的3—5道附带题解的试题.东道国不出题，但要委派数学专家组成选题委员会，负责试题的评议、挑选与修改工作.对那些条件过严，甚至是错误的候选题，以及解法有误，或解法并非最佳的候选试题进行补充或纠正.选题委员会首先把推荐试题按代数、数论、几何、组合数学等学科进行分类，然后由易到难按A,B,C三级划分这些试题的难度，再从中精选出20—30道题作为备选试题，并提出几种能构成正式试卷的6个试题的方案，译成英文供主试委员会选用.

协调委员会全部由东道国数学家组成，其主要职责是负责试卷的评分工作.一般由1名主任委员，6名以上常务委员及多名协调员组成，并分为6个组进行工作，每组在一名常务委员的领导下核实一道试题的评分.考生的试卷先由考生所属代表队的正、副领队评分，然后与东道国的协调员协商，取得一致意见后，方可确定该考生的得分.当分歧不能消除时，可提请主试委员会仲裁.

历届国际数学奥林匹克情况一览表

时间	届次	主办国或地区	参赛代表队数	团体总分			
				一	二	三	四
1959	1	罗马尼亚	7	罗马尼亚	匈牙利	捷克	保加利亚
1960	2	罗马尼亚	5	捷克	匈牙利	罗马尼亚	保加利亚
1961	3	匈牙利	6	匈牙利	波兰	罗马尼亚	捷克
1962	4	捷克	7	匈牙利	苏联	罗马尼亚	波兰
1963	5	波兰	8	苏联	匈牙利	罗马尼亚	南斯拉夫
1964	6	苏联	9	苏联	匈牙利	罗马尼亚	波兰
1965	7	民主德国	10	苏联	匈牙利	罗马尼亚	波兰
1966	8	保加利亚	9	苏联	匈牙利	民主德国	波兰
1967	9	南斯拉夫	13	苏联	民主德国	匈牙利	英国
1968	10	苏联	12	民主德国	苏联	匈牙利	英国
1969	11	罗马尼亚	14	匈牙利	民主德国	苏联	罗马尼亚
1970	12	匈牙利	14	匈牙利	民主德国	苏联	南斯拉夫
1971	13	捷克	15	匈牙利	苏联	民主德国	波兰
1972	14	波兰	14	苏联	匈牙利	民主德国	罗马尼亚
1973	15	苏联	16	苏联	匈牙利	民主德国	波兰
1974	16	民主德国	18	苏联	美国	匈牙利	民主德国
1975	17	保加利亚	17	匈牙利	民主德国	美国	苏联
1976	18	奥地利	19	苏联	英国	美国	保加利亚
1977	19	南斯拉夫	21	美国	苏联	英国	匈牙利
1978	20	罗马尼亚	17	罗马尼亚	美国	英国	越南
1979	21	英国	23	苏联	罗马尼亚	联邦德国	英国
1981	22	美国	27	美国	联邦德国	英国	奥地利
1982	23	匈牙利	30	联邦德国	苏联	民主德国 美　国	
1983	24	法国	32	联邦德国	美国	匈牙利	苏联
1984	25	捷克	34	苏联	保加利亚	罗马尼亚	匈牙利 美　国
1985	26	芬兰	38	罗马尼亚	美国	匈牙利	保加利亚
1986	27	波兰	37	美国 苏联		联邦德国	中国
1987	28	古巴	42	罗马尼亚	联邦德国	苏联	民主德国
1988	29	澳大利亚	49	苏联	中　国 罗马尼亚		联邦德国
1989	30	西德	50	中国	罗马尼亚	苏联	民主德国
1990	31	中国	54	中国	苏联	美国	罗马尼亚
1991	32	瑞典	56	苏联	中国	罗马尼亚	德国
1992	33	俄罗斯	60	中国	德国	保加利亚	俄罗斯

时间	届次	主办国或地区	参赛代表队数	团体总分			
				一	二	三	四
1993	34	土耳其	73	中国	德国	保加利亚	俄罗斯
1994	35	中国香港	69	美国	中国	俄罗斯	保加利亚
1995	36	加拿大	73	中国	罗马尼亚	俄罗斯	越南
1996	37	印度	75	罗马尼亚	美国	匈牙利	俄罗斯
1997	38	阿根廷	82	中国	匈牙利	伊朗	美国
1998	39	中国台北		中国未参加			
1999	40	罗马尼亚	81	中国 俄罗斯		越南	罗马尼亚
2000	41	韩国大田	82	中国	匈牙利	伊朗	美国

数 学 奖

数学奖(Awards and Prizes in Mathematics) 数学奖是对某项或几项数学研究成果的一种肯定形式,是对数学研究人员为获奖成果所付出的劳动的奖励.现在国际上所设数学奖项繁多,其中有专门为奖励数学科学中优秀成果而设的,如“菲尔兹奖章”以及各国数学会所设立的奖;也有奖励包含数学科学在内的几个学科或综合性的奖项,如沃尔夫奖和各国科学院或基金会设立的奖.中国在20世纪50年代设立了“国家自然科学奖”,20世纪80年代又设立了“科技进步奖”.自20世纪80年代以来中国数学会也已相继设立了数个数学奖.国际上的数学奖或与数学有关的奖项,只能择有资可查者介绍;国内的除“科技进步奖”外,到1995年为止已是全国性又与数学科学有关的奖项则全部收入.下面共介绍了中外数学及相关的奖项85种.

诺贝尔奖中没有数学奖,但不等于诺贝尔奖与数学家无缘,特别是一些研究数理经济、研究博弈论的数学家已有多人获得了诺贝尔经济奖.人们之所以也把诺贝尔经济奖收入数学奖,并一起介绍了诺贝尔奖,并非是为了充数,而是想说明数学在现实世界中的应用,确实很广.

皇家学会科普利奖章(Copley Medal of the Royal Society) 伦敦皇家学会颁奖.1731年由英国爵士戈德弗雷·科普利(Copley)捐资设立的镀金银质奖章.奖励科学与技术领域的杰出研究工作.该奖章是皇家学会最有声望的奖项之一,时有英国数学家被授予此奖章,如阿蒂亚(Atiyah,M. F.)曾于1988年获此奖章.颁奖当年是皇家学会理事者不能受奖.每年颁奖一次.

科学大奖(Grand Prix Des Sciences) 亦称“Prix Fonde Par L'Etat”,法兰西学院颁奖.1795年由国会设立,并列入国家预算.奖励数学与物理及其应用方面的突出工作,或奖励化学、自然科学、生物学与医学科学及其应用方面的突出工作.在不同年份颁发数学与物理学大奖和化学与自然科学大奖,故此奖实是两个大奖的总称,每年颁奖.

彭赛列特奖(Prix Poncelet) 法兰西学院授奖.1868年设立,奖励对纯粹数学与应用数学的发展有极大促进作用的著作的作者,满足此条件者不论是法国人还是外国人,都可获奖.它轮流由数学委员会和力学委员会授奖,每三年颁奖一次.

弗朗科尔奖(Prix Francoeur) 法兰西学院授奖.1882年设立,奖励对促进纯粹数学与应用数学发展有重要作用的著作的青年作者.每五年颁奖一次.

诺贝尔奖(Nobel Prizes) 瑞典皇家科学院授奖.国际上最著名的奖.现有的六个奖中的五个是按诺贝尔(Nobel,A. B.)的意愿设立的.他把其在化工方面的发明所获的财产建立了一个基金,每年把利息分成五等份奖励在物理科学中有重大发现或发明的人、在化学领域有重要发现或改进的人、在生物学或医学领域有重大发现的人、在文学领域中其作品的理想主义倾向方面做出杰出工作的人、在为废除或减少军队和为举行或促进和平会议而建立各国兄弟关系方面做出杰出贡献的人.一般称为诺贝尔物理奖、诺贝尔化学奖、诺贝尔生物学或医学奖、诺贝尔文学奖、诺贝尔和平奖.1968年,瑞士中央银行捐资设立了第六个奖——诺贝尔经济科学纪念奖,简称诺贝尔经济奖.该奖在诺贝尔去世日和诺贝尔基金会成立纪念日,即每年12月10日颁发.和平奖在挪威首都奥斯陆颁发,其余奖项在瑞典首都斯德哥尔摩颁发.此奖包括一枚金质奖章、奖金和证书.自1969年颁发经济奖以来,已有数名数学家获此奖.

获诺贝尔经济奖的数学家名单:

1972年,阿鲁(美国)(Arrow,Kenneth Joseph,

1921—)因“一般经济平衡理论和福利理论”获奖.

1975 年,坎托罗维奇(苏联)(Канторович, Леонид Витальевич, 1912—1986)、库普曼(美国)(Koopmans,T. C. 1910—1985)两人“因资源最佳分配理论”而分享该年经济奖.

1978 年,西蒙(美国)(Simon,Herbert Alexander,1916—)因“经济组织内决策过程研究”获奖.

1980 年,克莱因(美国)(Klein,Lawrence Robert,1920—)因“创建了经济模型并把其应用到经济波动与经济政策分析”而获奖.

1983 年,特布罗(法国-美国)(Debreu,Gerard,1921—)因“一般平衡理论和在抽象经济学中存在一般平衡的条件”而获奖.

1994 年,纳什(美国)(Nash,John F. 1928—)因“非合作博弈理论”获奖.

罗巴切夫斯基奖(Lobachevsky Prize) 1895 年,喀山数学物理学会为纪念俄国数学家、非欧几何创始人罗巴切夫斯基(Лобачевский, Н. И.)诞生 100 周年而设立,奖励对数学,特别是几何学的发展做出重大贡献的数学家. 1897 年首次颁奖. 1950 年起到苏联解体,由苏联科学院颁奖. 现由俄罗斯科学院颁奖.

历次获奖者见下面附表:

罗巴切夫斯基奖获奖者名单

年 份	获 奖 者	主 要 贡 献
1897	李(挪威) (Lie,Marius Sophus,1842—1899)	群论在罗氏几何论证中的应用.
1900	基灵(德国) (Killing,Wilhelm Karl Joseph,1847—1923)	非欧几何和连续群理论.
1904	希尔伯特(德国) (Hilbert,David,1862—1943)	几何方面的重大成就.
1912	舒尔(德国) (Schur,Friedrich Heinrich,1856—1932)	名著《几何基础》.
	施勒辛格尔(德国) (Schlesinger,Ludwig,1864—1933)	几何方面的重要工作.
1927	外尔(德国) (Weyl,Claude Hugo Hermann,1885—1955)	非完全空间几何方面的工作.
1937	嘉当(法国) (Cartan,Élie-Joseph,1869—1952)	几何方面的重要工作.
	瓦格涅(苏联) (Vagner,Viktor Vladimirovich,1908—1981)	非完全空间几何方面的工作.
1951	叶非莫夫(苏联) (Efimov,Nikolai Vladimirovich,1910—1982)	专著《曲面“小范围”变形理论的定性问题》等.
	亚历山德罗夫(苏联). (Александров,Александр Данилович,1912—)	专著《凸曲面内蕴几何学》.
1959	波戈列洛夫(苏联) (Погорелов,Алексей Васильевич,1913—)	专著《黎曼空间的某些“整体”几何问题》.
1966	庞特里亚金(苏联) (Понтрягин,Лев Семёнович,1908—1988)	微分流形方面的一系列工作.
1969	霍普夫(德国) (Hopf,Heinz,1894—1971)	微分几何与同伦拓扑方面工作.
1972	亚历山德罗夫(苏联) (Александров,Павел Сергеевич,1896—1982)	维数的几何理论.
1977	杰龙涅(苏联) (Делоне,Борис Никопаевич,1890—1980)	《正则划分与格覆盖理论》.
	诺维科夫(苏联) (Новиков,Сергей Петрович,1938—)	分层理论.

年 份	获 奖 者	主 要 贡 献
1984	布斯曼(美国) (Busemann,Herbert,1905—)	专著《测地线几何学》.
1986	柯尔莫哥洛夫(苏联) (Колмогоров,Андрей Николаевич,1903—1987)	《上同调理论基础》.
1989	希策布鲁赫(德国) (Hirzebruch,Friedrich Ernst Peter,1927—)	专著《代数几何中的拓扑学方法》.

贝尔特奖(Prix Berthe) 法兰西学院授奖. 1895年设立. 奖励在数学与物理学及其应用方面的突出贡献,或奖励化学与自然科学、生物学与医学及其在应用方面的成果. 该奖轮流授予数学与物理学以及化学与自然科学、生物学与医学,主要奖励青年科学家. 每6年授奖一次.

西尔维斯特奖章(Sylvester Medal) 伦敦皇家学会颁奖. 1901年为纪念皇家学会会员、著名英国数学家西尔维斯特(Sylvester,J. J.)教授而设立. 奖励并通过设此奖章鼓励数学研究. 每3年颁发一次奖章.

拉格朗日奖(Prix Lagrange) 比利时皇家科学院颁奖. 1904年设立. 奖励对世界数学知识的发展有贡献的杰出的数学工作或实验工作. 符合条件的比利时人或外国人都可获奖. 每4年颁奖一次.

法兰西斯·德鲁茨奖(Prix Francois Deruyts) 比利时皇家科学院颁奖. 1906年设立. 奖励在综合几何或解析几何方面做出贡献的一位或多位学者,获奖者应是比利时研究人员. 每4年颁奖一次.

赫克托纪念章与奖(Hector Memorial Medal and Prize) 新西兰皇家学会颁奖. 新西兰皇家学会的前身新西兰学会赫克托基金会为纪念赫克托(Hector,J.)爵士(伦敦皇家学会会员、新西兰学会第二任主席)而于1910年设立. 轮流奖励植物学、化学、人类学、地学、数学、物理与工程学、动物学各学科的重要成果和成就,获奖工作必须在新西兰完成. 1912年首次颁奖,此后1年一次,从未间断.

博歇纪念奖(Bôcher Memorial Prize) 美国数学会颁奖. 为纪念博歇(Bôcher,M.)教授而设立. 每5年颁奖一次,奖励过去5年内在分析领域中值得注意的一篇研究论文. 获奖者应是美国数学会会员,1971年放宽到"或者发表在北美一家得到承认的杂志上的研究论文". 1923年首次颁奖. 到1994年为止已颁奖16次,共颁17个奖,获奖人数20人.

菲尔兹奖章(Fields Medals) 现由国际数学联盟在每4年举行一次的国际数学家大会上授奖. 获奖人选由国际数学联盟的专门工作小组审定. 1924年在加拿大举行的国际数学家大会上,根据本次大会的秘书长、加拿大数学家菲尔兹(Fields,J. C.)教授的提议决定,每届国际数学家大会颁发两枚金质奖章,奖励突出的数学成果. 用1924年国际数学家大会的结余经费和菲尔兹教授后来捐赠的部分经费建立了此奖,故以其姓命名. 按照菲尔兹教授的愿望,此奖既奖励已有的工作,也承认对未来成就有促进作用的工作. 1936年首次颁奖,1952年国际数学联盟成立后,由联盟颁奖. 后因数学研究内容的扩展,1966年决定从该年开始,每届可颁发最多达4枚奖章. 历届获奖者见下面附表:

菲尔兹奖获得者及其主要工作

年 份	获 奖 者	主要工作领域
1936	阿尔福斯(芬兰-美国) (Ahlfors,Lars Valerian,1907—)	复分析.
	道格拉斯(美国) (Douglas,Jesse,1897—1965)	极小曲面,变分问题的逆问题.
1950	施瓦尔茨(法国) (Scbwartz,Laurent,1915—)	广义函数论,泛函分析,概率论,偏微分方程.
	赛尔伯格(挪威-美国) (Selberg,Atle,1917—)	解析数论,抽象调和分析与不连续群,连续群的离散子群.
1954	小平邦彦(日本) (1915—1997)	代数几何,复流形.
	塞尔(法国) (Serre,Jean Pierre,1926—)	代数拓扑,代数几何,数论,多复变函数.

年份	获 奖 者	主要工作领域
1958	罗特(德-英) (Roth,Klaus Friedrich,1925—)	解析数论.
	托姆(法国) (Thom,René,1923—)	代数与微分拓扑,突变理论、奇点理论.
1962	赫尔曼德尔(瑞典) (Hörmander,Lars Valter,1931—)	偏微分方程理论,伪微分算子理论.
	米尔诺(美国) (Milnor,John Willard,1931—)	微分拓扑与代数拓扑,代数数论.
1966	阿蒂亚(英国) (Atiyah,Mickael,Francis,1929—)	代数拓扑,代数几何,李群表示论.
	科恩(美国) (Cohen,Paul Joseph,1934—)	公理集合论,抽象调和分析.
	格罗腾迪克(法国) (Grothendieck,Alexandre,1928—)	代数几何,泛函分析,同调代数.
	斯梅尔(美国) (Smale,Stephen,1930—)	微分拓扑,微分动力系统,数理经济学.
1970	贝克(英国) (Baker,Alan,1939—)	解析数论.
	广中平祐(日本) (1931—)	代数几何,奇点理论.
	诺维科夫(苏联) (Новиков,Сергей Петрович,1938—)	代数拓扑与微分拓扑,代数 K 理论,孤立子理论.
	汤普森(美国) (Thompson,John Griggs,1932—)	有限群论.
1974	邦别里(意大利) (Bombieri,Enrico,1940—)	解析数论,偏微分方程,代数几何,有限群论,复分析.
	芒福德(美国) (Mumford,David Bryant,1937—)	代数几何.
1978	德利涅(比利时) (Deligne,Pierre,1944—)	代数几何,代数数论,调和分析,多复变函数.
	费弗曼(美国) (Fefferman,Charles,1949—)	调和分析,多复变函数.
	马尔库利斯(苏联) (Маргулис,Григорий A.,1946—)	李群的离散子群.
	奎伦(美国) (Quillen,Daniel Gray,1940--)	代数拓扑,代数 K 理论,同调代数.
1982	孔涅(法国) (Connes,Alan,1947—)	算子代数.
	瑟斯顿(美国) (Thurston,William P.,1946—)	几何拓扑,叶状结构.
	丘成桐(中国-美国) (1949—)	微分几何,偏微分方程,相对论.
1986	弗里德曼(美国) (Freedman,Michael,(H.)1951—)	微分拓扑,偏微分方程,相对论.
	唐纳森(英国) (Donaldson,Simon Kirwan,1957—)	微分拓扑.
	法尔廷斯(德国) (Faltings,Gerd,1954—)	不定方程,代数几何.

年 份	获 奖 者	主要工作领域
1990	德里费尔德(苏联) (Drinfeld, Vladimir, G. 1954—)	类域理论,量子群,霍普夫代数.
	沃恩(新西兰) (Vaughan, F. R. Jones, 1953—)	扭结理论.
	森重文(日本) (Mori, S. 1951—)	代数几何,奇点理论.
	威滕(美国) (Witten, Edward, 1951—)	弦理论.
1994	布尔根(法国) (Bourgain Jean, 1954—)	分析,解析数论,非线性偏微分方程,数学物理.
	利翁(法国) (Lions, Pierre-Louis, 1956—)	非线性偏微分方程,数学物理.
	约科(法国) (Yoccoz, Jean-Cheistophe, 1956—)	动力系统理论.
	泽尔马诺夫(俄-美国) (Zelmanov, Efim I., 1955—)	群伦,李代数.
1998	博　德(英国) (Borcherds, Richard Even, 1959—)	代数,几何.
	康特塞维奇(俄国) (Kontsevich, Maxim, 1964—)	纯粹数学和理论物理.
	高尔(英国) (Gowers, William, Timothy, 1963—)	函数论,组合论.
	麦克缪伦(英国) (McMullen, Curtis, T. 1958—)	混沌理论.

查文尼特奖(Chauvenet Prize)　美国数学协会颁奖. 1925 年首次颁奖. 主要奖励协会会员感兴趣的重要阐述性或综述性文章,文章必须用英文发表. 开始每 3 年颁奖一次,1963 年开始每年颁奖.

科尔代数奖　科尔数论奖(Cole Prize in Algebra　Cole Prize in Number Theory)　美国数学会颁奖. 当科尔(Cole, F. N.)教授在担任了 21 年《通报》主编和 25 年美国数学会秘书长后退休时,为向他表示敬意而设立. 原来的经费由科尔教授捐赠,后来其子又加赠了资金. 每隔 5 年分别颁奖,奖励在代数和数论领域的贡献. 代数奖与数论奖不同时颁发,而每种奖前后两次颁奖时间相隔 5 年. 获奖者应是美国数学会会员. 1928 年首次颁奖,到 1995 年为止已颁奖 25 次,获奖人 36 名.

卡蒂奖章(Carty Medal)　美国全国科学院颁奖. 1930 年,当卡蒂(Carty, J. J.)从美国电话电报公司副总裁职位退休时建立. 奖励学术领域中各学科做出杰出成就的人. 此奖包括一枚青铜奖章和奖金. 每 3 年颁奖一次,每次都由一个专门委员会指定一个合适的学科授奖. 现在也称此奖为"卡蒂科学进步奖".

莱尔奖章(Lyle Medal)　澳大利亚科学院颁奖. 1931 年设立. 奖励突出的数学与物理研究人员. 获奖工作必须在前 5 年内、大部分在澳大利亚完成. 该奖包括青铜奖章一枚和证书. 每 2 年颁奖一次.

特博尔特奖(Prix Thebault)　法兰西学院颁奖. 1943 年设立. 奖励算术或几何的原始研究或有趣的论文的作者. 主要授予中、小学教师. 每 9 年颁奖一次.

贝里克奖(Berwick Prize)　伦敦数学会授奖. 1946 年为纪念贝里克(Berwick, W. E. H.)教授,由贝里克女士设立. 贝里克教授曾任伦敦数学会理事(1925—1929)和副主席(1929). 该奖主要奖励颁奖前 3 年内在伦敦数学会所办的出版物上发表的优秀文章. 获奖者在颁奖当年 1 月 1 日必须是伦敦数学会会员. 每 2 年颁奖一次. 1947 年,贝里克女士又设立了初级贝里克奖,授予颁奖当年 1 月 1 日不超过 40 岁且未被选为伦敦皇家学会会员的伦敦数学会

会员，其他条件与贝里克奖相同．每2年颁奖一次．

巴拿赫奖(Banach Award)　波兰数学会授奖．1946年设立．奖励数学领域的重要成果．波兰公民可申请．每年授奖．(波兰数学会还在1946年设立了“马祖基维茨奖”和“扎伦巴奖”，奖励的目的、要求，都与“巴拿赫奖”一样．)

雅克·德鲁茨奖(Prix Jacques Deruyts)　比利时皇家科学院颁奖．1948年设立．奖励在数学分析领域做出贡献的比利时研究人员．每4年颁奖一次．

西蒙·斯托伊洛夫奖(Simon Stoilov Prize)　罗马尼亚科学院授奖．1948年设立．奖励罗马尼亚青年数学家对数学科学的贡献．每年颁奖一次．

格奥尔基·拉泽尔奖(Gheorghe Lagar Prize)　罗马尼亚科学院授奖．1948年设立．奖励青年数学家和科学家在数学与天文学领域的突出工作．每年颁奖一次．

比克·曼诺纪念奖(Beke Mano Memorial Prize)　匈牙利亚诺什·波尔约数学会颁奖．1951年为纪念布达佩斯大学曼诺(Beke Mano)教授而设立．主要奖励在数学教学与普及活动中有成就者．每年颁奖一次．

国家自然科学奖(National Prizes for Natural Science)　中国国家科委颁奖．20世纪50年代设立．1979年11月经国务院批准，颁布了《中华人民共和国自然科学奖励条例》(1984年又作了修订)．条例规定“凡集体或个人的阐明自然的现象、特性或规律的科学研究成果，在科学技术的发展中有重大意义的，可授予自然科学奖”．自然科学奖分四等，每等奖都由荣誉证书、奖章和奖金组成．自然科学奖励工作由国家科委统一领导，各研究机构、高等院校、全国性学术团体和由副研究员或相当于副研究员以上水平的科技工作者10人以上联名，均可推荐请奖项目．国外华侨和外国人士在自然科学研究中获得优异成果，对中华人民共和国科学技术事业发展有重大贡献的，也可授予自然科学奖．获自然科学奖一等和二等奖的数学家分等列于后：

国家自然科学奖一等奖获得者

时　间	获奖者	获　奖　项　目
1956	华罗庚	典型域上的多复变函数论．
1956	吴文俊	示性类及示嵌类的研究．
1982	陈景润 王　元 潘承洞	哥德巴赫猜想研究．
1987	廖山涛	微分动力系统稳定性研究．
1989	陆家羲	关于不相交施泰纳三元系大集的研究．

国家自然科学奖二等奖获得者

时　间	获奖者	获　奖　项　目
1956	苏步青	K展空间与一般度量空间的几何学，射影空间曲线论．
1982	冯　康	有限元法．
1982	杨　乐 张广厚	整函数与亚纯函数的值分布理论．
1982	廖山涛	微分动力系统．
1982	谷超豪 李大潜 俞文魮 陈恕行	偏微分方程研究．
1982	钟家庆	复几何与相关问题．
1982	关肇直 宋　健 于景元 冯德兴	飞行器弹性控制理论研究．
1987	张恭庆	临界点理论及其应用．
1987	姜伯驹	曲面自映射不动点理论．
1989	丁夏畦 陈贵强 罗佩珠	补偿列紧原理与等熵气体动力学方程组．
1993	丁伟岳	非线性微分方程及其在几何中的应用．
1993	马志明 严家安	狄氏型与随机分析．
1995	堵丁柱	关于斯坦纳树的研究．

另有获三等奖和四等奖的项目20余项．

巴尔扎恩奖(Balzan Prize)　由设在意大利的国际巴尔扎恩基金会颁奖．该基金在1956年由巴尔扎恩(Balzan, E.)捐资设立．每年颁发3个奖，主要奖励在文学、道德科学与艺术、物理、数学与自然科学、医学等方面做出成就的学者．1962—1993年间，共有4位数学家获此奖．他们是柯尔莫哥洛夫(1962)(Колмогоров, А. Н.)、邦别里(1980)(Bombieri, E.)、塞尔(1985)(Serre, J. P.)和博雷尔(1992)(Borel, A.)．

德·东德奖(Prix de Donder)　比利时皇家科学院颁奖．1957年设立．奖励数学物理领域优秀的原始工作．获奖者必须是40岁以下的青年学者．每3年颁奖一次．

藤原奖(Fujihara Prize)　藤原科学基金会授奖．1959年设立．奖励在数学、物理、工程、化学、生物、农学或医学等领域为科学发展做出重大贡献的日本科学家．1960年首次授奖，每年授奖2个．到1990年为止，已有10位日本数学家获此奖，其中有

小平邦彦(1975).

国家科学奖章(National Medal of Science) 美国国家科学基金会颁奖.1959年由国会设立.奖励在物理学、生物学、数学、工程学、行为或社会科学等领域有杰出贡献的个人.奖章一般都由美国总统授予得主.1962年首次颁奖.1963年以来,几乎每年都有有名的数学家获此奖章.著名数学大师陈省身教授曾在1975年获此奖章.

海涅曼数学物理奖(Dannie Heineman Prize for Mathematical Physics) 美国物理研究会和美国物理学会颁奖.在以"研究、教育、慈善和科学目的"的海涅曼基金会资助下于1959年设立.奖励数学物理领域公开发表的突出工作,包括一篇或一组文章、一本图书.此奖可由一人获得,也可多人分享.遴选得奖人的标准是对数学物理领域的贡献大小,不受国籍、在美居住时间的限制.每年的10月1日为申请截止日期.

杰出数学服务奖(Award for Distinguished Service to Mathematics) 美国数学协会授奖.奖励在数学或数学教育方面有重大影响的活动中的突出个人,而非奖励数学研究活动.获奖者应是美国公民.此奖由证书和奖金组成.1960年设立.每年1月颁奖.

维布伦几何奖(Oswald Veblen Prize in Geometry) 美国数学会颁奖.为纪念维布伦(Veblen, O.)教授,由其原来学生及同事集资,于1961年设立.后来维布伦夫人也捐赠了资金.开始两次分别在1964年和1966年颁奖,以后每5年颁奖一次.奖励在几何或拓扑领域有重大研究成果的学者.获奖者应是美国数学会会员.到1995年为止共颁奖7次,颁奖12个,获奖者13人.

拉马努金奖章(Ramanujan Medal) 印度全国科学院授奖.1961年设立.奖励数学及相关学科领域中有突出成就的工作.每3年颁发一枚铜质奖章.

庞加莱金质奖章(The Golden Medal Poincaré) 法国巴黎科学院授奖.此奖只在特殊情况下才颁发.1962年以来只颁发过3次奖,获奖人为:阿达马(1962)(Hadamard, J. (-S.))、德利涅(1974)(Deligne, P.)、汤普森(1992)(Thompson, J. G.).

费希尔奖(Fisher Prize) 美国统计学会主席委员会授奖.该委员会为纪念费希尔(Fisher, R. A.)爵士对统计学的贡献,也为奖励当今为统计理论与应用的发展做出贡献的统计学家而于1963年设立了费希尔讲座.由获此讲座资格者组织讲座,并受奖.每年一次.

范·德·波尔金质奖章(Balthasar Van der Pol Gold Medal) 国际无线电联盟授奖.为纪念荷兰无线电专家、国际无线电联盟名誉主席范·德·波尔(Van der Pol, B.)教授,其遗孀于1963年设立此奖.奖励对无线电科学有重大价值的成果.获奖成果需经过6年的实践检验.每3年在国际无线电联盟大会上颁发有范·德·波尔像的金质奖章一枚.

威尔克斯纪念奖章(Wilks Memorial Medal and Award) 美国统计协会颁奖.1964年设立.奖励对促进统计理论与技术发展有贡献的统计学家,而这些成就要有利于美国政府、军队和国防部门.每年颁奖一次,此奖包括奖章和奖金.

卡塔兰奖(Prix Catealan) 比利时皇家科学院颁奖.1964年设立.奖励在纯粹数学方面做出重要贡献的比利时和法国学者.获奖的成果必须在前5年内用法文发表.每5年颁奖一次.

福特奖(Ford Awards) 美国数学协会颁奖.为纪念曾任过该协会主席、《美国数学月刊》主编福特(Ford, L. R.)教授而在1964年设立的奖项.奖励发表在《美国数学月刊》上的突出的阐述性文章.每年最多可颁发5个奖.

图灵奖(Turing Award) 美国计算机协会颁奖.1966年设立.是计算机协会的最有声望的一个奖项,奖励在计算界对技巧性等问题有重大贡献的个人.受奖人的遴选是按对计算机领域的贡献是否具持久的作用并具有重大的技术技巧性.每年颁奖,申请受奖截止日期为每年3月1日.获奖者除获奖金、证书外,还可在协会的年会期间开设一次讲座.

布劳威尔奖章(Brouwer Medal) 荷兰数学会授奖.为纪念荷兰数学家布劳威尔(Brouwer, L. E. J.)而设立.荷兰数学会每3年组织一次纪念活动,并确定布劳威尔原工作的一个领域或一个特定的领域,遴选并邀请一位该领域的专家在纪念活动期间组织一次讲座,同时授予布劳威尔金质纪念章.

维纳应用数学奖(Wiener Prize in Applied Mathematics) 美国数学会和美国工业与应用数学会联合颁奖.为纪念美国数学家、控制论专家维纳(Wiener, N.),马萨诸塞理工学院数学系于1967年捐资设立.该奖得到了美国数学会与美国工业与应用数学会的支持和帮助.奖励在应用数学方面做出突出贡献的工作.要求获奖者是居住在美国、加拿大和墨西哥的美国数学会和美国工业与应用数学会的会员.每5年颁奖一次,1970年首次颁奖.

伯克霍夫应用数学奖(Birkhoff Prize in Applied Mathematics) 美国数学会和美国工业与应用数学会联合颁奖.1967年为纪念伯克霍夫(Birkhoff, G. D.)教授而设立.主要奖励在应用数学领域中有突出贡献的数学家.要求获奖者为居住在美国、加拿大和墨西哥的美国数学会和美国工业与应用数学会的会员.每5年颁发一次奖,1968年首次颁奖.每次受奖人数不等.

萨勒姆奖(Salem Prize) 1968年设立.奖励在萨勒姆感兴趣的领域,主要是傅里叶分析及相关问题方面做出突出贡献的年轻数学家.每年颁奖一次.

波利亚奖(Polya Prize) 美国工业与应用数学会授奖.1969年设立.奖励在组合论的应用方面于过去5年到10年内做出杰出贡献者.此奖包括证书、奖金和一枚奖章.通常授予本学会会员,但也授予非本学会会员.每4年颁奖一次.

彻里学生奖(Cherry Student Prize) 澳大利亚数学会应用数学部授奖.1969年为纪念澳大利亚应用数学的领袖人物之一彻里(Cherry,T. M.)教授而设立.1976年前称为学生奖,奖励向应用数学部年会提交的最优秀学生论文的学生.获奖者应是年会前提交学位论文不超过3个月的研究生.每年在年会上授奖.

谢尔·蒂博尔纪念奖章(Sgele Tibor Memorial Medal) 匈牙利亚诺什·波尔约数学会颁奖.1969年设立.奖励通过研究工作把青年引入科学活动方面的突出贡献者.

冯·卡曼奖(Theodore von Karman Prize) 美国工业与应用数学会授奖.1968年设立.奖励前5年到10年内,数学在力学或工程科学中的应用方面有突出成绩者.此奖通常授予美国工业与应用数学会会员.每5年颁奖一次.

斯蒂尔奖(Steele Prizes) 美国数学会颁奖.美国数学会最重要的一个奖项.为向伯克霍夫(Birkhoff,G. D.)、奥斯古德(Osgood,W. F.)和格劳斯坦(Graustein,W. C.)表示敬意,1970年由斯蒂尔(Steele,L. P.)捐资设立.1970—1976年,每年颁发一个或几个奖,奖励突出的已发表的数学研究工作,特别是评注性和覆盖面广的数学论文.1977年,美国数学会理事会对斯蒂尔奖的奖励条例做了修改,改成每年颁发3个奖,分别奖励:

1.获奖人在整个数学工作中的累积影响;在一段时间内的高水平研究工作,特别是对一个领域的发展有着重大影响,包括研究生教育工作.现在已习惯地称此项奖为经历奖.

2.一本书或有重要价值的综述或阐述性论文的作者,现简称阐述论著奖.

3.已被证明在一个领域中为基础性的或是长时期内的重要论文的作者,其奖项现简称基础论文奖.

获奖人名单见附表1—4.

表1 **1970—1975年斯蒂尔奖获得者**

年份	获奖者	获奖工作
1970	莱夫谢茨(美国)(Lefschetz,Solomon,1884-1972)	论文"数学自传".
1971	卡雷尔(Carrell,Jean B.)和迪厄多内(法国)(Dieudonné,Jean,1906-)	论文"新老不变式理论".
	迪厄多内(法国)(Dieudonné,Jean,1906-)	论文"代数几何".
	格里菲思(Griffiths,Phillip)	论文"代数流形上的积分周期".
1972	柯蒂斯(Curtus,Edward B.)	论文"单纯同调论".
	埃利森(Ellison,William J.)	论文"华林问题".
	佩恩(Payrie,Lawrence F.)	论文"等周不等式及其应用".
	斯科特(美国)(Scott,Dana S.)	论文"连续统假设独立性证明".
1975	伯斯(Bers,Lipman,1914—)	论文"单值化、参模和Klein群".
	戴维斯(美国)(Davis,Martin D. 1929—)	论文"希尔伯特第十问题不可解".
	泰勒(Taylor,Joseph L. 1685—1731)	论文"测度代数".
	麦基(Mackey,George W. 1916—)	论文"遍历理论及其在统计力学和概率论中的意义".
	劳森(Lawson,H. Blaine,1942—)	论文"叶状结构".

表 2 **1979—2000 年获斯蒂尔经历奖名单**

年 份	获 奖 者	主 要 贡 献
1979	博赫纳(德国-美国)(Bochner,Salomon,1899—1982)	概率论、傅里叶分析、多复变、微分几何.
	赞格蒙(波兰-美国)(Zygmund,Antoni,1900—)	傅里叶分析理论、实变及分析的相关领域.
1980	韦伊(法国)(Weil,André,1906—)	对 20 世纪数学的贡献,特别是许多领域的基础工作.
1981	扎里斯基(苏联-美国)(Zariski,Oscar,1899—1986)	代数几何.
1982	约翰(John,Fritz,1910—)	偏微分方程、指导博士生.
1983	陈省身(Chern Shing-Shen,1911—)	微分几何、指导博士生.
1984	杜布(美国)(Doob,Joseph L. 1910—)	概率论.
1985	惠特尼(美国)(Whitney,Hassler,1907—1989)	微分流形、奇点理论.
1986	麦克莱恩(MacLane,Saunders,1909—)	代数拓扑学、同调代数学及范畴论.
1987	艾伦伯格(波兰-美国)(Eilenberg,Samuel,1913—)	代数拓扑学、同调代数.
1988	蒙哥马利(美国)(Montgomery,Deane,1909—)	变换群,特别是解决希尔伯特第五问题和对美国数学的影响.
1989	卡普兰斯基(加拿大-美国)(Kaplansky,Irving,1917—)	交换代数,C^*代数及冯·诺伊曼代数等.
1990	博特(匈牙利-美国)(Bott,Raoul,1923—)	几何与拓扑、特征类、K 理论、指数理论.
1991	博雷尔(法国)(Borel,Armand,1923—)	和塞尔一起证明了用紧纤维纤维化一个不退化为一点的欧氏空间是不可能的.
1992	拉克斯(西班牙)(Lax,Peter D. 1926—)	线性与非线性偏微分方程理论与应用、泛函分析.
1993	邓肯(Dynkin,Eugene B.,1924—)	李代数理论、概率论.
1994	尼伦伯格(Nirenberg,Louis,1925—)	线性与非线性偏微分方程及其在复分析与微分几何中的应用.
1995	泰特(Tate,John T. 1925—)	代数、代数几何、数论.
1996	志村五郎(日本)(Shilips,G. 1930—)	数论、自守函数.
1997	菲利普斯(美国)(Philips,Raoph Saul,1913—)	泛函分析、偏微分方程等.
1998	雅各布森(波兰-美国)(Jacobson,Nothan,1910—)	环论、李代数、若尔当代数.
1999	卡迪松(Kadison,R. V.)	算子代数.
2000	辛格(美国)(Singer,Isadore Manual,1924—)	泛函分析、群表示论等.

表 3

1979—2000 年获斯蒂尔阐述论著奖名单

年 份	获 奖 者	获 奖 论 著
1979	哈茨霍恩(Hartshorne,Robin)	阐述论文“代数循环和小余维数子簇的等价关系”和书《代数几何》.
1980	爱德华兹(Edwards,Harold M. 1936—)	两本书:《黎曼 ζ 函数》、《费马大定理》.
1981	邓福德(美国)(Dunford,Nelson,1906—)和施瓦尔茨(法国)(Schwartz,Jacob T. 1930—)	书:《线性算子》Ⅰ,Ⅱ,Ⅲ.
1982	阿尔福斯(芬兰-美国)(Ahlfors,Lars Valerian,1907—)	“复分析”、“拟保角映射”、“保角不变式”等方面的论著.
	林节玄(Lam,Tsit-yuen 1942—)	书《二次型的代数理论》和“K_0 和 K_1,代数 K 理论引论”、“域上二次型十讲”、“塞尔狭想”和“有序域理论”四篇论文.
1983	哈尔莫斯(美国)(Halmos,Paul Richard 1916—)	多种研究生数学教材及有关写、讲数学和发表论文的文章.
1984	施坦(美国)(Stein,Elias M. 1931—)	书:《奇异积分和函数的可微性》.
1985	斯皮瓦克(Spivak,Michael,1940—)	五卷《微分几何综论》.
1986	克努特(Knuth,Donald Ervin,1938—)	三卷《计算机程序技术》.
1987	加德纳(Gardner,Martin,1914—)	《科学的美国人》上的“数学游戏”专栏.
1988	赫尔加森(美国)(Helgason,Sigurdur,1927—)	《微分几何与对称空间》、《微分几何、李群和对称空间》、《群与几何分析》三本书.
1989	戈朗斯坦(Gorénstein,Daniel,1923—)	书《有限单群》及有关有限单群分类的两篇综述文章.
1990	里希特迈耶(Richtmyer,Robert Davis,1910—)	《初始值问题的差分方法》一书.
1991	特里夫斯(Treves,Jean-Francois,1930—)	二卷《伪微分和傅里叶积分算子》.
1992	迪克斯米耶(Dixmier,Jacques)	《冯·诺伊曼代数》、《C^* 代数》、《包络代数》.
1993	鲁丁(Rudin,Walter,1921—)	《数学分析原理》和《实与复分析》二本书.
1994	多布奇斯(Daubechies,Ingrid,1954—)	《小波十讲》一书.
1995	塞尔(法国)(Serre,Jean Pierre,1926—)	《算术教程》一书.
1996	伯恩特(Berndt,B. C. 1939—)	对印度数学家拉马努金笔记的整理与研究.
	福尔顿(Fulton,N.)	《交截理论》.
1997	克那普(Knapp,A. W. 1941—)	《半单群表示论》.
	哥罗莫夫(Gromov,M. 1943—)	《辛流形中的全伪纯曲线》.
1998	斯尔韦尔曼(Silverman,J. H.)	《椭圆曲线的算术》、《椭圆曲线的算术高级选题》.
1999	兰(Lang,S. 1927—)	《代数》、《代数数论》.
2000	康威(Conway,J. H. 1937—)	《数的游戏》、《取胜之道》等.

表 4

1979—2000 年获斯蒂尔基础论文奖名单

年份	获奖者	获奖论文
1979	卢伊(德国-美国)(Lewy, Hans, 1904—)	“三个变量的线性微分方程解的局部特征和两个复变量的正则函数的相关定理”、“无解光滑线性偏微分方程的一例子”和“正则包”.
	科恩(Kohn, Joseph John, 1932—)	“强凸域上的调和积分”.
1980	霍赫希尔德(Hochschild, Gerhard P.)	同调代数及其应用方面的工作.
1981	霍普夫(Hopf, Eberhard, 1902—1983)	“表示湍流特征的数学例子”、“偏微分方程 $u_t+uu_x=uu_{xx}$”等 3 篇.
1982	米尔诺(Milnor, John Willard, 1931—)	“流形同胚于七维球”(即所谓“怪球”).
1983	克林(Kleene, Steven C. 1909—1994)	“算术谓词与函数量词”、“可构造序数理论中的谓词形式”和“数理论谓词的分层”.
1984	卡莱松(瑞典)(Carleson, Lennart Axel Edvard, 1928—)	“有界解析函数的插值问题”、“用有界解析函数插值与冠问题”、“傅里叶级数部分和的收敛与增长”.
1985	施坦伯格(美国)(Steinberg, Robert, 1922—)	“代数群表示”、“半单代数群的正则元”、“线性代数群的自同态”.
1986	卡尔曼(Kalman, Rudolf E. 1930—)	“线性滤波与预报问题的新方法”、“线性动态系统的数学表述”、“线性滤波与预报的新成果”.
1987	费德雷尔(Federer, Herbert, 1920—)和费莱明(Fleming, Wendell)	“正规与积分流”.
1988	罗塔(Rota, Gian-Carlo, 1932—)	“组合论基础, I、默比乌斯(Möbius, August Ferdinard.)函数理论”.
1989	考尔德伦(Calderón, Alberto -Pedro, 1920—)	“微分方程的柯西问题的惟一性”.
1990	科斯坦特(Kostant, Bertram, 1928—)	“某种级数表示的存在性与不可约性”.
1991	卡拉比(意-美)(Calabi, Eugenio, 1923—)	整体微分几何,特别是复微分几何、蒙日—安培方程和凯勒—爱因斯坦度量方面的论文.
1992	格利姆(Glimm, James, Gilbert, 1934—)	“守恒律非线性双曲系统大范围解”.
1993	莫斯托(美国)(Mostow, George Daniel, 1923—)	强刚性方面的论文.
1994	德布兰奇(de Branges, Louis, 1932—)	“比伯巴赫猜想证明”.
1995	纳尔逊(Nelson, Edward, 1932—)	数学物理方面的两篇论文“二维的四次交互作用”、“从马尔可夫域构造量子域”.
1996	斯特伍尔(Stroor, D.)、瓦拉德汉(Varandhan, S. R. S. 1940—)	“多维随机过程”等.
1997	哥罗莫夫(Gromov, M. 1943—)	“辛流形中的全伪纯曲线”.
1998	采尔伯格(Zeilberger, D.)、沃尔夫(Wolf, H. S.)	“有理函数确证组合恒等式”.
1999	纳什(Nash, John F. 1928—)、克兰达尔(Crandall, M. G.)	“哈密顿-雅可比方程的粘解性”.
2000	马祖尔(Mazur, B. 1937—)	“模曲线与爱因斯坦理想”.

全国科学院应用数学与数值分析奖(National Academy of Sciences Award in Applied Mathematics and Numerical Analysis) 美国全国科学院颁奖.由国际商用机器公司(IBM)出资于1972年设立.奖励在应用数学与数值分析领域做出突出贡献的学者,并要求获奖的工作必须按计划坚持若干年的实践检验.1972年首次颁奖,自1973年第二次颁奖起,以后每3年颁奖一次,每次一个奖.

洪堡奖(Humboldt Prize) 洪堡基金会授奖.1972年由当时的联邦德国政府设立.奖励美国的高级科学家,目的是促进两国各机构间的科学合作.受奖者必须是在数学、物理、化学、生物学、医学、工程科学、计算机和地学领域的科研和教学中,有国际声望的人.每年授奖.受奖人由德国研究人员中的领袖人物和机构推荐.

弥永昌吉奖(Shokichi Iyanaga Arize) 日本数学会授奖.1973年由弥永昌吉教授捐赠资金设立.故以其名字命名.奖励与鼓励对数学发展做出重要贡献的青年数学家.40岁以下的日本数学会会员可作为候选人.获奖者除获得奖金外,还在4月份召开的年会上发表演讲.每年授奖一次.

高级怀特海奖(Senior Whitehead Prize) 伦敦数学会颁奖.1973年为纪念怀特海(Whitehead,J. H. C.)教授由怀特海女士捐赠,由其朋友设立.怀特海教授曾任伦敦数学会主席(1953—1955).该奖主要奖励对数学及对数学服务做出贡献的人.要求获奖者在授奖当年1月1日是通常意义上居住在英国的数学家.每2年颁奖一次.1978年因同样的原因,高级怀特海奖的捐赠者和设立者又捐赠并设立了初级怀特海奖,主要奖励对数学有贡献与影响的人.也要求获奖者在当年1月1日是通常意义上居住在英国的数学家或主要在英国接受教育的伦敦数学会会员.每2年颁奖一次.

法国电气公司安培奖(Prix Ampère deL'Electrite de France) 法兰西学院颁奖.为纪念物理学家安培(Ampère,A.-M.)诞生200周年,由法国电气公司于1974年设立.奖励一位或多位法国科学家在数学或物理学领域的基础学科或应用方面的突出贡献.每年颁奖一次.

波利亚奖(George Polya Award) 美国数学协会颁奖.1975年设立.奖励发表在《学院数学杂志》上的阐述性文章.每年颁奖.

沃特曼奖(Waterman Award) 美国国家科学基金会颁奖.1975年在纪念基金会成立25周年时,为向国家科学基金会首任主任沃特曼(Waterman, A. T.)表示敬意,经国会批准设立此奖.奖励工作在自然科学、数学和工程学前沿的杰出青年科学家.得主应是35岁以下的美国公民、获得博士学位不超过5年的年轻人.此奖包括证书和总数50万美元的为期3年的学习或科研资助.1976年首次颁奖,每年奖励上面提到的3个学科中的一个.数学学科的获奖者有:费弗曼(1976)(Fefferman,C.)、瑟斯顿(1979)(Thurston,W. P.)、弗里德曼(1984)(Freedman,M. (H.)).美籍华人青年数学家、美国库朗数学科学研究所教授、中国科学院数学研究所研究员、北京大学数学系教授田刚,也曾于1994年获此奖.

沃尔夫奖(Wolf Prizes) 沃尔夫基金会颁奖.沃尔夫数学奖是国际数学界两个有较大影响的奖项之一.已故沃尔夫(Wolf,R.)在1975年设立了沃尔夫基金会,总部设在以色列.其宗旨为"促进科学和艺术的发展以造福于人类".该基金会每年给在化学、农学、医学、物理学和数学方面有杰出成就者颁奖.1978年首次颁奖,每年一次,1981年增设了艺术奖.沃尔夫是出身在德国的化学家、慈善家和外交家,第一次世界大战后移居古巴,1961—1973年曾任古巴驻以色列大使,后定居以色列,1981年去世.

沃尔夫数学奖获得者见下面附表:

沃尔夫数学奖获得者及其主要工作领域

年 份	获 奖 者	主要工作领域
1978	盖尔范德(苏联-美国) (Гельфанд, Израиль Моисеевич 或 Gelfand, Izrail Moiseevic,1913—)	巴拿赫代数、泛函分析、广义函数、偏微分方程.
	西格尔(德国) (Siegel,Carl Ludwig,1896—1981)	代数、代数数论、多复变函数、天体力学.
1979	勒雷(法国) (Leray,Jean,1906—)	微分算子理论、代数拓扑、同调代数、粘性流体理论.
	韦伊(法国) (Weil,André,1906—1998)	数论、拓扑、调和分析、群论、代数几何、数学史.

年份	获奖者	主要工作领域
1980	嘉当(法国) (Cartan,Henri,1904—)	多复变函数、代数拓扑、同调代数、位势论.
	柯尔莫哥洛夫(苏联) (Колмогоров,Андрей Николаевич,1903—1987)	概率论、调和分析、动力系统、拓扑学、湍流.
1981	阿尔福斯(芬兰-美国) (Ahlfors,Lars Valerian,1907—)	复分析.
	扎里斯基(俄国-美国) (Zariski,Oscar,1899—1986)	代数几何.
1982	惠特尼(美国) (Whitney,Hassler,1907—1989)	微分扑拓、代数拓扑、微分几何.
	克列因(苏联) (Крейн,Марк Григольвич,1908—1989)	泛函分析及其应用.
1983—1984	陈省身(中国-美国) (Chern Shiing-Shen,1911—)	整体微分几何.
	爱尔特希(匈牙利) (Erdős,Paul,1913—1996)	数论、组合论、概率论、集合论.
1984—1985	小平邦彦(日本) (Kodaira Kunihiko,1915—1997)	复流形、代数几何.
	卢伊(德国-美国) (Lewy,Hans,1904—)	偏微分方程.
1986	艾伦伯格(波兰-美国) (Eilenberg,Samuel,1913—)	代数扑拓、同调论.
	赛尔伯格(挪威-美国) (Selberg,Atle,1917—)	数论、调和分析、李群离散子群.
1987	拉克斯(匈牙利-美国) (Lax,Peter D.,1926—)	分析学、偏微分方程、应用数学.
	伊滕清(日本) (Ito,Kiyosi,1915—)	纯粹概率论与应用概率论、随机微积分.
1988	赫尔曼德尔(瑞典) (Hörmander,Lars Valter,1931—)	伪微分算子、傅里叶积分算子、线性偏微分方程.
	希策布鲁赫(德国) (Hirzebruch,Friedrich Ernst Peter,1927—)	拓扑学、代数、微分几何,代数数论.
1989	米尔诺(美国) (Milnor,John Willard,1931—)	微分拓扑与代数拓扑、莫尔斯理论.
	考尔德伦(阿根廷-美国) (Calderón,Alberto-Pedor,1920—)	奇异积分算子及其在偏微分方程中的应用.
1990	德乔治(意大利) (de Giorgi,Ennio,1928—1996)	偏微分方程、变分法.
	皮亚特斯基-夏波尔洛(苏联-以色列) (Piatetski-Shapiro,Ilya,1929—)	齐性复域、离散群、表示理论、自守形式.
1991	无获奖者	
1992	卡莱松(瑞典) (Carleson,Lennart,Axel,Edvard,1928—)	傅里叶分析、复分析、拟保角映射、动力系统.
	汤普森(美国) (Thompson,John Griggs,1932—)	有限群理论及其与其他数学分支的联系.

年份	获奖者	主要工作领域
1993	哥罗莫夫(原为苏联,现无国籍) (Gromov,Mikhael,1943—)	微分几何、代数、拓扑、黎曼流形.
	蒂茨(比利时-法国) (Tits,Jacques,1930—)	群论及其在几何上的作用.
1994—1995	莫泽(德国) (Moser,Jürgen Kurt,1928—)	动力系统结构与稳定性、非线性偏微分方程、复流形.
1996	朗兰兹(加拿大) (Langlands,Robert,1936—)	非交换调和分析、数论.
	怀尔斯(英国-美国) (Wiles,Andrew,1953—)	费马大定理证明.
1997	凯勒尔(美国) (Keller,J. 1923—)	应用数学.
	赛奈(俄国) (Sinai,Y. G. 1935—)	遍历理论.
1999	洛瓦兹(匈牙利) (Lovasz,L. 1948—)	离散数学、计算机科学.
	施坦(美国) (Stein,Elias M. 1931—)	调和分析.
2000	博特(匈牙利-美国) (Bott,Raoul 1923—)	微分几何、拓扑学.
	塞尔(法国) (Serre,Jean Pierre,1926—)	同伦论、多复变、代数几何等.

费萨尔国王国际科学奖(King Faisal International Prize in Science) 沙特阿拉伯费萨尔国王奖总秘书处颁奖. 沙特阿拉伯前国王费萨尔的第八个儿子为纪念其父于 1976 年设立了费萨尔国王基金会,并于 1979 年设立了五个费萨尔国王国际奖,即科学奖、阿拉伯文学奖、伊斯兰服务奖、医学奖和伊斯兰研究奖,其中费萨尔国王国际科学奖奖励数学、化学、生物学和物理学领域的突出成果,每年奖励一个学科. 世界各国的学术机构、组织都可推荐受奖候选人. 1987 年第一次向数学科学颁奖. 到 1994 年为止的获奖者有:英国数学家阿蒂亚(1987)(Atiyah, M. F.)和美国数学家沙利文(1994)(Sullivan, D. P.).

爱尔特希奖(Erdös Prize) 以色列数学联合会颁奖. 由爱尔特希(Erdös, P.)教授捐赠,于 1976 年设立. 每年授奖一次,奖励一位取得突出成果的以色列数学家.

工业与应用数学会数值分析与科学计算奖(SIAM Prize in Numerical Analysis and Scientific Computing) 美国工业与应用数学会颁奖. 1979 年设立. 主要为鼓励青年研究人员,并给他们的研究工作以帮助. 该奖奖励前 6 年内,以在数值分析和科学计算领域的工作为基础而遴选出的获奖者. 每 4 年颁奖一次.

富尔克森离散数学奖(Fulkerson Prizes in Discrete Mathematics) 数学规划学会(美国)和美国数学会联合授奖. 为纪念图论和组合最优化的先驱者富尔克森(Fulkerson, D. R.),1979 年由授奖的两个学会联合设立. 奖励离散数学领域在颁奖前 6 年内公开发表的有突出成果的论文. 每 3 年一次在国际数学规划讨论会上颁奖,每次授奖 3 个. 如获奖论文是由 2 人或多人合作的,则由合作者分享一个奖. 1982 年首次颁奖.

丹齐克奖(Dantzig Prize) 数学规划学会(美国)和美国工业与应用数学会联合颁奖. 1979 年设立. 奖励数学规划领域中,在深度与广度上有突出贡献的原始工作. 虽然希望奖励年轻的单个作者,但一般不受年龄与作者人数的限制,只要求获奖的工作是公开发表的,并属数学规划的一个方面. 此奖每 3 年颁奖一次.

嘉当奖(Prix Cartan) 法兰西学院授奖. 1980 年设立. 奖励引入新的思想或解决了难题的数学家. 45 岁以上的个人,不分种族,符合条件者都可获奖. 每两年颁奖一次.

克雷福德奖(Crafoord Prizes) 瑞典皇家科学院负责审选受奖者并颁奖. 1980 年由瑞典实业家克雷福德(Crafoord, H.)捐款设立,目的是为促进瑞典和世界其他地区的基础科学研究;奖励诺贝尔奖没有覆盖的若干领域的基础研究工作,包括数学、天文学、生物科学和地球科学. 1982 年首次颁奖,每 6

年向数学学科授奖一次. 获奖数学家有：

年　份	获　奖　者
1982	尼伦伯格(Nirenberg,Louis,1925—　) 阿诺尔德(苏联)(Арнольд, Владимир Игоревич,1937—　)
1988	德利涅(比利时)(Deligne,Pierre,1944—　) 格罗腾迪克(法国)(Grothendieck,Alexandre,1928—　)(格罗腾迪克拒绝领奖)
1994	唐纳森(Donaldson,Simon Kirwan,1957—　) 丘成桐(Yau,Shing-Tung,1949—)

澳大利亚数学会奖章(Australian Mathematical Society Medal)　澳大利亚数学会授奖. 1981 年设立. 奖励数学科学的杰出研究工作. 在授奖当年年初不超过 40 岁的澳大利亚数学会会员都可申请此奖. 每两年授奖一次.

奈望林纳奖(Nevanlinna Prize)　在每 4 年召开一次的国际数学家大会期间授奖. 由芬兰赫尔辛基大学捐资设立. 奖励青年数学家在信息科学的数学方面的杰出贡献. 1982 年首次颁奖，历次获奖者为：

年　份	获　奖　者
1982	塔尔杨(Tarjan,Robert E.)(美国)
1986	瓦林特(Valiant,Leslie)(匈-英)
1990	拉兹波洛夫(Razborov,A. A.)(苏联)
1994	威格特森(Wigderson,Avi)(以色列)

莱文松奖(Levinson Prizes)　以色列魏茨曼科学研究所颁奖. 1982 年由莱文松(Levinson,M. L.)先生设立. 每年颁发 3 个奖，奖励在生物学、物理学和数学学科中的突出工作. 1982 年首次颁奖.

工程师数值方法促进组和应用与工业数学会帕斯卡尔奖(Prix Blaise Pascal du GAMNI-SMAI)　法兰西学院授奖. 1984 年由工程师数值方法促进组和法国应用与工业数学会联合设立. 奖励一位或多位运用工程科学应用数值方法进行重要研究工作的法国研究人员. 每年授奖一次.

京都奖(Kyoto Prize)　日本稻森基金会授奖. 该基金会由实业家和慈善家稻森五雄捐资于 1984 年成立. 此奖是对高级技术、基础科学、创造性艺术与道德科学杰出成就的承认，是国际性的奖项. 奖励对人类科学、文化、精神等方面做出突出贡献的学者. 获奖人在其工作的领域应是得到国际承认的专家. 每年颁奖. 已有数学或与数学有密切关系的专家获奖，如仅美国的就有：卡尔曼(1985)(Kalman,R. E.)、乔姆斯基(1988)(Chomsky,N.)、麦卡锡(1988)(McCarthy,J.)、洛伦茨(1991)(Lorenz,E. N.)和韦伊(1994)(Weil,A.)等.

德·摩根奖章(De Morgan Medel)　伦敦数学会颁奖. 1884 年为向伦敦数学会首任主席德·摩根(De Morgan,A.)教授表示敬意而设立. 主要奖励对数学做出的突出贡献，奖章只授予常居英国的数学家. 该奖包括金质奖章一枚和获奖证书. 每 3 年颁奖一次.

巴黎联合保险公司科学奖(Prix Scientifique Uap)　巴黎联合保险公司授奖. 1984 年设立. 巴黎联合保险公司是法国的重要保险公司，也是世界上最大的保险公司之一. 设此奖的目的是为促进 UAP 与研究机构的合作. 每年颁奖. 它每年在数学、计算机科学、理论物理学与生物学、语言学与经济学等学科中奖励最多可达 3 名科学家. 1985 年首次颁奖，获奖的 3 名科学家中有 2 名是数学家，在 1986 年和 1990 年的获奖者中也都有数学家.

日本奖(Japan Prize)　日本科学技术基金会授奖. 1985 年首次颁奖，奖励通过科学技术中的发明创造和杰出成就为人类和平与繁荣做出贡献的人. 1991 年法国著名数学家、国际数学联盟主席(1991—1994)莱昂斯(Lions,J.-L.)曾获此奖.

陈省身数学奖(Chern Shing-Shen Prize in Mathematics)　中国数学会颁奖. 这是中国设立的第一个数学奖，由香港亿利达工业发展集团有限公司总裁刘永龄先生和杨振宁博士提议，刘永龄先生捐资于 1986 年设立. 目的是为了促进中国数学的发展，并纪念和推崇陈省身教授的学术成就. 主要奖励优秀中青年数学家. 得奖人应是在国内从事数学教学或研究的数学工作者，并要求对数学的基础理论和应用做出了重要的创造性贡献. 由各研究机构、高等院校和全国性学术团体，或副研究员、副教授以上水平的 5 名数学工作者联名推荐请奖项目. 1990 年开始采用自由申请与推荐相结合的办法征集请奖项目. 该奖包括奖状、奖金和金质奖章一枚. 1987 年首次颁奖，奖励 1985 年和 1986 年两年内所取的优秀成果，以后每两年颁奖一次，每次颁两个奖. 现将历届获奖者及获奖工作分列如下：

时间	届次	获奖者	获奖工作
1987	1	钟家庆 张恭庆	复流形、复分析. 临界点理论.
1989	2	李邦河 姜伯驹	微分拓扑. 不动点理论.
1991	3	萧　刚 冯克勤	代数几何. 代数数论.

时间	届次	获奖者	获奖工作
1993	4	丁伟岳 忻元龙	非线性偏微分方程及其在微分几何中的应用. 微分几何,特别是调和映射.
1995	5	洪家兴 马志明	偏微分方程及其在几何中的应用. 狄氏型、马氏过程及随机分析.
1997	6	文 兰 王建磐	微分动力系统. 代数群与量子群.
1999	7	王诗宬 龙以明	三维拓扑学. 非线性哈密顿系统和辛几何.

奥斯特洛夫斯基奖(Ostrowski Prize) 瑞士奥斯特洛夫斯基基金会授奖.著名瑞士数学家奥斯特洛夫斯基(Ostrowski,A. M.)教授留下遗产设立了奥斯特洛夫斯基基金,并于1987年设立此奖.奖励纯粹数学或数值分析的理论基础方面在前5年中有突出成就的数学家.每两年颁奖一次,每次都由5人组成的评奖小组遴选获奖者.1989年首次颁奖.获奖者有:布朗基(1989)(Branges,L. de)、布尔根(1991)(Bourgain,J.)、拉兹科维奇(1993)(Loczkovich,M.)、拉特纳(1993)(Ratner,M.)、怀尔斯(1995)(Wiles,A.).

波利亚奖(Polya Prize) 伦敦数学会授奖.1987年设立.奖励英国数学家的突出工作.每年颁奖一次.

美国全国科学院数学奖(The National Academy of Sciences Award in Mathematics) 美国全国科学院颁奖.1988年在美国数学会成立100周年时,由美国数学会和美国全国科学院共同设立.奖励在过去10年中发表的杰出数学研究成果.每4年颁奖一次.1988年首次颁奖.朗兰兹(1988)(Langlands,R.)因群表示理论、麦克弗森(1992)(MacPherson,R. D.)因在奇异空间拓扑方面引入了新的方法、怀尔斯(1996)(Wiles,A.)因证明了费马大定理、多布奇斯(2000)(Daubechies,I.)因对小波的基础性发现和表述,以及她使小波方法成为应用数学的基本而实用的工具而先后获奖.

钟家庆数学奖(Zhong Jia-Qing Prize in Mathematics) 钟家庆纪念基金执行委员会颁奖.1988年为纪念钟家庆教授而设立.奖励优秀的青年数学工作者,促进中国的数学发展.此奖以数学论文水平为评选标准,重点在于鼓励具有创造性的数学研究工作(包括纯粹数学与应用数学).获奖者必须是在学或毕业不超过2年的国内大学或研究所的博士研究生或硕士研究生.从1989年首次颁奖,同年执行第二届奖的有关程序,并开始设立"优秀博士论文奖"和"优秀硕士论文奖".

获奖者分列如下:

时间	届次	获奖者	
		优秀博士论文奖	优秀硕士论文奖
1989	1		刘克峰 夏 琪 翁 林 宋斌恒
1991	2	周向宇 邵启满	余保真 丁津泰 陆志勤
1993	3	朱力行 陈永高 谈胜利	
1995	4	王跃飞 王凤雨	
1997	5	戴彧虹 刘先仿 刘春根 王启华 王晓峰	
2000	6	甘少波 孙文昌 许学军 邹文明	赵振刚

伯格曼奖(Bergman Prize) 伯格曼信托基金会授奖.出生于波兰的美国数学家伯格曼(Bergman,S.)的遗孀去世后,按其遗愿为纪念其丈夫,把她的捐款于1988年设立了伯格曼信托基金会,并设此奖.奖励在核函数理论及其在实与复分析中的应用、函数理论方法在椭圆型偏微分方程中的应用,特别是伯格曼算子方法等方面的成果.美国数学会帮助审选受奖者.1989年首次授奖,每年授奖一次.

费马数学研究奖(Fermat Prize for Mathematical Research) 1989年首次授奖.由保罗·萨巴捷与马特拉·马尔科尼空间大学资助设立.奖励在费马(Fermat,P. de)工作过的领域中从事研究工作的数学家,特别是在变分理论原理、概率计算基础、解析几何和数论方面有突出研究成果者.每两年授奖一次.

华罗庚数学奖(Hua LuoGeng Prize in Mathematics) 中国数学会颁奖.为纪念华罗庚先生对中国数学事业做出的卓越贡献,也为促进中国数学事业的发展,中国数学会于1992年在湖南教育出版社的赞助下设立此奖.主要奖励中国数学家长期以来对发展中国的数学事业做出的突出贡献.获奖人一般应在50～70岁之间,各研究机构、高等院校、全国性的学术团体或由5名教授联名,或由两名评奖委员联名,均可推荐获奖候选人.1992年首次颁奖,每

两年颁奖一次，称为一届，每届遴选受奖人两名. 历届获奖者名单如下：

时间	届次	获奖者	获奖工作领域
1992	1	陈景润	哥德巴赫猜想.
		陆启铿	多元复变函数论.
1994	2	谷超豪	微分几何、偏微分方程、数学物理.
		万哲先	代数学和组合论.
1996	3	杨　乐	复分析.
		周毓麟	理论数学与应用数学.
1999	4	丁夏畦	偏微分方程、函数空间.
		王　元	数论.

苏步青数学教育奖(Su Buqing Prize in Mathematical Education)　由海内外几位著名数学家倡议，由复旦大学、上海市教育委员会、上海市中小学幼儿教师奖励基金联合会发起设立的国内第一个奖励中学数学教育工作者的奖项. 设立于 1992 年. 其宗旨是为了表示对苏步青教授毕生致力于数学教育事业的敬意，弘扬苏步青教授几十年如一日重视基础数学教育的精神，促进中国基础教育事业的进步和基础数学教育的发展. 第一届“苏步青数学教育奖”于 1992 年在上海市范围内评出；第二届于 1994 年评出，评审范围扩大到上海、江苏、浙江、福建四个省、市；第三届于 1996 年评出，评审范围又在上一届基础上扩大了三个省：山西、安徽、江西；第四届于 1999 年评出，评审范围为全国. 从此该奖成了中国全国性的一个奖项. 第五届已于 2001 年 9 月颁奖.

在第四届颁奖大会上，温州大学、温州市教育产业集团、浙江教科文发展有限公司向“苏步青数学教育奖”捐赠人民币 100 万元；香港大学项武义教授和夫人谢婉贞博士也向“苏步青数学教育奖”捐赠了 3 万美元.

拉东奖章(Radon Medal)　奥地利科学院授奖. 该奖章主要奖励在拉东(Radon, J.)工作过的领域，如积分变换(拉东变换)等方面做出贡献的数学家. 该奖章将不定期颁发，1992 年首次颁奖，由美国库朗研究所荣誉教授约翰(John, F.)获得.

施奈德奖(Schneider Prize)　国际线性代数学会颁奖. 该奖奖励在线性代数方面的高水平研究工作及所得成就. 此奖每 3 年颁奖一次. 1993 年首次颁奖.

科学研究奖(Scientific Research Prizes/Premios de Investigacion Cientifica)　墨西哥科学院颁奖. 奖励以下各领域中的科研成就：

1. 化学与生物学；
2. 社会科学；
3. 物理与数学.

获奖者应是 40 岁以下的墨西哥科学家和研究人员. 此奖不是奖励单篇文章或单本书的成果，而是奖励全面的个人经历上的成就. 每年都在以上三个方面颁奖.

冯·诺伊曼讲座(von Neumann Lecture)　美国工业与应用数学会授奖. 奖励个人在纯粹数学或应用数学方面的杰出贡献，获奖者可以是数学家或是其他领域的科学家. 此奖由奖金和证书组成. 获奖者也就是冯·诺伊曼讲座的主讲人，要对数学及其应用的一项贡献给出综述或评估，讲稿由《工业与应用数学会综论》发表. 每年颁奖一次.

内勒应用数学奖(Naylor Prize in Applied Mathematics)　伦敦数学会颁奖. 为纪念内勒(Naylor, V. D.)博士由其儿子设立. 奖励在应用数学和数学的应用方面做出突出贡献的、在通常意义上居住在英国和北爱尔兰的数学家. 每两年颁奖一次.

晨兴数学奖(Chen Xing Prize in Mathematics)　1998 年由香港晨兴集团捐资设立. 用以奖励国际范围内杰出的华人青年数学家. 1998 年得首届晨兴金奖的 2 人：张寿武(哥伦比亚大学)和林长寿(台湾中正大学)；银奖 4 人：程崇庆(南京大学)、刘克锋(斯坦福大学)、杨彤(香港中文大学)和陈汉夫(香港城市大学).

撰　稿　马国选　王翠满　叶景梅　刘培杰
审　阅　齐东旭　裘宗沪

数 学 期 刊

数学期刊(mathematical periodicals) 数学专业刊物.它是传播、交流数学科学学术思想,并及时反映数学科学研究成果的有力工具.它的出现是数学科学事业发展的需要,反过来又有力地促进了数学事业的发展.数学期刊出版事业的兴衰也从一个侧面反映了数学事业的兴衰,因此数学期刊的发展史是数学史的不可忽视的一部分.从伦敦皇家学会于1665年创办国际上最早的科学期刊《皇家学会哲学汇刊》(The Philosopical Transactions of the Royal Society)以后,1826年,克雷尔(Crelle,A.L.)在阿贝尔(Abel,N.H.)建议下创办了世界上第一本数学专业杂志《纯粹与应用数学杂志》(Journal für die Reine and Angewandte Mathematik),至20世纪90年代,全世界的数学期刊,按保守的估计,数目已达2000种以上,特别是在20世纪后半叶,新创期刊数目猛增.数学期刊总数的增加,充分反映了20世纪后半叶的数学事业与数学文献生产的可喜景象.美国数学会主办的《数学评论》(Mathematical Reviews—MR)到1990年初创刊50周年时,已评论了世界各国的数学学术期刊1800余种,其中有400余种杂志的每篇文章都被评论.同时,随着科学技术与数学科学的发展,为提高人们的数学知识水平,使数学知识的普及与数学教育能适应时代的需要,一些反映数学教育与普及类型的数学期刊也随之而产生.此外,为适应数学科学发展中不断出现的新分支学科的需要,为适应科学界、工商界及社会各方面对数学的需要,为使数学研究成果能尽快地在尽可能广泛的范围内进行交流,目前数学期刊的发展已呈现以下趋势:

1.分支学科的专业性期刊、应用数学领域的期刊不断出现.

2.采用英文刊行的期刊越来越多,一大批原非英文期刊都采用各本国文字与英文的混合版,新创办的有影响的学术期刊都用英文出版.

3.期刊形式趋于多样化,有年刊、半年刊、季刊、双月刊、月刊、半月刊,甚至有每年出版24期以上的,有定期与不定期的.

此外,还出现了电子期刊,并将以比印刷式期刊更快的速度发展.

随着数学研究人员之间交往与接触的增多,应用数学的发展与数学应用范围的扩大,期刊中刊载文章的作者也由早期以单个为主,偶尔有合作者,到目前合作者已屡见不鲜.这就使国际数学家之间的合作研究得到了迅速的发展,从而促成合作编辑了大批的国际性数学期刊出版.这也是期刊文献的一个微妙变化.

中国有影响的数学期刊出现稍晚,发展道路曲折,但总的发展过程与国外多有相似之处.

目前,国际上的数学期刊品种数量很多,难以一一介绍,除中国数学期刊尽可能都介绍外,外国的只收入了在中国有资料可查的400余种.这些对从事数学科学研究的人,特别是对那些初涉数学研究的青年数学工作者和其他领域中需用数学的科技人员会有裨益.

中国数学期刊

中国数学期刊(Chinese mathematical periodicals) 中国数学专业刊物.中国数学期刊起步较晚,发展道路曲折,过去的有关书刊中极少提到,在此,对其发展简史略加叙述.1897年7月(光绪二十三年丁酉六月),黄庆澄在浙江温州创办的《算学报》,是中国最早的数学刊物,共出12期,次年6月停刊.以后相继还创办有《算学报》(1899年创刊)、《中外算报》(1900年创刊)、《理学杂志》(1907年创刊)、《数理化月刊》(1908年创刊)、《数学杂志》(1912年创刊)等.这些刊物的内容均为初等数学的基础知识,数学符号用汉字表示,竖排(《数学杂志》例外),每种出版均未超过3期,对后人影响不大.刊物中使用阿拉伯数字、拉丁字母,刊登近代数学内容,对中国数学发展有一定影响的数学期刊,是“五四运动”前后,在教师指导下,以学生为主体创办的四种数理杂志.它们是:

1.1918年4月创刊,北京高师数理学会主办的《数理杂志》,共出版4卷15期,数学内容的篇数占总篇数的81.3%,1925年12月停刊.

2.1918年5月创刊,武昌高师数理学会主办的《数理学会杂志》(1922年改名《数理化杂志》),共出版11期,数学内容的篇数占总篇数的57%,1923年6月停刊.

3.1919年1月创刊,北京大学数理学会主办的《北京大学数理杂志》,共出版3卷5期,数学内容的篇数占总篇数的48.7%,1921年3月停刊.

4.1919年9月创刊,南京高师数理化研究会主办的《数理化杂志》(1922年东南大学接办后改名《数理化》),共出版3卷5期,数学内容的篇数占

33.3%,1924年6月停刊.

这四种杂志,对于近代数学在中国的传播,培养数学人才等方面都曾起过很好作用.它们是中国高等教育事业初期的产物.

20世纪30年代,数学期刊有所发展提高,这期间创办的主要有以下四种:1930年6月创刊,由北平师大数学会主办的《数学季刊》,共出版2卷5期,1934年7月停刊.1933年1月创刊,由武汉大学中等算学月刊社主办,刘正经任主编的《中等算学月刊》,该刊出版两年后,1935年改由武汉、南京、重庆的三个数学团体联合主办,每年出10期为一卷,正式出版了5卷45期,抗日战争期间改出特刊,至少出过5期.它是20世纪前半叶出版期数最多的中国数学期刊.中国数学会成立后主办了两种期刊,都于1936年8月创刊.一种是普及性刊物《数学杂志》,共出版2卷5期;另一种是中国创办的第一种专载创造性论文的学术期刊《中国数学会学报》,苏步青任总编辑,论文质量高,全用外文发表,当时在国际上产生了较大影响.该刊的问世,预示着中国数学发展的一个新时期的开始,然而这刊物创办仅一年,由于抗日战争的全面爆发,《中国数学会学报》出版2卷共4期便停刊了.这个时期创办的后3种刊物,新中国成立后都得以复刊,成为中国现行期刊中历史最悠久的3种数学期刊.

抗日战争胜利后,还零星出版过几种刊物,如:1946年4月在成都创办的《中等数学杂志》,出版10期,于1949年11月停刊;1947年3月由南中国数学会创办的《数学教育》和1947年5月由北京大学学生创办的《中等算学》,各出版了两期都于当年停刊.这几种期刊内容均是初等数学和试题解答,简装本,影响面很小.

20世纪50年代,新中国成立之初,数学期刊较前有大的发展.1950—1951年首先恢复了20世纪30年代创办的3种期刊,即现行的《数学通讯》、《数学通报》和《数学学报》.以后又陆续创办了一些数学刊物,只是有的未能延续下来,它们是1956年7月在河南创办的《数学教学通讯》,共出版23期;1958年9月在西安创办的《农业中学数学教学通讯》,共出版11期;1958年10月在天津创办的《红旗数学汇刊》,共出版5期;……它们全属于初等数学普及刊物,办刊时间都不长.

中国第二种数学学术期刊是1955年5月创办的《数学进展》,华罗庚任主编.中国科技情报所重庆分所译自苏联的系列文摘性学术刊物《数学文摘》,从1958年开始分专业陆续在中国翻译出版.1960年,中国科技情报所办过一种文摘杂志《中国数学文摘》,仅出了1期便停了.进入20世纪60年代,刚发展起来的数学教学普及期刊,由于种种原因,多数都在1960年停刊,仅剩下《数学通报》一种仍继续出版.数学学术期刊继续出版,而且略有发展:1964年8月,中国科学院数学研究所和计算技术研究所合办的《应用数学与计算数学》创刊,赵访熊、徐献瑜任主编,是中国创办的第一份专业性数学学术期刊.该刊物的诞生,标志着中国在应用数学和计算数学方面已具有一定规模.1964年1月,中国科技文献编辑委员会和中国科技情报所重庆分所合办了一种译刊《数学译丛》.

1966年至1976年,由于"文革"的影响,全国只出版9种数学刊物.

1978年,全国科学大会召开,许多停办的期刊纷纷复刊,新刊一个紧接一个出现.1978年,数学期刊总数有16种,至1985年发展到了83种,1988年达到91种,尚未计入这期间淘汰停刊的20余种.在数量发展的同时,品种也逐趋完善,学术水平逐渐提高.1980年出现中国办的外文版数学期刊,这是自1940年《中国数学会学报》停刊40年后,重新创办的外文版中国数学刊物,是中国数学走向世界的标志之一.

20世纪80年代末至90年代,中国数学期刊进行了整顿、规范、提高,逐渐向国际期刊标准靠拢.同时,在中国数学期刊的发展中出现了以下一些变化:

1.实行期刊标识系统化、正规化.从1989年起,现行期刊逐步使用中国标准刊号CSSN(China Standard Serial Numbering),中国标准刊号(CSSN)由一个以"ISSN"为标识的国际标准刊号(International Standard Serial Numbering-ISSN)和一个以中国国别代码"CN"为标识的国内统一刊号两部分组成,其一般格式如下:

$$\frac{\text{ISSN}\ \times\times\times\times-\times\times\times\times}{\text{CN}\ \times\times-\times\times\times\times/YY}.$$

这是中国期刊长期稳定的标准编码.从1993年起,标注以期刊的ISSN和期次号等信息转换为EAN的条形码.条形码作为每本期刊的惟一性代码存在,对流通管理自动化起着重要作用.

2.学术期刊由综合性向专业化发展,文种由中文向英文发展.有的学术期刊,采用中外文(主要是英文)混合版,且外文论文数量逐步增加,或全改用英文出版,如《东北数学》等;新增学术期刊,几乎都是英文版.英文版数学期刊,在20世纪90年代增长速度较快,截止1996年底已有18种.

3.部分原为中学数学教学服务的期刊,改为了为高校数学教学与研究服务.读者对象由中学师生,改为了以大学生为主.个别新创办的普及数学刊物,都具有自己的鲜明特色.

4.学术期刊及部分教学期刊,增加英文并列题名,提供中、英文摘要,试行在版主题标引并增加分

类号,提供作者相关信息,给出收稿日期等.

5. 与国外著名出版公司合作,出版中国编辑的外文版期刊,拓广销路,扩大影响,提高中国数学期刊的国际影响.

6. 积极提高论文的学术水平,对于有重大价值的科研成果,做到发表快速及时;积极提高刊物质量,争取中国数学期刊中更多的论文选入《科学引文索引》(SCI)系列.

注:"中国数学期刊"项目下介绍的 93 种数学期刊的宗旨、栏目等,多摘自 1996 年年底前原刊资料.有些期刊的主编或副主编具体人选指 1996 年年底在任者,此后新的继任者也未增补.个别期刊在 1996 年以后,有重大变动者,如停刊、改版等,则增加进展资料,如《湖南数学通讯》、《组合年刊》等.

科学(上海)(Science) 1915 年 1 月创刊.刊号:CN31—1385/N,4 — 451;ISSN0368 — 6396,BM1188.《科学》是中国现代科学史上历时最长的一份综合性科学刊物,对推动中国现代数学的发展做出过重要贡献.1915 年创刊以来经历了三个阶段:第一阶段由 1915 年至 1950 年第一次停刊止,共出 32 卷,每卷 12 期,该刊的创始人之一杨杏佛任第一任主编.第二阶段由 1957 年复刊至 1960 年停刊止,出了第 33—36 卷,名为季刊,实际只出了四卷共 12 期.第三阶段是 1985 年复刊至今,主编:周光召.由《科学》杂志编辑委员会编辑,编辑部地址:上海瑞金二路 450 号.上海科学技术出版社出版,中国国际图书贸易总公司(北京 399 信箱)对国外发行.1985—1991 年为季刊,1992 年起改为双月刊.截止 1996 年底,三个阶段总共出版 48 卷 453 期.

《科学》在纪念 80 周年刊庆时提出:传播科学,提高国力的办刊宗旨,以全视野地综合介绍现代科学技术的前沿发展为主要内容.以学术性与普及性兼顾的综述,即"隔行能看懂,本行受启发"的高级科普表述为主要表述方式.主要读者对象是受过一定科学训练(大专以上程度)的人.

数学通讯(武汉)(Bulletin of Middle School Mathematics) 1933 年 1 月创刊.刊号:CN42—1152,38—23;ISSN0488—7395.创刊初期,刊名为《中等算学月刊》,刘正经主编,至少出刊 50 期,后因抗日战争停刊.1950 年 7 月,武汉市数学会在原基础上重新创刊,刊名改为《武汉数学通讯》,总刊期重新起算.1952 年(总第 19 期)起,刊名改为《数学通讯》.1961 年停刊.重新创刊后,先后担任主编的有刘正经、詹学海、朱东河、齐永魁.1980 年 1 月,《数学通讯》复刊,由湖北省数学会、武汉数学会和华中师范大学合办,编辑部设在华中师范大学数学系.1980—1981 年为双月刊,1982 年起改为月刊.复刊后,李修睦、梁肇军、邓引斌先后担任主编,1996 年朱翠蓉担任副主编.

《数学通讯》是中国创办时间最长的数学教学期刊.它以"面向中学,服务教学,着眼普及,适当提高"为宗旨,现辟有"教学纵横"、"专题写作"、"复习参考"、"课外园地"四个大栏目,并在此基础上还适当增设了小栏目.主要读者对象为中学师生及中等数学爱好者.

数学学报(北京)(Acta Mathematica sinica) 1936 年 8 月创刊.刊号:CN11—2038/O_1,2—502;ISSN0583—1431,BM48.中国数学会主办.中国最早创办的数学学术性期刊.1936 年在上海创刊时,刊名为《中国数学会学报》,主编:苏步青.论文全用外文发表,出版了 2 卷共 4 期,因抗日战争于 1940 年停刊.1951 年在北京重新创刊,刊名改为《中国数学学报(新刊)》,卷期另从第 1 卷计起.从 1952 年(第 2 卷)开始,刊名又改为《数学学报》,一直沿用至今.1951—1966 年的主编为华罗庚,这一阶段的论文主要用中文发表.原系季刊,1964 年(第 14 卷)起改为双月刊.1966 年 7 月,再次停刊.第二次复刊是 1974 年 3 月,卷期连续,季刊,从 1979 年(第 22 卷)起又改为双月刊.1974 年第二次复刊以后的主编依次为张素诚(1974—1981)、王元(1982—1988)、杨乐(1989—1992)、陈景润(1993—1996)、李炳仁(1996—).编辑部设在中国科学院数学研究所,地址:北京中关村.科学出版社出版.

《数学学报》主要刊登纯粹数学和应用数学方面有独创性的论文.主要读者对象为专业研究人员、研究生、大学教师.

数学通报(北京)(Mathematics Bulletin) 1936 年 8 月创刊.刊号:CN11—2254/O_1,2—501;ISSN0583—1458.《数学通报》的前身是中国数学会于 1936 年 8 月在上海创办的《数学杂志》,1939 年 11 月停刊,共出刊 5 期,总编辑为顾澄.1951 年 11 月,中国数学会委托北京师范大学重新创刊,刊名改为《中国数学杂志》,1953 年起改称现名《数学通报》.重新创刊初期,总编辑为华罗庚和傅种孙,从 1952 年 8 月起,傅种孙任总编辑.1959 年起总编辑改称主编,由丁尔升担任,1966 年出版至 158 期后停刊.1979 年 7 月复刊,丁尔升继任主编,1998 年起主编为刘绍学.《数学通报》编辑委员会编辑、出版,编辑部设在北京师范大学.月刊.

《数学通报》的主要任务是为提高中等学校数学教师的数学素质、教学水平和开阔眼界、活跃思想服务.发表具有相当学术价值或创造性的数学教育研究成果,开展学术交流,深入浅出地介绍数学理论的基础知识、基本思想和方法,帮助数学教师提高业务水平;讨论教学中带有普遍性的迫切问题;反映国内外数学教育的进展和动向.主要栏目有:数学教育、

教学园地、解题教学、应用数学研究、教学经验交流、国外数学、数学史话、问题讨论等. 主要读者对象为中等学校数学教师.

科学通报(北京)(Chinese Science Bulletin) 1950 年 5 月创刊. 刊号:CN11—1784/N,2—177;ISSN0023—074X,SM41. 中国科学院主办. 历任主编:恽子强、竺可桢、陶孟和、张文裕、严济慈、叶笃正、严东生,1997 年起由周光召任主编. 编辑部地址:北京东黄城根北街 16 号. 原由科学出版社出版,从 1996 年起改由《中国科学》杂志社出版,中国国际图书贸易总公司(北京 399 信箱)对国外总发行. 1966 年曾一度停刊,1973 年 7 月复刊. 复刊后,1973—1978 年为月刊,从 1979 年开始改为半月刊延续至今.

《科学通报》是自然科学综合性学术刊物. 力求及时、扼要地报道自然科学各学科的基础研究和应用研究方面具有创造性的、高水平的和有重要意义的最新研究成果的论文. 刊物设有以下栏目:综合评述、专题评述、特邀论文、研究简报、研究通讯、科技消息、学术动态、论著评介、问题讨论、科学论坛等. 1996 年以前,以发表"研究简报"和"研究通讯"为主. 主要读者对象为国内外科技工作者.

中国科学·A 辑(中文版)(北京)(Science in China (Series A)) 1950 年创刊. 刊号 CN11—1786/N,2—807;ISSN1006—9232,M40A. 中国科学院主办.《中国科学》1950 年创刊时为中文版,1952 年外文版创刊后,中文版停刊. 1973 年 2 月中文版复刊至今. 复刊后的历任主编:张文裕(1973—1978)、严济慈(1979—1984)、叶笃正(1984—1988)、严东生(1988—1996),1997 年起由周光召任主编. 编辑部地址:北京东黄城根北街 16 号. 原由科学出版社出版,1996 年起改为《中国科学》杂志社出版,中国国际图书贸易总公司(北京 399 信箱)对国外总发行. 1973 年为季刊,1974—1978 年为双月刊,1979 年以后为月刊,1982 年起《中国科学》(中文版)分为 A、B 两辑. 为适应国内外读者按专业订阅的要求,从 1996 年开始又分为 A、B、C、D、E 五辑出版. 数学一直被收入 A 辑,A 辑为月刊.

《中国科学》(中文版)的任务是刊载中国自然科学各学科的基础研究和应用研究方面具有创造性的、高水平的和有重要意义的最新研究成果的论文,以促进国内外的学术交流. A 辑刊登的学科为数学、物理学、力学和天文学. 主要读者对象为国内外科技工作者.

中国科学·A 辑(英文版)(北京)(Science in China (Series A)) 1952 年 10 月创刊. 刊号:CN11—1787/N;ISSN1006—9283. 原刊名《Scientia Sinica》(1952—1988),1989 年起改用现刊名. 中国科学院主办,是 20 世纪 50 年代中国惟一以外文出版,反映中国科研成果的自然科学学术刊物. 1966 年 6 月停刊,1973 年 2 月复刊. 历任主编:钱学森、恽子强、吴有训(1962—1966)、张文裕(1973—1978)、严济慈(1979—1984)、叶笃正(1985—1988)、严东生(1989—1996),1997 年起主编由周光召担任. 编辑部地址:北京东黄城根北街 16 号. 原由科学出版社出版,1996 年起改为《中国科学》杂志社出版,并负责国内发行. 国外由英国 Pergamon 出版公司经销. 1952—1956 年为季刊,1957 年改为双月刊,1958 年起改月刊,直至 1966 年停刊. 1973 年 2 月复刊后至 1978 年为双月刊,1979 年起改为月刊. 1982 年起《中国科学》(英文版)分为 A、B 两辑,从 1996 年开始又分为 A、B、C、D、E 五辑出版. 数学论文一直被刊登在 A 辑,A 辑为月刊.

《中国科学》(英文版)的任务是刊载中国自然科学各学科的基础研究和应用研究方面具有创造性的、高水平的和有重要意义的最新研究成果的论文,以促进国际学术交流. A 辑刊登的学科为数学、物理学、力学和天文学. 主要读者对象为国内外科技工作者.

数学研究(厦门)(Journal of Mathematical Study) 1954 年 1 月创刊. 刊号:CN35—1177/O_1;ISSN1006—6837,DK35006. 原名《厦门数学通讯》,中国数学会厦门分会主办,1954—1958 年共出版 17 期,于 1958 年 10 月停刊. 1979 年 9 月复刊. 编辑部一直设在厦门大学,从 1986 年起,厦门大学为主办单位. 1992 年更名《数学研究记事》,1994 年经国家科委批准,正式改名为《数学研究》,山西师范大学为协办单位. 主编:方德植(1954—1985)、陈文忠(1986—);副主编:李秉彝、张福基、陈奕培、赵俊宁、钟同德、侯晋川、郭柏灵、辜联昆、蒋尔雄. 由《数学研究》编辑委员会编辑、出版、发行,编辑部地址:厦门大学数学研究所. 中国出版对外贸易总公司(北京 782 信箱)对国外总发行. 季刊(1988 年后曾一度改为半年刊).

《数学研究》为综合性数学学术刊物,其宗旨是推进数学科学研究,及时报道数学理论成果与应用数学成果. 主要刊载有关数学的创造性论文、研究简报、综合论文和专题论述等. 主要读者对象是数学工作者、大专院校数学教师、理工科研究生、数学科学各专业高年级学生及有关科技工作者与其他数学爱好者.

高等数学研究(西安)(Studies in College Mathematics) 1954 年 4 月创刊. 刊号:CN61—1315/O_1;ISSN1008—1399. 原名《数学学习》,中国数学会西安分会(即现陕西省数学会)主办. 创办初期,刘亦珩任编辑委员会主任委员,出版 1 卷 4 期

后，第2年停刊. 1980年12月复刊，当时的陕西省数学会理事长魏庚人兼总编辑，出版7期后，于1983年改由陕西省数学会和西北工业大学联合主办，刊名改为《数学学习》(高等数学季刊)，1998年改为现名. 主编：陆庆乐(1983－1996.8)、潘鼎坤(1996.8－1998.8)、傅恒志(1998.8－　)，副主编：聂铁军(常务)、孙家永、龚冬保、张肇炽、王寿生、王润孝、周肇锡. 编辑部设在西安市西北工业大学应用数学系. 国内由编辑部发行，中国出版对外贸易总公司(北京782信箱)对国外总发行. 季刊.

《高等数学研究》以辅导高等数学和其他工科数学基础课程的学习为基本宗旨. 各期主要篇幅都配合“高等数学”的教学进度，刊登内容包括有关专题论述、短篇创作、数学模型、数学应用、解题方法与技巧，全国高校高等数学试题、研究生入学试题、数学史料、各级数学竞赛资料、学科介绍、教师园地、学生论坛等. 主要读者对象是各类院校大学生，以及大学、大专、中专、中学数学教师，其他数学工作者和科技人员.

中学数学研究(广州)(Studies in School Mathematics)　1955年2月创刊. 刊号：CN44－1140/O_1，46－82. 华南师范大学主办. 编辑部设在华南师范大学数学系. 创刊初期，刊名为《中学数学》，季刊. 从1957年11月起改为月刊. 1960年6月出版43期后停刊. 1982年元月复刊，刊名改为《中学数学研究》，月刊，原任主编：曾如阜；1987年起钟集担任主编.

《中学数学研究》的办刊宗旨是：介绍现代数学的基本知识，中学数学教师的先进教学经验，国内外中学数学教材教法的研究和动态，帮助中学数学教师提高业务水平和教学能力，以适应“四化”的要求. 刊物设有以下主要栏目：中学数学教学现代化改革试验的经验、教材教法分析与评论、解题与证题方法、国内外教学经验和动态、现代数学基本知识、数学的应用、数学史、复习指导、中学生园地等. 主要读者对象：中学、中专数学教师，高中学生及数学爱好者.

数学进展(北京)(Advances in Mathematics)　1955年5月创刊. 刊号：CN11－2312/O_1，2－503；ISSN1000－0917，Q604. 中国数学会主办. 1955－1966年，由中国科学院数学研究所承办. 主编：华罗庚，科学出版社出版，季刊. 其间，1959－1961年曾停刊3年，刊物1966年改为双月刊，但因“文化大革命”，仅出版了4期，于1966年7月停刊. 此前，《数学进展》共出版9卷36期. 1981年8月刊物复刊后，改由北京大学数学系承办，主编：段学复. 1988年以后编辑委员会四年换届一次，主编依次为张芷芬、丁石孙、钱敏. 编辑部设在北京大学数学系. 从1985年起，刊物从科学出版社转至北京大学出版社出版. 1992年由季刊改为双月刊.

《数学进展》登载反映数学各分支及有关边缘学科最新进展和发展动态的综述报告，目的是帮助青年数学工作者能够迅速地达到可以从事研究工作的水平. 还登载创造性研究论文、重要研究成果简报、国家自然科学基金和数学天元基金的文告和信息、国内外重要数学学术会议简讯，以及九章数学书店新书目录等. 主要读者对象为专业研究人员，高等学校教师、研究生，广大科技工作者，以及从事高级财经活动的人员.

数学教学(上海)(Mathematics Teaching)　1955年7月创刊. 刊号：CN31－1024，4－357. 华东师范大学数学系主办. 20世纪50年代的主编为孙泽瀛. 原系季刊，1957年改为月刊，1960年6月出版至第6期后停刊. 1979年3月复刊，主编为李锐夫，余元希从创刊至1987年以前一直担任副主编，主持编辑工作；1987年起主编为张奠宙，常务副主编为邹一心. 编辑部设在上海市华东师范大学数学系. 华东师范大学出版社出版. 1979年、1980年两年共出版了3期，1981年起定为双月刊.

《数学教学》以研究中等学校数学教学问题为主要任务. 其办刊方针是立足上海，面向全国；注重质量，讲究实效. 重视发表带有方向性、引导性的文章. 其着眼点是：作为师范大学，应对中学数学教学改革做出贡献. 刊物主要栏目包括：数学教学改革、试验教材编写、教学专题研究及问题讨论、教学经验介绍、国内外教改动态及书刊评价、现代数学基础知识简介、高考试题分析及数学竞赛等. 主要读者对象为中等学校数学教师、高等师范院校数学系师生等.

福建中学数学(福州)(Fujian Middle School Mathematics)　1958年8月创刊. 刊号：CN35－1084/O_1，34－9. 原名《数学教学月刊》，1960年10月出版至总第25期后停刊. 1980年6月复刊，并更名为《福建中学数学》，由福建师范大学数学系、福建省数学会联合主办、出版. 历任主编：欧阳琦、林章衍. 编辑部设在福州市福建师范大学数学系. 原系月刊，复刊后为双月刊.

《福建中学数学》注重探讨数学教育理论及其在教学实践中的应用. 主要栏目有：数学教学、初等数学探讨、解题方法、数学竞赛、学生习作等. 主要读者对象为中学数学教师、学生及数学爱好者.

科学通报(英文版)(北京)(Chinese Science Bulletin)　1966年1月创刊. 刊号：CN11－1785，ISSN0250－7862. 中国科学院主办. 原用汉语拼音名称《Kexue Tongbao》，1989年起改用英文的现名. 1966年创刊时英文版为月刊，出版了9期，至同年9月停刊，于1980年1月复刊. 复刊后历任主编：

严济慈、叶笃正、严东生，1997 年起由周光召任主编. 编辑部地址：北京东黄城根北街 16 号. 原由科学出版社出版，1996 年开始由《中国科学》杂志社出版，并负责国内发行. 国外由英国 Pergamon 出版公司经销. 1980－1985 年刊物为月刊. 1986 年 1 月，《科学通报》改为半月刊. 此后，英文版与中文版的卷号同步.

《科学通报》(英文版)是中国出版的自然科学综合性学术刊物. 刊物力求及时、扼要地报道自然科学各学科的基础研究和应用研究方面具有创造性的、高水平的和有重要意义的最新研究成果. 刊物设有以下栏目：综合评述、专题评述、特邀论文、研究简报、研究通讯、科技消息、学术动态、论著评介、问题讨论、科学论坛等. 1996 年以前，以发表“研究简报”和“研究通讯”为主. 主要读者对象为国内外科技工作者.

数学的实践与认识(北京)(Mathematics in Practice and Theory)　1971 年 4 月创刊. 刊号：CN11－2018/O_1，2－809；ISSN1000－0984，Q47. 刊物由中国科学院数学研究所创办. “文化大革命”结束后，1978 年中国数学会恢复活动，中国科学院数学研究所将《数学的实践与认识》交给了中国数学会主办，由中国科学院系统科学研究所承办. 从 1997 年起，转为北京大学数学科学学院承办. 历任主编：张素诚、成平、林群. 科学出版社出版，中国国际图书贸易总公司(北京 399 信箱)对国外总发行. 1971 年刊物出版了 3 期，从 1972 年起刊物改为季刊.

《数学的实践与认识》刊登数学工程技术、自然科学以及社会科学中的应用成果、理论、方法和经验. 沟通数学和应用数学工作者与其他科技工作者之间的联系，推动应用数学在中国的发展. 刊物主要栏目有：应用成果、问题研究、知识与进展、学科介绍、方法介绍、数学建模、数学建模竞赛、高等数学园地、数学史，研究简报等.

中学数学教学参考(西安)(Maths Teaching in Middle School)　1972 年 10 月创刊. 刊号：CN61－1032/G_4，52－30；ISSN1002－2171，M4267. 陕西师范大学主办. 原刊名《中学数学教学参考资料》，1974 年(总第 13 期)更名为《中学数学教学参考》. 刊物从创刊至 1985 年，由陕西师范大学数学系编辑，王至善、胡宗慎、李珍焕曾先后主持编辑部工作. 1985 年，陕西师范大学《中学教学参考》杂志社成立后，《中学数学教学参考》转由杂志社出版，中学数学教学参考编辑部编辑. 编辑部设在陕西师范大学校内. 历任主编有：兰纪玉(1988－1989)、高安民(1990－1993)、石生民(1994－)，副主编为：叶向东. 创刊初期，不定期出版，1974 年定为双月刊，从 1989 年起改为月刊.

《中学数学教学参考》以“真诚地为中学数学教学服务”为办刊宗旨，以“科学性、知识性、实用性、资料性”为办刊方针. 刊物的主要栏目有：数学教育、教材、教法、学法，课例点评、教研指南、“思想・方法・技巧”、“复习・考试・试题”、初数新探、竞赛园地等. 该刊曾被列入“全国中等教育类核心期刊”，1995 年和 1996 年连续被评为“陕西省一级期刊”. 该刊主要读者对象为高、初中数学教师及教学研究人员.

中央研究院数学研究所集刊(英文版)(台北)(Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica)　1973 年 3 月创刊. 台版证第 10863 号；刊号：ISSN0304－9825. 台湾中央研究院数学研究所主办、出版. 主编：黄启瑞(中央研究院数学研究所研究员). 季刊.

《中央研究院数学研究所集刊》(英文版)是数学学术期刊，用英文发表数学理论和应用数学方面的研究论文. 主要读者对象为从事数学研究及数学教育的研究人员、大专院校师生.

中国数学杂志(英文版)(台北)(Chinese Journal of Mathematics)　1973 年 3 月创刊. 台版证第 37 号；刊号：ISSN0379－7570.《中国数学杂志》编辑委员会主办. 主编：萧胜彦. 编辑部设在台北市台湾大学数学研究推动中心. 台湾数学会出版、发行. 季刊. 1997 年改名为《台湾数学期刊》(Taiwanese Journal of Mathematics)卷期从 1 卷 1 期计起.

《中国数学杂志》(英文版)是综合性数学学术期刊. 全用英文发表数学研究论文和综述性评论等. 主要读者对象为数学研究人员、大专院校师生.

东吴数理学报(英文版)(台北)(Soochow Journal of Mathematics)　1975 年 1 月创刊. 刊号：ISSN0250－3255. 台湾私立东吴大学数学系《数理学报》编辑委员会主办. 主编为东吴大学数学系在任系主任. 东吴大学出版、发行. 季刊.

《东吴数理学报》用英文发表具有创见性的数学研究论文. 主要读者对象为从事数学研究与教育的研究人员、大专院校师生等.

数学传播(台北)(Mathmedia)　1976 年 4 月创刊. 台版证第 1495 号. 台湾中央研究院数学研究所《数学传播》编辑委员会主办. 台湾中央研究院数学研究所出版、发行. 1976 年为试刊，1977 年开始计卷. 季刊.

《数学传播》以传播数学知识和促进数学教育为宗旨. 刊登与数学有关的专题论述、教学心得、问题研讨、书评书介、人物传记等. 以中学师生为主要读者对象，也包括大学生、研究生等.

应用数学学报(北京)(Acta Mathematicae Applicatae Sinica)　1976 年 8 月创刊. 刊号：CN11－2040，2－822；ISSN0254－3079，Q49. 中国数学会主

办.中国科学院应用数学研究所承办.编辑部设在北京市2734信箱.历任主编:张素诚、华罗庚、越民义、丁夏畦.前两年共出刊6期未计卷,从1978年开始计为第1卷.季刊.科学出版社出版.

为促进国际学术交流,1984年《应用数学学报》另创英文版,刊名简称AMAS(English Series),卷期另计.原刊为中文版,两版论文不重复.主要刊登应用数学领域的创造性研究论文.报道国内外应用数学各学科、分支的发展动态、综合评论等.主要读者对象为广大应用数学研究工作者.

中学教研(数学)(金华)(Teaching and Research of Middle School(Mathematics)) 1977年10月创刊.刊号:CN33-1069,32-17;ISSN1003-6407.浙江师范大学主办.原名《教学与研究(中学数学)》,1988年1月改称现名《中学教研(数学)》.历任主编:王祖樾、朱玉、徐士英、徐宪民,历任常务副主编:陈灿辉、王岳庭、余文熊、傅克昌.浙江师范大学《中学教研》编辑部编辑、出版,地址:浙江省金华市高村.原为双月刊,1985年起改为月刊.

《中学教研》(数学)以服务中学教学、服务中学师生为宗旨,以促进中学数学教学改革、交流中学数学教学经验、提高数学教学质量为中心任务.刊物的主要栏目包括:教材教法探讨、解题方法技巧、初等数学研究、竞赛之窗、中学生园地等.主要读者对象为中学生、中学数学教师.

计算数学(北京)(Mathematica Numerica Sinica) 1978年2月创刊.刊号:CN11-2125,2-521;ISSN0254-7791,Q50.原由中国科学院计算中心主办,1995年,中国科学院计算数学与科学工程计算研究所成立,《计算数学》转为该所主办.主编先后为冯康、石钟慈.《计算数学》编辑委员会编辑,编辑部地址:北京中关村.原由科学出版社出版,后由《计算数学》编辑委员会出版.季刊.第1年未计卷,卷号从1979年起算.

《计算数学》以交流计算数学方面的研究成果,促进计算数学学科的发展为宗旨.主要刊登计算数学及有关方面的创新性论文,以及以计算机为工具解决国民经济问题的实用性文章.

中学数学教学(合肥)(Teaching Mathematics in Middle School) 1978年6月创刊.刊号:CN34-1070/O_1,26-7;ISSN1002-4123.安徽教育学院、安徽省数学会、安徽师范大学数学系联合主办.编辑部设在安徽教育学院,并由该院出版,地址:合肥市金寨路.历任主编:雷垣、张智珊、张国铮、贾汉凯;副主编:胡炳生、薛凌、郭世平.1978年、1979年各出2期,1980-1983年为季刊,1984年起改为双月刊.

《中学数学教学》致力探索与传播数学教学理论与教改实践经验,竭诚为提高中学数学教学质量服务.主要栏目有:教学参考、初数研究、解题方法、教改信息、经验交流、数学竞赛、错在哪里、教学设计与评点等.主要读者对象是中学数学教师.该刊连续多次被评为安徽省优秀期刊,还被表彰为华东地区优秀期刊和全国优秀科技期刊.

中学数学月刊(苏州)(Middle School Mathematics Monthly) 1978年7月创刊.刊号:CN32-1231/O_1,28-75;ISSN1004-1176.原名《中学数学研究与讨论》,1980年改名为《中学数学》,1997年再次改名为《中学数学月刊》,同时更改国内统一刊号为CN32-1444/O_1.由苏州大学(原江苏师范学院)数学系主办.现由苏州大学数学科学学院主办.历任主编:杜午初(1978-1981)、毛振璇(1982-1983)、唐复苏(1984-1986)、张镜清(1987)、陈必胜(1988-1995)、唐复苏(1995-),1996年时副主编:鲍建生.《中学数学月刊》编辑部编辑、出版,地址:江苏省苏州市十梓街1号.1978—1980年为季刊,共出10期,1981年改为双月刊,1987年7月总第50期起改月刊.

《中学数学月刊》坚持为中学数学教学服务,为广大读者服务的办刊方针.内容反映时代气息,贴近中学实际.刊物的主要栏目有:数学教育、教材教法、教学随笔、复习之友、专题研究、解题方法、正误辨析、集锦、竞赛之窗、试题选登等.主要读者对象为中学数学教师和学生、高师院校学生及数学爱好者.

中学数学(武汉)(Middle - School Mathematics) 1979年3月创刊.刊号:CN42-1167,38-69;ISSN1002-7572.湖北大学(原武汉师范学院)数学系主办,1982年起湖北省教育学会中学数学教学研究会参与主办.历任主编:肖竞择(1979-1990)、江志(1991-1992)、安明道(1993-),主持编辑工作的常务副主编:陈斌战(1979-1987)、汪江松(1987-).编辑部设在武汉市湖北大学数学系.1979-1982年为季刊,1983年为双月刊,1984年起改为月刊.

《中学数学》的办刊宗旨是:为促进中学数学教学改革,提高中学数学教学质量服务.以面向中学、服务教学、联系实际、排难解疑为办刊方针.刊物的主要栏目有:名师新篇、教材教法研究、疑难解析、专题写作、解题方法与技巧、教坛新秀、数学诡辩、中学生园地等.主要读者对象为中学数学教师、教学研究工作者、高中生和数学爱好者.

中学数学教学研究动态(上海)(Proceedings in Middle School Mathematics Teaching and Research) 1979年4月创刊.刊号:CN31-1443.上海教育学院主办.首任主编:凌康源,常务副主编毛宏德;1985年9月起主编为刘瘦侠,1996年时副主编:

王伟钰.由《中学数学教学研究动态》编辑部编辑、出版、发行.编辑部设在上海市延安西路上海教育学院数学系.创刊第1年出刊4期,1980—1982年为双月刊,1983年起为季刊.不定期出版了数期专刊.1999年停刊.

《中学数学教学研究动态》最初是为交流上海市各区、县的中学数学教学研究成果、进行教学研究协作、积累研究资料而创办的.以后逐渐扩展到全国,以帮助中学数学教师提高教学与科研能力为己任.刊登内容主要有:中学数学教师晋级进修、教材改革与教法研究、先进教法与科研成果的推广、复习指导、课外活动辅导、竞赛讲座、译文选载、专题写作、中学生园地等.主要读者对象为中学数学教师、教研员,高等师范院校数学系学生及数学爱好者.

高等学校计算数学学报(中文版)(南京)(Numerical Mathematics:A Journal of Chinese Universities) 1979年10月创刊.刊号:CN32—1170/O_1,28—17;ISSN1000—081X,Q460.由国家教育委员会委托南京大学主办.主编:何旭初(1979—1990)、苏煜城(1990—).副主编:蒋尔雄.编辑部设在南京大学数学系.《高等学校计算数学学报》编辑部出版.1979—1980年为半年刊,从1981年第3卷起改为季刊,由中国国际图书贸易总公司(北京399信箱)对国外发行.1992年又创办了该刊的英文版,原刊为中文版.中、英文两种版本刊登的文章内容互不重复.

《高等学校计算数学学报》(中文版)为全国性学术刊物,以加强高等学校计算数学学科的学术交流,促进计算数学的理论研究与应用研究的开展为宗旨.主要刊登计算数学理论与方法的研究,计算数学上有价值的应用研究,也适量刊登国内外计算数学各分支发展的综合述评.主要读者对象为从事计算数学研究的科研人员,高等学校有关师生,以及从事科学计算的工程技术人员.

数学教学通讯(重庆)(The Communications on Mathematics Teaching) 1979年10月创刊.刊号:CN51—1182/G_3,78—18;ISSN1001—8875.重庆市数学会和西南师范大学数学系联合主办.历任主编:文正蒙(1979—1982)、陈重穆(1982—1989)、周忠群(1990—1993)、曾崇闿(1993—).编辑部设在重庆市北碚西南师范大学数学系.1979年出刊1期,从1980年起为双月刊.

《数学教学通讯》的宗旨和任务是:坚持为普及九年制义务教育服务,紧密联系中学数学教学实际,努力提高中学数学教师的业务水平和教学能力.刊物的主要栏目有:数学教育研究、教学经验、教改实验、初中数学、专题研究、短文集萃、解题方法与技巧、竞赛之窗、学生习作等.主要读者对象是中学数学教师、学生等.

上海中学数学(上海)(Shanghai Secondary School Mathematics) 1979年12月创刊.刊号:CN31—1572/G_4,4—369.上海师范大学数学系主办.原名《中学数学教学》,其间在1982年第3期(总第12期)曾用刊名《中学数学教师(丛刊)》.1990年改称现名《上海中学数学》.历任主编:龚伦超(1979—1983)、应制夷(1983—1990)、吴望名(1990—),常务副主编:周锡祥.由《上海中学数学》编辑部编辑、出版,编辑部地址:上海市桂林路上海师范大学数学系.1985年以前为季刊(其中1979年出1期,1983年出3期).从1986年起改为双月刊.

《上海中学数学》宗旨是:立足上海,面向全国;密切联系中学实际,全心全意为提高中学数学教学质量,促进中学数学教育改革服务.刊物的主要栏目有:名师授课录、国内外中学数学教改动态、数学教育思想方法、教材教法、初(高)中数学专题研究、竞赛、高考试题分析、数学史话、译文、学生写作、资料索引等.主要读者对象为中学数学教师.

数值计算与计算机应用(北京)(Journal on Numerical Methods and Computer Applications) 1980年3月创刊.刊号:CN11—2124,2—413;ISSN1000—3266,Q409.原由中国科学院计算中心主办.1995年,中国科学院计算数学与科学工程计算研究所成立后,改由该所主办.《数值计算与计算机应用》编辑委员会编辑.科学出版社出版.季刊.主编先后为冯康、石钟慈.

《数值计算与计算机应用》是关于科学工程计算及其软件的应用性学术刊物.主要刊登在应用计算机解决各种科研或工程问题中的数学模型、计算方法、软件方法与技术诸方面所取得的创造性成果和研究报告,并简要报道重要的学术动态,以促进多种学科在数值计算及其软件的理论、方法和技术方面交叉渗透与发展.设有学术论文与研究报告、综合性文章与新学科方向介绍、研究简报、新算法与软件技巧、学术动态等栏目.

数学译林(北京)(Mathematical Advances in Translation) 1980年5月创刊.刊号:CN11—2418;ISSN1003—3092.中国科学院数学研究所主办.主编:田方增,常务副主编:袁向东.《数学译林》编辑委员会编辑、出版、发行.编辑部地址:北京中关村中国科学院数学研究所内.1980年、1981年先出2卷共6期,试刊.1982年3月正式出版.季刊.从1982年起计卷号.

《数学译林》是综合性数学译刊,翻译英、日、法、德、俄、意等多种文字的与数学有关的资料,以介绍国际数学进展,传播现代数学知识,宣传数学历史与数学文化信息,活跃数学界学术思想为宗旨.刊物的

主要栏目包括：综合报告、学科与专题介绍、进展简介、数学史、人物与传记、数学争鸣、数学教育、数学小品等.

应用数学与力学（重庆）（Applied Mathematics and Mechanics） 1980年5月创刊. 刊号：CN51－1137/O_1，78－21；ISSN1000－0887，M－295. 重庆交通学院主办. 主编：钱伟长；副主编：谈镐生、叶开沅、陈至达. 编辑部地址：重庆大坪大黄路107号. 原由四川人民出版社、四川科技出版社出版. 从1985年第6卷第4期起改由重庆出版社出版至今. 创刊第1年出版了3期为第1卷，1981－1984年为双月刊，1985年从第6卷起改为月刊.

《应用数学与力学》主要发表力学、力学中的数学方法和与近代力学密切相关的应用数学的创造性学术论文，反映应用数学和力学的最新研究成果；促进学术交流，推动应用数学和力学的发展. 刊物设有学术论文、学术讨论、研究简报等栏目. 该刊实行编委推荐制，论文须经编委推荐发表，并以中、英文两种版本向国内外发行. 主要读者对象为从事力学、应用数学和物理学研究的科研人员、工程设计人员和大专院校师生.

数学年刊·A辑（上海）（Chinese Annals of Mathematics（Series A）） 1980年6月创刊. 刊号：CN31－1328，4－298；ISSN1000－8314，BM480. 由国家教育委员会委托复旦大学主办. 主编：苏步青；副主编：柯召、李国平、程民德、张素诚、夏道行、李大潜（常务）、金福临（常务）、汪嘉冈（常务）. 编辑部设在复旦大学数学研究所. 上海科学技术文献出版社出版，中国国际图书贸易总公司（北京399信箱）对国外总发行. 1年1卷，1980—1981年为季刊，1981年出增刊1期（英文版），1982年改为双月刊. 前3年都是中、英文混合版，从1983年开始分 *A*、*B* 两辑，其中 *A* 辑为中文版，双月刊，*B* 辑为英文版，季刊，两辑刊登的文章内容不重复. 截止1996年底，*A* 辑共出版17卷98期（含前3卷混合版）. 从1988年开始，美国Allerton出版公司出版、发行该刊 *A* 辑的英译本，刊名为《Chinese Journal of Contemporary Mathematics》，季刊.

《数学年刊·*A*辑》是面向国内外的综合性数学刊物. 刊登内容包括：几何、代数、拓扑、泛函分析、微分方程、函数论、计算数学、控制论、概率统计、运筹学、数理逻辑等数学分支学科. 与30多个国家和地区建立有长期交换关系. 主要读者对象为高等院校教师、研究生、高年级学生及其他数学工作者.

数学年刊·B辑（英文版）（上海）（Chinese Annals of Mathematics（Series B）） 1980年6月创刊. 刊号：CN31－1329；ISSN0252－9599. 由国家教育委员会委托复旦大学主办. 主编：苏步青；副主编：柯召、李国平、程民德、张素诚、夏道行、李大潜（常务）、金福临（常务）、汪嘉冈（常务）. 编辑部设在复旦大学数学研究所. 上海科技文献出版社出版. 中国国际图书贸易总公司（北京399信箱）对国外总发行. 《数学年刊·*B*辑》1982年以前为中、英文混合版，仅在1981年出过一期英文版增刊；从1983年起中、英文分版，英文版为 *B* 辑，季刊.

《数学年刊·*B*辑》（英文版）是面向国内外的综合性数学刊物. 内容涉及几何、代数、拓扑、泛函分析、微分方程、函数论、计算数学、控制论、概率统计、运筹学、数理逻辑等数学分支学科. 刊登国内外学者的学术论文，与国外30多个国家和地区建立了长期交换关系，被美国《科学引文索引（Sci）》列为全世界的核心刊物之一. 主要读者对象为高等院校教师、研究生、高年级学生及其他数学工作者.

数学圈（新竹）（Mathematics Circle） 1980年创刊. 台湾《数学圈》杂志社主办、出版、发行. 地址：台湾新竹市光复路工段460号. 季刊.《数学圈》以发表介绍台湾及国际数学界研究成果的文章为主.

中学数学研究（南昌）（School Mathematics Study） 1980年7月创刊. 刊号：CN36－1100/O_1，44－33. 原由江西师范大学数学系主办，现由江西师范大学数学与信息科学学院主办，江西省中学数学教学研究会协办. 历任主编：黄贤汶（1980－1984）、黄慧康（1984－1988）、林金榕（1989－1992）、戴奇兴（1993－ ）；1996年时常务副主编：黄根发. 由《中学数学研究》编辑委员会编辑、出版，编辑部设在南昌市北京西路江西师范大学数学系. 1980年出版了2期，以后定为双月刊，从1993年起改为月刊.

《中学数学研究》1985年曾改用刊名《中学生数学杂志》，仅出4期又恢复原名. 该刊以服务于中学数学教学为宗旨. 辟有教材教法研究、解题方法与技巧、教学参考、正误辨析、数学史话、竞赛之窗、试题选登等栏目. 主要读者对象为中学数学教师、中学生及数学爱好者.

湖南数学通讯（长沙）（Hunan Mathematics Communication） 1980年9月创刊. 刊号：CN43－1112/O_1，42－14；ISSN1003－7381. 湖南省数学会主办. 历任主编：欧阳系（1980－1984）、曾宪侯（1985－1989）、李宗铎（1990－ ）；1996年时副主编：张垚、肖果能.《湖南数学通讯》编辑部编辑、出版，编辑部地址：1996年在长沙市熙宁街43号长沙大学内，1997年迁往湖南师范大学数学系. 1980年出版了2期，1981年出版了3期，从1982年起定为双月刊. 截止1996年底共出版95期，1998年底出至107期后停刊.

《湖南数学通讯》以促进中学数学教学研究，推动中学数学教学改革，提高中学数学教学质量为宗

旨.主要栏目有:数学教学、高考热点、初数研究、联赛之窗、数学题库、学生作品等.主要读者对象为中学及大学低年级的数学教师、学生和数学爱好者.

系统工程理论与实践(北京)(Systems Engineering—Theory & Practice) 1981年1月创刊.刊号:CN11-2267/N,2-305;ISSN1000-6788.中国系统工程学会会刊.原任主编:许国志,从1995年起主编为顾基发;常务副主编:朱广田.编辑部设在中国科学院系统科学研究所,地址:北京中关村.由中国系统工程学会《系统工程理论与实践》编辑部出版,国内发行.1981-1988年为季刊,1989-1993年为双月刊,1994年起改为月刊.

《系统工程理论与实践》刊登系统科学、系统理论、系统方法与技术等方面最新理论成果及系统工程在工业、农业、教育、交通运输等国家经济建设及国民经济各领域中的实际应用成果、实践经验,以及解决实际问题的科学技术报告.介绍国内外研究情况,动态报告等.主要读者对象为与系统工程有关的各条战线的科技工作者、科研院所的研究人员,以及高等院校相关专业的学生、研究生等.

数学研究与评论(大连)(Journal of Mathematical Research and Exposition) 1981年4月创刊.刊号:CN21-1208/O_1,8-92;ISSN1000-341X.创办初期由大连工学院和华中工学院共同主办,从1986年第6卷第1期开始由大连理工大学(原大连工学院)独家主办至今.主编:徐利治.《数学研究与评论》编辑委员会编辑、出版.编辑部设在大连理工大学数学科学研究所.中国图书进出口总公司对国外发行.第1卷出版了3期,以后一直为季刊,1995年还出版了1期增刊.

《数学研究与评论》以推进数学研究,评论数学研究,及时报道数学理论成果与应用数学成果为宗旨.主要刊载有关数学的创造性论文、研究简报、研究通讯;国内外数学著作的评论;数学方法论、数理哲学方面的文章等.还介绍某些新兴边缘学科的数学研究方法及数学新分支,反映国内外数学工作者提出的未解决问题及国内外重要数学学术研究动态.辟有综述及专题论述等栏目.主要读者对象为数学工作者、大专院校数学教师、理工科研究生、数学和力学专业高年级学生,有关科技工作者以及其他数学爱好者.

数学物理学报(中文版)(武汉)(Acta Mathematica Scientia) 1981年4月创刊.刊号:CN42-1226/O_1,38-214;ISSN1003-3998,Q538.由中国数学物理学界委托中国科学院武汉数学物理研究所主办.首任主编:李国平,继任主编:丁夏畦、王世全.编辑部设在中国科学院武汉数学物理研究所.地址:武汉市武昌小洪山.科学出版社出版.季刊.第1卷为中、英文混合版,1982年4月创办同名的英文版,此后该刊为中文版.

《数学物理学报》(中文版)是数理科学综合性学术刊物.以反映国内外数理科学的最新研究成果,促进学术交流和学科发展,培养学术新秀,为"四化"建设服务为宗旨.主要刊登数学与物理学,以及化学、生物学、系统科学、计算机科学等相关的边缘学科中具有创造性的、代表学科水平的科研成果、学术论文.主要读者为本学科范围内的研究工作者、科技人员等.

系统科学与数学(北京)(Journal of Systems Science and Mathematical Sciences) 1981年8月创刊.刊号:CN11-2019/O_1,2-563;ISSN1000-0577,Q611.中国科学院系统科学研究所主办.第一任主编:关肇直,继任主编:陈翰馥;副主编:林群、郑忠国、田丰、李凤翎(专职).编辑部设在中国科学院系统科学研究所,地址:北京中关村.科学出版社出版、发行.季刊.

《系统科学与数学》既注重创造性、科学性,也注重应用性.刊登内容覆盖系统建模、系统控制、系统分析、系统管理、信息处理、数理统计、构造数学、数学物理、应用泛函,以及有关的一些近代数学分支.主要刊登上述诸方面以及它们的交叉研究在理论上方法上有创造性的学术论文、科学技术报告、重要的学术动态报道.由于从1988年起另外增办英文版,该刊从第8卷第3期起只登中文稿,论文内容与英文版基本不重复.主要读者对象是从事系统科学与数理科学研究的科研人员、教学工作者和工程技术人员.

数学杂志(武汉)(Journal of Mathematics) 1981年9月创刊.刊号:CN42-1163/O_1,38-71;ISSN0255-7797.湖北省数学会、武汉数学会、武汉大学联合主办.首任主编:张远达(1981-1985),1985年后主编为路见可;执行副主编:胡迪鹤.编辑部设在武汉大学数学研究所.《数学杂志》编辑部出版.季刊.

《数学杂志》是中、外文混合版的数学综合性学术期刊.主要刊登具有创造性的数学学术论文,以提高中国数学学术水平为宗旨.主要读者对象为数学研究工作者及大学教师、有关科技人员、研究生等.

中学数学杂志(曲阜)(Journal of Middle School Mathematics) 1981年9月创刊.刊号:CN37-1116/O_1,24-68;ISSN1002-2775.山东省曲阜师范大学主办.历任主编:马克杰、徐义夫、周家云、李正银、李吉宝.编辑部设在曲阜师范大学数学系.《中学数学杂志》原系季刊,从1983年(总第7期)起改为双月刊.1998年又分为高中、初中两种版,各出双月刊.

《中学数学杂志》旨在提高中学数学教育质量，推动中学数学的教研和教改，配合教学，为学生提供学法指导. 刊物的主要栏目有：数学教育、新秀近作、教学研究、解题思路与方法、复习之窗、短篇写作、数学史话等. 主要读者对象为中学数学教师、教研人员、高初中学生和广大数学爱好者.

数理科学(英文版)(成都)(Mathematical Sciences)　1981 年 10 月创刊. 中国科学院成都计算机应用研究所数理科学中心(原称中国科学院成都数理科学研究室)主办. 主编：刘世泽(1981—1986)、张景中(1986—1990)、杨路(1990—　). 刊物由该中心编辑、出版、发行，编辑部设在中国科学院成都计算机应用研究所数理科学中心. 地址：成都市人民南路 4 段 9 号. 刊物属于不定期连续出版物.

《数理科学》是英文研究报告系列，主要反映该数理科学中心的最新学术研究成果. 包括几何、代数、微分方程、动力系统、数值分析、控制与优化、机器证明、计算机科学等多方面.

中学生数学(北京)(Middle School's Student Mathematics)　1981 年 10 月创刊. 刊号：CN11—1531/O_1，2—519；ISSN1003—1901. 中国科学技术协会主管. 中国数学会主办，中国数学会普委会、北京数学会、首都师范大学数学系联合编辑. 原任主编：梅向明，从总第 100 期(1996 年第 4 期)起主编：王尚志；副主编：李建才、吴建平、戴汝潜. 编辑部地址：北京阜外花园村首都师范大学数学系. 测绘出版社出版，1997 年起改由《中学生数学》杂志社出版. 1981 年试刊 2 期，1982 年起为双月刊，1994 年改为月刊.

《中学生数学》以提高中学生的数学素质，促进中学生的全面发展为办刊宗旨. 内容丰富翔实，形式新颖活泼，信息及时准确. 刊物常设栏目有：学好基础知识、思路与方法、数学史话、趣味数学、数学竞赛之窗、中学生习作、学英语、课外练习、智慧窗，后又新增加初、高中综合复习、数学建模等新栏目. 主要读者对象为全国广大中学生.

中学生数理化(高中版)(郑州)(Mathematics、Physics and Chemistry for Middle School Students (Senior Edition))　1981 年 10 月创刊. 刊号：CN41—1099/O，36—49；ISSN1001—6953，M1068. 河南省教育委员会主办. 原名《中学生数理化》，1983 年 10 月另创办《中学生数理化》(初中版)，该刊改称为《中学生数理化》(高中版). 历任主编：庞金泽、刘和玉、杨钟珩、刘庆玮；常务副主编：侯秀姣.《中学生数理化》(高中版)编辑部编辑，地址：郑州市金水区顺河路 11 号. 河南教育社出版，32 开本. 中国国际图书贸易总公司(北京 399 信箱)对国外发行. 月刊(1981 年出版 3 期).

《中学生数理化》(高中版)的任务是辅导高中学生学好数理化. 它以透彻理解教材、激发学习兴趣、开阔知识视野、培养探索能力为办刊宗旨. 主要栏目包括：教材重点难点解析、解题技巧、名师导学、复习指导、博士信箱、错解分析、竞赛园地、社会·生活·数理化、试题集锦等. 主要读者对象为高中学生、数理化教师.

数学物理学报(英文版)(武汉)(Acta Mathematica Scientia)　1982 年 4 月创刊. 刊号：CN42—1227，38—215；ISSN0252—9602. 由中国数学物理学界委托中国科学院武汉数学物理研究所主办. 首任主编：李国平，继任主编丁夏畦、王世全. 编辑部设在中国科学院武汉数学物理研究所. 地址：武汉市武昌小洪山. 科学出版社出版. 国外发行代理为瑞士巴尔茨国际科技图书公司. 季刊.

《数学物理学报》(英文版)是数理科学综合性学术刊物. 主要刊登数学与物理学，以及化学、生物学、系统科学、计算机科学等相关的边缘学科中具有创造性的、代表学科水平的科研成果、学术论文，旨在反映国内外本学科的最新研究成果，促进学术交流和学科发展，培养学术新秀，为"四化"建设服务. 该刊与同名的中文版的文章内容不重复. 主要读者对象为国内外本学科范围内的研究工作者、科技人员等.

中等数学(天津)(High - School Mathematics)　1982 年 8 月创刊. 刊号：CN12—1121，6—75；ISSN1005—6416. 中国数学会普及工作委员会、天津市数学会、天津师范大学数学系联合主办. 主编：李其汾(1982—1988)、侯国荣(1988—　)；常务副主编：庞宗昱.《中等数学》杂志编辑部出版. 编辑部地址：天津市八里台天津师范大学校内. 1982 年出版了 1 期，以后定为双月刊.

《中等数学》是兼顾普及和提高的竞赛刊物. 以服务中学数学课外教育，培养科技后备人才为宗旨. 以报道国内外初高中数学竞赛及数学课外活动为主要内容. 常设栏目有：数学活动课程讲座、命题与解题、短论集锦、竞赛之窗、课外训练、数学奥林匹克问题等. 主要读者对象为中学数学教师、教学研究工作者、广大中学生及数学爱好者.

数理统计与管理(北京)(Applications of Statistics and Management)　1982 年 9 月创刊. 刊号：CN11—2242/O_1，82—69；ISSN1002—1566. 中国现场统计研究会主办. 主编：林少宫；常务副主编：王柱. 编辑部设在中国科学院研究生院. 地址：北京玉泉路 19 号.《数理统计与管理》杂志社出版，双月刊.

《数理统计与管理》刊登数理统计、管理科学及相关学科的研究成果，并以独特的风格登载其在工

农商学各行业，科技、经济和社会等领域中的应用.介绍各种实用的数理统计等方法，展示国内外各行业的应用实例，交流学术研究，宣传普及、推广本学科及应用的知识、方法和经验.设有统计学、应用成果、方法研究与探讨、趣味概率统计、学术交流等十几个栏目.主要读者对象为数理统计与管理领域的理论研究工作者和实际应用工作者，以及大专院校师生.该刊物对其他领域的技术人员、管理人员亦有参考价值.

数学教学研究(兰州)(Journal of Mathematics Teaching Research)　1982 年 9 月创刊.刊号：CN62－1042/O_1，54－50.西北师范大学主办.历任主编：陆润林、郑宪祖、丁传松、王仲春；常务副主编：杨鼎文.编辑部设在兰州市西北师范大学数学系.1982－1983 年是试办阶段为半年刊，1984－1987 年为季刊，1987 年起改为双月刊.

《数学教学研究》面向中学，以密切结合中学数学教学实际，提高数学教学质量，促进数学教学改革为宗旨.主要栏目为：数学教育、教材研究、教法探讨、解题技巧、竞赛讲座、数学史、现代数学介绍、国内外数学动态等.主要读者对象是中学数学教师、教研人员和师范院校数学专业的师生.

运筹学杂志(上海)(Chinese Journal of Operations Research)　1982 年 10 月创刊.刊号：CN31－1437；ISSN1001－6120.中国运筹学会主办的第一份刊物.主编：越民义；副主编：管梅谷、郑权.《运筹学杂志》编辑委员会编辑.编辑部设在上海大学嘉定校区，地址：上海嘉定城中路 20 号.上海科技出版社出版.新华书店上海发行所发行.1982 年出版了 1 期，定为以后每年出版 2 期，1 年为 1 卷.

《运筹学杂志》于 1997 年秋季起改名为《运筹学学报》.学报的宗旨是：促进运筹学及其相关学科的发展，加速学术成果的交流；推动运筹学在国民经济、国防建设等方面的应用；提供一个体现中国运筹学理论与应用方面的学术论坛，促进与国际运筹学界的交流.主要栏目有：研究论文、综述文章、研究简报、应用成果、书评、学会重要活动等.稿件可用中、英文发表.主要读者对象为运筹学、最优化理论、应用数学、计算数学、管理科学、系统工程、经济学等专业研究工作者，以及工程技术人员和高等学校有关专业研究生、高年级学生与中等学校数学教师等.

计算数学(外文版)(北京、荷兰)(Journal of Computational Mathematics (JCM))　1983 年 1 月创刊.刊号：CN11－2126，ISSN0254－9409.原由中国科学院计算中心主办，科学出版社出版.1995 年中国科学院计算数学与科学工程计算研究所成立后，转由该所主办.首任主编：冯康，继任主编：石钟慈.《计算数学》编辑委员会编辑、出版.编辑部地址：北京中关村 2719 信箱.《计算数学》编辑委员会和荷兰 VSP(P. O. Box 346，3700AH，Zeist，the Netherlands)出版社共同发行.季刊；1998 年起改为双月刊.

《计算数学》(外文版)是关于数值计算的理论、分析及其应用的国际性杂志，是中国在计算数学领域公开在国际上发行的学术水平最高的期刊.其宗旨是在国际范围内交流计算数学方面的最新研究成果.期刊主要刊登国内外专家、学者、科研人员的最新研究成果，讨论国际上的热点问题，内容涉及计算数学的各个方面.主要读者对象是从事计算数学及其他有关学科的研究人员、工程技术人员、研究生及高等院校的高年级学生.

中国数学会通讯(北京)(Chinese Mathematical Society Newslétter)　1983 年 3 月创刊.是中国数学会主办的内部刊物.主编：张恭庆；副主编：李文林、任南衡.由《中国数学会通讯》编辑委员会编辑、出版、发行.编辑部地址：北京中关村中国科学院数学研究所中国数学会办公室.1983 年和 1985 年各出版了 5 期，1984 年出版了 6 期，从 1986 年起定为季刊，每期篇幅 12－20 页不等.

《中国数学会通讯》主要刊登国内外数学界的重要学术动态，报道中国数学会与地方数学会、学科分会等的活动情况.该刊物是广大数学工作者获取数学界和数学会信息的重要来源，也是了解数学界获奖人士及其工作的一份有价值的资料.

系统工程(长沙)(Systems Engineering)　1983 年 7 月创刊.刊号：CN43－1115/N，42－67；ISSN1001－4098.湖南省系统工程学会主办.主编先后为王毓基、何显慈；副主编：向元望、刘裔宏、贝兴亚、张冲、罗波阳.编辑部地址：长沙市德雅路浏河村 23 号.《系统工程》杂志社出版，中国出版对外贸易总公司(北京 782 信箱)对国外发行.双月刊.

《系统工程》是在著名科学家钱学森、许国志等的倡导和支持下创办的综合性科技期刊.主要刊登系统工程理论与方法、经济系统分析、企业系统工程、管理系统工程、生态环境系统工程、交通系统工程、社会经济系统工程、管理信息系统与决策支持系统等方面的最新研究成果.主要读者对象为大专院校师生、软科学研究人员、各级管理工作者，以及有志于研究应用系统工程的工作者.

中学生数理化(初中版)(郑州)(Mathematics、Physics and Chemistry for Middle School Student (Junior Edition))　1983 年 10 月创刊.刊号：CN41－1098/O，36－67；ISSN1003－2215，M438.河南省教育委员会主办.历任主编：庞金泽、刘和玉、刘绍宽；副主编：赵良河.《中学生数理化》(初中版)编辑部编辑，地址：郑州市金水区顺河路 11 号.河南教育

社出版,32 开本. 中国国际图书贸易总公司(北京 399 信箱)对国外发行. 月刊(1983 年出版 3 期).

《中学生数理化》(初中版)是全国惟一获优秀科技期刊奖的适合初中生的杂志,其任务是帮助学生学好数理化. 刊物以透彻理解教材、激发学习兴趣、开阔知识视野、培养探索能力为办刊宗旨. 主要栏目包括:课程导学、理解与运用、思路·方法·技巧、巧思妙解、习题及解法评析、学法指导、竞赛园地、第二课堂、初一数学每月练、错解分析、试题荟萃等. 主要读者对象为初中一、二、三年级学生.

控制理论与应用(广州)(Control Theory and Applications) 1984 年 1 月创刊. 刊号:CN44－1240/TP,46－11;ISSN1000－8152,BM920. 华南理工大学、中国科学院系统科学研究所主办. 首任主编:关肇直,继任主编:李伯天;副主编:秦化淑、涂其栵、周其节.《控制理论与应用》编辑委员会编辑、出版,编辑部地址:广州市华南理工大学. 中国国际图书贸易总公司(北京 399 信箱)对国外发行. 原为季刊,从 1992 年起改为双月刊.

《控制理论与应用》主要报道系统控制科学中具有新观念、新思想的理论研究成果及其在各个领域中,特别在高科技领域中的应用研究成果和在国民经济有关领域中的技术开发、技术改造中的应用成果. 内容涉及:集中参数控制系统、分布参数控制系统、随机控制系统、离散事件系统、自适应控制、鲁棒控制、智能控制、系统控制科学中的其他重要问题. 主要读者对象是从事控制理论与应用研究的科技人员、高校师生及其他有关人员.

南京大学学报数学半年刊(南京)(Journal of Nanjing University Mathematical Biquarterly) 1984 年 5 月创刊. 刊号:CN32－1169;ISSN0465－7926. 南京大学主办. 主编:周伯埙;副主编:韩继昌(常务)、沈祖和、王声望. 编辑部设在南京大学数学系.《南京大学学报数学半年刊》编辑部出版、发行.

《南京大学学报数学半年刊》属综合性数学刊物,发表数学各分支学科的最新科研成果,包括论文全文和科研简报,并可用中、英文发表. 主要读者对象为高等院校、科研单位等从事数学研究及其应用的研究人员.

工程数学学报(西安)(Chinese Journal of Engineering Mathematics) 1984 年 5 月创刊. 刊号:CN61－1269/O_1;ISSN1005－3085. 西安交通大学主办. 主编:游兆永,1998 年第 15 卷第 3 期起主编为张文修;常务副主编:龚怀云.《工程数学学报》编辑委员会编辑,编辑部出版、发行. 编辑部设在西安交通大学. 1984－1986 年为半年刊,1987－1990 年每年均出版了 3 期,1991 年起定为季刊,1996 年出版增刊 1 期.

《工程数学学报》是数学理论和综合性学术刊物. 其宗旨是及时报道数学理论研究成果和数学在国民经济中的应用方法与成果,推进数学的研究与应用. 主要登载创造性的学术论文、研究简报,以及公布数学方法在国民经济中的应用成果,尤其特别重视登载数学的新分支、与数学有关的边缘性学科,及其有应用背景的数学理论文章和有指导意义的综合报告. 主要读者对象是数学工作者、大专院校数学教师、理工科研究生、高年级学生,以及从事实际工作的工程技术人员.

应用数学学报(英文版)(北京)(Acta Mathematicae Applicatae Sinica (English Series)(AMAS)) 1984 年 6 月创刊. 刊号:CN11－2041;ISSN0168－9673. 中国数学会主办. 中国科学院应用数学研究所承办.《应用数学学报》(英文版)是在原《应用数学学报》(1976 年 8 月创刊)的基础上,另增办的英文版,原刊从 1984 年 6 月起只登中文稿. 中、英文两辑同属一个编辑委员会和编辑部. 历任主编:华罗庚、越民义、丁夏畦;副主编:程民德、谷超豪、胡国定、韩继业、安鸿志、金怡(专职). 编辑部地址:北京市 2734 信箱. 该刊 1984 年出版 2 期为第 1 卷,1985 年出版 4 期为第 2 卷,1986 年未出版,1987 年起定为季刊. 由科学出版社出版,并负责国内发行. 国外经销处:美国 Allerton Press 公司.

《应用数学学报》(英文版)是一份国际性的学报,刊载国内外有关应用数学方面的创造性学术论文,反映中国应用数学研究的新成果. 此外,还兼载研究简报,报道应用数学的发展动态、综合评论等. 中、英文两辑发表的论文内容各不相同.

工科数学(合肥)(Journal of Mathematics for Technology) 1984 年 9 月创刊. 刊号:CN34－1094;ISSN1007－4120. 国家教育委员会主管. 全国高校工科数学课程教学指导委员会、合肥工业大学主办. 编辑委员会历任主任委员:赵访熊、陆庆乐、马知恩;历任主编:卢树铭、苏化明;副主编:潘杰. 编辑部设在合肥工业大学,地址:安徽省合肥市屯溪路 59 号. 由《工科数学》杂志社出版、发行. 1984 年试刊 2 期,从 1985 年第 1 卷起正式发行. 季刊.

《工科数学》是全国性教学与科研相结合的数学刊物. 设有理论与方法、数学应用、教学研究与改革、计算机辅助教学、教材建设、解题方法与技巧、思维与能力培养等栏目. 主要读者对象是数学工作者、理工科等大专院校师生,有关科技人员及其他数学爱好者.

逼近论及其应用(英文版)(南京)(Approximation Theory and Its Applications(ATA)) 1984 年 10 月创刊. 刊号:CN32－1198/O_1;ISSN1000－9221.《逼近论及其应用》由北京大学和南京大学主

办，大连理工大学、华中理工大学、浙江大学、杭州大学、北京师范大学、南京师范大学赞助. 历任主编：程民德、徐利治和崔锦泰(Chui, C. K.)(A&M Univ., Texas, USA)，编辑委员会由中外知名数学家组成. 创办初期，由华中理工大学出版、发行. 从1987年第3卷第2期起转由南京大学出版、发行. 编辑部设在南京大学数学系. 1984年出版1期，1985年出版4期，合为第1卷，以后为季刊，每年出1卷.

《逼近论及其应用》(英文版)是国际性的逼近论分支数学期刊，以及时反映国内外函数逼近论及其应用的最新成果为宗旨. 刊载国内外具有创造性的学术论文，内容包括函数逼近与展开理论、傅里叶分析与调和分析、算子插值、数值分析与应用等方面的研究成果. 每期刊登的国外成果约占总篇幅的三分之一. 主要读者对象是各国大专院校的数理教师、高等研究机构的科研人员、理工科研究生及数学专业高年级学生.

初中生数学学习(南京)(Mathematics Learning for Junior Middle School Students)　1984年11月创刊. 刊号：CN32－1241/G_4，28－121；ISSN1006－7752. 原名《初中生数学辅导》，1992年起改用现名. 江苏教育出版社主办、出版. 历任主编：左宗明、蒋声、何震邦；副主编：毛永生.《初中生数学学习》编辑部编辑，地址：南京市湖南路54号. 32开本. 月刊. 截止1996年底共出版146期. 1997年起改为自办发行，发行地址：南京市管家桥37号.

《初中生数学学习》以帮助读者发掘智力，开阔视野，掌握数学思维的基本规律，扎实打好初中数学基础，进而达到提高分析问题和解决问题的能力为目的. 主要栏目有：学习辅导、解题方法、课本习题纵横谈、一题一议、章节练习题、试题选登、竞赛辅导、点点滴滴、智趣俱乐部等. 该刊还主办一年一度的江苏省初中数学竞赛，至1996年已办了十届. 该刊获华东六省一市优秀期刊称号、江苏省自然科学期刊一等奖.

经济数学(长沙)(Mathematics in Economics)　1984年12月创刊. 刊号：CN43－1118；ISSN1007－1660. 湖南财经学院和湖南省经济数学研究会主办. 首任主编：许国志，1995年起主编为丁夏畦；执行主编：郭青峰.《经济数学》编辑部编辑、出版、发行. 编辑部设在湖南财经学院，地址：长沙市河西石佳冲. 1984年出版1期. 以后每年为1卷. 刊物从1995年起改为半年刊.

《经济数学》主要刊登数量经济学、数理经济学、经济控制论、经济信息论、经济预测与决策和经济应用数学领域中创造性研究成果. 主要读者对象是从事经济数学研究与应用的经济管理人员、科技工作者和高等院校师生.

数学教师(郑州)(Mathematics Teacher)　1985年1月创刊. 刊号：CN41－1125/O_1，36－83；ISSN1003－2770. 原由河南教育出版社主办，从1988年起，由河南省教育委员会接管，河南省教育科学研究所主办. 主编：岳三立. 编辑部设在郑州市经五路12号. 月刊.

《数学教师》是以初中数学教师为主要读者对象的数学教育辅导类期刊. 坚持面向初中，为初中数学教学服务，为全面提高初中数学教育质量服务的方向. 主要栏目有：数学教育、教学研究、教改动态、教师进修、解题教学、试题研究、数学史话等. 1998年出版第10期后停刊.

数学学报・新辑(英文版)(北京)(Acta Mathematica Sinica, New Series)　1985年2月创刊. 刊号：CN11－2039/O_1；ISSN1000－9574. 中国数学会主办，中国科学院数学研究所承办.《数学学报・新辑》是在原《数学学报》(1936年8月创刊)的基础上，“为促进国际学术交流，加速稿件的发表”，而增办的英文版，原刊从此只登中文稿. 中、英文版同属一个编辑委员会和编辑部. 历任主编：王元(1985－1988)、杨乐(1989－1992)、陈景润(1993－1996)，李炳仁；副主编：李文林(常务)、洪家兴、姜伯驹. 编辑部设在中国科学院数学研究所，地址：北京中关村. 季刊. 原由科学出版社出版兼管国内发行，现由中国数学会《数学学报》编辑委员会编辑、出版兼管国内发行；国外经销处：VSP, P. O. Box 346, 3700 AH, Zeist, The Netherlands. 1999年起由德国斯普林格(Springer)出版社发行.

《数学学报・新辑》(英文版)是反映中国数学科学研究水平的高级学术刊物，以刊登基础数学领域创造性的学术论文为主，兼载应用数学领域的理论研究论文. 中、英文版刊登的内容不重复，形成了中、英文版既相互补充又相互独立的水平更高的学术刊物. 主要读者对象是科学研究工作者、大学教师、研究生和部分工程技术人员.

纯粹数学与应用数学(西安)(Pure and Applied Mathematics)　1985年4月创刊. 刊号：CN61－1240/O_1. 西北大学数学系和数学研究所主办. 原任主编：刘书琴，后任主编：王成堂.《纯粹数学与应用数学》编辑委员会编辑、出版，自办发行. 编辑部设在西安市西北大学数学系. 1989年以前每卷仅出版1期，1990年起每卷2期.

《纯粹数学与应用数学》是数学及其应用的综合性学术刊物. 主要刊登数学学科中有创造性的研究论文，具有重要经济价值的应用性论文，也适当刊登数学或以数学为主的边缘学科的综合报告. 文章采用中、英文发表.

微分方程年刊(英文版)(福州)(Annals of Dif-

ferential Equations） 1985 年 7 月创刊. 刊号：CN35－1125/O_1；ISSN1002－0942. 福州大学数学系主办. 主编：林振声. 编辑部设在福州大学数学系. 福州大学出版、发行. 第 1 卷出版 2 期，以后为季刊. 1995 年出版了 1 期会议论文集增刊.

《微分方程年刊》(英文版)的宗旨是为国内外专家学者提供学术交流基地，促进中国微分方程的研究工作，提高中国微分方程的学术水平. 刊登常微分方程、泛函微分方程和微分动力系统等的理论和应用方面具有创造性的、优秀的学术论文和研究简报，并适当刊登反映国内外微分方程的研究动态和最新进展的综合性文章. 主要供大专院校数学系高年级学生、研究生、数学教师及有关科研人员阅读参考.

应用概率统计(上海)(Chinese Journal of Applied Probability and Statistics） 1985 年 8 月创刊. 刊号：CN31－1256，4－414；ISSN1001－4268，Q873. 中国数学会概率统计学会主办. 华东师范大学统计系承办. 历任主编：江泽培(1985－1989)、陈希孺(1990－1994)、汪嘉冈(1994－　). 编辑部设在华东师范大学统计系，地址：上海市中山北路 3663 号. 华东师范大学出版社出版，但第 3 卷第 3 期至第 7 卷第 2 期曾一度由上海翻译出版公司出版. 季刊.

《应用概率统计》反映概率统计基础理论和应用研究的新成果、新方法及其应用，刊登这些方面有创造性的学术论文，最新成果综合报告，选登应用研究和应用简报，推广概率统计方法的应用成果.

东北数学(英文版)(长春)(Northeastern Mathematical Journal） 1985 年 10 月创刊. 刊号：CN22－1120/O_1，12－134；ISSN1000－1778. 吉林大学主办. 主编：江泽坚. 由《东北数学》编辑委员会编辑、出版. 编辑部设在长春市吉林大学数学研究所. 1985 年出版的 2 期为第 1 卷，以后为季刊，前 5 卷是中、英文混合版，从 1990 年第 6 卷起全部改为英文版.

《东北数学》(英文版)属综合性数学刊物. 主要刊登纯粹数学和应用数学方面具有创造性的学术论文，设有“研究快讯”、“专栏”，及时报道数学研究的新成果. 主要读者对象为数学工作者、大专院校数学教师、理工科研究生和高年级学生、科技工作者.

计算数学通讯(北京)(Communications of Computational Mathematics） 1986 年 1 月创刊. 1996 年北京市内部刊物准印证号：B1430－961238. 《计算数学通讯》的前身是 1981 年北京计算数学学会创办的《动态报》，共出版了 17 期. 1986 年 1 月改由中国数学会计算数学学会与北京计算数学学会合办，改称《计算数学通讯》，期数重计. 主编：李德元；1990 年 5 月以后的编委有李荫藩、张景琳、张宝琳、诸梅芳. 编辑部设在北京应用物理与计算数学研究所，并由该所出版、发行，通讯地址：北京 8009 信箱.

《计算数学通讯》主要介绍计算数学研究与应用领域的最新成就和发展动态，报道计算数学学会及其所属单位的学会活动、学术会议和国内外重要学术交流，反映学会会员的意见和要求. 目的在于加强全国计算数学工作者之间的学术联系、信息沟通. 主要栏目有学会活动、学术会议、学术交流、研究动态、计算机世界、软件介绍、青年园地等. 主要读者对象为全国和北京计算数学学会会员、计算数学工作者.

生物数学学报(合肥)(Journal of Biomathematics） 1986 年 3 月创刊. 刊号：CN34－1071；ISSN1001－9626. 中国数学会生物数学专业委员会、中国生物数学会(筹)、中国生物物理学会生物数学专业委员会联合主办. 主编：陈兰荪. 编辑部设在合肥市安徽农业大学图书馆. 由《生物数学学报》发行组自办发行，其中第 3 卷至第 5 卷第 1 期曾一度由上海翻译出版公司发行. 原为半年刊，1997 年起改为季刊.

生物数学是当代重要的新兴边缘学科，创办《生物数学学报》(英文版)的宗旨是推动中国这一学科技术的发展，提高中国在该学科中的学术地位. 主要刊登生物数学创造性地解决农、林、牧、医药等方面的实际问题，或在理论上、方法上有新发展的研究报告及研究简报等. 主要读者对象为生物数学、生物学、数学、农、林、牧、医药及其他有关的自然科学工作者、高等院校教师、研究生及高年级学生.

数学季刊(开封)(Chinese Quarterly Journal of Mathematics） 1986 年 4 月创刊. 刊号：CN41－1102；ISSN1002－0462. 河南大学主办. 原任主编：陈景润(1986－1996)，继任主编：胡和生；副主编：刘亚星. 编辑部地址：开封市河南大学. 河南大学出版社出版、发行. 季刊.

《数学季刊》是综合性数学专业学术期刊. 以推进数学研究，介绍国内外创造性研究成果，指导青年数学工作者进行数学研究为宗旨. 刊登具有创造性的研究论文、研究简报和专题研究综述等三类文章. 主要读者对象为从事数学各专业的研究人员、高等院校数学教师、研究生和高年级学生.

系统工程学报(天津)(Journal of Systems Engineering） 1986 年 6 月创刊. 刊号：CN12－1141，ISSN1000－5781. 中国系统工程学会主办. 主编：刘豹；副主编：汪浩、顾基发、顾培亮、李维铮(专职)、张世英. 编辑部设在天津大学系统工程研究所. 由该研究所编辑、出版、发行. 原为半年刊，从 1995 年起改为季刊.

《系统工程学报》主要刊登系统工程理论、方法和各类应用研究的学术论文、实例分析、研究通讯，以及专题综述等方面的文章. 主要读者对象为研究

单位、高等院校的系统科学、系统工程的研究工作者及其爱好者.

九章数学杂志(台北)(Chiu Chang Mathematical Magazine)　1986年6月创刊.台版证第5238号.台湾九章数学杂志社主办.主编:孙文先.台湾九章数学杂志社出版、发行,发行人:谢毓斌.月刊.

《九章数学杂志》旨在帮助读者对中学数学有更广泛、更深入地了解,针对当前高中数学课程进行探讨、报道,从各种不同角度对中学数学课程进行全面研究.主要读者对象是在校高中学生和高中数学教师.

数理统计与应用概率(北京)(Mathematical Statistics and Applied Probability)　1986年8月创刊.刊号:CN43－1121;JT－23.全国工科院校应用概率统计委员会、北京工业大学应用数学系、长沙铁道学院科研所联合主办.主编:侯振挺;常务副主编:杨振海.编辑部设在北京工业大学应用数学系.原由学术期刊出版社出版,后由《数理统计与应用概率》编辑部出版、发行.1986年出版了2期为第1卷,以后定为季刊.

《数理统计与应用概率》主要面向应用,特别重视概率论和数理统计在各领域中的应用成果,同时也重视理论成果,突出方法的实用性,报道概率统计界的学术活动等.设有理论与方法、应用成果、可靠性工程、探索与争鸣、现状与展望、综述等栏目.主要读者对象为全国工科院校师生、工程技术人员及科研人员.

高等学校应用数学学报·*A*辑(杭州)(Applied Mathematics - A Journal of Chinese Universities (Ser. A)缩写:Appl. Math - JCU)　1986年9月创刊.刊号:CN33－1110;ISSN1000－4424,Q4113.全国直属高等学校应用数学学术与工作会议1982年会议决定,经国家科学技术委员会批准,由浙江大学主办,清华大学、北京大学、复旦大学协办.主编:董光昌;副主编:萧树铁、俞文魮、石青云、郭竹瑞.编辑部设在杭州市浙江大学应用数学研究所.由《高等学校应用数学学报》编辑委员会出版.编辑部直接对国内发行,中国国际图书贸易总公司(北京399信箱)对国外发行.季刊.1993年起该刊增办英文版,称*B*辑,原刊为中文版,称*A*辑.*A*、*B*两辑刊登的文章内容不重复.

《高等学校应用数学学报·*A*辑》是综合性的应用数学学术刊物.主要刊登应用数学方面具有创造性的学术论文,包括应用数学理论与方法,并侧重于数学论证方面的论文,以及建立应用数学模型与应用数学方法具有创新观点的论文,运用数学方法解决实际问题获得成效的论文或应用报告等.也刊登一些能反映国内外应用数学最新成果的综述文章和动态报道等.主要读者对象是大专院校师生、科研部门和生产单位的应用数学工作者及工程技术人员.

应用数学与计算数学学报(上海)(Communication on Applied Mathematics and Computation)　1987年1月创刊.刊号:CN31－1436;ISSN1006－6330.上海科技大学(现上海大学嘉定校区)主办.主编:郭本瑜;副主编:郑权、俞文魮、屠规彰.编辑部地址:上海嘉定城中路20号.上海科学技术出版社出版.半年刊.

《应用数学与计算数学学报》是反映应用数学与计算数学领域最新研究成果的学术性刊物.刊登内容包括数学在自然科学、工程技术和社会经济各方面应用的重要研究成果,特别偏重于数学模型的建立和分析、数值试验和新的计算方法方面的论文或研究简报.主要读者对象为数学和自然科学工作者、工程技术人员、有关管理人员、研究生及大专院校高年级学生.

中国数学文摘(北京)(Chinese Mathematics Abstracts)　1987年7月创刊.刊号:CN11－2473/*O*,82－562;ISSN1001－1919.中国科学院文献情报中心主办.国家一级检索性刊物.主编:沈信耀;常务副主编:王声培.《中国数学文摘》编辑部编辑,中国科学院文献情报中心出版.编辑部地址:北京中关村中国科学院文献情报中心.1987－1991年为季刊,1989－1991年附加年度索引;1992年起改为双月刊,当年第6期为年度索引.

《中国数学文摘》宗旨:报道中国数学领域最新研究成果和进展,沟通国内信息,促进中国数学研究工作的发展,为建立中国数学文献库做准备.报道范围:包括数学基础和数理逻辑、集合论、一般拓扑学和范畴论、代数学、群论、数论、几何学、微分几何学、代数几何学、拓扑学、分析学、复变函数、泛函分析、微分方程、积分方程和函数方程、特殊函数、计算数学、概率论、统计学、数学规划、运筹学、信息论和控制理论及数学在质点和质点系统力学、固体力学、流体力学、光学、电磁学理论、经典热力学、热传导、量子力学、统计物理、物质结构、相对论、天文学和天体物理学、地球物理学、生物学和行为科学等学科的研究成果及其应用.

《中国数学文摘》所收文献选自:国内(包括台湾)编辑、出版的学术刊物和主要高校学报发表的数学研究论文、综述、评介;国内数学研究或教学人员在国外发表的数学研究论文;国内出版的中国数学研究、教学人员的专著;国内数学学术会议记录等.为便于国际交流,采用1991年美国《数学评论》主题分类表对文献进行分类.按国家标准局颁布的有关国家标准著录.每期报道文献1400条左右.每卷第1期附有引用期刊一览表,第6期为该卷著者及主

题词总索引. 为便于检索,从 1995 年起每期上恢复著者索引. 主要读者对象:从事数学、物理、计算机等研究与应用的科研、教学人员及大专院校学生.

模糊系统与数学(长沙)(Fuzzy Systems and Mathematics) 1987 年 12 月创刊. 刊号:CN43-1179/O_1;ISSN1001-7402. 中国系统工程学会模糊数学与模糊系统委员会会刊,国防科技大学系统工程与数学系主办. 主编:汪浩;副主编:刘应明等 9 人. 编辑部地址:湖南省长沙市国防科技大学系统工程与数学系.《模糊系统与数学》编辑部出版、国内发行,中国出版对外贸易总公司(北京 782 信箱)对国外发行. 1987 年出版了 1 期为第 1 卷,以后为半年刊.

《模糊系统与数学》系模糊性理论研究与应用并重的学术性刊物. 主要刊登模糊系统的基本理论、模糊数学在信息处理、人工智能和计算机科学中的应用等,并及时报道该学会工作,交流各地区的活动情况. 主要读者对象为国内外从事科学、模糊数学、软科学理论研究与应用、计算机应用等方面的学者、科技工作者、研究生和大专院校师生.

偏微分方程(英文版)(郑州)(Journal of Partial Differential Equation) 1988 年 2 月创刊. 刊号:CN41-1104;ISSN1000-940x. 由郑州大学、北京大学、应用物理与计算数学研究所三个单位主办. 主编:姜礼尚;副主编:叶其孝、孙和生、李大潜、陈国旺. 编辑部设在郑州大学数学研究所. 季刊.《偏微分方程》创办的 1988 年分为 A、B 两辑,A 辑为英文版,于每年的 2 月、8 月出版;B 辑为中文版,于每年的 5 月、11 月出版. A、B 两辑发表的论文内容完全不同. 从 1989 年开始,全用英文出版,不再分辑,每年 1 卷. 由北京万国学术出版社(International Academic Publishers)出版、发行.

《偏微分方程》(英文版)宗旨是推进偏微分方程的研究,促进国内外学术交流,引导偏微分方程与工程、物理,以及其他数学分支的联系与结合. 刊登偏微分方程及其应用方面具有创造性的学术论文. 主要读者对象为数学工作者、大专院校数学教师、研究生、高年级学生,以及一切与偏微分方程有关的科技工作者.

应用数学(武汉)(Mathematica Applicata) 1988 年 5 月创刊. 刊号:CN42-1184/O_1,38-61;ISSN1001-9847,Q4194. 华中理工大学主办. 主编:陈庆益;常务副主编:胡适耕.《应用数学》编辑部编辑、出版,编辑部地址:武汉市武昌关山口华中理工大学. 国内发行代号 38-61 是沿用 1981-1987 年的原《模糊数学》的代号,国外通过中国国际图书贸易总公司(北京 399 信箱)发行. 季刊.

《应用数学》是综合性的应用数学刊物. 主要刊登应用数学的创造性研究成果,包括应用数学各方面的新理论、新模型、新方法、新应用,以及专题论述、国内外应用数学最新成果的综合介绍、研究简报和动态报道等. 主要读者对象为大专院校有关专业的教师、研究生、科技工作者及应用数学爱好者.

中国数值数学及其应用杂志(英文版)(北京、美国)(Chinese Journal of Numerical Mathematics and Applications. (CJNMA)) 1988 年 5 月创刊. 刊号:ISSN0899-4358.《中国数值数学及其应用杂志》(英文版)是《计算数学》《Mathematica Numerica Sinica》中文版和《数值计算与计算机应用》(Journal on Numerical Methods and Computer Applications)两刊的英文摘选本,入选论文全部要译成英文发表. 主办、编辑单位和主编均与两刊相同. 卷期与《计算数学》同步,1988 年 5 月出版总第 1 期,记为第 10 卷第 1 期.

《中国数值数学及其应用杂志》(英文版)由美国 Allerton 出版公司出版,并负责对国外发行.

系统科学与数学(英文版)(北京)(Systems Science and Mathematical Sciences) 1988 年 8 月创刊. 刊号:CN11-1734/O_1;ISSN1000-9590.《系统科学与数学》(英文版)是在中国科学院系统科学研究所主办的《系统科学与数学》(1981 年 8 月创刊)的基础上,另增办的英文版,与原刊同属一个编辑委员会和编辑部. 从此,原《系统科学与数学》只登中文稿. 主编:陈翰馥;副主编:林群、郑忠国、田丰、李凤翎(专职). 编辑部设在中国科学院系统科学研究所,地址:北京中关村. 科学出版社出版、发行. 季刊. 英文版卷期另计.

《系统科学与数学》(英文版)既注重创造性、科学性,也注重应用性. 刊登内容覆盖系统建模、系统控制、系统分析、系统管理、信息处理、数理统计、构造数学、数学物理、应用泛函,以及有关的一些近代数学分支. 主要刊登上述诸方面及它们的交叉研究在理论上、方法上,有创造性的学术论文、科学技术报告、重要的学术动态报道等. 主要读者对象是从事系统科学与数理科学研究的科研人员、教学工作者和工程技术人员.

中学数学教与学(高中版)(扬州)(Middle School Mathematics Teaching & Learning (Senior Edition)) 1992 年 1 月创刊. 刊号:CN32-1398/G_4,28-151;ISSN1007-1830. 原名《中学数学教与学》,1994 年《初中数学教与学》创刊后,该刊改称现名,加"高中版". 由江苏省教育委员会主管,扬州大学主办. 历任主编:庄亚栋(1992)、姚林(1993-1994)、蒋声(1995-1996);副主编:季素月、蒋宏圣. 由《中学数学教与学》(高中版)编辑部编辑、出版,32 开本,月刊. 编辑部设在扬州大学师范学院.

《中学数学教与学》(高中版)的办刊宗旨是直接为中学数学的"教"与"学"服务,以"学"为主,以"实"与"精"为特色.主要栏目有:教学与教材、学习导引、解题思路方法与技巧、复习与考试、错在哪里、短文集锦、数学家小传等.主要读者对象是中学数学教师、高中学生和数学爱好者.

运筹与管理(合肥)(Operations Research and Management Science) 1992年9月创刊.刊号:CN34－1133/G_3;ISSN1007－3221.中国运筹学会主办.合肥工业大学系统工程研究所承办.主编:俞嘉第;副主编:彭运森、陈兴安.编辑部设在合肥工业大学系统工程研究所,地址:安徽合肥工业大学.由该研究所出版、发行.1992年出版了2期为第1卷,从1993年第2卷起,定为季刊.

《运筹与管理》主要刊登运筹学与管理科学在国家经济建设和国民经济各部门中的实际应用;运用运筹学、应用数学和管理科学解决各种现实问题的理论分析、方法探讨、应用研究、成果介绍、经验交流;介绍国外最新应用动态和方法.主要读者对象为从事运筹学、应用数学、经济学、管理科学、系统工程等的专业工作者,有关各部门的工程技术人员和管理人员,以及各类大专院校教师、研究生和高年级学生等.

高等学校计算数学学报(英文版)(南京)(Numerical Mathematics:A Journal of Chinese University (English Series)) 1992年11月创刊.刊号:CN32－1348/O_1;ISSN1004－8979.由国家教育委员会委托南京大学主办.主编:苏煜城;常务副主编:蒋尔雄.编辑部设在南京大学数学系.《高等学校计算数学学报》编辑部出版、发行.1992年出版了1期,为第1卷,以后为半年刊.

《高等学校计算数学学报》(英文版)的宗旨为加强中国高等学校计算数学学科对国外的学术交流,促进计算数学的理论研究与应用研究的开展.主要刊登计算数学理论与方法的研究,计算数学上有价值的应用研究,适量刊登国内外计算数学各分支发展的综合述评等.栏目分为正文和快讯两部分,文章内容与同名的中文版不相重复.主要读者对象为高等院校计算数学专业的师生、从事计算数学研究的科研人员,以及从事科学计算的工程技术人员.

数学教育学报(天津)(Journal of Mathematics Education) 1992年12月创刊.刊号:CN12－1194/G_4,ISSN1004－9894.天津师范大学、侯镇数学教育研究所联合主办.主编:王梓坤;常务副主编:庶克平、曹才翰;副主编:梅向明、张奠宙、周学海、薛茂芳、张国杰.编辑部主任:张国杰.《数学教育学报》编辑委员会编辑、出版,编辑部设在天津师范大学北院.创刊初期为半年刊,1995年起改为季刊.

《数学教育学报》是以高等师范院校为主,集资联办的学术性综合期刊.以推动数学教育改革、发展数学素质教育为己任.主要栏目有:数学教育概论、调整与实验、展望与争鸣、"老三高"与"教材教法"教改争鸣、大学数学教育研究、中学教师论坛、研究生新论,以及各种专题研讨等.主要读者对象为大、中学校数学教师、教育研究工作者及有关学科研究生.

高等学校应用数学学报·*B*辑(英文版)(杭州)(Applied Mathematics, A Journal of Chinese Universities. Ser. B(Appl. Math. - JCU)) 1993年6月创刊.刊号:CN33－1171;ISSN1005－1031.《高等学校应用数学学报·*B*辑》经国家科学技术委员会批准,在原浙江大学主办的《高等学校应用数学学报》(1986年9月创刊)的基础上,另增办的英文版.原刊从此只登中文稿,称为*A*辑(中文版),英文版为*B*辑.*A*、*B*两辑同属一个编辑委员会和编辑部.主编:董光昌;副主编:萧树铁、俞文鮆、石青云、郭竹瑞.编辑部设在杭州市浙江大学应用数学研究所.由《高等学校应用数学学报·*B*辑》编辑委员会编辑、出版,编辑部直接对国内发行,中国国际图书贸易总公司(北京399信箱)对国外发行.*A*、*B*两辑均为季刊,卷号同步,从1993年起在同一卷号上标明*A*辑或*B*辑,*B*辑创办的第一年出版了2期.

《高等学校应用数学学报·*B*辑》(英文版)是综合性的应用数学学术期刊.主要刊登应用数学方面具有创造性的学术论文,包括应用数学理论与方法,并侧重于数学论证方面的论文,以及建立应用数学模型与应用数学方法具有创新观点的论文,运用数学方法解决实际问题获得成效的论文或应用报告等.也刊登一些能反映国内外应用数学最新成果的综述文章和动态报道等.*A*、*B*两辑刊登的论文内容不重复.主要读者对象是大专院校师生、科学研究部门和生产单位的应用数学工作者及工程技术人员.

非线性动力学学报(英文版)(长沙)(Journal of Nonlinear Dynamics in Science and Technology) 1993年10月创刊.湖南省内部刊物准印证号:(97)338.中国振动工程学会主办.主编:陈予恕;副主编:郑兆昌、陆企韶、徐健学、唐云、傅衣铭、冯长根.编辑部设在湖南大学工程力学系.湖南大学出版、发行.季刊.

《非线性动力学学报》(英文版)主要刊登计算数学的理论与方法,以及有价值的应用研究.学报分正文和快讯.主要读者对象为高等院校计算数学专业的师生、从事计算数学研究的科研人员,以及从事科学计算的工程技术人员.

代数集刊(英文版)(北京)(Algebra Colloquium) 1994年1月创刊.刊号:CN11－3382/O_1;ISSN1005－3867.中国科学院数学研究所主办,《代

数集刊》(英文版)编辑部编辑、出版、发行. 主编:万哲先;副主编:许永华、方源(台湾)、岑嘉评(香港).《代数集刊》(英文版)编辑委员会中,有三分之二为海外成员. 编辑部设在北京市中关村中国科学院数学研究所. 季刊.

《代数集刊》(英文版)是中国主办的第一个国际性的代数学刊物,其宗旨是加强基础研究,繁荣数学事业,提倡学术民主,促进国内外学术交流,为年轻数学人才的成长提供园地,力争办成高水平的有国际影响的期刊. 刊登代数学及相关领域创造性的学术论文. 主要读者对象为国内外数学研究人员、大学数学系教师和研究生,以及相关领域的研究工作者.

初中数学教与学(扬州)(Junior Middle School Mathematics Teaching & Learning) 1994 年 1 月创刊. 刊号:CN32－1392/G_4,28－152;ISSN1007－1849. 江苏省教育委员会主管,扬州大学主办. 历任主编:蒋声(1994－1995)、姚林(1996－);副主编:邱兆璋、施珏.《初中数学教与学》编辑部编辑、出版,32 开本,月刊. 编辑部设在扬州大学师范学院.

《初中数学教与学》主要面向初中学生,紧密结合初中教材,配合教学进展,结合初中生心理特点与学习实际,融科学性、实用性、趣味性于一体,以同步辅导、同步测试、复习及解题思路方法与技巧、错在哪里为主要栏目. 同时以生活中的数学、从趣题谈方法、想一想等栏目进一步提高学生的学习兴趣. 此外,还辟有教学研究栏目,供教师参考.

北京数学(英文版)(北京)(Beijing Mathematics) 1995 年创刊. 刊号:ISSN1366－3836. 北京大学主办. 主编:姜伯驹;副主编:孙和生、郭柏灵、李正元. 编辑部设在北京大学数学系. 半年刊.

《北京数学》(英文版)刊登具有创造性,并能引起科学界和数学界广泛兴趣的纯粹数学和应用数学方面的学术研究论文. 同时刊登高水平的综述文章,对纯粹数学和应用数学各领域的最新发展给出宏观论述,并提出新思想和新观点. 主要读者对象是国内外科学研究人员、广大数学研究工作者.

非线性科学与数值模拟通讯(英文版)(北京)(Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation) 1996 年 1 月创刊. 刊号:CN11－3737/N;ISSN1007－5704. 北京大学主办. 主编:陈耀松.《非线性科学与数值模拟通讯》(英文版)编辑委员会编辑、出版、发行. 编辑部设在北京大学力学系非线性科学研究中心. 季刊.

《非线性科学与数值模拟通讯》(英文版)是电子期刊,同时具有电子版和印刷版. 主要刊登以数理手段研究自然界和社会活动中的非线性现象,以及运用近代数值方法对其进行模拟的最新研究成果. 登载的内容和办刊的手段都极具有时代性. 该刊鼓励思想活跃的青年科学家(博士生、博士后等)把新的思想带到这份刊物中来.

组合年刊(英文版)(天津)(Annals of Combinatorics) 1997 年 3 月创刊.《组合年刊》(英文版)是中国负责编辑的第一份国际性组合学学术刊物. 南开大学数学研究所陈永川教授担任执行编辑;编委有迪(Du, D. Z.)、盖尔范德(Gelfand, I. M.)、格雷厄姆(Graham, R. L.)、万哲先(Wan, Zhe - Xian)、亚普(Yap, H. P.)等. 编辑部设在天津市南开大学数学研究所. 德国斯普林格(Springer - Verlag)出版、发行. 季刊.

组合数学是当今数学中最为活跃的分支学科之一,它的理论性极强,但又具有广泛的应用性,将是 21 世纪数学的最前沿学科之一. 组合数学在中国有极大的发展潜力,《组合年刊》(英文版)在中国创办,无疑将对中国组合数学的发展起巨大的推动作用,目前已引起各国组合数学界的强烈关注.

外国数学期刊

外国数学期刊(foreign mathematical periodicals) 外国数学专业刊物. 外国数学期刊的出现与发展,与各国各地区的数学水平及数学家群体的贡献是密切相关的. 综观数学发展史及数学期刊出版事业的发展史,法、德、英等欧洲国家曾有过数学的辉煌历史,它们的一批数学家在数学史上占有重要地位,因此,一些早期的数学期刊(及一些综合性的科学期刊)也是在这些国家和地区最先出现,其中大都延续至今. 随着数学在欧洲的传播与发展,其他欧洲国家,如意大利、俄国、瑞典等国也在 19 世纪与前面三国同时或稍后创办了数学期刊,个别期刊甚至更早些,这已完全是超越国界的地区产物. 这充分说明了数学期刊的出现是数学发展的必然结果与进一步发展的需要. 以同样原因出现的数学学会、协会又为数学期刊出版事业起了推动作用,如伦敦数学会一成立,即出版了其《会刊》(Proceedings),并把组织发表其会员的论文及传递《会刊》作为学会的一项重要活动;莫斯科数学会等其他一些数学学术团体也在成立不久就着手创办了数学期刊,因而有效地加速了数学思想的传播与学术交流.

20 世纪以来,随着数学的发展,数学期刊的数量不断增加,而数学文献量的增加,使数学家们获取所需资料的难度也随着增大. 为帮助数学家能尽快地获取数学发展情报,文摘性期刊已成为最佳选择. 在这种形势下,德国《数学文摘》(参见《数学文摘》)于 1931 年创刊,在 20 世纪 30 年代为数学家获取数学文献信息提供了快捷有效的渠道. 第二次世界大战期间,一批欧洲科学家其中包括数学家移居美国,

1940 年创刊的《数学评论》(参见《数学评论》),在战争地区以外各国填补了《数学文摘》的一段时间的空缺,为数学文献情报的传递提供了可靠的工具. 第二次世界大战后,美国的科学技术发展加快,其出版的期刊的数量也快速增长. 据《美国数学会通告》(Notices of the American Mathematical Society)所载资料及美国数学会发布的其他资料,到 1990 年初为止,美国出版的数学期刊已达 73 种,并从其他文种翻译出版了数学期刊 25 种,其中美国数学会就出版了 10 多种. 美国数学会已成为当今世界上出版数学期刊最多的一个数学学术团体.

目前,国外数学期刊的出版状况大致是:分布面广,但相对集中. 除美国外,欧洲地区与俄国、日本是数学期刊出版数量较多的地区和国家;东南亚地区在 20 世纪后期,数学期刊数量也呈高速发展趋势. 数学期刊既为数学家发表交流研究成果提供了场所,又为一代又一代的年轻数学家的成长提供了学术"营养",也使工作在其他领域的科学家们从中获取了有益的数学工具.

注:"外国数学期刊"项目下介绍的 481 种刊物的基本情况主要根据 1995 年年底国内馆藏的进口原刊写成,其中绝大部分是 Sci 收录的数学核心期刊. 1995 年前后,因国家或地区的变动引起数学期刊的变动情况无法全部反映出来.

皇家学会哲学汇刊 · *A* 辑 · 数学与物理学(英)(Philosophical Transactions of the Royal Society, Series A:Mathematical & Physical Sciences)(London) 1665 年创刊. 刊号:510C0006,ISSN0080—4614. 该刊是世界上创办最早的科技期刊,至 1886 年已出版 177 卷 479 期. 从 1887 年起分为 A、B 两辑出版,A 辑原称《Philosophical Transactions of the Royal Society of London,Series A:Mathematical & Physical Sciences》(1887-1987 年),由英国皇家学会编辑,不定期出版. 1988 年起改为现名. 英国皇家学会出版、发行. 每年出版 3 期. 每期发表一篇专题论文.

纯粹与应用数学杂志(德)(Journal für die Reine and Angewandte Mathematik)(Berlin) 1826 年创刊. 刊号:510E0006,ISSN0075—4102. 该刊是世界上延续至今的第一份数学杂志,由德国工程师克雷尔(Crelle, A. L.)创办,故又称《Crelles Journal》. 由德国 Walter de Gruyter 出版公司出版、发行. 原系不定期出版,现每年出版 10 期. 刊载理论数学和数学在各个领域中应用方面的研究论文,用英文或德文发表.

爱丁堡皇家学会会报 · *A* 辑 · 数学(英)(Proceedings of the Royal Society of Edinburgh,Section A:Mathematics)(Edinburgh) 1832 年创刊. 刊号:510C0008,ISSN0308—2105. 英国 Edinburgh 皇家学会编辑、出版、发行. 双月刊. A 辑原为:"Mathematics & Physical Sciences",最近改为"Mathematics",刊载数学方面的研究论文.

法国科学院报告 · 辑 1 · 数学(法)(Comptes Rendus de l'Academie des Sciences,Series 1:Mathematique)(Montrouge) 1835 年创刊. 刊号:510F0008,ISSN0764—4442. 原称《Comptes Rendus des Séancesde l'Académie des Sciences,Série 1:Mathematique》. 法国科学院编辑,法国 C. D. R. 出版公司出版、发行. 每年出版 40 期. 刊载理论数学、代数、复分析、变分法、拓扑学、数学分析等领域的研究论文.

爱尔兰皇家学会会报 · *A* 辑 · 数学与物理学(爱尔兰)(Proceedings of Royal Irish Academy,A:Mathematical and Physical Sciences)(Dublin) 1836 年创刊. 刊号:510C0053,ISSN0035—8975. 原称《Proceedings of Royal Irish Academy,A:Mathematical,Astronomica,Physical Sciences》. 爱尔兰皇家学会编辑、出版、发行. 原系不定期,现每年出版 2 期. 每期刊载一篇专题论文.

纯粹与应用数学杂志(法)(Journal de Mathematiques Pures et Appliquées)(Montrouge) 1836 年创刊. 刊号:510F0005,ISSN0021—7824. 该刊是世界上创办最早的数学期刊之一. 法国 Gauthier-Villars 出版社出版、发行. 季刊. 刊载纯粹与应用数学研究论文,包括代数、几何、数论、概率论、拓扑、泛函分析、应用数学等. 稿件来自世界各国.

剑桥哲学会数学会报(英)(Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society)(Cambridge) 1843 年创刊. 刊号:510C0004,ISSN0305—0041. 原称《Proceedings of the Cambridge Philosophical Society (Mathematical & Physical Sciences)》,从 1975 年(第 77 卷)起改称现名. 英国 Cambridge 大学出版社出版、发行. 原系季刊,1969 年(第 65 卷)起改为双月刊. 刊载理论数学与应用数学方面的研究论文,内容侧重于数学在力学问题中的应用,以及在数学物理学、相对论和宇宙论等理论数学各领域的应用问题.

理论与应用数学纪事(意)(Annali di Matematica Pura ed Applicata)(Bologna) 1850 年创刊. 刊号:510MC009,ISSN0373—3114. 意大利 Nicola Zanichelli 出版公司出版、发行. 不定期. 每期发表数学研究论文约 20 篇. 稿件来自世界各国,文章用意、英、法、德文,多数用英文发表.

皇家学会会报 · *A* 辑 · 数学与物理学(英)(Proceedings of the Royal Society,Series A:Mathematical & Physical Sciences)(London) 1854 年

创刊. 刊号:510C0007,ISSN0080—4630. 该刊最早的刊名为《Abstracts of the Papers Printed in the Philosophical Transactions》, 以后还用过《Abstracts of the Papers Communicated to the Society》及《Proceedings of the Royal Society》等刊名. 1905年(第76卷)起分为A、B两辑出版,A辑为数学与物理科学. 1969—1987年的刊名为《Proceedings of the Royal Society of London, Series A: Mathematical & Physical Sciences》. 1988年起改称现名,由不定期出版改为双月刊,现为月刊. 英国皇家学会编辑、出版、发行. 刊载数学、应用数学、物理、力学、电子物理学及工程物理学等方面的研究论文.

美国国家科学院院报(美)(Proceedings of the National Academy of Science of the USA)(Washington, DC) 1863年创刊. 刊号:500B0007, ISSN0027—2041. 1915年开始出版第二辑. 美国国家科学院的机关刊物. 原系月刊,1982年(第79卷)起改为半月刊. 专门发表美国国家科学院院士及由他们推荐的其他科学工作者的科研成果. 内容包括数学、天文、物理、化学、生物等. 论文一般比较简短.

高等师范学校科学纪事(法)(Annales Scientifiques de I'Ecole Normale Superieure)(Montrouge) 1864年创刊. 刊号:510F0001, ISSN-0012—9593. 法国Gauthier-Villars出版社出版、发行. 季刊. 刊载理论和应用数学方面的研究论文. 用法、英、德、意等文种发表.

伦敦数学会会报(英)(Proceedings of the London Mathematical Society)(Oxford) 1865年创刊. 刊号:510C0003, ISSN0024—6115. 该刊创办百余年,分三个阶段,1865—1903年出版35卷为第1辑,1903—1951年又出版54卷为第2辑,第3辑从1952年开始出版至今. 早期为季刊,1970年改为每年出版8期,1976年起改为双月刊. 英国伦敦数学会编辑,牛津大学出版社出版、发行. 刊载纯数学学术论文,论题涉及实分析、复分析、微分、拓扑学、几何、逻辑、概率、统计等各数学领域.

数学汇编(俄)(Математический Сборник)(Москва) 1866年创刊. 刊号:510P0020, ISSN0368—8666. 该刊为俄罗斯创办最早的数学专业刊物. 俄罗斯科学院和莫斯科数学会合编. 俄罗斯科学出版社出版、发行. 月刊. 刊载理论数学与应用数学方面的研究论文. 美国数学会从1967年起出版、发行该刊的英译本,刊名为《Mathematics of the USSR-Sbornik》(510B0084, ISSN0025—5734). 现改名为《Sbornik Mathematics》.

数学纪事(德)(Mathematische Annalen)(Berlin) 1868年创刊. 刊号:510E0001, ISSN0025—5831. 德国Springer出版社出版、发行. 原系不定期,现为月刊. 主要刊载复分析、代数几何、代数数论、模形式、微分几何、泛函分析等方面的研究论文. 用英、法、德文发表.

数学通报(法)(Bulletin des Sciences Mathematiques)(Paris) 1870年创刊. 刊号:510F0002, ISSN0007—4497. 原称《Bulletin des Sciences Mathematiques et Astronomiques》. 从1877年第2辑开始,由法国Gauthier-Villars出版社出版、发行. 季刊. 主要刊载理论数学、应用数学研究论文. 每篇均附英文、法文两种文摘.

比萨高等师范学校校刊·物理与数学(意)(Annali della Scuola Normale Superiore de Pisa, Scienze Fisiche e Matematiche)(Pisa) 1871年创刊. 刊号:530MC001. 意大利比萨高等师范学校编辑、出版、发行. 由国际著名偏微分方程专家组成编辑委员会,是意大利偏微分方程学派的主要园地.

捷克数学杂志(捷)(Czech Mathematical Journal)(Prague) 1872年创刊. 刊号:510LJ002, ISSN0011—4642. 该刊前身为《Časopis pro pěstováni matematiky a fysiky》,捷克科学院数学研究所编辑、出版. 在西方国家由Plemum出版公司代为发行. 季刊. 刊载理论与应用数学领域内的研究论文和书评. 用英、俄、法、德文发表.

法国数学会通报·附·纪要(法)(Bulletin de la Societe Mathematique de France, avec Memoires)(Montrouge) 1873年创刊. 刊号:510F0004, ISSN0037—9484. 法国Gauthier-Villars出版社出版、发行. 季刊. 加纪要4或5期. 刊载理论数学和应用数学方面的研究论文;《纪要》专载长篇论文. 用英文或法文发表.

波希米亚数学杂志(捷)(Mathematica Journal Bohemica)(Prague) 1875年创刊. 刊号:510LJ001, ISSN0528—2195. 原称《Casopis pro Pestovani Matematiky》. 捷克科学院数学研究所编辑. 季刊. 刊载理论数学与应用数学领域的研究论文、书评和简讯.

美国数学杂志(美)(American Journal of Mathematics)(Baltimore, MD) 1878年创刊. 刊号:510B0006, ISSN0002—9327. 美国创办最早的数学专业性刊物. 原称:《American Journal of Mathematics, Pure & Applied》,从第3卷起改称现名. 由创办单位约翰斯·霍普金斯大学出版社(Johns Hopkins University Press)期刊部出版、发行. 原系季刊,从第99卷(1977年)起改为双月刊. 刊载应用和理论数学的研究论文.

数学学报(瑞典)(Acta Mathematica)(Djursholm) 1882年创刊. 刊号:510KB001, ISSN0001—5962. 瑞典皇家科学院Mittag-Leffler数学研究所

编辑、出版、发行.季刊.历史悠久的综合性数学刊物之一,由米塔-列夫勒(Mittag - Leffler,(M.)G.)创办,并任主编45年,直到他去世.早期是数学家相互联系的园地,曾对波莱尔(Borel,(F.-É.-J.-)É.)、康托尔(Cantor,M.B.)、阿达马(Hadamard,J.(-S.))和希尔伯特(Hilbert,D.)等人产生过巨大影响.不少数学家如柯瓦列夫斯卡娅(Ковалевская,С.В.)等人都任过该刊编委.刊载数学方面的研究成果.稿件来自世界各国,论文多用英文发表.

爱丁堡数学会会报(英)(Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society) 1883年创刊.刊号:510C0005,ISSN0013—0915.该刊1883—1926年为第1辑,1927年起为第2辑.爱丁堡数学会编辑.原由英国Scottish学术出版社出版,现改为牛津大学出版社出版、发行.原为半年刊,现每年出版3期.刊载纯粹数学与应用数学研究论文,兼报道数学界学术动态.

数学纪事(美)(Annals of Mathematics)(Princeton,NJ) 1884年创刊.刊号:510B0008,ISSN0003—486X.该刊1884—1898年出版12卷为第1辑,第2辑从1899年开始出版至今.原由美国普林斯顿大学和高等研究院编辑.Princeton大学出版社出版、发行,20世纪90年代以后改为Johns Hopkins大学出版社期刊部出版、发行.双月刊.刊载理论数学研究论文.内容涉及代数、几何、拓扑学等.

巴勒摩数学会报告(意)(Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo)(Palermo) 1884年创刊.刊号:510MC006,ISSN0009—725X.意大利Palermo数学会编辑、出版、发行.原每年出版3期,现为季刊.刊载数学研究论文.用英、法、德、意文发表.

德国数学家联合会年报(德)(Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung)(Stuttgart) 1890年创刊.刊号:510E0005,ISSN0012—0456.德国B.G.Teubner出版公司出版、发行.季刊.刊载纯粹数学与应用数学方面的研究论文和综述、书评等.

专业数学杂志(法)(Revue de Mathematiques Speciales)(Paris) 1890年创刊.刊号:513F0001,ISSN0035—1504.法国Librairie Vuibert出版、发行.每年出版10期.主要刊载高等数学领域的研究论文与研究简报、数学竞赛与试题解答,兼载书讯等.

数学月刊(奥)(Monatshefte füer Mathematik)(Vienna) 1890年创刊.刊号:510LE002,ISSN0026—9255.Springer出版社奥地利分社出版、发行.每年出版8期.刊载数学研究论文和书评,主要涉及代数、实分析、复分析、生物数学、动力系统、泛函分析、几何学、局部紧群、数论等.文章多用英文发表,间用法文或德文发表.

美国数学会通报(新辑)(美)(Bulletin (New Series) of the American Mathemetical Society)(Providence,RI) 1891年创刊.刊号:510B0001,ISSN0273—0979.该刊前身是1891年创刊的《Bulletin of the New York Mathematical Society》.出版至3卷后,从1894年起改称《Bulletin of the American Mathematical Society》,卷号重计,出版至84卷.从1979年起加"New Series",卷号再从第1卷起算,每年出版2卷4期.美国数学会编辑、出版、发行,是美国数学会的机关刊物.刊载评述性论文、研究报道、研究报告和书评.

美国数学月刊(美)(The American Mathematical Monthly)(Washington,DC) 1894年创刊.刊号:510B0007,ISSN0002—9890.美国数学协会的机关刊物.每年出版10期.该刊旨在促进高校数学的发展,它的长篇文章涉及理论、应用、新老数学的各个分支,是阐述性的,但不排斥偶尔含有新成果.除长篇文章之外,还辟有笔记、进展报告、未解决问题、数学教学、问题和解答、书评等栏目.

数学杂志(英)(Mathematical Gazette)(London) 1894年创刊.刊号:510C0051,ISSN0025—5572.英国数学协会编辑、出版、发行.季刊.刊载初等、中等数学知识及教学法方面的文章与简讯,报道数学界的动态.

数学教学(瑞士)(L'Enseignement Mathematique)(Geneva) 1899年创刊.刊号:510LD004,ISSN0013—8584.国际数学教育委员会编辑的机关刊物,属国际数学联盟的出版物之一,由瑞士Geneve大学数学研究所出版、发行.季刊.刊载数学教学中有关问题的研究论文,所载论文偏重于基础理论,并经常发表一些供大学数学系学生及教师阅读的文章,以及新书介绍等.用英、法或德文发表.

美国数学会汇刊(美)(Transactions of the American Mathematical Society)(Providence,RI) 1900年创刊.刊号:510B0003,ISSN0002—9947.美国数学会编辑、出版、发行.月刊.主要刊载理论与应用数学各分支篇幅较长的原始性研究论文.每年出版6卷,每卷2期.

数学教师(美)(Mathematics Teacher)(Reston,VA) 1908年创刊.刊号:512B0052,ISSN0025—5769.美国数学教师全国理事会编辑、出版的机关刊物.月刊,每年出版9期(6月、7月、8月,三个月不出刊).主要刊载与中学数学教育有关的文章,兼顾大学数学基础课的教学.旨在探讨数学教育与教学中的某些问题,交流数学教学经验、课程设置和教材编写等方面的设想建议或经验.

加尔各答数学会通报(印)(Bulletin of the Calcutta Mathematical Society)(Calcutta) 1909年创刊.刊号:510HA001,ISSN0008—0659.印度加尔各答数学会编辑、出版、发行.双月刊.刊载数学各领域内的研究论文、札记和快报.

东北数学杂志(日)(Tohoku Mathematical Journal)(Sendai) 1911年创刊.刊号:510D0002,ISSN0040—8735.日本东北大学数学研究所编辑、出版、发行.1948年前出版的刊物为第1辑,第2辑从1949年开始.季刊.刊载纯粹数学和应用数学方面的研究论文,用英、法或德文发表.

数学杂志(德)(Mathematische Zeitschrift)(Berlin) 1918年创刊.刊号:510E0002,ISSN0025—5874.德国Springer出版社出版、发行.原系不定期出版,现为月刊.刊载理论与应用数学各分支的新成果和综述.文章多用英文发表.

日本数学教育学会志·附·数学教育学论究(日)(Journal of Japan Society of Mathematical Education)(Tokyo) 1919年创刊.刊号:510D0051,ISSN0021—471X.日本数学教育学会编辑、出版、发行.原系月刊,现每年出版14期,附"数学教育学论究".本刊包括《数学教育》和《算术教育》两部分,前者逢单月出版,后者逢双月出版.《数学教育学论究》为一年2期.刊载数学教学方法、教材、教具等方面的研究论述,包括论说、研究、讨论会、小组会议、报告、杂报等,以理论性文章居多.用日文发表.

伊比利亚美洲数学杂志(西)(Revista Matematica Iberoamericana)(Madrid) 1919年创刊.刊号:510MA003,ISSN0213—2230.原称《Revista Matematica Hispano-Americana》(1919—1982年,刊号:ISSN0373—0999).西班牙Jorge Juan数学研究所出版、发行.每年出版3期.刊载来自西班牙和拉美国家的数学研究论文.多用西班牙文发表,间用英文发表.

基础数学(波)(Fundamenta Mathematicae)(Warsaw) 1920年创刊.刊号:510LH054,ISSN0016—2736.波兰科学院数学研究所编辑,不定期出版.发表数学领域的研究论文.用英、法、俄文发表.

理论数学学报(匈)(Acta Scientiarum Mathematicarum)(Szeged) 1920年创刊.刊号:510LM002,ISSN0001—6969.匈牙利Szeged大学编辑、出版的数学刊物.季刊.刊载理论数学方面的研究论文.用英、德、法、俄文发表.

应用数学研究(美)(Studies in Applied Mathematics)(New York)称称《Journal of Mathematics and Physics》,1969年(第48卷)起改称现名.Elsevier科学出版公司美国分公司出版、发行.原系季刊,从1977年(第56卷)起改为双月刊.刊载应用数学方面的原始研究论文.涉及学科为物理、工程、地球物理、气象等.

应用数学和力学杂志(德)(ZAMM-Zeitschrift für Angewandte Mathematik and Mechanik)(Berlin) 1921年创刊.刊号:519E0006,ISSN0044—2267.德国科学院力学研究所编辑,德国科学院出版社出版、发行.月刊.刊载与应用数学和力学有关的研究论文及研究快报.用英、德文发表.

汉堡大学数学讨论会论文集(德)(Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg)(Gottingen) 1922年创刊.刊号:510E0004,ISSN0025—5858.德国Vandenhoeck & Ruprecht出版社出版、发行.每年出版1期.刊载数学方面的研究论文.

芬兰奥布学院学报·B辑·数学与物理学(芬兰)(Acta Academiae Aboensis, Series B: Mathematica et Physica)(Abo) 1922年创刊.刊号:510KC051,ISSN0001—5105.芬兰奥布学院编辑、出版、发行.不定期出版.每期刊载一篇数学或物理学方面的研究论文.

意大利数学联合会通报(意)(Bollettino del l'Unione Matematica Italiana)(Bologna) 1922年创刊.刊号:510MC054,ISSN0041—7084.意大利Nicola Zanichelli出版公司出版、发行.原系双月刊,现每年出版7期.分A、B两辑,A辑每年出版3期,刊载综述性论文和札记;B辑每年出版4期,刊载数学研究论文.稿件来自世界各国,多用英文发表.

日本数学杂志(新辑)(日)(Japanese Journal of Mathematics (New Series))(Tokyo) 1924年创刊.刊号:510D0061,ISSN0289—2316.原称《Japanese Journal of Mathematics》(1924—1975),当时由日本学术会议主办、编辑.从1975年9月起加"(New Series)",卷期重新起计,改由日本数学会编辑,一度由日本Kinokuniya出版公司出版,现由日本数学会出版、发行.每年出版2期.专载数学研究论文.多用英文发表,间用德、法文发表.

数学杂志(美)(Mathematics Magazine)(Washington, DC) 1926年创刊.刊号:512B0001,ISSN0025—570X.美国数学协会编辑、出版、发行.每年出版5期.主要刊载有关大、中学数学教学方面的文章,另设有问题、书评、新闻通讯等专栏.

伦敦数学会志(英)(Journal of the London Mathematical Society)(London) 1926年创刊.刊号:510C0002,ISSN0024—6107.该刊1926—1968年为第1辑,1969年起为第2辑.英国伦敦数学会编辑.早期由英国C.F.Hodgson & Son出版公司出版,1985年起转由英国剑桥出版社出版、发行.双月

刊.刊载伦敦数学会各届会议的报告、决议及相关消息,同时刊载较短篇的数学论文,以及重要论文的文摘,内容涉及数学的各个领域.

瑞士数学通讯(瑞士)(Commemtarii Mathematici Helvetici)(Basel) 1929年创刊.刊号:510LD003.ISSN0010—2571.瑞士数学会编辑,瑞士 Birkhäuser 出版社出版、发行.季刊.刊载数学各个领域的研究论文.用英、德或法文发表.

数学研究(波)(Studia Mathematica)(Warsaw) 1929年创刊.刊号:510LH001.波兰科学院数学研究所编辑,波兰国家科学出版社出版、发行.一般每卷3期.主要刊载泛函分析、数学分析抽象方法和概率论方面的创造性论文,用英、法、德、俄文发表.不定期出版.

统计学纪事(美)(Annals of Statistics, including Statistical Science)(Hayward, CA) 1930年创刊.刊号:513B0001,ISSN0090—5364.原称《Annals of Mathematical Statistics》(1930-1972年),1973年改称现名.同时另创办《Annals of Probability》(参见刊号:513B0059).该刊是美国数理统计学会编辑、出版的机关刊物.原系双月刊,从1982年(第10卷)起改为季刊.刊载统计理论与应用领域内的研究论文,特别重视发表一些迅速发展领域中有权威的阐述和评述性文章,并随刊还供应《统计科学》.

数学季刊(英)(Quarterly Journal of Mathematics)(Eynsham) 1930年创刊.刊号:510C0009,ISSN0033—5606.该刊1930—1949年出版20卷为第1辑,第2辑从1950年开始,牛津大学出版社出版、发行.季刊.主要刊载理论数学与应用数学等方面的研究论文.

帕多瓦大学数学研究报告(意)(Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova)(Padua) 1930年创刊.刊号:510MC011.意大利CEDAM出版公司出版、发行.每年出版2期.刊载纯粹数学与应用数学方面的研究论文.稿件来自世界各国,多用英文发表,间用法、德、意或西班牙文发表.

数学文摘(德)(Zentralblatt für Mathematik and ihre Grenzgebiete/Mathematics Abstracts)(Berlin) 1931年创刊.刊号:510E0003,ISSN0044—4235.英文名是1974年(第274卷)起用的.德国海德堡科学院与能量、物理和数学技术情报中心合编,德国 Springer 出版社出版、发行.现在每年出版24卷,每10卷和每50卷有累积索引.1981年起另出7种活页性分辑本.《Number Theory and Algebraic Geometry》(510E0003-1),《Partial Differential Equations》(510E0003-2),《Probability and Stochastic Processes》(510E0003-3),《Geometry》(510E0003—4),《Topology》(510E0003-5),《Real Analysis》(510E0003-6),《Numerical Analysis》(510E0003-7).

《数学文摘(德)》是世界上历史最久的文摘量最多的数学文摘杂志,现在每年文摘条数约5万条.

俄罗斯科学院报告(俄)(Доклады Российской Академии Наук)(Москва) 1933年创刊.刊号:500P070244,ISSN0002—2364.原称《苏联科学院报告》,现改为今名.俄罗斯科学出版社出版、发行.每月3期,两月1卷.每期分为20个左右栏目.数学为第1栏目,刊载研究简报,文章一般不超过4页.美国数学会从1960年(130卷)起将数学栏目中的文章译成英文出版.刊名为《Soviet Mathematic-Doklady》(刊号:510B0091,ISSN0197-6788),现每年出版两卷,每卷3期,每期集中原刊两卷中的数学文章的译文.

印度科学院院报·数学科学(印)(Proceedings of the Indian Academy of Sciences: Mathematical Sciences)(Bangalore) 1934年创刊.刊号:510HA066,ISSN0253—4142.印度科学院编辑、出版、发行.每年出版3期.刊载数学科学领域内的研究论文、评论和快报.

数学论文集(荷)(Compositio Mathematica)(Dordrecht) 1934年创刊.刊号:510LB001,ISSN0010—437X.荷兰 Martinus Nijhoff 出版社出版的国际性刊物,由荷兰 Kluwer 学术出版集团销售中心发行.原每年出版9期,后改为月刊,现每年出版15期.刊载数学领域的研究论文,偏重于理论数学方面的研究.稿件来自世界各国,多用英文发表,间用德文或法文发表.

数学教学(俄)(Математика в Школе)(Москва) 1934年创刊.刊号:380P070557,ISSN0130—9358.俄罗斯教育部编辑,俄罗斯教育出版社出版、发行.双月刊.是俄罗斯教育部指导中、小学数学教育的教学刊物.

杜克数学杂志(美)(Duke Mathematical Journal)(Durham) 1935年创刊.刊号:513B0002,ISSN0012—7094.美国 Duke 大学出版社出版、发行.原为季刊,1985年后改为双月刊.刊载数学研究方面的原始论文,内容包括:数论、高等代数、群论、线性代数、高等几何、拓扑、数学分析、函数论、泛函分析、微分方程、概率论与数理统计等.

符号逻辑杂志(美)(Journal of Symbolic Logic)(Providence, RI) 1936年创刊.刊号:513B0004,ISSN0022—4812.美国符号逻辑协会编辑的机关刊物,由 Illinois 大学出版社出版、发行.季刊.刊载符号逻辑方面的学术性原始论文和评述性文章,也刊载以逻辑为基础或使用逻辑方法的研究

成果,但主要点是哲学的文章和考虑到现代技术发展的逻辑史研究.

算术学报(波)(Acta Arithmetica)(Warsaw) 1936年创刊.刊号:512LH001,ISSN0065—1036.波兰科学院数学研究所编辑、出版、发行.不定期刊物.主要刊登数论、代数和数学基础的研究论文.用英、法、德文发表.

葡萄牙数学杂志(葡)(Portugaliae Mathematica)(Losboe) 1936年创刊.刊号:510MB001,ISSN0032—5155.葡萄牙数学会编辑、出版、发行.季刊.刊载数学研究论文,主要是代数、分析及其应用方面的文章.稿件来自本国和其他西方国家,用英、德、法、意或葡文发表.

应用数学与力学(俄)(Прикладная Математика и Механика)(Москва) 1936年创刊.刊号:519P004,ISSN0032—8235.俄罗斯科学院编辑,俄罗斯科学出版社出版、发行.双月刊.刊载应用数学与力学领域的研究论文与简报.英国Pergamon出版社从1958年起出版、发行该刊的英译本,刊名为《Journal of Applied Mathematics & Mechanics》(刊号:519C0056,ISSN0021—8928).

数学成就(俄)(Успехи Математических Наук)(Москва) 1936年创刊.刊号:510P0024,ISSN0042—1316.俄罗斯科学院与莫斯科数学会合编,俄罗斯科学出版社出版、发行.双月刊.刊载数学研究进展与成就方面的综述、传记、莫斯科数学会的学术动态报道等.英国图书馆文献服务中心从1965年起出版、发行该刊的英译本.刊名为《Russian Mathematical Surveys》(刊号:510C0065,ISSN0036—0279).

阿根廷数学联合会会志(阿)(Revista de la Union Matematica Argentina)(Cordoba) 1936年创刊.刊号:510PB052,ISSN0041—6932.阿根廷数学联合会编辑、出版、发行.每年出版2期.刊载纯粹数学与应用数学方面的研究论文.用英文或西班牙文发表.

俄罗斯科学院通报·数学辑(俄)(Известия Российской Академии Наук: Серия Математическая)(Москва) 1937年创刊.刊号:510P0018,ISSN0373—2436.原称《苏联科学院通报·数学辑》,苏联解体后改为现名.俄罗斯科学出版社出版、发行.双月刊.刊载理论数学和应用数学的研究论文,用俄文发表.美国数学会从1967年出版、发行该刊的英译本,刊名为《Mathematics of the USSR - Izvestiya》(刊号:510B0085,ISSN0025—5726),苏联解体后改名为《Izvestiya Mathematics》.

张量(新辑)(日)(Tensor,New Series)(Chigasaki) 1938年创刊.刊号:510D0054.原称《Tensor》.日本张量学会编辑、出版的机关刊物,该学会是国际性的.到1941年出版4卷后停刊,新辑第1卷从1950年开始,每年出版3期.主要刊载有关矢量和张量分析及其应用等方面的研究论文.稿件来自日本和其他国家.以英文为主,也用日、法、德、意文.

数学研究(荷)(Indagationes Mathematicae)(Amsterdam) 1938年创刊.刊号:510LB002,ISSN0019—3577.该刊前用名《Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen,Series A:Mathematical Sciences》(刊号:ISSN0023—3358).原系1898年创办的荷兰皇家科学院院报,从1951年(第54卷)起该院报分为A、B、C三辑出版,其中A辑从此与1938年创办的《Indagationes Mathematicae》内容相同,刊名共用前名,20世纪90年代改称现名.季刊.荷兰Elsevier科学出版公司出版、发行.刊载荷兰皇家科学院成员推荐的理论数学方面的研究论文.

数理生物学通报(英)(Bulletin of Mathematical Biology)(Elmsford,NY) 1939年创刊.刊号:581C0011,ISSN0092—8240.原称《Bulletin of Mathematical Biophysics》(1939—1972年).由英国数理生物学会编辑,英国Pergamon出版社出版、发行.刊载生物学中有关数学、物理基础等方面的研究论文.

数学评论(美)(Mathematical Reviews—MR)(Providence,RI) 1940年创刊.刊号:510B0004,ISSN0025—5629.美国数学会编辑、出版、发行的数学文摘杂志.评论摘录世界范围内各文种出版的数学及有关学科的连续出版物,年文摘量6万余条.论题用原文刊出,均附英译名,评论用英文发表,是数学及相关领域的重要检索工具刊物.月刊.每期附有作者和关键词索引.为便于检索使用,20世纪70年代,《数学评论》制订了主题分类表,并于1980年按主题分类表正式实行主题分类法,即将评论和摘要按其主题分类进行排列.主题分类表已经1985年和1991年两次修订.《数学评论》每年都出版本年度所评文献的作者索引和按主题分类编排的主题索引,也出版多年度的累积索引(分作者与主题两种),并还把1940—1979年间所评文献按主题分类重新编制成累积主题索引.据《美国数学会通告》资料(见Notices of the American Mathematical Society;36:10(1989))统计记载,《数学评论》与世界各地出版商及大学间均有协议,后者向前者提供用以评论的杂志或书籍,到1989年末,其创刊50周年前夕,它已收到世界各国的1800余种杂志,中国提供的杂志也超过了100种.从创刊到1989年它已刊登了总数为100万条目的评论与摘要.它还在全世界的数学家中挑选了14000余位专家学者组成了一支庞大的评论员队伍.

《数学评论》1991年主题分类表的一级分类号如下:00.总论,01.历史和传记,03.数理逻辑和数学基础,04.集合论,05.组合论,06.序、格、有序代数结构,08.一般代数系统,10.数论,12.域论和多项式,13.交换环与交换代数,14.代数几何,15.线性代数与多重线性代数、矩阵论,16.结合环与结合代数,17.非结合环与非结合代数,18.范畴论、同调代数度度与积分,30.单复变函数,31.位势论,32.多复变量和复空间,33.特殊函数,34.常微分方程,35.偏微分方程,39.有限差分与函数方程,40.序列、级数、可(求)和性,41.逼近和展开式,42.Fourier分析,43.抽象调和分析,44.积分变换、算符演算,45.积分方程,46.泛函分析,47.算子理论,49.变分法与最优控制、最优化,51.几何学,52.凸几何与离散几何,53.微分几何,54.一般拓扑学,55.代数拓扑,57.流形与胞腔复形,58.大范围分析、流形上的分析学,60.概率论与随机过程,62.统计学,65.数值分析,68.计算机科学(包括自动机),70.质点力学与系统力学,73.固体力学,76.流体力学,78.光学、电磁学理论,80.经典热力学、热传导,81.量子力学,82.统计力学、物质结构,83.相对论和引力理论,85.天文学与天体物理学,86.地球物理学,90.经济学、运筹学、规划、对策,92.生物学与其他自然科学、行为科学,93.系统论、控制论,94.信息与通讯、电路.

芬兰科学院纪事·A辑·第一部分·数学·附·数学学位论文(芬兰)(Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Series A. I. Mathematica Dissertationes)(Helsinki) 1941年创刊.刊号:510KC001, ISSN0066—1953.原称《Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Series A. I. Mathematica and Physica》;1957年改称《Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Series A. I. Mathematica》,继续原刊号;1976年改用现名,并重新申报刊号.出版地:赫尔辛基.主要刊载高等数学领域的研究论文.每期刊载学位论文一篇.不定期出版.多用英文发表.

计算数学(美)(Mathematics of Computation)(Providence, RI) 1943年创刊.刊号:519B0004, ISSN0025—5718.原称《Mathematical Tables & Other Aids to Computation》(1943—1959年),1960年(第14卷)起改称现名.美国数学会编辑、出版、发行.季刊.主要刊载数值分析、计算方法与高速计算机的应用、数学表的计算、高速计算机理论,以及与计算有关的其他辅助工具等各方面的研究论文,也兼载书评与札记.

应用数学季刊(美)(Quarterly of Applied Mathematics)(Providence, RI) 1943年创刊.刊号:519B0006, ISSN0033—569X.原由美国Brown大学出版,1984年后由美国数学会编辑、出版、发行.季刊.专门刊载和工业、实用科学紧密相关的应用数学方面的研究论文.文章采取高度科学标准与便于应用方面人士阅读的陈述方式,而其数学论证,也具有先进水平.

墨西哥数学会通报(墨)(Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana)(Mexico City) 1944年创刊.刊号:510NC001, ISSN0037—8615.墨西哥数学会编辑、出版、发行.每年出版2期.刊载数学研究论文.用英、法文或西班牙文发表.

生物统计学(美)(Biometrics: Journal of the Biometric Society)(Alexandria, VA) 1945年创刊.刊号:581B0011, ISSN0006—341X.原称《Biometrics Bulletin》.由Biometric Society编辑、出版、发行.季刊.刊载数学和统计学在理论与应用生物学领域的应用方面的研究论文、文摘和书评.

莫斯科大学通报·第一辑·数学与力学(俄)(Вестник Московского Университета, Серия 1: Математика и Механика)(Москва) 1946年创刊.刊号:510P0023, ISSN0579—9368.莫斯科大学出版社出版.双月刊.刊载数学与力学领域内的研究论文.美国Allerton出版公司从1969年起出版、发行该刊的英译本,刊名为《Moscow University Mathematics Bulletin》(刊号:510B0081, ISSN0027—1332).

圣彼得堡大学通报·数学、力学和天文学辑(俄)(Вестник Санкт - Летербургскою Университета. Серия Математика, Механика. Астрономия.)(Санкт Летербург) 1946年创刊 刊号:510P0027, ISSN0024—0850.原名《列宁格勒大学通报·数学、力学和天文学辑》,苏联解体后改为现名.圣彼得堡大学出版社出版、发行.季刊.刊载数学、力学、天文学领域的研究论文,兼载学术简讯和消息通报.美国数学会从1974年起出版、发行该刊数学部分的英译本,现由美国Allerton出版公司出版、发行这部分内容.刊名为《Vestnik St. Petersburg University: Mathematics》(刊号:510B0080, ISSN1063—4541)

莫斯科大学通报·第15辑·计算数学与控制论(俄)(Вестник Московского Университета, Серия 15: Вычислительная Математика и Кибернетика)(Москва)1946年创刊.刊号:519P0005, ISSN0137—0782.莫斯科大学出版社出版.季刊.刊载计算数学与控制论方面的研究论文与简讯.美国Allerton出版公司从1979年起出版、发行该刊的英译本,刊名为《Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics》(刊号:519B0065, ISSN0278—6419).

数学(日)(Mathematics)(Tokyo) 1947年创刊.刊号:510D0003, ISSN0039—470X.日本数学会编辑,岩波书店出版、发行.季刊.刊载数学领域的研

究论文和评述文章,内容涉及代数、几何、函数论、微分方程与数学基础等诸方面,兼载简报、札记、书评,以及讲演和讨论会的记录等.用日文发表.美国数学会1988年起将其中的评述文章译成英文,作为一种杂志出版.杂志名称为《Sugaku Expositions》(刊号:510B0097,ISSN0898—9583).

斯堪的纳维亚理工学报·数学与计算机科学部分(芬兰)(Acta Polytechnica Scandinavica, Mathematics & Computer Science Series)(Helsinki) 1947年创刊.刊号:510KC003,ISSN0355—2713.原称《Acta Polytechnica Scandinavica, Mathematics & Computing Machinery Series》,在瑞典出版;1975年以后改在芬兰出版,并改用现名,由芬兰 The Finnish Academy of Technology 出版、发行.不定期刊物.刊载北欧国家作者撰写的有关数学和计算机科学方面的研究论文.每期登载一篇文章,用英文发表.

国际数学通讯(奥)(Internationale Mathematische Nachrichten)(Vienna) 1947年创刊.刊号:510LE001.原称《Nachrichten der Osterreichischen Mathematischen Gesellschaft》,1951年国际数学联盟成立后改称现名,由国际数学联盟与奥地利数学会合办,奥地利数学会编辑、出版、发行.每年出版3期.属国际性的情报刊物,报道各国数学界的学术活动和出版消息.多用德文发表,间用英文发表.

理论与应用数学通讯(美)(Communications on Pure and Applied Mathematics)(New York) 1948年创刊.刊号:510B0009,ISSN0010—3640.原称《Communications on Applied Mathematics》,1949年起改称现名.美国纽约大学 Courant 数学科学研究所的机关刊物,由美国 John Wiley & Sons 出版公司出版、发行.双月刊.刊载应用数学、数学物理与数学分析等方面的研究论文.

日本数学(日)(Mathematica Japonica)(Osaka) 1948年创刊.刊号:510D0062,ISSN0025—5513.日本数理科学协会编辑、出版、发行.双月刊.刊载纯粹数学、统计、计算机科学、运筹学、应用数学和其他数学分支的研究论文.多用英文发表,间用德、法文发表.

统计数理研究所纪事(日)(Annals of the Institute of Statistical Mathematics)(Norwell, MA) 1948年创刊.刊号:513D0053,ISSN0020—3157.日本教育部统计数理研究所编辑、出版、发行.季刊.刊登统计理论、统计方法和统计方法应用方面的论文.用英文发表.

数学通讯(德)(Mathematische Nachrichten)(Berlin) 1948年创刊.刊号:510E0014,ISSN0025—584X.德国科学院数学研究所编辑,德国科学院出版社出版、发行.每年出版5卷.刊载数学的基础研究和数学在科学、社会学、工程学中的应用等方面的研究论文,报道最新研究成果和研究方法.文章用英、德、俄、法文发表.

数学文献(瑞士)(Archiv der Mathematik)(Basel) 1948年创刊.刊号:510LD001,ISSN0003—889X.瑞士 Birkhäuser 出版社出版、发行.原系双月刊,现为月刊.主要刊载数学及其应用方面的研究论文.文章用德、英、法、意文发表.

数学(波)(Matematyka)(Warszawa) 1948年创刊.刊号:510LH002,ISSN0137—8848.波兰文化与教育部编辑.双月刊.刊载有关中学数学教学问题方面的文章.

数学论丛(波)(Colloquium Mathematicum)(Warsaw) 1948年创刊.刊号:510LH052,ISSN0010—1354.波兰科学院数学研究所编辑,波兰科学出版社出版.不定期.刊载理论和应用数学各分支的研究论文,兼载简讯和综合性文章.用英、法、德、俄文发表.

数学汇刊(西)(Collectanea Mathematica)(Barcelona) 1948年创刊.刊号:510MA001,ISSN0010—0757.西班牙 Barcelona 大学出版、发行.每年出版3期.刊载纯粹数学与应用数学领域的研究论文.稿件来自世界各国,多用英文或西班牙文、法文发表.

日本数学会志(日)(Journal of the Mathematical Society of Japan)(Tokyo) 1949年创刊.刊号:510D0001,ISSN0025—5645.该刊前身为《Proceedings of the Physico - Mathematical Society of Japan》(1919-1944年),1949年重新创刊.日本数学会编辑、出版的机关刊物.季刊.刊载理论数学与应用数学的研究论文.论文多用英文发表,间用德文或法文发表.

工大数学杂志(日)(Kodai Mathematical Journal)(Tokyo) 1949年创刊.刊号:510D0084,ISSN0386—5991.原名 Kodai Mathematical Seminar Report.1978年起用现名,并重新从第一卷起编号.日本东京工业大学数学系编辑、出版、发行.刊载纯粹数学和应用数学方面的研究论文.论文多用英文发表,间用德文或法文发表.

傅里叶研究院纪事(法)(Annales de l'Institut Fourier)(Saint-Martin-d'Hères) 1949年创刊.刊号:510F0054,ISSN0373—0956.法国傅里叶研究院编辑、出版、发行.季刊.刊载数学领域的研究论文,偏重于函数论、泛函分析、概率论、偏微分方程等学科.论文用英文或法文发表,并有英、法两种文字的摘要.

数学丛刊(瑞典)(Arkiv för Matematik)(Djur-

sholm）1949 年创刊. 刊号：510KB002，ISSN0004—2080. 瑞典皇家科学院 Mittag-Leffler 研究所编辑、出版、发行. 半年刊. 每卷 2 期. 刊载数学各分支的创造性研究论文. 论文多用英文发表，间用法、德文发表.

比利时数学会通报（比）（Bulletin de la Societe Mathematique de Belgique）（Brussels） 1949 年创刊. 刊号：510LA051，ISSN0037—9476. 比利时数学会编辑、出版. 原系季刊，现为双月刊. 刊载数学领域的研究论文，兼载世界各国期刊文献的文摘. 论文用英文发表，文摘用法文发表.

数学研究（罗）（Studii si Cercetari Matematice）（Bucharest） 1949 年创刊. 刊号：510LK006，ISSN0039—4068. 罗马尼亚科学院编辑、出版. 双月刊. 专载数学领域的研究论文. 文章附英文或法文摘要.

数学汇刊（匈）（Publicationes Mathematicae）（Debrecen） 1949 年创刊. 刊号：510LM053，ISSN0033—3883. 匈牙利德布雷森大学数学研究所编辑. 季刊. 刊载数学领域内的研究论文. 用英、俄、德、法文发表.

加拿大数学杂志（加）（Canadian Journal of Mathematics/Journal Canadien de Mathematiques）（Ottawa）1949 年创刊. 刊号：510NA001，ISSN0008—414X. 加拿大数学会编辑，加拿大 Toronto 大学出版社期刊部出版、发行. 双月刊. 刊载数学领域的研究论文，用英文或法文发表.

乌克兰数学杂志（乌）（Украинский Математический Журнал）（Киев） 1949 年创刊. 刊号：510VY001，ISSN0041—6053. 乌克兰科学出版社出版、发行. 双月刊. 刊载数学领域内的研究论文和简讯，用俄文发表. 美国 Plenum 出版公司从 1967 年起出版、发行该刊的英译本，刊名为《Ukrainian Mathematical Journal》（刊号：510B0073，ISSN0041—5995）. 从 1993 年起改由美国 Allerton 出版公司出版、发行（刊号：510B0103，ISSN0041－5995）.

美国数学会会报（美）（Proceedings of the American Mathematical Society）（Providence，RI） 1950 年创刊. 刊号：510B0002，ISSN0002—9939. 美国数学会编辑、出版、发行. 原系双月刊，从 1969 年（第 20 卷）起改为月刊. 主要刊载理论与应用数学各分支较短篇幅的原始性研究论文. 辟有“简短札记”专栏，发表重要定理的全新证法、说明性例子或反例，关于已知结果的新观点或新结果等精练的短文.

工业数学（美）（Industrial Mathematics）（Roseville，MI） 1950 年创刊. 刊号：519B0051，ISSN0019—8528. 美国工业数学会编辑、出版的机关刊物. 半年刊. 刊载有关数学在工程、工业设计与计算中的应用方面的研究论文.

运筹学会杂志（英）（Journal of the Operational Research Society）（Basingstoke，RG） 1950 年创刊. 刊号：519C0001，ISSN0160—5682. 原称《Operational Research Quarterly》，从 1978 年（第 29 卷）起改称现名. 英国运筹学会编辑，英国 Macmillan 出版公司出版、发行. 早期为季刊，后改为每年出版 8 期，1978 年以后又改为月刊. 刊载运筹学在线性规划、统计和经济分析中的应用方面的研究论文，兼载有关方法学、技术或专业方面引起争执的文章，以及技术札记、运筹学史的研究等.

国际运筹学文摘（英）（International Abstracts in Operations Research）（Basingstoke，RG） 1950 年创刊. 刊号：519C0069，ISSN0020—580X. 国际运筹学会联合会编辑，英国 Macmillan 出版公司出版、发行. 双月刊. 摘录各国期刊发表的有关运筹学和管理科学方面的文献. 每年文摘量在 1000 条左右. 用英文出版.

名古屋数学杂志（日）（Nagoya Mathematical Journal）（Nagoya） 1950 年创刊. 刊号：510D0063，ISSN0027—7630. 日本名古屋大学数学系编辑、出版、发行. 季刊. 主要刊载名古屋大学理学部数学系的研究论文，也发表来自世界各地的特邀论文或其他原始性文章. 多用英文发表，间用德文或法文发表.

京都大学数学杂志（日）（Journal of Mathematics of Kyoto University）（Kyoto） 1950 年创刊. 刊号：510D0067，ISSN0023—608X. 日本京都大学数学系编辑、出版、发行. 原每年出版 3 期，现为季刊. 刊载数学研究论文. 多用英文发表. 间用德文或法文发表.

德国保险数学会杂志（德）（Blatter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik）（Wuerzburg）1950 年创刊. 刊号：519E0051，ISSN0012—0200. 德国 Konrad Triltsch Verlag 出版、发行. 每年出版 2 期. 刊载数学应用于保险业方面的研究论文、报告和书评等.

匈牙利数学学报（匈）（Acta Mathematica Hungarica）（Budapest） 1950 年创刊. 刊号：510LB058，ISSN0236—5294. 匈牙利科学院编辑的刊物，曾用刊名《Acta Mathematica Academiae Scientiarum》（1950－1982），《Acta Mathematica》（1983－1991 年，刊号：510AF001，ISSN0001—5954）. 1992 年起改在荷兰 Kluwer 学术出版社出版、发行. 同时改变了刊名和刊号. 原系季刊，现每年出版 8 期. 刊载理论数学和应用数学领域的研究论文. 用英、法、德、俄文发表.

应用数学与物理学杂志（瑞士）（ZAMP-Zeit-

schrift für Angewandte Mathematik and Physik)(Basel) 1950 年创刊. 刊号: 519LD001, ISSN0044—2275. 瑞士 Birkhäuser 出版社出版、发行. 双月刊. 刊载内容包括原始论文、简短报告和一般报道三部分,分别介绍应用数学与物理学方面的研究成果和有关的研究新进展,报道学术会议和新书消息. 文章用英、德、法或意文发表.

太平洋数学杂志(美)(Pacific Journal of Mathematics)(Carmel Valley, CA) 1951 年创刊. 刊号: 510B0012, ISSN0030—8730. 美国太平洋数学杂志社编辑、出版、发行. 原系季刊,从 1966 年(第 16 卷)起改为月刊,现每年出版 10 期. 刊载数学各分支的研究论文,包括数理逻辑、数论、代数、几何、函数论、泛函分析、微分方程、概率论、运筹学、计算数学等.

日本科学技术联盟统计应用研究报告(日)(Reports of Statistical Application Research JUSE)(Tokyo) 1951 年创刊. 刊号: 519D0051. 日本科学技术联盟编辑、出版、发行. 季刊. 主要刊载统计学在经营管理、生产管理、质量管理方面的应用报告. 用英文发表.

数理逻辑文献(德)(Archive for Mathematical Logic)(Berlin) 1951 年创刊. 刊号: 513E0001, ISSN0933—5846. 原称《Archive für Mathematische Logik and Grundlagen forschung》(1951－1987),由德国 W. kohlhammer Gmbh(科尔哈默出版公司)出版;1988 年改称现名后,改由德国 Springer 出版社出版、发行. 每年出版 2 期. 刊载数理逻辑方面的研究论文,兼载诸如在理论计算机科学和哲学等领域中数理逻辑方法起重要作用的论文,偶有综合性或阐述性文章. 用英文发表.

以色列数学杂志(以)(Israel Journal of Mathematics)(Jerusalem) 1951 年创刊. 刊号: 510JC001, ISSN0021—2172. 原系《Bulletin of the Research Council of Israel, Section F》的部分内容,自 1963 年起用现名,单独出版,卷号重新编. 由以色列国家研究与发展委员会编辑,以色列 Weizmann 科学出版社出版、发行. 月刊. 刊载中短篇数学研究论文,稿件来自世界各国,用英文发表.

数学分析学报(以)(Journal d'Analyse Mathématique)(Jerusalem) 1951 年创刊. 刊号: 513JC001, ISSN0021—7670. 以色列 Weizmann 出版社出版、发行. 不定期. 主要刊载关于数学分析的研究论文,偏重于理论数学,尤以微分方程、函数论等方面的论文较多. 文章用英、法两种文字发表.

斯洛伐克数学(斯洛伐克)(Mathematica Slovaca)(Bratislava) 1951 年创刊. 刊号: 510LJ005. ISSN0139—9918. 斯洛伐克科学院数学研究所编辑. 季刊. 刊载数学领域内的研究论文、书评和学术动态等. 用英、俄、法文发表.

密歇根数学杂志(美)(Michigan Mathematical Journal)(Ann Arbor, MI) 1952 年创刊. 刊号: 510B0053, ISSN0026—2285. 美国 Michigan 大学数学系编辑、出版、发行. 每年出版 3 期. 刊载理论与应用数学方面的研究论文.

印第安纳大学数学杂志(美)(Indiana University Mathematics Journal)(Bloomington, IN) 1952 年创刊. 刊号: 519B0003, ISSN0022—2518. 原称《Journal of Rational Mechanics & Analysis》,1957 年(第 6 卷)起改为《Journal of Mathematics & Mechanics》,1970 年(第 20 卷)起改称现名. 美国印第安纳大学数学系编辑、出版、发行. 原系双月刊,后为月刊,现为季刊. 刊载理论与应用数学方面的研究论文. 文章以英文为主,也用法、德、意几种文字发表.

运筹学(美)(Operations Research, with TIMS/ORSA Meeting Bulletin)(Baltimore, MD) 1952 年创刊. 刊号: 519B0005, ISSN0030—364X. 原称《Operations Research Society of American Journal》,1956 年(第 4 卷)起改称现名. 美国运筹学会数理科学研究所编辑、出版、发行. 原系季刊,后为双月刊,现每年出版 8 期. 刊载运筹学理论,以及运筹学在管理科学领域中应用方面的研究论文. 副刊《管理科学学会与美国运筹学会会议通报》,刊载两个学会会议论文的摘要.

格拉斯哥数学杂志(英)(Glasgow Mathematical Journal)(Oxford) 1952 年创刊. 刊号: 510C0052, ISSN0017—0895. 原称《Proceedings of the Glasgow Mathematical Association》,1967 年起改称现名. 原由英国 Scottish 学术出版社出版,现改由牛津大学出版社出版、发行. 每年出版 3 期. 刊载纯粹数学及应用数学方面的研究论文.

立教大学数学杂志(日)(Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli)(Tokyo) 1952 年创刊. 刊号: 510D0052, ISSN0010—258X. 日本立教大学数学系杂志编辑委员会编辑、出版、发行. 每年出版 2 期. 发表该校数学系的研究论文. 用英文出版.

数学汇刊(荷)(Nieuw Archief voor Wiskunde)(Amsterdam) 1952 年创刊. 刊号: 510LB051, ISSN0028—9825. 荷兰数学会会志. 荷兰数学中心出版、发行. 每年出版 3 期. 介绍数学的历史、发展及应用. 刊载研究论文、引导性综述、阐释性文章、史料评注、趣味数学、教材与辅导资料、数学杂谈、习题与解答以及书评. 稿件来自世界各国,多用英文发表.

数学研究(意)(Ricerche di Matematica)(Naples) 1952 年创刊. 刊号: 510MC007, ISSN0035—5038. 意大利 Napoli 大学应用数学系编辑,意大利

Libreria Liguori 出版、发行. 每年出版 2 期. 刊载数学研究论文. 用英、意、法文发表.

工业与应用数学会·应用数学杂志(美)(SIAM Journal on Applied Mathematics)(Philadelphia, PA)　1953 年创刊. 刊号: 519B0001, ISSN0036—1399. 原称《Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics》,从 1966 年(第 14 卷)起改称现名. 美国工业与应用数学会编辑、出版、发行. 双月刊. 刊载数学方法及其在物理学、工程学、生物学和医学科学等领域中应用方面的研究论文.

横滨数学杂志(日)(The Yokohama Mathematical Journal)(Yokohama)　1953 年创刊. 刊号: 510D0055, ISSN0044—0523. 日本横滨市立大学数学系编辑、出版、发行. 原每年出版 2 期,现一年出版 1 期. 刊载横滨大学数学系发表的研究论文. 用英文发表.

统计数理(日)(Proceedings of the Institute of Statistical Mathematics)(Tokyo)　1953 年创刊. 刊号: 513D0001, ISSN0563—685X. 原称《统计数理研究所会报》(Proceedings of the Institute of statistical Mathematics)(1953—1985). 日本统计数理研究所编辑、出版、发行. 原系不定期出版,现每年出版 2 期. 主要刊载该所有关数理统计的理论和应用方面的研究论文. 文章均附英文摘要,并有英文目次.

北欧数学杂志(挪)(Normat: Nordisk Matematisk Tidskrift)(Oslo) 1953 年创刊. 刊号: 510KA001, ISSN0029—1412. 挪威 Scandinavian 大学出版社出版、发行. 季刊. 该刊是以数学及其教学为中心的科普性杂志,文章用北欧各国文字发表,均附英文提要.

斯堪的纳维亚数学(丹麦)(Mathematica Scandinavica)(Aarhus)　1953 年创刊. 刊号: 510KD001, ISSN0025—5521. 斯堪的纳维亚半岛的北欧国家数学会合编的刊物,由丹麦数学研究所斯堪的纳维亚数学杂志社出版、发行. 不定期. 主要刊载北欧各国的数学研究成果. 用英、法、德文发表.

波兰科学院通报·数学(波)(Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Mathematics)(Warsaw)　1953 年创刊. 刊号: 510LH005, ISSN0239—7269. 波兰国家科学出版社出版、发行. 原为月刊. 现为季刊. 刊载理论数学与应用数学方面的研究论文. 用英、法、德、俄文发表.

文摘杂志综合本·数学(俄)(Рж: Математика. Сводный том с Авторским - библиогра Финеским и Систематическо - Предметным Указателями)(Москва) 1953 年创刊. 刊号: 510P003, ISSN0034—2467. 全俄科技情报所编辑、出版. 月刊. 刊载俄罗斯国内外数学文献的摘要. 包括三个分卷本,刊号分别为 513P055944, 513P055946, 513P055948. 各分卷本均可单独订阅,另附有作者、题录与系统、主题索引本.

美国数学会通告(美)(Notices of the American Mathematical Society)(Providence, RI)　1954 年创刊. 刊号: 510B0005, ISSN0002—9920. 美国数学会编辑、出版的机关刊物. 1988 年以前每年出版 8 期或 7 期. 1988—1993 年每年出版 10 期, 1994 年出版 9 期, 1995 年开始改为月刊. 主要报道美国数学会及美国数学界的学术活动、出版消息,兼载有关数学问题的问答. 有时还登载国际数学学术会议一览表,介绍数学研究最新且重要进展的论文.

算术教师(美)(Arithmetic Teacher)(New York)　1954 年创刊. 刊号: 512B0051, ISSN0004—136X. 美国数学教师全国理事会编辑、出版、发行. 每年出版 9 期. 刊载幼儿园和初级小学数学教师感兴趣的教学资料,涉及课程安排、教学方法和示范教学等内容.

数学(英)(Mathematika: A Journal of Pure & Applied Mathematics)(London)　1954 年创刊. 刊号: 510C0001, ISSN0025—5793. 小刊名为"理论与应用数学杂志". 英国伦敦大学理学院数学系编辑、出版、发行. 半年刊. 主要刊载数学及其应用方面的研究报告和原始论文.

应试数学(日)(Answer Mathematica)(Tokyo) 1954 年创刊. 刊号: 510D0085. 日本圣文社出版、发行. 月刊. 刊载数学解法研究讲座、例题分析与解答,介绍学习方法,报道入学考试消息. 主要读者对象为准备进入大学的入学考试学生.

波兰数学纪事(波)(Annales Polonici Mathematica)(Warsaw)　1954 年创刊. 刊号: 510LH051, ISSN0066—2216. 波兰科学院数学研究所编辑. 不定期出版. 刊载数学分析和几何学等方面的研究论文. 多用英、法文发表.

数学教室(日)(Mathematica Classroom)(Tokyo)　1955 年创刊. 刊号: 512D0001. 日本数学教育协议会编辑,日本国土社出版、发行. 月刊. 一种以日本中小学数学教师和大学教育系学生为读者对象的杂志. 刊载内容包括: 对日本和其他国家数学教育和教学情况的介绍; 日本中小学数学教材教法及数学教学经验的介绍; 与数学教育、教学有关问题的讨论等.

数理逻辑与数学基础杂志(德)(Zeitschrift für Mathematische Logik and Grundlagen der Mathematik (ZML))(Berlin)　1955 年创刊. 刊号: 510E0015, ISSN0044—3050. 德国 VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 出版、发行. 双月刊. 主要刊载有关一般集论、描述集论、关系论、递归函数和其他对数学基础研究有重要意义的研究论文,兼

载数理逻辑和递归函数理论在计算机设计及程序设计中应用方面的论文.

数学教学(德)(Mathematikunterricht, Der)(Seelze) 1955年创刊. 刊号:510E0052, ISSN0025—5807. 德国 Erhard Friedrich 出版社出版、发行. 双月刊. 刊载内容主要是研究与介绍数学教学及其方法等方面的问题. 适合于中学数学教师及中学生阅读.

数学教学(英)(Mathematics Teaching)(Derby) 1956年创刊. 刊号:512C0053, ISSN0025—5785. 英国数学教师协会编辑、出版、发行. 季刊. 主要刊载讨论英国中、小学各年级的数学教学问题,还兼载数学教具和教学设备介绍、书评等.

运筹学(日)(Communications of the Operations Research Society of Japan)(Tokyo) 1956年创刊. 刊号:519D0052, ISSN0030—3674. 日本运筹学会的会刊. 日本运筹学会编辑、出版、发行. 月刊. 刊载运筹学在科学研究、生产和经营管理方面的应用;涉及利用运筹学,以及计算机对企业经营、产业、经济、社会状况的各种问题进行科学分析、研究;还兼载有关述评、消息、展望、文献介绍等.

应用数学(捷)(Applications of Mathematics)(Prague) 1956年创刊. 刊号:519LJ001, ISSN0373—6725. 原称《Aplikace Matematiky》. 捷克科学院数学研究所编辑. 双月刊. 刊载数学在工程技术和自然科学领域应用的研究论文. 多用英、法、德文发表.

罗马尼亚纯粹数学与应用数学杂志(罗)(Revue Roumaine de Mathematiques Pures et Appliquees)(Bucharest) 1956年创刊. 刊号:510LK003, ISSN0035—3965. 罗马尼亚科学院编辑、出版. 每年出版10期. 专载纯粹数学与应用数学领域的研究论文和书评. 用英、法、德、俄、意和西班牙文发表.

概率论及其应用(俄)(Теория Вероятностей и ее Применения)(Москва) 1956年创刊. 刊号:513P0011, ISSN0040—361X. 俄罗斯科学院编辑,俄罗斯科学出版社出版、发行. 季刊. 刊载概率论及其应用方面的研究论文、简讯和评论. 美国工业与应用数学会从1975年起出版、发行该刊的英译本,刊名为《Theory of Probability and Its Applications》(刊号:513B0063, ISSN0040—585X).

伊利诺斯数学杂志(美)(Illinois Journal of Mathematics)(Champaign, IL) 1957年创刊. 刊号:510B0052, ISSN0010—2082. 美国 Illinois 大学出版社出版、发行. 季刊. 刊载理论数学与应用数学方面的研究论文.

信息与计算(美)(Information and Computation)(Orlando, FL) 1957年创刊. 刊号:737B0012, ISSN0890—5401. 原名《Information & Control》, 1986年(第72卷)起改为现名,美国 Academic 出版社出版、发行. 初为季刊,现为双月刊. 发表理论计算机科学、信息论和控制论方面的原始论文,特别是关于算法信息论、计算复杂性、并行计算、概率计算、密码术、数据库、算法设计、算法分析、离散优化和数学规划、归纳推理和学习论等的理论研究成果. 偶尔登载综合性和评述性文章.

大学考生数学(日)(Mathematics of University Examinee)(Tokyo) 1957年创刊. 刊号:512D0070. 日本东京都涩谷区广尾3—12—7出版、发行. 月刊. 以日本大学考生为主要读者对象,刊载数学试题解答、讲义,以及其他有关大学考生数学方面的资料. 每年还根据考生需要临时增刊6期.

日本运筹学会论文志(日)(Journal of the Operations Research Society of Japan)(Tokyo) 1957年创刊. 刊号:519D0002, ISSN0453—4514. 日本运筹学会编辑的机关刊物,由该学会出版、发行. 季刊. 主要刊载运筹学领域的理论和应用方面的研究论文. 文章多用日文或英文发表,并均附有两种文字的内容简介.

运筹学杂志(德)(ZOR: Methods and Models of Operations Research)(Heidelberg) 1957年创刊. 刊号:519E0001, ISSN 0340—9422. 原称《Unternehmensforschung/Operations Research》(1957—1972)、《Zeitschrift für Operations Research, Teil A: Theorie, Teil B: Praxis》(1973—1989), 1990年起改称现名. 德国运筹学会编辑,德国 Physica 出版社出版, Springer 出版社发行. 双月刊. 刊载运筹方法、模型理论及应用方面的研究论文,兼载会议报告、简讯和书评. 多用英文发表.

理论力学与分析文献(德)(Archive for Rational Mechanics and Analysis)(Berlin) 1957年创刊. 刊号:520E0001. ISSN0003—9527. 德国 Springer 出版社出版、发行. 月刊. 刊载理论力学和分析方面的研究论文,有时也登载综合报告. 该刊视理论力学为数学的一部分,它的分析是源于应用并可用于应用. 文章多用英文,也允许使用法、德、意和拉丁文.

法国自动化、信息与运筹学·数学模型与数值分析(法)(RAIRO: Modélisation Mathematique et Analyse Numerique/Mathematical Modelling & Numerical Analysis)(Montrouge) 1957年创刊. 刊号:513F0004, ISSN0764—583X. 原称《RAIRO: Numerical Analysis》. 1985年开始用现名. 法国 Dunod出版社出版、发行. 季刊. 刊载数模建立和广泛的数值分析方面的创造性学术论文和综述文章. 使用文种为英文和法文. 每篇文章都有英、法两种文字的摘要.

法国自动化、信息与运筹学·运筹学(法)

(RAIRO: Recherche Operationnelle/Operations Research)(Montrouge) 1957年创刊. 刊号:519F0001,ISSN0399—0559. 原名《Revue Francaise de Recherche Operationnelle》,1967年改名为《Revue Francaise d'Informatique et de Recherche Operationnelle》,1977年始,总刊名用缩写. 本刊是五个分辑中的一辑. 法国经济和技术控制论协会编辑,Dunod出版社出版、发行. 季刊. 刊载运筹学和管理科学各分支的文章,涉及各种有关数学理论、数学应用、模型建立、算法和计算机科学等. 使用文种为法文和英文. 每篇文章都有英、法两种文字的摘要.

高等学校通报·数学辑(俄)(Известия ВУЗ: Математика)(Казань) 1957年创刊. 刊号:510P0019,ISSN0021—3446. 俄罗斯Казань大学出版社出版、发行. 月刊. 刊载数学各专业分支的研究论文. 美国Allerton出版公司从1974年起出版、发行该刊的英译本,刊名原为《Soviet Mathematics. (Iz. VUZ)》. 现为《Russian Mathematics. (Iz. VUZ)》. (刊号:510B0077,ISSN0197—7156).

函数方程(日)(Funkcialaj Ekvacioj)(Kobe) 1958年创刊. 刊号:510D0077,ISSN0532—8721. 日本数学会函数方程分会编辑、出版,Kinokuniya Company Ltd. 发行. 每年出版3期. 刊载函数方程方面的研究论文. 用英文发表.

拓扑学与范畴微分几何学杂志(法)(Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques)(Amiens) 1958年创刊. 刊号:513F0051,ISSN0008—0004. 原称《Cahiers de Topologie et Geometrie Differentielle》(1960—1983),从1984年起改为现名. 主编、出版者、发行人都由本刊创办者埃雷斯曼(Ehresmann,A. C.)女士兼任. 季刊. 主要刊载范畴理论及其对拓扑和微分几何的应用方面的研究论文. 用法文和英文发表.

印度数学杂志(印)(Indian Journal of Mathematics)(Allahabad) 1958年创刊. 刊号:510HA052,ISSN0019—5332. 印度Allahabad数学会编辑、出版、发行. 每年出版3期. 刊载纯粹数学与应用数学,以及相关的理论物理学方面的研究论文. 稿件来自世界各国.

运筹学研究中心手册(比)(Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Operationnelle)(Brussels) 1958年创刊. 刊号:519LA051,ISSN0774—3068. 比利时Institut de Statistique de l'U. L. B代发行. 季刊. 刊载运筹学领域的研究论文. 文章用英文或法文发表.

加拿大数学通报(加)(Canadian Mathematical Bulletin/Bulletin Canadien de Mathematiques)(Ottawa, ON) 1958年创刊. 刊号:510NA002,ISSN0008—4395. 加拿大数学会编辑、出版的机关刊物. 加拿大多伦多大学出版社期刊部发行. 季刊. 该刊宗旨在于报道加拿大数学研究水平,促进其数学的发展. 主要刊载数学各分支的研究论文和札记,兼载数学动态、新研究成果、数学会议记事、书评等. 用英文或法文发表.

工业与应用数学会综论(美)(SIAM Review)(Philadelphia,PA) 1959年创刊. 刊号:519B0002,ISSN0036—1445. 美国工业与应用数学会编辑、出版、发行. 季刊. 刊载数学在工业领域中的应用、存在的问题及解决方法等方面的评论文章、书评和纪事等.

技术统计(美)(Technometrics)(Milwaukee, WI) 1959年创刊. 刊号:713B0013,ISSN0040—1706. 美国质量控制学会与美国统计协会联合出版、发行. 小刊名为"物理、化学与工程学应用的数理统计". 季刊. 专门刊载统计方法在小刊名所列学科上的应用和有关发展的研究论文与应用实例.

数学史研究(日)(Journal of History of Mathematics, Japan)(Tokyo) 1959年创刊. 刊号:510D0072,ISSN0386—9555. 原称《和算研究》(1959—1961),从1962年改为现名. 日本数学史学会编辑、出版、发行. 季刊. 刊载有关数学史方面的讲座、讲演摘要及日本数学史学会动态等.

数学实践(德)(Praxis der Mathematik(PM))(Koeln) 1959年创刊. 刊号:510E0053,ISSN0032—7042. 德国Aulis Verlag Deubner & CO. KG联合出版、发行. 月刊. 刊载理论数学与应用数学,以及数学教学方面的文章,属数学教学通俗刊物.

数值数学(德)(Numerische Mathematik)(Berlin) 1959年创刊. 刊号:513E0002,ISSN0029—599X. 德国Springer出版社出版、发行. 原系双月刊,现为月刊. 刊载微分方程的数值解法、数值线性代数、逼近论与控制论,以及非线性问题的数值解法等方面的研究论文. 文章均附英文摘要.

数学丛刊(法)(I. H. E. S. - Publications Mathématiques)(Paris) 1959年创刊. 刊号:510F0006,ISSN0073—8301. 法国高等科学研究院编辑,法兰西大学出版社出版、发行. 现每年出版2期. 刊载数学领域各方面的研究论文. 用法、英、俄、德文种发表.

系统模拟中的数学与计算机(荷)(Mathematics and Computers in Simulation)(Amsterdam) 1959年创刊. 刊号:519LB006—A,ISSN0378—4754. 国际模拟数学与计算机协会编辑的会刊. 原称《Annales de l'Association Internationale Pour le Calcul Analogique/Proceedings of Mathematics and Com-

puters in Simulation》(1958－1976),在比利时出版,曾用刊号:738LA001;从1977年起改称现名,并转由荷兰North-Holland出版公司出版,Elsevier科学出版社期刊部发行.月刊.主要刊载计算机系统模拟方面的研究论文.兼载综合性文章、研究简报和书评.1985年另创刊《Applied Numerical Mathematics》(参见刊号:519LB006—B),两刊合订用原版刊号:519LB006.

澳大利亚数学会志·*A*辑(澳)(Journal of the Australian Mathematical Society, Series A: Pure Mathematics & statistics)(st. lucia)　1959年创刊.刊号:510UA001,ISSN0263—6115.原称《Journal of the Australian Mathematical Society》,从1975年开始分为A、B两辑,均连续以前的卷号,分别记卷号.刊物由澳大利亚数学会编辑、出版、发行.双月刊.主要刊载纯粹数学与统计学领域的研究论文,稿件来自世界各地.

澳大利亚数学会志·*B*辑(澳)(Journal of the Australian Mathematical Society, Series B: Applied Mathematics)(st. lucia)　1959年创刊.刊号:510UA001,ISSN0334—2700.原称《Journal of the Australian Mathematical Society》,1975年开始分为A、B两辑,均连续以前的卷号,分别记卷号.刊物由澳大利亚数学会编辑、出版、发行.每卷4期,主要刊载应用数学以及有关数理科学领域的研究论文,稿件来自世界各地.

塔吉克科学院通报·数理、化学与地质学部分(塔)(Известия Академии Наук Таджикистана: Отделение Физико-Математических, Химических и Геологических наук)(Гаджикскал)　1959年创刊.刊号:510VT77555,ISSN0002—3485.塔吉克科学院编辑、出版.季刊.刊载数学、物理、化学、地质学等学科的研究论文及简讯.用俄文发表.

圣母大学形式逻辑杂志(美)(Notre Dame Journal of Formal Logic)(Notre Dame, IN)　1960年创刊.刊号:510B0068,ISSN0029—4527.圣母大学编辑、出版、发行.季刊.发表哲学、数理逻辑、数学基础、逻辑史、数学史和自然语言语义学方面的文章.

数学分析与应用杂志(美)(Journal of Mathematical Analysis and Applications)(Orlando, FL)　1960年创刊.刊号:513B0003,ISSN0022—247X.美国学术出版公司出版、发行.原系季刊.曾一度为双月刊、月刊,现每年出版16期.主要刊载古典分析及其流形应用方面的数学研究论文,并着重于由物理、化学、生物及工程等学科所涉及的数学方面的新问题的探讨性文章.

数学物理杂志(美)(Journal of Mathematical Physics)(New York)　1960年创刊.刊号:533B0001,ISSN0022—2488.美国物理学会出版、发行.原系双月刊,1963年(第4卷)起改为月刊.发表数学物理及其有关或可能有关的数学各分支的原始研究论文,偶尔也发表对物理学家极感兴趣的数学论题的评述,其重点是研究新的数学方法.

西伯利亚数学杂志(俄)(Сибирский Математический Журнал)(Новосибирск)　1960年创刊.刊号:510P0022,ISSN0037—4474.俄罗斯科学出版社出版、发行.双月刊.刊载数学领域内的研究论文,兼载简讯.美国Plenum出版公司从1966年起出版、发行该刊的英译本,刊名为《Siberian Mathematical Journal》(刊号:510B0076,ISSN0037—4466).

计算机科学与计算数学(丹麦)(BIT.)(Copenhagen)　1961年创刊.刊号:519KD051,ISSN0006—3835.丹麦BIT编辑、出版、发行.季刊.刊载计算机科学(包括信息系统)和计算数学,特别是算法设计与分析、程序设计语言、计算机系统、数值与非数值计算以及算法与计算技术的应用方面的研究论文,涉及运筹学、组合数学、数值系统、软硬件相互作用等.用英文发表.

立陶宛数学文集(立陶宛)(Литовский Математический Сборник)(Литовскаи)　1961年创刊.刊号:510KF001,ISSN0132—2818.立陶宛科学院、立陶宛数学会、立陶宛高等学校合办,立陶宛科学院数学与控制论研究所出版、发行.季刊.刊载高等数学方面的研究论文,用俄文发表.美国Plenum出版公司从1973年起出版、发行该刊的英译本,刊名为《Lithuanian Mathematical Journal》(刊号:510B0086,ISSN0363—1672).

计算数学与数学物理杂志(俄)(Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики)(Москва)　1961年创刊.刊号:519P070003,ISSN0044—4669.俄罗斯科学院编辑,俄罗斯科学出版社出版、发行.原系双月刊,现为月刊.刊载计算数学和数学物理学领域的研究论文、评论和简讯.用俄文发表.英国Pergamon出版社从1962年起出版、发行该刊的英译本.刊名原为《USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics》,后改为《Computational mathematics & Mathematical Physics》.(刊号:519C0059,ISSN0965—5425).

工业与应用数学会·控制与最优化杂志(美)(SIAM Journal on Control and Optimization)(Philadelphia, PA)　1962年创刊.刊号:519B0052,ISSN0363—0129.原称:《SIAM, SeriesA: Control》,1966年改名为《SIAM Journal on Control》,1976年(第14卷)起才改称现名,美国工业与应用数学会编辑、出版、发行.双月刊.刊载有关控制理论及其应

用、系统理论、最优化，以及应用于控制论和最优化的数学理论与方法、应用概率和随机过程等方面的研究论文.

拓扑学(英)(Topology)(Oxford) 1962 年创刊. 刊号:513C0001,ISSN0040—9383. 小刊名是"国际性数学杂志",英国 Pergamon 出版集团公司出版、发行. 季刊,曾一度改为双月刊. 刊载拓扑学及相关领域的研究论文. 包括拓扑学与拓扑技术应用有关的同调代数、李群、微分几何、代数几何等. 文章多数用英文发表,有时也用法、德文发表.

数学讨论(日)(Mathematics Seminar)(Tokyo) 1962 年创刊. 刊号:510D0059,ISSN0386—4980. 原称《数学セミナ》(1962—1985 年),1986 年起改称现名. 日本评论社出版、发行. 月刊. 刊载数学问题的研究、讨论和解答等. 是一种以日本大学低年级学生为读者对象的数学辅导性质的刊物.

概率论及相关领域杂志(德)(Probability Theory and Related Fields)(Berlin) 1962 年创刊. 刊号:510E0008,ISSN 0044—3719. 原称《Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie and Verwandte Gebiete》(1962—1985 年),1986 年(第 71 卷)起改称现名. 德国 Springer 出版社出版、发行. 原系不定期出版,现为月刊. 刊载优化理论、统计力学、遍历论、测度论、解析数论等领域中与概率论有密切关系的文章,还经常刊载数理统计中的基础性结果,兼载通讯.

代数和逻辑(俄)(Алгебра и Логика)(Новосибирск) 1962 年创刊. 刊号:513P0012,ISSN0373—9252. 俄罗斯科学院西伯利亚分院数学研究所编辑、出版、发行. 双月刊. 刊载本所的"代数和逻辑讨论班"上报告的论文. 美国 Plenum 出版公司从 1968 年(第 7 卷)起出版、发行该刊的英译本. 刊名为《Algebra and Logic》(刊号: 513B0062, ISSN0002—5232).

斐波那契季刊(美)(The Fibonacci Quarterly)(Santa Clara,CA) 1963 年创刊. 刊号:510B00093,ISSN0015—0517. 美国 The Fibonacci Association,South Dakota 州立大学计算机科学系编辑、出版、发行. 季刊. 刊载斐波那契数和与它有关的数的研究论文和札记.

运筹学与管理科学(美)(Operations Research/Management Science)(Davenport,IA) 1963 年创刊. 刊号:519B0060,ISSN 0030—3658. 美国行政管理科学会编辑、出版的文摘刊物. 月刊. 摘录世界各国主要期刊发表的有关最优布局、排队、对策论、概率论与统计学、计算机和电子数据处理等方面的文献.

数理科学(日)(Mathematical Sciences)(Tokyo) 1963 年创刊. 刊号:510D0064,ISSN0386—2240. 日本数理科学社编辑、出版、发行. 月刊. 刊载数理科学及其应用方面的研究论文,包括数理科学最近研究成果、数理知识的普及性文章,以及数学在各方面的应用等,常以特集形式出版,兼载简报.

中学数学(德)(Mathematik in der Schule)(Berlin) 1963 年创刊. 刊号:512E0001,ISSN0465—3750. 德国 Volk and Wissen Volkseigener Verlag 出版、发行. 月刊. 刊载适合中学生阅读的数学知识、数学新教具介绍、数学教学先进经验,以及有关书刊文献的摘要等.

纯粹与应用数学(印)(Pure & Applied Mathematika Sciences)(Saharanpur) 1963 年创刊. 刊号:510HA003,ISSN0379—3168. 原称《Mathematika Sciences》,印度数学会编辑、出版,印度 UBS Publishers'Distributors Ltd. 发行. 每年出版 2 期. 刊载纯粹数学、应用数学、运筹学、统计学、管理科学、计算机科学方面的创造性论文和教育进展.

信息系统与运筹学(加)(INFOR:Information Systems and Operational Research)(Toronto) 1963 年创刊. 刊号:519NA001,ISSN0315—5986. 原称《Journal of the Canadian Operational Research Society》,1971 年改称现名. 该刊系加拿大运筹学会和加拿大信息处理学会的机关刊物,多伦多大学出版社出版、发行. 季刊. 刊载信息系统、运筹学以及这两方面相结合的理论、方法和应用文章.

数学哲学(美)(Philosophia Mathematica)(Norfolk,VA) 1964 年创刊. 刊号:510B0061. 美国 Old Dominion 大学哲学系编辑、出版、发行. 每年出版 2 期. 刊载有关数学的哲学性质和逻辑概念方面的研究论文. 文章用英、法或德文发表.

代数学杂志(美)(Journal of Algebra)(Orlando,FL) 1964 年创刊. 刊号:513B0052,ISSN0021—8693. 美国学术出版公司出版、发行. 原系月刊,现每年出版 14 期. 刊载代数学以及与代数应用有关方面的研究论文.

工业与应用数学会・数值分析杂志(美)(SIAM Journal on Numerical Analysis)(Philadelphia,PA) 1964 年创刊. 刊号:519B0009,ISSN0036—1429. 原称《SIAM Journal,Series B:Numerical Analysis》,1966 年(第 3 卷)起改称现名. 美国工业与应用数学会编辑、出版、发行. 双月刊. 刊载有关数值方法与分析方面的研究论文,包括收敛性、稳定性、误差分析以及泛函分析和逼近论中的有关结果,也刊载计算实验和新型数值应用介绍.

应用概率论杂志(英)(Journal of Applied Probability)(Sheffield) 1964 年创刊. 刊号:519C0051,ISSN0021—9002. 英国应用概率协会与伦敦数学会

联合编辑、出版的国际性刊物. 英国 Sheffield 学术出版社出版、发行. 原为半年刊,现为季刊. 主要刊载概率论在生物科学、物理科学、社会科学和技术科学等各方面应用的研究论文、综述性文章和研究简报.

运筹学·印度运筹学会志(印)(Opsearch: Journal of Operational Research Society of India)(New delhi) 1964 年创刊. 刊号:519HA051, ISSN0030—3887. 印度运筹学会编辑、出版、发行. 季刊. 刊载运筹学理论和应用的研究论文,兼载简报、书评、动态等. 稿件来自世界各国,用英文发表.

计算(意)(Calcolo)(Pisa) 1964 年创刊. 刊号:738MC003, ISSN0008－0624. 意大利国家研究院主办,意大利计算机学会协助出版. 季刊. 主要发表计算机科学,包括自动化理论与应用、形式与应用逻辑、信息理论与应用、计算机的非数值应用、数值分析、运筹学、程序设计与程序语言、模拟与数字计算机在科学技术和商业中的应用、转换理论与应用、编码理论等方面的研究论文. 文章用意、法、英或德文发表.

数学通报(南斯拉夫)(Matematichki Vesnik)(Belgrade) 1964 年创刊. 刊号:510MG054, ISSN0025—5165. 南斯拉夫贝尔格莱德数学研究所、塞尔维亚数理天文学会合编,南斯拉夫 Zagred 出版、发行. 季刊. 刊载理论数学与应用数学的研究论文,兼载书评. 用英文或塞尔维亚文发表.

数学哲学(加)(Philosophia Mathematica)(Downsview, ON) 1964 年创刊. 刊号:510NA055. ISSN0031－8019. 加拿大多伦多大学出版社期刊部出版、发行. 每年出版 2 期. 刊载数学的哲学性质和逻辑概念方面的研究论文. 用英、法、德文发表.

数学进展(美)(Advances in Mathematics)(Orlando, FL) 1965 年创刊. 刊号:510B0015, ISSN0001—8708. 美国学术出版公司出版、发行. 原系丛书,从 1969 年(第 3 卷)起定为双月刊,1974 年(第 12 卷)起又改为月刊. 刊载理论与应用数学各分支的最新研究成果,特别重视反映这些分支中的重要进展,以及数学讨论会报告、某一理论的现状及其历史评述等.

微分方程杂志(美)(Journal of Differential Equations)(Orlando, FL) 1965 年创刊. 刊号:513B0006, ISSN0022—0396. 美国学术出版公司出版、发行. 原系季刊,后改为双月刊、月刊,现每年出版 15 期. 刊载微分方程理论与应用方面的研究论文,论题包括:常微分方程、偏微分方程、随机微分方程、数学控制理论、拓扑动力学等. 稿件来自世界各国.

数学及其应用学会通报(英)(Bulletin of Institute of Mathematics and Its Applications)(Southend-on-Sea) 1965 年创刊. 刊号:510C0061, ISSN0950—5628. 英国数学及其应用学会编辑的机关刊物. 由该学会出版、发行. 月刊. 刊载在该学会会议上发表的文章、报告,旨在提供论坛,交流数学在各领域中的应用研究及教学经验等,兼载该学会的会议消息、新书评论、书讯等.

数学及其应用学会·应用数学杂志(英)(IMA Journal of Applied Mathematics)(Oxford) 1965 年创刊. 刊号:519C0002—A, ISSN0272—4960. 原称《Journal of the Institute of Mathematics & Its Applications》(1965－1980 年),1981 年(第 27 卷)起分为《IMA Journal of Applied Mathematics》和《IMA Journal of Numerical Analysis》(参见刊号:519C0002—B)两刊,本刊是前者. 英国数学及其应用学会(IMA)编辑的机关刊物,牛津大学出版社出版、发行. 双月刊. 主要刊载应用数学各领域中的研究论文,特别重视有关适用于多方面的数学技术研究,以及重要评述性文章. 两刊内容互为补充,合订用原版刊号:519C0002.

京都大学数理解析研究所纪要(日)(Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences)(Kyoto) 1965 年创刊. 刊号:510D0068, ISSN0034—5318. 日本京都大学数理解析研究所编辑、出版、发行. 其中一度曾由日本 Kinokuniya 公司出版. 原每年出版 3 期,现为双月刊. 刊载数理解析基础与应用的研究成果. 用英文发表.

数学物理通讯(德)(Communications in Mathematical Physics)(Berlin) 1965 年创刊. 刊号:533E0001, ISSN0010—3616. 德国 Springer 出版社出版、发行. 每年出版 20 期. 刊载理论物理及与它直接有关的数学原始论文. 涉及量子场论、基本粒子动力学、多体问题、统计力学和广义相对论等. 用英文发表.

亨利·庞加莱研究所纪事·概率论与统计学(法)(Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilites et Statistique)(Montrouge) 1965 年创刊. 刊号:519F0024, ISSN2046—0203. 法国 Gauthier-Villars 出版社出版、发行. 季刊. 刊载概率计算与统计学方面的研究论文和综述. 文章用法文或英文发表.

微分方程(白俄罗斯)(Дифференциальные Уравнения)(Минск) 1965 年创刊. 刊号:513VE001, ISSN0374—0641. 白俄罗斯科学出版社出版、发行. 月刊. 刊载微分方程理论和应用方面的研究论文,兼载简讯. 美国 Plenum 出版公司从 1965 年起出版、发行该刊的英译本,刊名为《DifferentialEquations》(刊号:513B0061, ISSN0012—2661).

组合理论杂志·*A* 辑(美)(Journal of Combi-

natorial Theory, Series A.)(Orlando, FL) 1966 年创刊. 刊号:513B0007—A, ISSN0097—3165. 美国学术出版公司出版的世界组合数学权威性刊物. 原每年出版 8 期,从 1971 年(第 10 卷)起分为 A、B 两辑,A 辑为双月刊. 刊载组合论的结构、设计和应用方面的研究论文. 稿件来自世界各国.

组合理论杂志·B 辑(美)(Journal of Combinatorial Theory, Series B.)(Orlando, FL) 1966 年创刊. 刊号:513B0007—B, ISSN0095—8956. 美国学术出版公司出版的世界组合数学权威性刊物. 原每年出版 8 期,从 1971 年(第 10 卷)起分为 A、B 两辑,B 辑为双月刊. 刊载有关图论与拟阵理论方面的研究论文. 稿件来自世界各国.

拓扑学会议录(美)(Topology Proceedings)(Auburn, AL) 1966 年创刊. 刊号:513B0071, ISSN0146—4124. 美国 Auburn 大学数学系编辑、出版、发行. 半年刊. 刊载在拓扑学年会上发表的论文.

计算物理杂志(美)(Journal of Computational Physics)(Orlando, FL) 1966 年创刊. 刊号:539B0002, ISSN0021—9991. 美国 Academic 出版社出版. 月刊. 刊载数据处理问题和数学方程解法方面的文章,这里的问题和方程都是描述物理现象的.

数学创作(德)(Inventiones Mathematicae)(Berlin) 1966 年创刊. 刊号:510E0009, ISSN0020—9910. 当代纯粹数学方面最重要的国际性刊物之一. 德国 Springer 出版社出版、发行. 原每年出版 10—15 期,现为月刊. 刊载纯粹数学各个领域的研究论文. 稿件来自世界各国,用英文发表.

数学系统理论(德)(Mathematical Systems Theory)(Berlin) 1966 年创刊. 刊号:513E0004, ISSN0025—5661. 德国 Springer 出版社出版、发行. 季刊. 刊载工程学、计算机科学、经济学、生物学等领域中离散系统和连续系统理论的数学分析研究论文. 论题包括:算法与计算复杂性理论,程序、语言、自动机、计算系统的数学问题,动力系统的模拟、分析、控制、最优化,随机信号与随机系统等. 偶尔有阐述性文章,有时就单一的论题出版专号.

计算(奥)(Computing)(Vienna) 1966 年创刊. 刊号:738LE051, ISSN0010—485X. 小刊名为"信息科学与数值计算汇刊"(Archives for Informatics and Numerical Computation). 德国 Springer 出版社出版、发行. 每年出版 2 卷,每卷 4 期. 刊载科学计算方面的研究论文和简讯. 涉及的分支为离散算法、符号计算、性能与复杂性评价、操作系统、调度、软件工程、图像处理、并行计算、经典数值计算、数值统计、优化、区间分析等. 使用文种主要为英文,间或有德文.

数学通报(南斯拉夫)(Glasnik Matematicki)(Zagreb) 1966 年创刊. 刊号:510MG051, ISSN0017—095X. 南斯拉夫克罗地亚数理学会编辑,南斯拉夫 Beograd 出版、发行. 每年出版 2 期. 刊载理论与应用数学的研究论文和简讯,用英文发表.

亚美尼亚科学院通报·数学辑(亚美尼亚)(Известия Академии Наук Армянской: Серия Математика)(Армения) 1966 年创刊. 刊号:510VB001, ISSN0002—3043. 亚美尼亚科学院出版社出版、发行. 双月刊. 刊载数学领域的研究论文. 用亚美尼亚文或俄文发表.

泛函分析杂志(美)(Journal of Functional Analysis)(Orlando, FL) 1967 年创刊. 刊号:510B0014, ISSN0022—1236. 美国学术出版公司出版的国际性刊物. 月刊. 刊载具有当代研究水平的泛函分析理论及其应用等有关方面的研究论文. 稿件来自世界各国,文章用英、法文发表.

微分几何学杂志(美)(Journal of Differential Geometry)(Bethlehem, PA) 1967 年创刊. 刊号:513B0053, ISSN0022—040X. 原由美国 Lehigh 大学出版,1984 年后转为国际性刊物,由美国数学会出版. 原系季刊,现为双月刊. 刊载有关微分几何学及其相关领域的研究论文. 文章多用英文发表,也用法、德、意文发表.

最优化理论与应用杂志(美)(Journal of Optimization Theory and Applications)(New York) 1967 年创刊. 刊号:519B0013, ISSN0022—3239. 美国 Plenum 出版公司出版、发行. 月刊. 刊载数学最优化理论及其在科学与工程领域中应用方面的研究论文. 范围涉及线性规划、非线性规划、动态规化、直接法、间接法、变分法、最优化控制、对策论、边值问题及数值方法等理论研究文章,以及在宇航、建筑、机械工程、化工、电工、数学物理和生物数学等方面的应用.

计算机与系统科学杂志(美)(Journal of Computer & System Sciences)(Orlando, FL) 1967 年创刊. 刊号:738B0012, ISSN0022—0000. 美国 Academic 出版社出版、发行. 双月刊. 刊载计算机科学和系统科学领域的研究论文,偏重于有关的数学理论及其应用,涉及自动机理论、形式语言和形式系统理论、算法理论、程序设计理论和与系统有关的系统理论、系统的优化、数学规划及其在复杂系统研究中的应用.

物理与数学杂志(印)(Journal of Mathematical & Physical Sciences)(Madras) 1967 年创刊. 刊号:510HA055, ISSN0047—2557. 印度技术研究所编辑、出版、发行. 原系季刊. 现为双月刊. 刊载应用数学与理论物理方面的研究论文和评论.

数学进展(印)(Progress of Mathematics)

(Varanasi) 1967年创刊. 刊号:510HA057, ISSN0555—4330. 巴那拉斯印度大学数学进展研究院编辑、出版、发行. 每年出版2期. 专载印度研究院成员在理论与应用数学、理论物理学、天文学、天体物理学与统计学等方面提供的原始研究论文.

数学教育·*A*辑与*B*辑(印)(Mathematical Education, Section *A* & *B*)(Madras) 1967年创刊. 刊号:510HA060, ISSN0047—6269. 印度数学教育会编辑、出版,印度UBS Publishers' Distributors Ltd.发行. 季刊. 属研究数学教育及交流数学教学经验的刊物.

工程数学杂志(荷)(Journal of Engineering Mathematics)(Dordrecht) 1967年创刊. 刊号:712LB002, ISSN0022—0833. 荷兰Martinus Nijhoff出版社出版. 荷兰Kluwer学术出版社发行. 季刊. 刊载数学方法起主要作用的工程科学论文. 旨在促进数学在工程科学领域的应用. 涉及数学、统计学、力学、流体力学、控制论、运筹学和计算机科学等. 稿件来自世界各国,用英文发表.

数学札记(俄)(Математические Заметки)(Москва) 1967年创刊. 刊号:510P0021, ISSN0025—567X. 俄罗斯科学院出版,俄罗斯科学出版社发行. 月刊. 刊载俄罗斯科学院报道的数学科研成果快报、简讯,以及有关信息资料等. 美国Plenum出版公司从1967年起出版、发行该刊的英译本. 刊名为《Mathematical Notes》(刊号:510B0072, ISSN0001—4346).

泛函分析及其应用(俄)(Функциональный Анализ и его Приложения)(Москва) 1967年创刊. 刊号:519P0006, ISSN0374—1990. 俄罗斯科学出版社出版、发行. 季刊. 刊载泛函分析及其应用领域的研究论文、简讯等. 美国Plenum出版公司从1967年起,出版、发行该刊的英译本,刊名为《Functional Analysis and Its Applications》(刊号:510B0079, ISSN0016—2663).

线性代数及其应用(美)(Linear Algebra and its Applications)(New York) 1968年创刊. 刊号:513B0009, ISSN0024—3795. 美国Elsevier科学出版公司出版、发行. 原系季刊、双月刊,1985年以后为月刊. 刊载有关线性代数与矩阵理论等方面的研究论文,提供有关矩阵论及有限维线性代数在分析、代数、组合或数值方面的新资料或新见解,以及在数学其他分支和有关学科中的应用.

逼近论杂志(美)(Journal of Approximation Theory)(Orlando, FL) 1968年创刊. 刊号:513B0011, ISSN0021—9045. 美国学术出版公司出版的国际性刊物. 月刊. 刊载逼近论及其相关领域的研究论文,兼载新书介绍. 文章用英、德文发表.

工业与应用数学会新闻(美)(SIAM News)(Philadelphia, PA) 1968年创刊. 刊号:519B0055. 原称《SIAM Newsletter》. 美国工业与应用数学会编辑、出版的机关刊物. 双月刊. 刊载有关讨论数学的应用和应用数学研究进展方面的文章,报道其会务与会议等学术活动,介绍、评论新书和杂志等出版物.

信息科学(美)(Information Sciences)(New York) 1968年创刊. 刊号:737B0014, ISSN0020—0255. 美国Elsevier科学出版公司出版、发行. 每年出版3卷共9期. 发表理论与实验研究成果,涉及通讯理论、机器翻译、数学语言、系统辨识、信息论、编码理论等方面的问题.

数学世界(英)(Mathematical Spectrum)(Shiffield) 1968年创刊. 刊号:510C0057, ISSN0025—5653. 英国数学世界社编辑,英国Sheffield学术出版社出版、发行. 每年出版3期. 该刊是供中学及大学学习数学的学生及一般读者阅读的中级数学刊物. 主要刊载纯粹数学、应用数学、统计学、运筹学、计算机科学及生物数学等方面的文章.

国际计算机数学杂志(英)(International Journal of Computer Mathematics)(Berkshire, RT) 1968年创刊. 刊号:519C0060, ISSN0020—7160. 英国Gordon and Breach科学出版公司出版,英国科技图书服务公司(STBS Ltd)发行. 原系季刊,后每年出版8期,现每年出版16期. 每期包括A、B两辑,A辑为计算机系统:程序语言、理论和方法,主要涉及程序语言及其翻译的理论研究,包括计算语言学、形式语言、自动化、组合算法、符号逻辑等;*B*辑为计算方法应用,主要涉及数值分析、运筹研究、计算经济学、应用数学等领域,以及计算机使用者感兴趣的数学技术方面的研究论文.

基础数学(日)(Basic Mathematica)(Kyoto) 1968年创刊. 刊号:510D0066, ISSN0386—6319. 原称《现代数学》(1968－1978年),从1979年起改称现名. 日本现代数学社编辑、出版、发行. 月刊. 刊载大学数学课程,以及微型计算机在数学领域的应用等方面的专题论述和资料.

数学教育研究(荷)(Educational Studies in Mathematics)(Dordrecht) 1968年创刊. 刊号:510LB052, ISSN0013—1954. 荷兰Kluwer学术出版集团出版、发行. 原系季刊,现每年出版8期. 刊载中、小学及师范学校数学理论、方法、实践方面的论文、述评、报告,以及国际数学竞赛简讯、竞赛试题、书评等. 稿件来自世界各国,多用英文发表.

数学方程(瑞士)(Aequationes Mathematicae)(Basel) 1968年创刊. 刊号:510LD051, ISSN-0001—9054. 加拿大Waterloo大学数学系编辑. 瑞士Birkhäuser出版社出版、发行. 原每年出版3期,

现每年出版 9 期. 刊载纯粹数学和应用数学领域的文章,特别是函数方程、组合分析与数值分析方面的研究论文、述评、问题及其解法、简报、文摘等,兼载学术会议报道. 稿件来自世界各国,用英、法或德文发表.

加拿大数学会札记(加)(CMS Notes) 1968 年创刊. 刊号:510NA052,ISSN0045—5164. 加拿大数学会编辑、出版、发行. 每年出版 9 期. 报道加拿大数学会和数学界的动态. 原设于《加拿大数学通报》(刊号:510NA002,ISSN0008—4395)内的“问题与解答”专栏现改设于本刊内.

近期数学出版物(美)(Current Mathematical Publications)(Providence,RI) 1969 年创刊. 刊号:510B0065,ISSN0361—4794. 原称《Contents of Contemporary Mathematical Journals and New Publications》,美国数学会编辑、出版、发行. 与美国《数学评论》属同一编辑委员会. 每年出版 17 期. 分类报道世界各国近期期刊发表的数学文献的题录,其中多数将在《数学评论》中评论,以及主要数学期刊的目次和美国数学会的新出版物.

数论杂志 (美) (Journal of Number Theory) (Orlando, FL) 1969 年创刊. 刊号: 513B0010, ISSN0022—314X. 美国学术出版公司出版的国际性刊物. 原系双月刊, 现每年出版 9 期. 刊载当代数论领域中最新进展的原始研究论文, 以及数论研究成果在工程问题中的实际应用等.

伦敦数学会通报(英)(Bulletin of the London Mathematical Society)(London) 1969 年创刊. 刊号:510C0056,ISSN0024—6093. 英国伦敦数学会编辑,原由 C. F. Hodgson & Son 出版公司出版,现由英国剑桥大学出版社出版、发行. 双月刊. 主要刊载综合性文章、短篇研究论文,以及伦敦数学会有关会议与奖励的报道和书评等.

应用概率进展(英)(Advances in Applied Probability)(Sheffield) 1969 年创刊. 刊号:519C0053, ISSN0001—8678. Applied Probability Trust 编辑, Sheffield 学术出版社出版、发行. 原每年出版两期,现为季刊. 刊载应用概率方面的评论性和综合性文章,也刊载长篇和短篇的研究论文,特别刊载一些在会议上宣读,但未编入会议录上的论文.

国际工程数值方法杂志(英)(International Journal for Numerical Methods in Engineering)(Chichester) 1969 年创刊. 刊号: 7120010, ISSN0029—5981. 原称《Numerical Methods in Engineering》,后改为现名. 美国 John Wiley & Sons 出版公司出版,英国发行. 原系季刊、双月刊,1977 年(第 11 卷)起改为月刊,是集中发表有限元方法的重要期刊. 主要为结构分析、热传导、流体力学、网络理论、电子学、最优系统设计和计算机辅助设计等方面的数值方法. 内容丰富,并结合工程技术实际.

数学论集(德)(Manuscripta Mathematica)(Berlin) 1969 年创刊. 刊号:510E0056,ISSN0025—2611. 德国 Springer 出版社出版、发行. 原每年出版 9 期,现为月刊. 快速报道数学各领域的新研究成果,涉及数学一般理论、拓扑学、微积分、群论等各方面的研究.

数学与人文科学(法)(Mathematiques et Sciences Humaines)(Paris) 1969 年创刊. 刊号: 510F0056,ISSN0025—5815. 法国 Europeriodiques S. A. 出版、发行. 季刊. 刊载有关人文科学的数学模型与工具、教学法、心理学、社会学及数学史等方面的研究论文.

印度数学协会通报(印)(Bulletin of the Mathematical Association of India)(New Delhi) 1969 年创刊. 刊号:510HA058,ISSN0025—5556. 印度数学协会编辑、出版、发行. 每年出版 2 期.

理论与应用逻辑纪事(荷)(Annals of Pure and Applied Logic)(Amsterdam) 1969 年创刊. 刊号: 513LB001, ISSN0168—0072. 原称《Annals of Mathematical Logic》,从 1983 年(第 24 卷)起改称现名. 美国数理逻辑协会编辑,荷兰 North-Holland 出版公司出版,荷兰 Elsevier 科学出版社期刊部发行. 原系季刊、双月刊,后为月刊,现每年出版 15 期. 主要刊载理论与应用逻辑和基础数学,以及与数理逻辑有关的理论计算机科学等方面的研究论文. 稿件来自世界各国,用英文发表.

澳大利亚数学会通报(澳)(Bulletin of the Australian Mathematical Society)(St. Lucia) 1969 年创刊. 刊号:510UA051,ISSN0004—9727. 澳大利亚数学会编辑、出版、发行. 双月刊. 刊载数学各领域的研究论文和数学学位论文的摘要.

数学教育研究杂志(美)(Journal for Research in Mathematics Education)(Reston,VA) 1970 年创刊. 刊号:510B0066,ISSN0021—8251. 美国数学教师全国理事会编辑、出版. 每年出版 5 期. 刊载数学教学方面的研究报告,以及文献评论和简报.

学院数学杂志(美)(College Mathematics Journal)(Washington, DC) 1970 年创刊. 刊号: 512B0054,ISSN0746—8342. 原称《Two-year College Mathematics Journal》,1985 年后改称现名. 美国数学协会编辑、出版、发行. 每年出版 5 期. 该刊对象是大学一、二年级数学教师. 刊载有启发性的文章,以丰富教学内容,提高教学效果;也登载阐述性的稿件,以启迪思路,开阔视野. 内容包括数学解题、应用、计算机,以及与数学有关的历史、哲学等.

半群论坛(美)(Semigroup Forum)(New York)

1970 年创刊. 刊号:513B0055,ISSN0037—1912. 美国 Springer 出版社出版、发行. 每年出版 3 期. 刊载代数半群、拓扑半群、变换半群,以及半群在自动机和逻辑等领域的应用方面的研究论文.

工业与应用数学会·数学分析杂志(美)(SIAM Journal on Mathematical Analysis)(Philadelphia,PA) 1970 年创刊. 刊号:513B0056,ISSN0036—1410. 美国工业与应用数学会编辑、出版、发行. 原系季刊,现为双月刊. 刊载数学分析在工程、自然科学、数值分析等领域的应用方面的原始研究论文.

国际科学与技术中的数学教育杂志(英)(International Journal of Mathematical Education in Science & Technology)(London) 1970 年创刊. 刊号:510C0058,ISSN0020—739X. 英国 Taylor & Francis 出版公司出版、发行. 双月刊. 本刊从科技、工程的实际需要角度讨论数学教育问题,刊载这方面的研究文章、书评、经验介绍和会议报道,也刊载介绍数学模型、计算机应用、新的教育辅助设备和技术等方面的文章.

结构知识杂志(英)(Journal of Structural Learning)(Berkshire,RCT) 1970 年创刊. 刊号:510C0060,ISSN0022—4774. 国际数学学习研究组编辑,英国 Gordon and Breach 科学出版公司出版,科技图书服务公司(英)发行. 季刊. 刊载对数学概念与学习过程的理论、模型、语言、逻辑等复杂结构进行研究的文章.

最优化(英)(Optimization)(London) 1970 年创刊. 刊号:519C0071,ISSN0233—1934. 原民主德国刊物(刊号:519A0002,519E0007),1992 年起改由英国 Gordon and Breach 科学出版公司出版,英国 STBS 服务公司发行. 该刊 1970—1984 年的刊名为《Mathematische Operationsforschung and Statistik,Series Optimization》,1985 年改称现名. 原为双月刊,现每年出版 16 期. 刊载涉及线性规划、运筹学、控制论等理论和应用方面的研究论文、评论、会议文献、书评等.

统计学(英)(Statistics)(London) 1970 年创刊. 刊号:519C0072,ISSN0233—1888. 原民主德国刊物(刊号:519A0051,519E0055),1992 年起改由英国 Gordon and Breach 科学出版公司出版,英国 STBS 服务公司发行. 该刊 1970—1984 年的刊名为《Mathematische Operationsforschung and Statistik,Series Statistics》,1985 年起改称现名. 原系季刊,现每年出版 8 期. 刊载有关统计学的基础理论和应用方面的研究论文.

印度理论与应用数学杂志(印)(Indian Journal of Pure & Applied Mathematics)(New Delhi) 1970 年创刊. 刊号:510HA056,ISSN0019—5588. 印度国家科学院编辑、出版、发行. 月刊. 刊载理论数学与应用数学各分支的研究论文.

数学物理报告(波)(Reports on Mathematical Physics)(Warsaw) 1970 年创刊. 刊号:533LH051. 波兰物理学会和波兰哥白尼大学物理研究所编辑、出版、发行. 双月刊. 刊载数学在物理学中的应用和数学、物理学研究论文.

洛基山数学杂志(美)(Rocky Mountain Journal of Mathematics)(Tempe,AZ) 1971 年创刊. 刊号:510B0068,ISSN0035—7596. 美国 Arizona 州立大学数学系和 Rocky Mountain 数学社编辑、出版、发行. 季刊. 刊载数学领域的研究论文.

多元分析杂志(美)(Journal of Multivariate Analysis)(Orlando,FL) 1971 年创刊. 刊号:513B0064,ISSN0047—259X. 美国学术出版公司出版的国际性刊物. 原系季刊,现为双月刊. 刊载多元分析领域的重要研究成果,以基础理论为主,兼载理论方法的新应用,以及单元分析的研究论述. 稿件来自世界各国,多用英文发表,少数用德文、法文发表.

网络(美)(Networks)(New York) 1971 年创刊. 刊号:519B0061,ISSN0028—3054. 美国 John Wiley & Sons 出版公司出版的国际性刊物. 季刊. 刊载与数据、视频、交通、计算机、动力等有关的大规模网络设计与分析的原始性研究论文,兼载元件与组件的设计计算、计算机应用技术,以及与之有关的综论和讲座等.

统计计算与模拟杂志(英)(Journal of Statistical Computation and Simulation) 1971 年创刊. 刊号:299C0056,ISSN0094—9655. 英国 Gordon and Breach 科学出版公司出版、发行. 每年出版 8 期. 刊载统计计算与模拟技术在统计学中的应用等方面的研究论文.

学校数学(英)(Mathematics in School)(London) 1971 年创刊. 刊号:512C0052,ISSN0305—7259. 英国数学协会编辑,英国 Longman Group 出版公司出版、发行. 每年出版 5 期,是中小学数学教师的教学参考刊物. 主要介绍教科书、教学法、教学知识、趣味数学和数学词汇等.

适用分析(英)(Applicable Analysis) 1971 年创刊. 刊号:513C0053,ISSN0003—6811. 英国 Gordon and Breach 科学出版公司出版,英国科技图书服务公司(STBS Ltd)发行. 原每年出版 8 期,现每年出版 16 期. 刊载运用常微分方程、偏微分方程、微积分、理论数值分析、经典分析、逼近论,以及函数分析的构造性方法等,解决科学、技术、工程和社会问题的论文.

数学社会学杂志(英)(Journal of Mathematical

Sociology）1971 年创刊. 刊号：519C0055，ISSN0022—250X. 英国 Gordon and Breach 科学出版公司出版，英国科技图书服务公司(STBS Ltd)发行. 原系半年刊，现每年出版 8 期. 刊载有关数学理论与方法应用于社会学和社会心理学领域的研究论文. 涉及数理逻辑、数学模型、计算机程序设计、模拟数学处理等分支.

计算机与结构(英)(Computers & Structures)(Tarrytown，NY) 1971 年创刊. 刊号：738C0070，ISSN0045—7949. 英国 Pergamon 出版社出版、发行. 原为双月刊、月刊，现每年出版 3 卷 18 期. 主要刊载有关计算机和计算机程序应用于解决水域、空域、地面工程结构等科技问题方面的研究论文.

数学与数据处理学会通讯(德)(GMD-Spiegel，Der)(Augustin) 1971 年创刊. 刊号：510E0058，ISSN0724—4339. 德国数学与数据处理学会编辑、出版的机关刊物. 季刊. 报道该学会学术研究工作、对外交往活动、会务、学术界动态、国内外学术会议和出版消息等，发表学术研究成果与论述.

巴西数学会通报·特辑(德)(Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series)(Berlin) 1971 年创刊. 刊号：510E0063，ISSN0100—3569. 德国 Springer 出版公司出版、发行. 每年出版 2 期. 刊载高等数学各领域的高质量论文. 用英文发表.

信息学报(德)(Acta Informatica)(Berlin) 1971 年创刊. 刊号：737E0053，ISSN0001—5903. 德国 Springer 出版社出版、发行. 原为双月刊，现每年出版 8 期. 所载文章涉及软件工程、信息检索、管理信息系统、信息系统设计、操作系统、数据管理、程序语言、语言加工程序、应用系统的设计与构造方法、自动机理论和形式语言等.

纯粹代数与应用代数杂志(荷)(Journal of Pure and Applied Algebra)(Amsterdam) 1971 年创刊. 刊号：513LB002，ISSN0022—4049. 荷兰 North-Holland 出版公司出版，荷兰 Elsevier 科学出版社期刊部发行. 原系月刊，现每年出版 21 期. 主要刊载有实用意义的代数研究成果和有潜在应用意义的代数理论等方面的研究论文.

拓扑学及其应用(荷)(Topology and its Applications)(Amsterdam) 1971 年创刊. 刊号：513LB003，ISSN0166－8641. 原称《General Topology and its Applications》(1971－1979 年)，1980 年起改称现名. 小刊名为“一般、几何、集论与代数拓扑学杂志”. 荷兰 North-Holland 出版公司出版，荷兰 Elsevier 科学出版社期刊部发行. 原系双月刊，现每年出版 9 期. 刊载拓扑学的一般问题和公理、集论、几何、代数方面的问题，以及拓扑学与其他数学学科的交叉领域，如拓扑代数、拓扑动力学、泛函分析、范畴论等方面的研究论文.

离散数学(荷)(Discrete Mathematics)(Amsterdam) 1971 年创刊. 刊号：513LB005，ISSN0012—365X. 荷兰 North-Holland 出版公司出版，荷兰 Elsevier 科学出版社期刊部发行. 原系月刊，现每年出版 15 期. 刊载离散数学的理论和应用研究方面的原始论文，涉及组合数学及其有关领域，兼载评述性文章，以及短讯、书评、会议录等. 稿件来自世界各国，多用英文发表.

数学规划(荷)(Mathematical Programming, with Mathematical Programming Studies)(Amsterdam) 1971 年创刊. 刊号：519LB003，ISSN0025—5610. 本刊附“数学规划研究”，是荷兰数学规划学会编辑的机关刊物. 由荷兰 North-Holland 出版公司出版，荷兰 Elsevier 科学出版社期刊部发行. 原系双月刊，从 1982 年(第 22 卷)起改为每年出版 9 期，现每年出版 15 期. 刊载数学规划理论、计算与应用方面的研究论文，兼载简讯和成果简报等. 稿件来自世界各国，用英文发表.

泛代数杂志(瑞士)(Algebra Universalis)(Winnipeg，MB) 1971 年创刊. 刊号：513LD051，ISSN0002—5240. 加拿大 Manitoba 大学编辑、出版，瑞士 Birkhäuser 出版社发行. 原系双月刊，现每年出版 3 期. 主要刊载泛代数与格论方面的研究论文. 文章多用英文发表.

几何学杂志(瑞士)(Journal of Geometry)(Basel) 1971 年创刊. 刊号：513LD052，ISSN0047—2468. 德国 München 工业大学几何研究所编辑，瑞士 Birkhäuser 出版社出版、发行. 原系季刊，现为双月刊. 刊载有关几何学基础、几何代数、有限几何、组合几何和特殊几何等方面的研究论述. 用英文或德文发表.

匈牙利数学学报(匈)(Periodica Mathematica Hungarica)(Budapest) 1971 年创刊. 刊号：510LM004，ISSN0031—5303. 匈牙利博利奥伊数学会编辑. 原系季刊，现为双月刊. 刊载理论数学与应用数学领域的研究论文、书评和学术动态报道. 文章多用英文发表，间用法文、德文发表.

数理统计学会通报(美)(Institute of Mathematical Statistics Bulletin)(Hayward，CA) 1972 年创刊. 刊号：513B0058，ISSN0146—3942. 美国数理统计学会编辑、出版的机关刊物. 季刊. 报道该会的会议、出版和会务活动，以及该会会议论文摘要等.

工业与应用数学会·计算杂志(美)(SIAM Journal on Computing)(Philadelphia，PA) 1972 年创刊. 刊号：519B0057，ISSN0097—5397. 美国工

业与应用数学会编辑、出版、发行.原系季刊,现为双月刊.刊载有关数学应用于计算机科学和非数值计算方面的研究论文;涉及自动机理论、算法分析、计算复杂性、组合、程序语言数学、数据结构、计算机体系结构、人工智能、情报检索等方面的问题研究.

国际并行程序设计杂志(美)(International Journal of Parellel Programming)(New York) 1972年创刊.刊号:738B0027,ISSN0091—7036.原名《International Journal of Computer and Information Sciences》.1988年第17卷开始改用现名.美国Plenum出版公司出版、发行.双月刊,每年一卷.刊登理论和应用两方面的原始论文和评论性、综合性文章.涉及软件工程、系统程序设计、模式识别、图像处理、计算机制图、情报检索、计算机组织、语言加工、自动机理论、数理语言学、计算机控制、数据结构、数据存取、信息管理系统及生物信息处理等.

北海道数学杂志(日)(Hokkaido Mathematical Journal)(Sapporo) 1972年创刊.刊号:510D0090.日本北海道大学数学系编辑、出版、发行.每年出版3期.刊载北海道大学数学会提供的数学研究论文.多用英文发表,间用德文、法文发表.

新算术研究(日)(Elementary Mathematics Teaching)(Tokyo) 1972年创刊.刊号:512D0068.日本东洋馆出版社出版、发行.月刊.该刊是以小学教师为对象,交流数学教学经验的刊物.内容涉及教学方法、教材分析、课程安排及算术教育研究等方面的问题.

国际对策论杂志(德)(International Journal of Game Theory)(Heidelberg) 1972年创刊.刊号:513E0052,ISSN0020—7276.德国Physica出版社出版,Springer出版社发行.季刊.刊载有实质性数学内容的创造性对策论文章和研究简报,偶尔也登载对策论工作者感兴趣的其他方面的文章.用英文发表.

几何学报(荷)(Geometriae Dedicata)(Dordrecht) 1972年创刊.刊号:513LB004,ISSN0046—5755.荷兰Kluwer学术出版集团出版,该集团销售中心发行.原每年出版9期,现为月刊.主要刊载几何学经典问题、数学语言几何化及几何学在解析与代数学领域的应用等方面的研究论文.稿件来自世界各国,用英文、德文发表.

应用数学(加)(Utilitas Mathematica)(Winnipeg, MB) 1972年创刊.刊号:519NA051,ISSN0315—3681.加拿大应用数学出版公司编辑、出版、发行.每年出版2卷,刊载应用数学、计算数学、统计学及组合数学等方面的研究论文.文章用英文或法文发表.

概率论纪事(美)(Annals of Probability, including Statistical Science)(Hayward,CA) 1973年创刊.刊号:513B0059,ISSN0091—1798.该刊前身为《Annals of Mathematical Statistics》(1930-1972年),1973年分为《Annals of Statistics》(刊号:513B0001)和《Annals of Probability》两种刊物.美国数理统计学会编辑、出版的机关刊物.原系双月刊,从1982年(第10卷)起改为季刊.刊载概率理论与应用领域的研究论文,兼载一些关于这一领域的权威性评论文章,并随刊提供《统计科学》.

线性与多重线性代数(英)(Linear and Multilinear Algebra) 1973年创刊.刊号:513C0054,ISSN0308—1087.英国Gordon and Breach科学出版公司出版,英国科技图书服务公司(STBS Ltd)发行.原系季刊,现每年出版8期.刊载线性代数、多重线性代数有关的研究论文,评述性和综合性文章,以及书评等.

数学教学法(德)(Didaktik der Mathematik)(Eggenstein-Leopoldshafen) 1973年创刊.刊号:510E0059,ISSN0343—5334.德国Bayerischer Schulbuch-Verlag出版、发行.季刊.刊载中学数学教学实践,以及有关的数学原理等方面的论述.

星杂志(法)(Astérisque)(Montrouge) 1973年创刊.刊号:510F0055,ISSN0303—1179.法国数学会、巴黎高等师范学校编辑、出版、发行.每年出版10期左右.每期一个专题,有长篇论文,一份讲稿,一次会议的文集或一个讨论班的报告集.

随机过程及其应用(荷)(Stochastic Processes and their Applications)(Amsterdam) 1973年创刊.刊号:513LB006,ISSN0304—4149.荷兰Bernoulli数理统计和概率学会编辑的机关刊物,荷兰North-Holland出版公司出版,荷兰Elsevier科学出版社期刊部发行.原系季刊,1976年(第4卷)起改为双月刊.主要刊载随机过程理论及其在科学与工程技术中的应用,包括随机过程和随机系统的特性、描述性分布、极限理论行为、模型的健全性等方面的研究论文,兼载述评和学术界动态报道.

数学史(美)(Historia Mathematica)(Orlando, FL) 1974年创刊.刊号:510B0087,ISSN0315—0860.国际哲学与历史科学联合会历史科学分会数学史委员会编辑的国际性刊物,由美国学术出版公司出版、发行.季刊.刊载数学史方面的文章,只要是涉及数学方面的,国家、时期、学科都不限制.理论、应用、计算机科学、统计、控制、运筹、数学社会学、数学技术以及关系到数学的哲学、心理学、教育学等都在它的刊载范围之内.此外,还兼载人物传记、历史随笔、机构研究等文章.

代数通讯(美)(Communications in Algebra)(New York) 1974年创刊.刊号:513B0012,

ISSN0092—7872. 美国 Marcel Dekker 出版公司出版、发行. 月刊. 刊载代数学和数论等方面的原始研究论文,偏重于理论,兼载对若干进展的评述性文章、简报等.

今日运筹学与管理科学(美)(OR/MS Today, with TIMS/ORSA Meeting Bulletin)(Linthicum, MD) 1974 年创刊. 刊号:519B0059. 美国运筹学与管理科学学会编辑、出版的机关刊物. 每年出版 8 期. 报道美国运筹学会的动态和会务活动;副刊《管理科学会与美国运筹学会会议通报》,刊载两学会会议论文的摘要.

应用统计杂志(英)(Journal of Applied Statistics)(Oxfordshire, OX) 1974 年创刊. 刊号:299C0058,ISSN0266—4763. 英国 Carfax 出版公司出版、发行. 每年出版 3 期. 刊载严谨且清楚易懂的统计应用文章和有明显应用前景的统计理论专述,涉及到商业、经济、生态、教育、管理、医学、运筹和社会科学等.

随机过程与随机过程报告(英)(Stochastics and Stochastics Reports)(London) 1974 年创刊. 刊号:519C0054, ISSN0090—9491. 英国 Gordon and Breach 科学出版公司出版,英国科技图书服务公司(STBS Ltd)发行. 现为月刊,每年分 3 卷. 原名《随机过程》(Stochastics). 1989 年从第 26 卷起改用现名. 文章也随之分为随机过程与随机过程报告两类. 两类同为研究论文,但后一类比前一类解释成分更多,篇幅更长,更适于进入该领域的新手. 后一类中偶尔有书评. 文章内容为随机过程理论及其在系统的建模、分析和优化等方面的应用.

计算机和数学及其应用(英)(Computers and Mathematics with Applications)(Oxford) 1974 年创刊. 刊号:738C0081, ISSN0097—4943. 英国 Pergamon 出版社出版、发行. 双月刊. 刊载有关计算机在数值分析、数论、概率论等数学研究中的应用,计算机系统的数学模型,计算机在环境科学、生态学、生物学、城市系统等领域中的应用,以及有关的应用数学等方面的文章,以理论和应用研究的原始论文为主,偶尔也有综合性或评论性的文章,有时还登载书评.

应用数学与最优化(德)(Applied Mathematics & Optimization)(Berlin) 1974 年创刊. 刊号:519E0002,ISSN0095—4616. 德国 Springer 出版社出版、发行. 原系季刊,现为双月刊. 刊载最优化的数学理论与应用方面的研究论文、评论和札记. 包括数学在物理系统、化学与生化系统、环境系统、最优化设计、生物医学系统、航空与航天系统、社会经济系统、公共服务系统等方面的应用研究. 用英文发表.

澳大利亚数学会杂志(澳)(Gazette of the Australian Mathematical Society)(St. Lucia) 1974 年创刊. 刊号:510UA052, ISSN0311—0729. 原称《Australian Mathematical Society Gazette》(1974—1984 年). 澳大利亚数学会编辑、出版、发行. 原系季刊,现为双月刊. 刊载普通数学和数学教学方面的文章,报道该学会的活动和出版消息.

应用数学与计算(美)(Applied Mathematics & Computation)(New York) 1975 年创刊. 刊号:519B0014,ISSN0096—3003. 小刊名为"环境模型化". 美国 Elsevier 科学出版公司出版、发行. 原每年出版 8 期,现每年出版 16 期. 这是一份联系数学、计算和现实问题的跨学科的杂志. 刊载研究论文,亦刊载评论文章,有时也出版专题本.

计算机协会数学软件汇刊(美)(ACM Transactions on Mathematical Software)(New York) 1975 年创刊. 刊号:738B0224,ISSN0098—3500. 计算机协会出版、发行. 季刊. 发表有关数学软件与计算机程序方面的研究论文.

计算与应用数学杂志(荷)(Journal of Computational and Applied Mathematics)(Amsterdam) 1975 年创刊. 刊号:519LB055,ISSN0377—0427. 荷兰 North-Holland 出版公司出版,荷兰 Elsevier 科学出版社期刊部发行. 原系月刊,现每年出版 18 期. 刊载有关应用数学,特别是解决实际科学问题的新计算技术,以及经过认真验证的算法等方面的研究论文,兼载书评及快报.

理论计算机科学(荷)(Theoretical Computer Science)(Amsterdam) 1975 年创刊. 刊号:738LB004,ISSN0304—3975. 欧洲理论计算机科学协会机关刊物,由 Elsevier 科学出版公司出版、发行. 现每年出版 7 卷共 21 期. 刊载文章由实际计算推动而产生,表达是数学的、抽象的,涉及算法、自动机、复杂性、对策、逻辑、语义学、程序理论等.

数学分析(匈)(Analysis Mathematica)(Budapest) 1975 年创刊. 刊号:513LM051,ISSN0133—3852. 匈牙利科学院数学研究所编辑、出版. 季刊. 刊载与数学分析有关的研究论文与评论. 主要用英文、俄文,间用法文、德文发表.

数学难题(加)(Crux Mathematicorum)(Ottawa) 1975 年创刊. 刊号:510NA051,ISSN0705—0348. 加拿大数学会编辑、出版、发行. 每年出版 10 期. 活页刊物,其内容是解答高中和大学的数学难题.

应用数学札记(加)(Applied Mathematics Notes)(Edmonton, AB) 1975 年创刊. 刊号:519NA053,ISSN0700—9224. 加拿大数学会编辑、出版、发行. 季刊. 刊载有关应用数学方面的研究论文、教材、教学札记,以及加拿大数学会的动态报道

和文献题录等.

休斯敦数学杂志(美)(Houston Journal of Mathematics)(Houston,TX)　1976年创刊. 刊号:510B0078,ISSN0362—1588. 美国 Houston 大学数学系编辑、出版、发行. 季刊. 专载数学方面的研究论文.

偏微分方程通讯(美)(Communications in Partial Differential Equations)(New York)　1976年创刊. 刊号:513B0066,ISSN0360—5302. 美国 Marcel Dekker 出版公司出版、发行. 原每年出版15期,现为月刊. 刊载有关线性与非线性偏微分方程及其应用方面的研究论文.

运筹学数学(美)(Mathematics of Operations Research)(Providence,RI)　1976年创刊. 刊号:519B0062,ISSN0364—765X. 美国运筹学会与管理科学会联合主办的国际性刊物,由美国运筹学会出版、发行. 刊载与运筹学和管理科学有关的数学理论方面的研究论文和评论文章. 例如关于数学规划、随机系统、对策论、动态规划、控制与组合系统等的结构理论与计算技术,以及关于运筹学在经济、信息、商务、生产、运输管理等方面的开创性应用.

应用数学模型(美)(Applied Mathematical Modelling)(New York)　1976年创刊. 刊号:519B0073,ISSN0307—904X. 美国 Butterworth - Heinemann 出版社出版、发行. 月刊. 由于数学模型及相关数字技术和软件,在工程和环境系统设计和分析中起到越来越重要的作用,该刊针对这一领域开辟论坛,发表论文、评论、札记、会议报告和书评等.

数学科学(英)(Mathematical Scientist)(shef - field)　1976年创刊. 刊号:510C0071,ISSN0312—3685. 英国 Sheffield 学术出版社出版、发行. 每年出版2期. 刊载数学理论与应用,特别是数学模型方面的研究论文.

应用数学模型(英)(Applied Mathematical Modelling)(Stoneham,MA)　1976年创刊. 刊号:519C0058,ISSN0307—904X. 小刊名原为"环境、社会与工程系统",从1983年(第7卷)起改为"工程和环境系统模拟和计算",是英国 Butterworth 科学出版公司出版的国际性刊物. 英国 Quadrant Subscription 服务公司发行. 双月刊. 刊载有关数学模型在工程技术、环境及社会系统领域的应用方面的研究论文,兼载书评和会议消息.

筑波数学杂志(日)(Tsukuba Journal of Mathematics)(Ibaraki)　1976年创刊. 刊号:510D0082,ISSN0387—4982. 日本筑波大学数学研究所编辑、出版、发行. 原系不定期出版,现每年出版2期. 刊载有关数学研究论文,用英文发表.

数据分析手册(法)(Cahiers de l'Analyse des Donnees)(Paris)　1976年创刊. 刊号:513F0002,ISSN0339—3097. 法国 Dunod、Gauthier - Villars 期刊发行中心发行. 季刊. 刊载有关社会科学和自然科学领域的数据分析技术、实例研究、理论研究,以及统计学和数据分析的计算机程序设计等方面的研究论文.

组合学、信息与系统科学杂志(印)(Journal of Combinatorics, Information & System Sciences)(Delhi)1976年创刊. 刊号:519HA052,ISSN0250--9628. 印度 Forum for Interdisciplinary Mathematics 编辑、出版、发行. 季刊. 刊载组合学、信息论、系统科学方面的研究论文和综述文章,以及有关书评和学位论文摘要.

组合学(加)(Ars Combinatoria)　1976年创刊. 刊号:519NA052,ISSN0381—7032. 加拿大 Charles Babbage 研究中心出版、发行. 每年出版2卷. 刊载图论、组合学及其在其他数学分支上应用方面的论文,以及组合学会议论文.

图论杂志(美)(Journal of Graph Theory)(New York)　1977年创刊. 刊号:519B0064,ISSN0364—9024. 美国 John Wiley & Sons 出版公司出版、发行. 季刊. 刊载图论及其在化学、物理、生物、医学、工程技术、社会学和数学中的应用等方面的原始研究论文,偏重于定理的研究,兼载评述性文章和研究短讯等.

非线性分析·理论、方法与应用(英)(Nonlinear Analysis:Theory,Methods and Applications)(Oxford)　1977年创刊. 刊号:513C0055,ISSN0362—546X. 原称《Journal of Non - Linear Analysis》,系一种跨学科的国际性刊物. 由英国 Pergamon 出版公司出版、发行. 月刊. 主要刊载非线性分析的理论、方法,以及在基础科学研究和工程技术领域中的应用等方面的研究论文和综合性文章,兼载有关简讯等.

数学教学法杂志(德)(Mathematica Didactica/Zeitschrift für Didaktik der Mathematik)(Hildes－heim)　1977年创刊. 刊号:510E0064,ISSN0170—1541. 德国 Verlag 出版、发行. 季刊. 刊载数学教学法方面的研究论文.

东南亚数学通报(新)(Southeast Asian Bulletin of Mathematics)(Singapore)　1977年创刊. 刊号:510GL052,ISSN0218—0006. 新加坡世界科学出版公司出版、发行. 东南亚数学会协作出版. 每年出版2期. 刊载纯数学及其应用方面的研究论文和特约综论,报道东南亚数学会的重要活动. 稿件主要来自亚洲国家的数学家和研究人员.

统计规划与统计推断杂志(荷)(Journal of Sta-

tistical Planning and Inference)(Amsterdam) 1977年创刊. 刊号:513LB008,ISSN0378—3758. 荷兰 North-Holland 出版公司出版,荷兰 Elsevier 科学出版社期刊部发行. 原系季刊,后改为每年出版9期,现为月刊. 刊载统计规划与统计推断理论与应用方面的研究论文,内容涉及实验设计与抽样理论、组合学、信息论、寻优理论与设计等,兼载综述、简讯、会议消息、书评等. 稿件来自世界各国,多用英文发表.

欧洲运筹学杂志(荷)(European Journal of Operational Research)(Amsterdam) 1977年创刊. 刊号:519LB005,ISSN0377—2217. 欧洲运筹学会联合会编辑的机关刊物. 由荷兰 North-Holland 出版公司出版,荷兰 Elsevier 科学出版社期刊部发行. 原系月刊,后改为每年出版15期,现为半月刊. 主要刊载有关运筹学在商业、工业和政府工作中的应用,以及理论发展等方面的研究论文,兼载简讯、书评等. 稿件来自世界各国,用英文发表.

国际数学与数理科学杂志(美)(International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences)(Orlando,FL) 1978年创刊. 刊号:510B0092,ISSN0161—1712. 美国 Central Florida 大学编辑、出版、发行. 季刊. 刊载原始研究论文、简报、书评,多为阐述性文章和综合性文章. 涉及学科有纯粹和应用数学各领域、数学物理、理论力学、概率论和数理统计等.

东京数学杂志(日)(Tokyo Journal of Mathematics)(Tokyo) 1978年创刊. 刊号:510D0081,ISSN0387—3870. 日本东京数学杂志编辑委员会编辑,日本 T. J. M. 刊行会出版、发行. 每年出版2期. 发表日本学习院、庆应、上智、东京都立、津田塾和早稻田等六所大学数学研究工作者的研究成果. 多用英文发表,间用德文、法文发表.

数学情报员(德)(Mathematical Intelligencer)(Berlin) 1978年创刊. 刊号:510E0010,ISSN0343—6993. 德国 Springer 出版社出版、发行的中级数学知识性刊物. 季刊. 刊载过去和现在引起人们兴趣的数学原理、见解、争论、人物、历史、哲学、趣题等方面的论述和资料. 用英文发表.

数学教学法文献(德)(ZDM-Zentralblatt für Didaktik der Mathematik)(Eggenstein — Leopoldshafen) 1978年创刊. 刊号:510E0060,ISSN0044—4103. 德国 Fachinformationszentrum, Energie, Physik. Mathematik Gmbh 出版、发行. 双月刊. 摘录书籍、期刊等出版物发表的有关数学教学法方面的文献,并刊载数学教学方面的文章.

加尔各答数学会新闻通报(印)(News Bulletin of Calcutta Mathematical Society)(Calcutta) 1978年创刊. 刊号:510HA067. 印度 Calcutta 数学会编辑、出版、发行. 月刊. 刊载有关数学及其相关学科(如经典力学、量子力学等)的学术短文,加尔各答数学会会务与动态新闻、出版消息等.

模糊集与系统(荷)(Fuzzy Sets and Systems)(Amsterdam) 1978年创刊. 刊号:510LB054,ISSN0165—0114. 国际模糊系统协会(IFSA)编辑的国际性刊物,由荷兰 North-Holland 出版公司出版,荷兰 Elsevier 科学出版社期刊部发行. 原系双月刊,后改月刊,现为半月刊. 主要刊载有关模糊集的理论及其应用方面的研究论文,涉及控制理论、医学、人工智能、系统理论、工程、运筹学等领域,兼载评论性文章、札记等. 文章用英文发表.

积分方程与算子理论(瑞士)(Integral Equations and Operator Theory)(Basel) 1978年创刊. 刊号:510LD005,ISSN0378—620X. 瑞士 Birkhäuser 出版社出版、发行的国际性刊物. 双月刊. 刊载积分方程与算子理论的最新研究进展,侧重于线性理论的研究. 主要涉及抽象理论与数值方法对物理、力学、工程及其他课题的分析应用,兼载研究简讯. 稿件来自世界各国,用英文发表.

数学成果(瑞士)(Results in Mathematics/Resultate der Mathematik)(Basel) 1978年创刊. 刊号:510LD052,ISSN0378—6218. 瑞士 Birkhäeuser 出版社出版、发行. 原每年出版2期,现每年出版8期. 刊载纯粹数学和应用数学领域的研究论文,兼载文摘、题录和评论. 用英文或德文发表.

数值函数分析与最优化(美)(Numerical Functional Analysis and Optimization)(New York) 1979年创刊. 刊号:519B0063,ISSN0163—0563. 美国 Marcel Dekker 出版公司出版的国际性刊物. 原系季刊,现为月刊. 主要刊载数值分析、逼近论、最优化、控制论与算子方程中泛函分析与算子理论方法的发展和应用的研究论文.

算子理论杂志(罗)(Journal of Operator Theory)(Bucharest) 1979年创刊. 刊号:519B0066,ISSN0379—4024. 由罗马尼亚国家科学与技术创造研究所数学室编辑,罗马尼亚国立布加勒斯特理工学院出版,美国数学会发行. 季刊. 刊载算子理论各领域的研究成果和研究进展.

计算机学会·程序语言与系统汇刊(美)(ACM Transactions on Programming Languages and Systems)(New York) 1979年创刊. 刊号:738B0033,ISSN0164—0925. 美国计算机学会编辑、出版、发行. 季刊. 刊载程序语言和系统方面的研究论文,包括程序开发和程序语言的设计、分析和比较.

应用科学中的数学方法(英)(Mathematical Methods in the Applied Sciences)(Stuttgart) 1979

年创刊. 刊号:510C0070,ISSN0170—4214. 原由德国 B. G. Teubner 出版公司出版,1988 年开始与英国 John Wiley & Sons 出版公司联合出版,由后者发行. 季刊. 所载论文中的数学方法都是进一步认识分析和解决应用科学的实际问题时明显有用的,以及反映应用数学在科学领域中解决重要问题的进展.

运筹学概览(德)(OR Spektrum (Operations Research Spectrum))(Berlin) 1979 年创刊. 刊号:519E0053,ISSN0171—6468. 德国运筹学会编辑的机关刊物. 德国 Springer 出版社出版、发行. 季刊. 刊载运筹学及有关软件方面的研究论文、综述、实例分析等.

印度数学学会志(印)(Journal of the Indian Academy of Mathematics)(Indore) 1979 年创刊. 刊号:510HA062,ISSN0970—5120. 印度数学学会编辑、出版、发行. 每年出版 2 期. 刊载印度数学学会会员提交的数学领域内的研究论文. 用英文发表.

离散应用数学(荷)(Discrete Applied Mathematics)(Amsterdam) 1979 年创刊. 刊号:513LB009,ISSN0166—218X. 荷兰 North - Holland 出版公司出版,荷兰 Elsevier 科学出版社期刊部发行. 原系双月刊,现每年出版 9 期. 主要刊载有关离散优化、网络理论、开关理论与自动机理论、应用理论与优选结构、对策理论、调度理论,以及算法与复杂性研究等方面的论文,兼载综述和书评. 稿件来自世界各国,多用英文发表.

加拿大科学院数学报告(加)(Mathematical Reports of the Academy of Sciences/Comptes Rendus Mathematiques de l'Academie des Sciences)(Toronto,ON) 1979 年创刊. 刊号:510NA003,ISSN0706—1994. 加拿大皇家学会编辑,多伦多大学数学系皇家学会数学报告编辑委员会出版、发行. 双月刊. 刊载数学领域研究成果的概括性短论. 所载论文均由加拿大皇家学会数学组成员推荐. 稿件来自世界各国,用英文或法文发表.

算法杂志(美)(Journal of Algorithms)(Orland,FL) 1980 年创刊. 刊号:510B0017,ISSN0196—6774. 美国 Academic 出版社出版、发行. 季刊. 刊载有限离散算法方面或分析所用方法的论文,包括新算法、新的数据结构对已有算法的分析和比较、复杂性研究,以及关于复杂性理论、离散优化、几何算法、算法分析等分支的评论文章. 此外,还辟有问题栏.

美国数学会会议论文摘要(美)(Abstracts of Papers Presented to the American Mathematical Society)(Providence,RI) 1980 年创刊. 刊号:510B0088,ISSN0192—5857. 美国数学会编辑、出版、发行. 每年出版 7 期. 刊载在美国数学会会议上发表的研究论文(包括宣读的论文和未宣读的论文)的摘要. 每期约载摘要 300 条.

大学本科数学及其应用项目杂志(美)(UMAP Journal (Undergrauate Mathematics Applications Project))(Lexington,MA) 1980 年创刊. 刊号:513B0070,ISSN0197—3622. 原由美国 Birkhauser Boston 公司出版,20 世纪 90 年代后改由数学及其应用社出版、发行. 季刊. 刊载大学本科程度的数学及其应用研究,以及数学史等方面的文章和评论.

工业与应用数学会·科学与统计计算杂志(美)(SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing)(Philadelphia,PA) 1980 年创刊. 刊号:519B0015,ISSN0196—5204. 美国工业与应用数学会编辑、出版、发行. 原系季刊,现改为双月刊. 刊载利用计算机解决科学与统计计算中的数值与非数值计算问题,并涉及计算机结构、探试数值法、交互制图、数据管理、软件工具等.

工业与应用数学会·矩阵分析与应用杂志(美)(SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications)(Philadelphia,PA) 1980 年创刊. 刊号:519B0016,ISSN0895—4798. 原称《SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods》,1988 年分出一种新杂志《SIAM Journal on Discrete Mathematics》(参见刊号:513B0072),原杂志改称现名. 由美国工业与应用数学会编辑、出版、发行. 季刊. 刊载矩阵理论及其应用方面的研究论文,包括在马尔可夫链、网络、信号与信号处理、系统与控制理论、数学规划、经济与生物模型建立、统计学与运筹学等领域中的应用,以及数值矩阵方法等.

应用数学进展(美)(Advances in Applied Mathematics)(Orlando,FL) 1980 年创刊. 刊号:519B0017,ISSN0196—8858. 美国学术出版公司出版、发行的国际性刊物. 季刊. 刊载应用数学领域内的研究论文,涉及与应用数学相关的数学物理学、数理统计学、数学生物学、数学经济学和计算机科学、通讯理论等.

时间序列分析杂志(英)(Journal of Time Series Analysis)(Oxford) 1980 年创刊. 刊号:510C0064,ISSN0143—9782. 英国 Basil Blackwell 出版公司出版、发行. 季刊. 刊载序列分析的基本理论和方法,以及在物理学、工程、控制论、经济学和生物学等领域中应用方面的研究论述.

欧洲组合学杂志(英)(European Journal of Combinatorics)(London) 1980 年创刊. 刊号:513C0057,ISSN0195—6698. 国际性纯粹数学杂志. 学术出版社伦敦分社出版,英国 Harcourt Brace Jovanovich 公司发行. 原系季刊,现为双月刊. 刊载数学中组合问题理论的原始研究论文. 主要涉及组

合学中的数学结构、组合学与数学其他分支及其计算理论的直接联系等问题.

数学与计算机模型(英)(Mathematics & Computer Modelling)(Oxford)　1980年创刊.刊号:513C0058,ISSN0895—7177.原称《Mathematical Modelling》(1980－1987年),1987年以后改用现名.英国Pergamon出版公司出版、发行.国际性刊物.原为双月刊,现为月刊.刊载介绍利用数学模型、计算机作为工具来解决科研和工程中的问题的文章,如工程技术、生物、医学、环境、社会科学、行为科学等.偏重于方法学与模型理论研究的论文.

最优控制应用与方法(英)(Optimal Control Applications and Methods)(Chichester)　1980年创刊.刊号:519C0061,ISSN0143—2087.英国John Wiley & Sons出版公司出版、发行.季刊.刊载最优控制应用和理论方面的论文,以应用为主,应用的领域涉及航天、航海、自动系统、机器人、化工系统、运筹、社会经济模拟、环境与生态控制等,亦刊载有关优化问题算法的文章.

数学教学实践(德)(Mathematische Unterrichtspraxis)(Seelze)　1980年创刊.刊号:510E0062,ISSN0721—8419.德国Verlag出版、发行.季刊.介绍德国小学和十年制学校数学教学经验,登载有关数学教学研究方面的论述.

信息与最优化科学杂志(印)(Journal of Information and Optimization Sciences)(Delhi)　1980年创刊.刊号:519HA053,ISSN0252—2667.印度Analytic Publishing Co.出版、发行.每年出版3期.主要刊载信息科学和最优化科学,以及相关领域的基础理论和应用方面的研究论文,兼载书评和学位论文摘要.

信息与决策技术(荷)(Information & Decision Technologies)(Amsterdam)　1980年创刊.刊号:519LB052,ISSN0923—0408.原称《Large Scale Systems: Theory and Applications》(刊号:ISSN0167—420X),20世纪90年代改为现名.荷兰North-Holland出版公司出版,Elsevier出版社期刊部发行.原系季刊,现为双月刊.刊载大规模和重复系统(交通运输系统、环境系统、社会经济系统、管理系统、数据网络、化学与冶金工艺过程、电力系统等)的理论与实践,包括多目标优化、多准则决策、多属性应用理论及决策支持系统等方面的原始研究论文,兼载评论及快报.

美国数学与管理科学杂志(美)(American Journal of Mathematical and Management Sciences)(Syracuse,NY)　1981年创刊.刊号:519B0067,ISSN0196—6324.美国科学出版公司出版、发行.季刊.刊载数学与管理科学,以及有关计算机程序设计和应用等方面的研究论文.

计算数学引文索引(美)(CompuMath Citation Index)(Philadelphia,PA)　1981年创刊.刊号:519B0068,ISSN0730—6199.美国科技情报研究所编辑、出版、发行.每年出版3期.该刊为期刊文献引文索引,包括计算机科学、数学、统计学、运筹学、数学物理学和计量经济学等.索引内容包括来源、研究专业、引文、主题及团体索引等.

遍历理论与动态系统(英)(Ergodic Theory and Dynamical Systems)(Cambridge)　1981年创刊.刊号:510C0063,ISSN0143—3857.英国Cambridge大学出版社出版、发行.季刊.刊载研究遍历理论的数学问题,及其在动态系统中的应用方面的研究论文,兼载有关书评、评述文章和会议报告.

数学及其应用学会·数值分析杂志(英)(IMA Journal of Numerical Analysis)(Oxford)　1981年创刊.刊号:519C0002—B,ISSN0272—4979.该刊1981年由《Journal of the Institute of Mathematics & its Applications》(1965年创刊)分出,与《IMA Journal of Applied Mathematics》(参见刊号:519C0002—A)是姊妹刊.英国数学及其应用学会(IMA)编辑的机关刊物,英国牛津大学出版社出版、发行.季刊.刊载数值分析领域的研究论文,主要涉及理论、实用算法的进展和应用等,兼载评述性文章.两刊内容互为补充,合订本用原版刊号:519C0002.

分析(德)(Analysis)(Munich)　1981年创刊.刊号:513E0005,ISSN0174—4747.小刊名为“国际数学分析及其应用杂志”.德国R. Oldenbourg出版公司出版、发行.季刊.刊载分析,特别是经典分析及其应用方面的研究论文,偏重于应用研究.内容涉及解析数论、实函数、复函数、特殊函数、常微分方程、偏微分方程、逼近和展开、傅里叶函数、积分、泛函分析、算子理论、变分法及最佳控制、最优化、概率论及随机过程等.稿件来自世界各国,用英文发表.

数学社会科学(荷)(Mathematical Social Sciences)(Amsterdam)　1981年创刊.刊号:510LB055,ISSN0165—4896.荷兰North-Holland出版公司出版,荷兰Elsevier科学出版社期刊部发行.原每年出版9期,现为双月刊.主要刊载有关人类生态系统分析、生活质量分析、社会福利理论、信息过程与系统理论等数学社会科学领域内的研究论文,兼载综述和短评.

运筹学快报(荷)(Operations Research Letters)(Amsterdam)　1981年创刊.刊号:519LB053,ISSN0167—6377.美国运筹学会(ORSA)编辑,荷兰North-Holland出版公司出版,荷兰Elsevier科学出版社期刊部发行.双月刊.刊载有关运筹学、管理

科学、决策科学的理论与应用方面的研究成果简报，并定期发表综合性文章.

计算机程序设计科学(荷)(Science of Computer Programming)(Amsterdam) 1981年创刊. 刊号:738LB063,ISSN0167—6423. 荷兰 Elsevier 科学出版公司出版，该公司期刊部发行. 双月刊. 刊载程序设计方面的研究论文和简讯，兼载综合报告、书评等.

组合学(匈)(Combinatorica)(Budapest) 1981年创刊. 刊号:510LM054,ISSN0209—9683. 匈牙利博利奥伊数学会编辑、出版. 季刊. 刊载组合学及其有关的研究论文、评论. 用英文发表.

数学及其应用报告(意)(Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni)(Rome) 1981年创刊. 刊号:510MC008,ISSN1120—7183. 原称《Rendiconti di Matematica; Rendiconti del Seminario Matematico dell'universita di Roma》，意大利罗马大学数学研究所编辑、出版，意大利 Edizioni Scientifiche 发行. 季刊. 刊载数学研究论文. 用英、意、法文发表.

数学行为杂志(美)(The Journal of Mathematical Behavior)(Greenwich,CT) 1982年创刊. 刊号:510B0095,ISSN0732—3123. 美国 Ablex 出版社出版、发行. 每年出版3期. 该刊宗旨是促进数学的教与学，帮助人们加深对数学学习过程和应用过程的认识.

应用数学与计算数学(美)(Matematica Aplicada e Computacional)(Secaucus,NJ) 1982年创刊. 刊号:519B0080,ISSN0101—8205. 美国 Birkhauser Boston 公司出版、发行. 月刊. 刊载运用计算机研讨应用数学问题以及与运用计算机解决科技问题有关的数值、非数值及统计技术方面的论文. 用英、法、葡文发表.

数学报告(英)(Mathematical Reports)(London) 1982年创刊. 刊号:510C0066,ISSN0275—7214. 英国 Harwood 学术出版社出版，英国 STBS 服务公司发行. 不定期刊物，每年出版一卷. 刊载数学领域当前研究进展的评论.

数学教学及其应用(英)(Teaching Mathematics & its Applications)(Oxford) 1982年创刊. 刊号:510C0067,ISSN0268—3679. 英国数学及其应用学会编辑，英国 Oxford 大学出版社出版、发行. 现为季刊. 刊载与中等和高等学校数学教学有关的数学问题、教学方法等方面的论述文章.

复变数(英)(Complex Variables: Theory and Application)(Philadelphia,PA) 1982年创刊. 刊号:513C0004,ISSN0278—1077. 英国 Gordon and Breach 科学出版公司出版，英国科技图书服务公司(STBS Ltd.)发行. 原系季刊，现每年出版8期. 刊载复变函数分析的理论及其在科学与工程中的应用方面的研究论文.

分析及其应用杂志(德)(Zeitschrift für Analysis and ihre Anwendungen)(Berlin) 1982年创刊. 刊号: 510E0016, ISSN0232—2064. 德国 Deutscher Verlag der Wissenschaften Gmbh 出版、发行. 双月刊. 刊载数学分析及其应用方面的研究论文，内容包括函数论、泛函分析、微分方程、微分几何、测度论、最优化理论中的分析问题等，兼载有关会议报道、学术界新闻、书评等. 用德文、俄文或英文发表.

统计学与概率论通讯(荷)(Statistics and Probability Letters)(Amsterdam) 1982年创刊. 刊号: 513LB051,ISSN0167—7152. 荷兰 North - Holland 出版公司出版，荷兰 Elsevier 科学出版社期刊部发行. 双月刊. 刊载有关统计学和概率论方面最新研究成果的简报.

随机分析与应用(美)(Stochastic Analysis & Applications)(New York) 1983年创刊. 刊号: 513B0014,ISSN0736—2994. 美国 Marcel Dekker 出版公司出版的国际性刊物. 季刊. 刊载随机分析技术在各个领域的应用和发展方面的研究论文，旨在迅速报道随机分析技术在工程和科研领域中的应用研究成果.

数学进展汇报(德)(Expositiones Mathematicae)(Mannheim) 1983年创刊. 刊号:510E0061, ISSN0723—0869. 德国 Bibliographisches Institut & F. A Brockhaus 出版、发行. 季刊. 报道纯粹数学与应用数学领域新进展的国际性刊物，辟有综述、数学札记、研究简报、书评、杂讯、读者来信等栏目. 稿件来自世界各国，多用英文发表.

统计学与决策(德)(Statistics & Decisions)(Munich) 1983年创刊. 刊号: 513E0006,ISSN0721—2631. 德国 R. Oldenbourg 出版公司出版、发行. 季刊. 刊载与决策论有关的数理统计学理论与应用方面的研究论文和评述文章. 用英文发表.

新一代计算(德)(New Generation Computing)(Berlin) 1983年创刊. 刊号:738E0084,ISSN0288—3635. 德国 Springer 出版社出版、发行. 不定期刊物. 刊载新一代计算机研究方面的文章，涉及软件工程、人工智能、计算机设计、数据库系统、并行处理、超大规模集成电路和自然语言处理等.

今日数学(印)(Mathematics Today)(Ahmedabad) 1983年创刊. 刊号:510HA065.《今日数学》杂志编辑委员会编辑、出版、发行. 月刊. 属普及性数学刊物. 介绍印度当今数学教育及数学、计算机和数学物理研究进展.

全局分析与几何学纪事(荷)(Annals of Global

Analysis and Geometry)(Dordrecht) 1983 年创刊. 刊号:513LB054,ISSN0232—704X. 荷兰 Kluwer 学术出版集团出版、发行. 季刊. 刊载几何学和分析的整体问题,及其在理论物理中的应用方面的研究论文.

应用数学学报(荷)(Acta Applicandae Mathematicae)(Dordrecht) 1983 年创刊. 刊号:519LB054,ISSN0167—8019. 小刊名为"国际应用数学与数学利用杂志". 荷兰 D. Reidel 出版公司出版,荷兰 Kluwer 学术出版集团销售中心发行. 原系季刊,后改每年出版 9 期,现为月刊. 刊载有关应用数学的理论与实践方面的研究论文,包括应用数学的新技术与方法的开发,以及开拓新的应用领域等,偏重于运用数学方法解决各种工程问题. 稿件来自世界各国,用英文发表.

代数学、群与几何(美)(Algebras、Groups and Geometries)(Palm Harbor,FL) 1984 年创刊. 刊号:513B0069,ISSN0074—9937. 美国 Hadronic 出版公司出版、发行. 季刊. 刊载研究论文和综述文章,涉及领域为:线性群、代数群和李群;线性代数和多重线性代数;微分几何及与这些领域有关的论题.

系统分析、模型建立与模拟(英)(Systems Analysis,Modelling and Simulation) 1984 年创刊. 刊号:513C0063,ISSN0232—9298. 原民主德国期刊(513A0002,513E0011),1992 年起改由英国 Gordon and Breach 科学出版公司出版,英国 STBS 服务公司发行. 原系双月刊,现为月刊. 刊载系统分析中数学模型的建立和模拟的理论、方法、应用和技术等方面的研究论文、综合评论、会议报告、书评等. 涉及系统分析和系统论、计算机模拟系统、数学模型和模拟在环境保护、宏观经济地区规划、生物学、交通、物资储运和工程管理等方面的应用.

数学及其应用学会·数学控制与信息杂志(英)(IMA Journal of Mathematical Control & Information)(Eynsham) 1984 年创刊. 刊号:519C0062,ISSN0265—0754. 英国数学及其应用学会编辑,英国牛津大学出版社出版、发行. 季刊. 刊载数学控制理论、系统理论及有关的信息科学理论方面的研究论文,兼载技术札记和特别的应用文章.

日本工业与应用数学杂志(日)(Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics)(Tokyo) 1984 年创刊. 刊号:510D0091,ISSN0910—2043. 原名《日本应用数学杂志》(1984—1991 年),1992 年起改用现名. 该刊编辑委员会编辑,Kinokuniya 公司出版、发行. 季刊. 刊载数学在自然科学、社会科学和工程技术各个领域中的应用研究论文,涉及各种数值计算方法和实例. 用英文发表.

亨利·庞加莱研究所纪事·非线性分析(法)(Annales de l'Institut Henri Poincare, Analyse Non Lineaire)(Montrouge) 1984 年创刊. 刊号:513F0003,ISSN0294—1449. 法国 Gauthier - Villars 出版社出版、发行. 双月刊. 刊载非线性分析方面的创造性论文和综述性文章. 内容涉及微分几何、常微分方程、偏微分方程、泛函分析、力学、物理、数值分析等领域中的非线性问题. 文章主要用英文发表,间用法文发表.

亚太运筹学杂志(新)(Asia - Pacific Journal of Operational Research)(Singapore) 1984 年创刊. 刊号:519GL001,ISSN0217—5959. 亚太运筹学会联合会主办,由设在新加坡大学数学系的《亚太运筹学杂志》编辑部编辑、出版、发行. 每年出版 2 期. 刊载运筹学领域中的理论与实用性研究论文,以及评论和研究通讯.

几何与物理杂志(荷)(Journal of Geometry and Physics)(Amsterdam) 1984 年创刊. 刊号:513LB017,ISSN0393—0440. 荷兰 North - Holland 出版公司出版,荷兰 Elsevier 科学出版社期刊部发行. 每年出版 8 期. 刊载几何与物理相互作用方面的研究论文及评论,包括李群、李代数、量子群、代数几何、实几何、微分几何、动态系统、偏微分方程的几何解法、整体分析等在经典力学、量子力学、经典与量子场论、量子引力、弦与超弦等领域中的应用.

序:有序集理论杂志(荷)(Order:A Journal on the Theory of Ordered Sets)(Dordrecht) 1984 年创刊. 刊号:513LB053,ISSN0167—8094. 荷兰 Kluwer 学术出版集团出版、发行. 季刊. 刊载有序集理论的新发展及其在数学、运筹学、计算机科学、物理学和社会科学等领域应用方面的研究论文. 用英文出版.

并行计算(荷)(Parallel Computing)(Amsterdam) 1984 年创刊. 刊号:738LB077,ISSN0167—8191. 荷兰 Elsevier 科学出版公司出版,该公司期刊部发行. 月刊. 刊载并行计算机系统的理论和应用方面的原始研究论文、综合和评论性文章,涉及算法设计、软件、硬件、网络技术及外围设备等.

运筹学纪事(瑞士)(Annals of Operations Research)(Basel) 1984 年创刊. 刊号:519LD002,ISSN0254—5330. 瑞士 J. C. Baltzer AG,Scientific Publishing Company 出版、发行. 不定期刊物. 刊载有关运筹学的理论与应用及其主要发展趋向方面的研究论文.

几何学与物理学杂志(意)(Journal of Geometry and Physics)(Roma) 1984 年创刊. 刊号:513MC001,ISSN0393—0440. 意大利 Pitagora 出版社出版、发行. 季刊. 刊载文章的范围大体为:几何起主导作用的数学物理和用于物理的纯几何,涉及的数学和物

理的分支:黎曼几何、变分法、辛结构、哈密顿理论、纤维空间、李群、偏微分方程、复分析、代数几何、经典场论、广义相对论、时空理论、规范理论等.所载文章侧重有创造性的、有评论性的.用英、法、意文发表.

偏微分方程数值方法(美)(Numerical Methods for Partial Differential Equations)(New York) 1985年创刊.刊号:519B0018,ISSN0749—159X.美国John Wiley & Sons出版公司出版、发行.季刊.刊载偏微分方程数值解的方法与技术方面的研究论文.

复杂性杂志(美)(Journal of Complexity)(Orlando,FL) 1985年创刊.刊号:519B0070,ISSN0885—064X.美国学术出版公司出版、发行.季刊.该刊是一多科性杂志,刊载有关复杂性而本质上是数学结果的原始论文,涉及应用数学、难题的近似解、逼近论、控制论、决策论、实验设计、分布计算、并行计算、信息论、数理经济、数值分析、预报、遥感、地震、统计和随机制表等领域.

微计算机数学(英)(Micromath)(Oxford) 1985年创刊.刊号:510C0069,ISSN0267—5501.英国数学教师协会的机关刊物.英国Basil Blackwell出版公司出版、发行.每年出版3期.刊载有关运用微计算机解和计算数学问题,以及微计算机在数学教学(偏重于中小学)中的应用等方面的文章.

工程数值法通讯(英)(Communications in Numerical Methods in Engineeȑing)(Chichester) 1985年创刊.刊号:519C0063,ISSN0748—8025.原称《应用数值法快报》(1985－1992年),1993年起改用现名.英国John Wiley & Sons出版公司出版、发行的国际性刊物.双月刊.该刊与International Journal for Numerical Methods in Engineering,International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics和International Journal for Numerical Methods in Fluids是姊妹杂志.刊载有关数值方法重要发展和它在实际工程问题上应用的短文.随后可以写成长文在姊妹杂志上发表.

应用随机模型与数据分析(英)(Applied Stochastic Models and Data Analysis)(Chichester) 1985年创刊.刊号:519C0064,ISSN8755—0024.英国John Wiley & Sons出版公司出版、发行.季刊.该刊是一份跨学科杂志,涉及应用概率、数据分析,以及它们在现实世界中的应用三个领域.目的是对已有的解决实际问题的方法进行比较,并创造新的方法.刊载综合性文章,提出问题、解决问题或两者兼有的文章,有应用前景的理论文章.该刊在学术界和工业界都享有声誉.

动态系统评论(英)(System Dynamics Review: The Journal of the System Dynamics Society)(West Sussex) 1985年创刊.刊号:519C0073,ISSN0883—7066.英国John Wiley & Sons公司出版、发行.每年出版3期.该刊探讨在社会、技术、管理和环境方面应用动态系统的展望与方法.涉及动态反馈系统的数学模型和计算机模拟、信息反馈和因果研究的政策分析方法、动态系统在社会和自然科学理论建设中的贡献等.

逆问题(英)(Inverse Problems)(Bristol) 1985年创刊.刊号:530C0007,ISSN0266—5611.英国物理学会(IOP)出版公司出版、发行.季刊.该刊宗旨是把关于逆问题的理论和数学同实用方法和数学方法结合起来.内容涉及各种逆问题反推方法和数据方法,也涉及层X光照相术、系统辨识、非破坏性发展方程和非线性发展方程.重点是关于数学、物理和应用问题解法的原始论文.主要阅读对象是数学家和物理学家.

构造逼近论(德)(Constructive Approximation (An International Journal for Approximations & Expansions))(Heidelberg) 1985年创刊.刊号:513E0007,ISSN0176—4276.小刊名为"国际逼近和展开杂志".德国Springer出版社出版、发行.季刊.刊载逼近、展开,以及计算技术的理论研究和理论研究成果的推广应用等.用英文发表.

图形与组合学(德)(Graphs and Combinatorics)(Heidelberg) 1985年创刊.刊号:519E0003,ISSN0911—0119.德国Springer出版社出版、发行.季刊.刊载有关组合数学各方面的研究论文、评论和简讯.内容涉及经典与代数图论、随机图形、集合系统、计数、组合设计、组合几何学、编码、拟阵和拉姆齐理论等.用英文发表.

应用数值数学(荷)(Applied Numerical Mathematics)(Amsterdam) 1985年创刊.刊号:519LB006—B,ISSN0168—9274.与《Mathematics and Computers in Simulation》(参见刊号:519LB006—A)是姊妹刊,荷兰North - Holland出版公司出版,荷兰Elsevier科学出版社期刊部发行.原系双月刊,现每年出版18期.刊载计算数学和数值分析及其在物理学、流体动力学、工程学及其他应用科学分支中应用方面的研究论文,兼载评论和札记.两刊合订本用原版刊号:519LB006.

分析与设计用有限元法(荷)(Finite Elements in Analysis & Design)(Amsterdam) 1985年创刊.刊号:519LB056,ISSN0168—874X.荷兰North - Holland出版公司出版,荷兰Elsevier科学出版社期刊部发行.原系季刊,现为月刊.刊载有关有限元法在结构、流体及机械工程中的分析与设计方面的研究论文,包括计算机辅助设计与计算机辅助生产

方面的应用问题，兼载书评.

统计科学（美）（Statistical Science）（Hayward，CA） 1986 年创刊. 刊号：299B0003，ISSN0883—4237. 美国数理统计学会出版的评论杂志. 季刊. 宗旨是对当代统计思想的各个方面进行介绍. 内容为对当前重要方法和理论论题的讨论、对有统计应用前景的研究领域的综述、书评、对统计文献中经典文章的评论，以及对杰出的统计学家和概率学家的介绍与采访等. 对象是实际工作者、教师、研究人员和统计与概率两个专业的学生.

离散与计算几何学（美）（Discrete and Computational Geometry）（New York） 1986 年创刊. 刊号：513B0016，ISSN0179—5376. 美国 Springer 纽约分社出版、发行. 季刊. 刊载有关组合几何学、几何算法设计与分析、凸多胞形、极值几何问题、计算拓扑学、数的几何学，以及图论、数学规划和计算机图学等方面的研究论文.

算法（美）（Algorithmica）（New York） 1986 年创刊. 刊号：738B0548，ISSN0178—4617. 小刊名"国际计算机科学杂志"，Springer 美国纽约分社出版、发行. 季刊. 该杂志既刊载针对实际问题的理论文章，也刊载实用价值高或技巧性强的经验文章，此外还辟有应用经验和问题两个栏目.《算法》杂志中算法所涉及的学科，属于应用学科的有：分布计算、并行处理、自动设计、机器人、数据库设计、软件工具；属于基础学科的有：分类、数据结构、计算几何、线性规划等.

数学及其应用学会·商业与工业数学应用杂志（英）（IMA Journal of Mathematics Applied in Business and Industry）（Eynsham） 1986 年创刊. 刊号：519C0066，ISSN0268—1129. 原称《IMA Journal of Mathematics in Management》（1986－1987年），1988 年改称现名. 英国数学及其应用学会编辑，英国牛津大学出版社出版、发行. 季刊. 刊载数学在商业、工业技术等方面应用的研究论文，兼载实例报告.

计算统计学（德）（Computational Statistics）（Heidelberg） 1986 年创刊. 刊号：513E0009，ISSN0723—712X. 原称《CSQ - Computational Statistics Quarterly》（1986－1991 年），从 1992 年起改称现名. 德国 Physica 出版社出版，Springer 出版社发行. 季刊. 刊载计算统计学和与它有关的计算机科学问题的研究论文，涉及数理统计技术、统计数学与数学方法、统计数据管理、统计软件设计与开发等方面. 用英文发表.

分布计算（德）（Distributed Computing）（Berlin） 1986 年创刊. 刊号：738E0022，ISSN0178—2770. 德国 Springer 出版社出版、发行. 季刊. 刊载分布计算方面的研究文章. 涉及分布系统的体系结构、计算网络的体系结构、通信协议、分布操作系统、分布算法、分布系统的验证、综合等.

俄罗斯数值分析与数学建模杂志（荷）（Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling）（Zeist） 1986 年创刊. 刊号：519LB057，ISSN0927—6467. 原刊名为《Soviet Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling》（1986－1992 年，刊号：ISSN0169—2895）. 荷兰 VSP 出版、发行. 双月刊. 该刊集中选择俄罗斯期刊中有关数值分析理论问题和数学方法在模拟与建模上的应用方面的论文.

排队系统（瑞士）（Queueing Systems）（Basel） 1986 年创刊. 刊号：513LD008，ISSN0257—0130. 瑞士 J. C. Baltzer AG，Scientific Publishing Company 出版、发行. 季刊. 刊载排队系统及其相关学科的理论和应用方面的研究论文，兼载评论和快报.

组合数学与组合计算杂志（加）（Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing）（Winnipeg，MB） 1986 年创刊. 刊号：519NA055，ISSN0835—3026. 加拿大 Charles Babbage 研究中心出版、发行. 每年出版 2 期. 刊载组合与图理论、组合数学与组合计算间的区别等方面的研究论文.

国际近似推理杂志（美）（International Journal of Approximate Reasoning）（New York） 1987 年创刊. 刊号：513B0073，ISSN0888—613X. 美国 Elsevier 科学出版公司出版、发行. 季刊. 刊载近似推理及其应用的研究成果，并侧重在科学与工程应用中的智能系统设计和执行研究.

应用数学与随机分析杂志（美）（Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis）（Bradford，PA） 1987 年创刊. 刊号：519B0071，ISSN1048—9533. 原称《Journal of Applied Mathematics and Simulation》（1987－1989 年，刊号：ISSN0893—5688），1990 年改称现名. 由 JAMSA 编辑委员会编辑、出版、发行. 季刊.

***K* 理论（荷）**（*K* - Theory）（Dordrecht） 1987 年创刊. 刊号：510LB057，ISSN0920—3036. 荷兰 Kluwer 学术出版集团出版，该集团销售中心发行. 双月刊. 刊载 *K* 理论的发展、应用及其影响方面的研究论文和述评. 内容涉及线性代数、环论、数论、代数几何、代数拓扑、微分几何、泛函分析、算子代数，以及动态系统、系统控制、计量经济学、量子物理等多方面.

美国数学会杂志（美）（Journal of the American Mathematical Society）（Providence，RI） 1988 年创刊. 刊号：510B0096，ISSN0894—0347. 美国数学

会编辑、出版的机关刊物.季刊.刊载纯粹数学和应用数学各领域中高质量的研究论文.

工业与应用数学会·离散数学杂志(美)(SIAM Journal on Discrete Mathematics)(Philadelphia,PA) 1988年创刊.刊号:513B0072,ISSN0895—4801.美国工业与应用数学会1988年2月从《SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods》(刊号:519B0016)中分出的一种新杂志.由美国工业与应用数学会编辑、出版、发行.季刊.刊载离散数学的理论和应用的研究论文.内容涉及组合理论、图论、离散最优化、运筹学、理论计算机科学、编码、信息论、对策论和数学模型等.

理论概率杂志(美)(Journal of Theoretical Probability)(New York) 1988年创刊.刊号:513B0074,ISSN0894—9840.美国Plenum出版公司出版、发行.季刊.刊载概率论各领域中高质量的研究论文.旨在沟通数学家与物理学、工程学、统计学和计算机科学等方面研究人员之间的联系.

非线性(英)(Nonlinearity)(Bristol) 1988年创刊.刊号:513C0060,ISSN0951—7715.英国物理研究所与伦敦数学会编辑、出版,原系季刊,现为双月刊.该刊为国际性学术刊物,着重刊载对广泛出现在物理学、数学和生物学等领域中的非线性问题进行研究和探讨的论文.主要内容涉及动态系统及其应用,非线性偏微分方程及其应用,经典与量子可积系统,孤立子,量子物理学中的数学,物理学中的几何方法,量子力学中的混沌现象,非线性波,奇异性,随机动力学和分歧理论,以及光学系统、流体和固体系统中的非线性分析与试验等.

应用数学快报(英)(Applied Mathematics Letters)(Elmsford,NY) 1988年创刊.刊号:519C0067,ISSN0893—9659.英国Pergamon出版公司出版、发行.季刊.刊载重要而简短的应用数学文章,涉及数学的新应用及应用数学方法的新开发.所涉数学分支包括数论、李代数、微分、对策;应用领域包括计算机科学、物理、人类学、流体动力学等.

统计与计算的新趋向(德)(CHANCE:New Directions for Statistics and Computing)(Berlin) 1988年创刊.刊号:513E0053,ISSN0933—2480.德国Springer出版社出版、发行.季刊.报道关于统计学、统计方法、统计应用和用于统计的计算方法等方面的进展,以及综合性、知识性信息.用英文发表.

渐近分析(荷)(Asymptotic Analysis)(Amsterdam) 1988年创刊.刊号:510LB005,ISSN0921—7134.荷兰Elsevier出版社期刊部出版、发行.原系季刊,现每年出版8期.刊载受大、小参数影响问题的渐近理论方面的数学研究成果及渐近理论在自然科学领域中应用问题的研究论文,兼载书评.

日本模糊学会杂志(日)(Journal of Fuzzy Mathematics of Japan)(Tokyo) 1989年创刊.刊号:513D0058.日本模糊学会编辑、出版、发行.双月刊.以大学、企业的模糊学科研究人员、控制与计算机技术人员和经营、管理人员为读者对象.内容包括:模糊理论的研究、模糊技术及其应用动态等.

数学论坛(德)(Forum Mathematicum)(Berlin) 1989年创刊.刊号:510E0013,ISSN0933—7741.德国Walter de Gruyter出版社出版、发行.季刊.刊载纯粹数学、应用数学和数学物理各分支的原始研究论文.用英文发表.

离散数学(俄)(Дискретная Математика)(Москва) 1989年创刊.刊号:513P0009,ISSN0234—0860.俄罗斯科学出版社出版、发行.季刊.刊载涉及组合分析、图论、函数系统理论、编码、离散数学的概率问题、算法及其复杂性、数论与代数的组合、计算问题等方面的研究论文及学术动态报道.荷兰VSP从1991年起出版、发行该刊的英译本,刊名为《Discrete Mathematics and its Applications》(刊号:513LB011,ISSN0924—9265).

数学模拟(俄)(Математическое Моделирование)(Москва) 1989年创刊.刊号:513P0010,ISSN0234—0879.俄罗斯科学院编辑,俄罗斯科学出版社出版、发行.月刊.刊载数学模拟和计算试验、数学计算方法与计算规则等方面的研究论文.

随机结构与算法(美)(Random Structures & Algorithms)(New York) 1990年创刊.刊号:513B0076,ISSN1042—9832.美国John Wiley & Sons公司出版、发行.季刊.刊载利用离散随机结构和概率方法解决数学、计算机科学与运筹学问题的研究论文.

混沌、孤立子与分形(英)(Chaos,Solitons and Fractals)(Oxford) 1990年创刊.刊号:510C0072,ISSN0960—0779.英国Pergamon出版社出版、发行.双月刊.主要刊载有关歧点和奇异理论、确定性混沌和分形、稳定性理论、孤立子和凝聚现象、结构形式、演化和复杂性理论研究的原始论文和评论文章.同时,也发表在科学和工程方面的应用文章.

欧洲应用数学杂志(英)(European Journal of Applied Mathematics) 1990年创刊.刊号:519C0068,ISSN0956—7925.英国剑桥大学出版社出版、发行.季刊.刊载有关数学新概念和分析理论在科学和工业的计算机数码上应用的研究论文.

工程、通信与计算适用代数(德)(Applicable Algebra in Engineering,Communication and Computing)(Heidelberg) 1990年创刊.刊号:519E0005,ISSN0938—1279.德国Springer出版公司出版、发行.季刊.刊载计算机、智能系统及通信相关的代数

方法与技术的研究论文. 内容涉及影像、机器人学、系统设计、超大规模集成技术、信号处理和理论、软件工程、网络、计算机代数、算法、知识工程、专家系统、程序设计等.

国际数学杂志(新)(International Journal of Mathematics)(Singapore) 1990 年创刊. 刊号:510GL053,ISSN0129—167X. 新加坡世界科学出版公司出版、发行. 季刊. 主要刊载有创见的数学研究论文,同时也登载一些有较高学术价值的综述报告. 内容涉及数学学科各个分支,并由编辑部对每篇文章所属领域的研究状况给予简要评介. 编辑委员会由美、德、法、俄、日、中等国的知名数学家组成.

非线性动力学(荷)(Nonlinear Dynamics)(Dordrecht) 1990 年创刊. 刊号:520LB002,ISSN0924—090X. 荷兰 Kluwer 科学出版社出版. 双月刊. 该刊为国际性学术刊物,刊载有关摄动理论、计算方法、动态稳定性、局部与整体方法、分歧、混沌、稳定性与随机振动、多体动力学、细胞自动机、系统模型和识别、信号分析和测量技术等方面的研究论文,范围涉及到力学、结构工程学、航空与航天、海洋工程学和工程控制系统等有关非线性动力现象.

数学与人工智能纪事(瑞士)(Annals of Mathematics and Artificial Intelligence)(Basel) 1990 年创刊. 刊号:519LD004,ISSN1012—2443. 瑞士 J. C. Baltzer AG 科学出版公司出版、发行. 半年刊. 刊载反映人工智能学科发展的数学与计算技术相互关系方面的研究论述、评论、专题文章、会议录等.

澳大利亚组合学杂志(澳)(Australasian Journal of Combinatorics)(Lucia) 1990 年创刊. 刊号:519UA051,ISSN1034—4942. 澳大利亚 Queensland 大学数学系编辑、出版、发行. 半年刊. 刊载组合学理论及其应用方面的研究论文.

数学系统、估计与控制杂志(美)(Journal of Mathematical Systems, Estimation and Control)(Secaucus, NJ) 1991 年创刊. 刊号:510B0098,ISSN1052—0600. 美国 Birkhauser 波士顿分公司和斯普林格纽约分公司联合出版. 季刊. 刊载数学系统理论、估计理论、控制理论及其应用方面的研究论文,兼载讲解或辅导资料.

混沌·多学科非线性科学杂志(美)(Chaos:An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science)(New York) 1991 年创刊. 刊号:510B0099,ISSN1054—1500. 美国物理研究所编辑、出版. 季刊. 刊载非线性现象的概念及其应用方面的研究论文和评论,涉及物理、化学、生物学、数学(包括计算机科学)、社会科学、工程技术领域中的混沌问题. 杂志还常出版专辑. 稿件来自世界各国.

大学生数学学习中的问题、方法与论点(美)(PRIMUS〈Problems, Resources and Issues in Mathematics Undergraduate Studies〉)(West Point, NY) 1991 年创刊. 刊号:510B0102,ISSN1051—1970. 美国 Rose - Hulman 技术研究所编辑、出版、发行. 季刊. 该刊提供了探讨大学数学教学研究的论坛,并刊载了这方面的研究论文.

应用概率纪事(美)(Annals of Applied Probability)(Hayward, CA) 1991 年创刊. 刊号:513B0059—A,ISSN1050—5164. 美国数理统计学会编辑、出版、发行. 季刊. 刊载应用概率传统领域,以及与其他学科交叉领域的研究论文,包括计算机科学、金融、网络模型建立和生物学等方面内容.

几何分析杂志(美)(Journal of Geometric Analysis)(Boca Raton, FL) 1991 年创刊. 刊号:513B0080, ISSN1050—6926. 美国 Mathematica Josephina 出版公司和美国数学会联合出版、发行. 双月刊. 刊载古典分析方法、几何学和微分方程之间交叉研究的论文,内容涉及流形分析、多复变数、调和分析及非线性偏微分方程等.

代数几何杂志(美)(Journal of Algebraic Geometry) 1991 年创刊, 刊号:513B0081, ISSN1056—3911. 美国数学会编辑,美国大学出版社出版、发行. 季刊. 刊载代数几何、奇点理论以及有关数论、交换代数、射影几何、复几何和几何拓扑领域的研究论文.

计算数学与建模(美)(Computational Mathematics and Modeling)(New York) 1991 年创刊. 刊号:519B0072,ISSN1046—283X. 美国 Plenum 出版公司出版、发行. 季刊. 该刊选登俄罗斯近期数学期刊的离散数学、数值分析和计算数论方面的文章,并全译成英文出版.

工业与应用数学会·最优化杂志(美)(SIAM Journal on Optimization)(Philadelphia, PA) 1991 年创刊. 刊号:519B0074,ISSN1052—6234. 美国工业与应用数学会编辑、出版、发行. 季刊. 刊载最优化理论与实践的研究论文. 内容涉及在工程、管理和计算领域的应用,以及线性与二次规划、大规模最优化、随机最优化、组合最优化、混合整数规划、非光滑最优化、凸分析、数值最优化等方面.

Mathematica 系统杂志·附·软盘补充资料(美)(Mathematica Journal, with Electronic Supplements) 1991 年创刊. 刊号:519B0075,ISSN1047—5974. 美国 Addison - Wesley 出版公司出版、发行. 季刊. 刊载数学系统的应用和开发方面的论文、辅导材料、评述和问题解答,旨在促进该系统的应用. 每期附与麦金托什或 MS—DOS 系统兼容的计算机软盘补充资料(MS—DOS 软盘为 3.5 英寸).

应用数理(日)(Bulletin of the Japan Society

for Industrial and Applied Mathematics)(Tokyo) 1991 年创刊. 刊号:519D0055. 日本应用数理学会编辑,岩波书店出版、发行. 季刊. 刊载数理科学在生产、流通和消费活动等领域的应用方面的研究报告、展望和应用实例,以及国内外学术界动态报道.

非线性科学杂志・附・今日非线性科学(德)(Journal of Nonlinear Science, With Nonlinear Science Today)(Berlin) 1991 年创刊. 刊号:513E0010, ISSN0938—8974. 德国 Springer 出版社纽约分社出版、发行. 季刊. 主要刊载有独创性的原始研究论文,以促进非线性科学领域的开创性研究成果迅速传播. 同时,也刊载简短的研究札记与简讯,以增进人们对非线性世界的认识和了解.

今日非线性科学(德)(Nonlinear Science Today)(Berlin) 1991 年创刊. 刊号:513E0010—A, ISSN0938—9008. 德国 Springer 出版社纽约分社出版、发行. 季刊. 该刊为消息报道类刊物,刊载非线性研究在各个领域所取得的最新进展. 文章以报道、介绍和展开讨论的短文为主. 该刊为《非线性科学杂志》附刊.

国际代数与计算杂志(新)(International Journal of Algebra and Computation)(Singapore) 1991 年创刊. 刊号:513GL001, ISSN0218—1967. 新加坡世界科学出版公司出版、发行. 季刊. 刊载原始论文. 内容涉及无限群和奇异点、科学计算理论、组合学、代数与泛代数、自动机、语言与机器、代数系的字问题、计算理论以及自动群等.

数值线性代数与应用杂志(新)(Journal of Numerical Linear Algebra with Applications)(Singapore) 1991 年创刊. 刊号:513GL003, ISSN0129—3281. 新加坡世界科学出版公司出版、发行. 季刊. 该刊向数值分析、计算机科学和自然科学领域的研究人员,以及工程师、经济学家等提供数值线性代数方法及其应用方面的研究成果.

国际应用科学与工程中的分歧和混沌杂志(新)(International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering)(Singapore) 1991 年创刊. 刊号:519GL002, ISSN0218—1274. 新加坡世界科学出版社出版、发行. 季刊. 该刊为关于非线性动力学和复杂性领域的国际学术性刊物. 刊载有关分歧和混沌的实验、计算和理论方面的原始研究论文,涉及到应用科学和工程学中产生的诸多非线性和复杂性问题的各个方面.

应用科学中的数学模型与方法(新)(Mathematical Models and Methods in Applied Sciences)(Singapore) 1991 年创刊. 刊号:519GL004, ISSN0218—2025. 新加坡世界科学出版公司出版、发行. 季刊. 刊载应用科学领域的数学模型建立、数理与技术科学领域定性与定量分析的数学方法、数学模型与实系统的数值与计算机处理等方面的研究论文,并侧重非线性与随机问题的分析.

计算几何学(荷)(Computational Geometry)(Amsterdam) 1991 年创刊. 刊号:513LB010, ISSN0925—7721. 荷兰 Elsevier 科学出版社出版、发行. 双月刊. 刊载计算几何学理论与应用,包括几何算法设计与分析,以及在解计算机图形学基本问题、模式识别、机器人学、图像处理、CAD-CAM、超大规模集成电路设计、地理信息系统中应用方面的研究论文及有关简报.

设计、编码与密码学(荷)(Designs, Codes and Crytography)(Dordrecht) 1991 年创刊. 刊号:513LB012, ISSN0925—1022. 由美国 Kluwer 学术出版社波士顿分社出版,荷兰 Kluwer 学术出版社发行. 季刊. 刊载设计理论、编码理论、密码学及其相互作用方面的研究论文和综论,并侧重相关的代数学和几何学问题.

微分几何及其应用(荷)(Differential Geometry and its Applications)(Amsterdam) 1991 年创刊. 刊号:513LB013, ISSN0926—2245. 荷兰 North-Holland 出版公司出版,Elsevier 科学出版社期刊部发行. 季刊. 刊载微分几何及在数学中应用、微分几何方法和研究几何结构的各学科领域的研究论文和综论. 内容涉及流形上的微分方程、全局分析、李群、局部和整体几何、流形上的变分法、流形拓扑学及数学物理等.

全局优化杂志(荷)(Journal of Global Optimization)(Dordrecht) 1991 年创刊. 刊号:519LB008, ISSN0925—5001. 荷兰 Kluwer 学术出版社出版、发行. 季刊. 刊载全局最优化及其在科学、工程、管理等方面应用的理论和计算问题的研究论文及书评,内容涉及非线性、随机和组合规划、控制、对策与近似及并行结构算法等.

数值算法(瑞士)(Numerical Algorithms)(Basel) 1991 年创刊. 刊号:519LD005, ISSN1017—1398. 瑞士 J. C. Baltzer AG 科学出版公司出版、发行. 季刊. 刊载原始论文、评论、书评及会议消息. 内容涉及数值算法各个方面,包括新算法、理论、实际应用、稳定性、复杂性、并行算法、子程序和应用等.

工业数学评述(奥)(Surveys on Mathematics for Industry)(Vienna) 1991 年创刊. 刊号:519LE003, ISSN0938—1953. 奥地利 Springer 出版社出版、发行. 该刊目的是向工业界提供问题的数学解法,向数学界提出待解决的工业课题. 季刊. 刊载解决工业难题的数学方法和数学模型的比较等方面的论文. 用英文发表.

数学技术杂志(美)(Journal of Technology in Mathematics)(Orlando,FL) 1992年创刊.刊号:510B0101,ISSN1055—789X.美国学术出版公司出版、发行.季刊.刊登论述现在的论文和未来技术在数学研究、教育和学习中的应用论文.

计算与图解统计学杂志(美)(Journal of Computational and Graphical Statistics) 1992年创刊.刊号:513B0083,ISSN1061－8600.美国数理统计协会编辑、出版、发行.

随机与积分几何(美)(Stochastic & Integral Geometry)(New York) 1992年创刊.刊号:513B0084.美国Allerton出版公司出版、发行.季刊.

Nova **代数与几何杂志(美)**(Nova Journal of Algebra and Geometry)(Commack,NY) 1992年创刊.刊号:513B0085.美国Nova科学出版公司出版、发行.季刊.刊载纯代数几何与应用代数几何及其相关数学领域的研究论文.

国际数学与统计科学杂志(美)(International Journal of Mathematical and Statistical Sciences)(Miami,FL) 1992年创刊.刊号:513B0088,ISSN1055—7490.美国伯克利剑桥出版社出版、发行.半年刊.

随机与计算动力学(美)(Random and Computational Dynamics)(New York) 1992年创刊.刊号:519B0076.美国Marcel Dekker出版公司出版、发行.刊载探讨随机过程与动力系统的应用问题的文章.旨在向从事动力系统研究和工业应用的科技人员提供学术论坛和咨询.

随机最优化与设计(美)(Stochastic Optimization and Design)(Carbondale,IL) 1992年创刊.刊号:519B0077.美国Nova科学出版公司出版、发行.季刊.刊载精选的研究论文,阐述随机最优化与实验设计的理论与计算问题,以及它们在科学、工程和管理中的应用.

计算理论与计算数学进展(美)(Advances in the Theory of Computation and Computational Mathematics)(Norwood,NJ) 1992年创刊.刊号:519B0079.美国Ablex出版公司出版、发行.不定期刊物.刊载计算理论与计算数学方面的研究论文.

组合学、概率论与计算(英)(Combinatorics, Probability and Computing)(Cambridge) 1992年创刊.刊号:510C0073,ISSN0963—5483.英国剑桥大学出版社出版、发行.季刊.刊载组合学、概率理论和理论计算机科学研究文章.涉及代数图形理论、极值集理论、矩阵理论、概率方法与随机组合结构、概率算法分析、计算学习理论与最优化等方面的问题.

非参量统计学(英)(Nonparametric Statistics)(Berkshire) 1992年创刊.刊号:513C0062,ISSN1048—5252.英国Gordon and Breach科学出版社出版、发行.季刊.刊载非参量统计学理论和实践方面的研究论文,涉及排序步骤、随机过程推理等内容.

医学研究中的统计方法(英)(Statistical Method in Medical Research)(London) 1992年创刊.刊号:513C0064,ISSN0962—2802.英国Edward Arnold出版、发行.每年出版3期.刊载医用统计学评论文章和书评,每期一个主题,约包括5篇评论文章.

最优化方法与软件(英)(Optimization Methods & Software)(Berkshire) 1992年创刊.刊号:519C0074,ISSN1055—6788.英国Gordon and Breach科学出版社出版,STBS公司发行.季刊.刊载最优化方法理论与实践进展的论文,侧重软件开发与算法设计的接口.

纽结理论及其有关分支杂志(新)(Journal of Knot Theory and its Ramifications)(Singapore) 1992年创刊.刊号:513GL002,ISSN0218—2165.新加坡世界科学出版公司出版、发行.季刊.刊载有关纽结理论与相关领域,包括它们的应用研究方面的论文和评论.

国际图论杂志(印)(International Journal of Graph Theory)(New Delhi) 1992年创刊.刊号:519HA055.印度UBS出版、发行公司出版、发行.半年刊.

代数组合学杂志(荷)(Journal of Algebraic Combinatorics)(Dordrecht) 1992年创刊.刊号:513LB014,ISSN0925—9899.荷兰Kluwer学术出版社出版、发行.季刊.刊载组合学与代数相互作用,包括运用代数方法研究组合结构和组合学方法在代数问题上的应用等方面的论文.稿件来自世界各国.用英文出版.

随机算子与随机方程(荷)(Random Operators and Stochastic Equations)(Zeist) 1992年创刊.刊号:513LB015,ISSN0926—6364.荷兰VSP出版、发行.季刊.刊载随机算子和随机方程,以及有关应用方面的研究论文.

位势分析(荷)(Potential Analysis)(Dordrecht) 1992年创刊.刊号:513LB016,ISSN0926—2601.荷兰Kluwer学术出版社出版、发行.季刊.刊载位势论与概率论、几何、泛函分析之间交互作用的研究论文.涉及经典位势论及其在椭圆算子与抛物型算子上的应用、边值问题及其在数值分析上的应用、非线性推广、算子、半群、调和空间及狄利克雷空间研究,概率性解释与应用等.

计算优化及其应用(荷)(Computational Optimization and Applications)(Dordrecht) 1992年创刊.刊号:519LB010,ISSN0926—6003.由Kluwer

学术出版公司 Boston 分公司出版,荷兰 Kluwer 学术出版社发行.季刊.刊载计算机优化及其应用方面的研究论文.

数学模型与科学计算(美)(Mathematical Modeling and Scientific Computing)(Louis,Mo) 1993 年创刊.刊号:510B0016,ISSN1067—0688.美国普林斯顿科学出版公司出版、发行.

组合设计杂志(美)(Journal of Combinatorial Design)(New York) 1993 年创刊.刊号:513B0086,ISSN1063—8539.美国 John Wiley & son 出版公司出版、发行.双月刊.该刊为国际性学术刊物.刊载组合设计理论领域中最有影响的研究论文,涉及设计理论及其在计算机科学、实验设计与编码理论等方面的应用.

应用与计算调和分析(美)(Applied and Computational Harmonic Analysis)(Orlando,FL) 1993 年创刊.刊号:513B0087,ISSN1063—5203.美国学术出版社出版、发行.季刊.刊载调和分析的应用与计算方面的研究论文,侧重子波分析和信号处理.

模糊数学杂志(美)(Journal of Fuzzy Mathematics)(San Gabriel,CA) 1993 年创刊.刊号:513B0089,ISSN1066—8950.美国国际模糊数学协会编辑、出版、发行.季刊.刊载模糊集合与相关的理论和应用方面的论文.

数学模型与计算实验(美)(Mathematical Modeling and Computational Experiment)(New York) 1993 年创刊.刊号:519B0081,ISSN1061—7590.美国 John Wiley & Sons 出版公司出版、发行.季刊.刊载数学物理模型、科学工程技术非线性现象、计算机模型数值算法与验证的研究论文,以及计算机高速可靠程序和重要问题的详细分析.

复杂性(英)(Complexity)(Oxford) 1993 年创刊.刊号:513C0065,ISSN0964—1815.英国 Pergamon 出版公司出版、发行.季刊.刊载复杂系统及适用性系统研究,包括复杂性理论、非线性现象中的多重平衡、基因对数、对策模拟、模式识别,以及复杂系统和适用性系统在物理、生物和社会科学领域的应用等方面的论文.

积分变换与特殊函数(英)(Integral Transforms and Special Functions)(Berkshire) 1993 年创刊.刊号:513C0068,ISSN1065—2469.英国 STBS 有限公司出版、发行.季刊.刊载数学分析、微积分、方程理论、逼近理论及纯数学与应用数学等领域的学术论文,并报道该领域的学术成果.

变分法与偏微分方程(德)(Calculus of Variations and Partial Differential Equations)(Berlin) 1993 年创刊.刊号:513E0016,ISSN0944—2669.德国 Springer 出版公司出版、发行.季刊.

非线性世界(德)(Nonlinear World)(Berlin) 1993 年创刊.刊号:519E0058,ISSN0942—5608.德国 Walter de Gruyter 公司出版、发行.季刊.刊载各学科非线性问题研究与应用方面的论文和评论.

非线性辑要(德)(Nonlinear Digest)(Berlin) 1993 年创刊.刊号:519E0059,ISSN0942—5594.德国 Walter de Gruyter 公司出版、发行.半年刊.介绍各学科非线性领域的技术发展,侧重短文、短讯.涉及的技术较少,但信息性很强.

分形·自然复几何多学科杂志(新)(Fractals:An Interdisciplinary Journal on the Complex Geometry of Nature)(Singapore) 1993 年创刊.刊号:513GL004,ISSN0218—348X.新加坡世界科学出版公司出版、发行.季刊.该刊为综合性学术刊物.刊载研究论文和评论,内容涉及物理、数学、生物、化学、经济学与技术等学科.

远东数学科学杂志(印)(Far East Journal of Mathematics Sciences)(New Delhi) 1993 年创刊.刊号:513HA002,ISSN0971—4332.印度 UBS 出版、发行有限公司出版、发行.半年刊.刊载理论与应用数学、数理统计与计算机应用等方面的研究论文.

集值分析(荷)(Set - Valued Analysis)(Dordrecht) 1993 年创刊.刊号:513LB018,ISSN0927—6947.荷兰 Kluwer 学术出版社出版、发行.季刊.刊载多值函数理论,包括经典分析与泛函分析技术、拓扑、几何方法、数值与组合分析及其在工程技术、物理、生物学、社会科学及行为科学领域应用方面的研究论文和综论.

反问题与不适定问题杂志(荷)(Journal of Inverse and Ill - Posed Problems)(Zeist) 1993 年创刊.刊号:513LB019,ISSN0928—0219.荷兰 VSP 出版、发行.季刊.主要刊载典型反问题和不适定问题的研究论文,以及有关的应用文章.

东西方数值数学杂志(荷)(East - West Journal of Numerical Mathematics)(Zeist) 1993 年创刊.刊号:519LB009,ISSN0928—0200.荷兰 VSP 出版、发行.季刊.

应用范畴结构(荷)(Applied Categorical Structures)(Dordrecht) 1993 年创刊.刊号:519LB011,ISSN0927—2582.荷兰 Kluwer 学术出版社出版、发行.季刊.刊载范畴方法在代数、解析、序、拓扑及计算机科学中的应用研究文章.

计算数学进展(瑞士)(Advances in Computational Mathematics)(Basel) 1993 年创刊.刊号:519LD007,ISSN1019—7168.瑞士科学出版公司出版、发行.季刊.刊载涉及代数、微分方程、统计、优

化、逼近、样条函数、小波分析，侧重并行处理、符号计算、神经网络及模型建立等方面的研究论文.

傅里叶分析与应用杂志（美）(Journal of Fourier Analysis and Applications)(Cambridge,MA) 1994 年创刊. 刊号:513B0103,ISSN1069—5869. 美国 CRC 出版公司出版、发行. 季刊. 刊载傅里叶分析理论及其在科学与工程技术领域应用方面的论文.

数值线性代数及其应用（英）(Numerical Linear Algebra with Applications) 1994 年创刊. 刊号: 513C0067, ISSN1070—5325. 英国 John Wiley & Sons 公司出版、发行. 双月刊. 侧重刊载对数值线性代数的新方法及其应用进行严密的数理分析的论文. 同时，也登载分析数值线性代数在计算机与通讯应用中所产生的规则系统复杂性的论文.

国际运筹学学报（英）(International Transactions in Operational Research)(Amsterdam) 1994 年创刊. 刊号:519C0075,ISSN0969—6016. 美国 Elsevier 科学公司出版、发行. 季刊. 选载国际运筹学联合会会议论文，以及其他来源的运筹学领域的研究论文. 内容包括运用运筹学数据完成的国际性著作，在各国获得使用专利的运筹学研究著作，新兴运筹学团体的专业研究，国际性行业的技术发展以及可供参考使用的运筹学专业组织实例.

非线性微分方程应用（瑞士）(Nonliner Differential Equations Applications)(Basel) 1994 年创刊. 刊号: 519LD058, ISSN1021—9722. 瑞士 Birkhauser Verlag 出版、发行. 季刊. 刊载非线性微分方程理论与应用研究论文. 涉及普通力学、统计力学、量子力学、电磁学、人口动态学、化学动力学和燃烧理论中的问题.

非线性分析中的拓扑方法（波）(Topological Methods in Nonlinear Analysis)(Torun) 1994 年创刊. 刊号:ISSN1230—3429. 波兰 Juliusz Schauder 中心出版，美国数学会发行. 季刊. 该刊为国际性杂志，主要刊载应用拓扑方法的非线性分析问题广泛领域的研究和评述论文. 内容涉及非线性微分方程、椭圆和发展方程、控制理论、动力系统、Hopf 分歧、Conley 指数、不动点和同伦方法、临界点理论技术以及凸分析、对策理论、数理经济学等.

差分方程与应用杂志（英）(Journal of Difference Equations and Applications)(Berkshire) 1995 年创刊. 刊号:513C0069. 英国 STBS 有限公司出版、发行. 刊载分离动力系统的研究文章. 主要内容论及复杂系统与组合数学领域的数值模拟.

多值逻辑（英）(Multi - Valued Logic)(Berkshire) 1995 年创刊. 刊号:513C0070. 英国 STBS 有限公司出版、发行. 刊载无标准逻辑设计、代数学和组合数学方面的多学科原始研究论文.

蒙特卡罗法及其应用（荷）(Monte Carlo Methods and Applications)(Zeist) 1995 年创刊. 刊号: 513LB0021, ISSN0929—9629. 荷兰 VSP 出版、发行. 季刊. 刊载蒙特卡罗法理论、拟蒙特卡罗法、应用遍历性的求积法，以及各种应用领域中的新随机性模型方面的研究论文.

撰 稿 王慧娟 石生民 张友余 张延伦 陆吉林 欧阳绵 弥 静 党亚茹
审 阅 马国选 张友余 张奠宙 欧阳绵

数　学　教　育

数学教育学(mathematics pedagogy)　研究数学教育过程客观规律的科学.数学教育过程涉及的对象和领域极其广泛和复杂,包括从幼儿园到大学,从学校到社会,从国内到国外,从现状到历史等诸领域.其最基本的对象是课程、教学和学习.数学教育学的研究对象是数学课程论、数学教学论和数学学习论.这几方面的理论都是从实践经验中抽象和概括出来的,是数学、数学史、教育学、心理学、哲学认识论、逻辑学之间的边缘、交叉、综合性学科.所以,可以进一步把数学教育学表述为,以数学课程论、数学教学论和数学学习论为主要对象的一门实践性很强的综合性理论学科.数学课程论主要研究数学课程内容,数学课程的发展以及对数学课程的评价等方面的问题.数学教学论的研究范围是数学教学的目的和任务、教学过程、教学组织形式、教学原则、教学方法和手段以及教学效果的检查与评价等.数学学习论主要是揭示学生学习数学的心理规律,研究学习的意义和分类,学习过程理论、概念的获得与应用、解决问题与创造性、认知结构与迁移、认知发展与学习准备、学习动机等.数学教育学也可以看作以上述理论为核心的课程体系.它包括"数学思想史"、"数学方法论"、"中学数学近代基础"、"数学教学论"、"数学课程论"、"数学学习论"、"数学教育评价"、"数学教育史"、"数学教育心理学"、"比较数学教育学"、"计算机辅助数学教学"等课程.

数学课程论

数学课程论(theories of mathematics curriculum)　数学教育学的一个分支.主要研究:

1.数学课程内容问题.包括数学课程与社会的关系,数学课程是否反映了社会的要求并符合社会发展的需要;数学课程与数学知识的关系,它是否反映了数学的最基本的知识;数学课程与学习者的关系,数学课程是否按照学习者的心理发展水平,促使他们智力发展来建立知识结构体系;数学课程内容的逻辑结构等.

2.数学课程的发展问题.研究数学课程发展的动力、进程、规律、策略等,有助于对现在和未来的数学课程作出正确决策.

3.对数学课程的评价问题.研究数学课程评价的原则、标准和方式方法等,通过对实际数学课程的评价来探索发展数学课程的经验教训.

数学的特征(characteristic features of mathematics)　数学区别于其他学科的特点.数学是研究现实世界空间形式和数量关系的科学.它的对象是非常现实的材料.为了能够从纯粹的状态中研究这些现实材料的形式和关系,必须使它们完全脱离自己的内容,把内容作为无关重要的东西放在一边,从而这些材料以极度抽象的形式出现,保证了数学得以通过逻辑运算,去获得精确的新的结果.数学的研究对象和它的本质属性,决定了数学的基本特征是抽象性、精确性(包含了逻辑严谨性、结论的不可辩驳性)和应用的广泛性.

数学的抽象性(abstraction of mathematics)　数学的基本特征之一.数学依据某一研究角度提取所研究的对象的本质因素的纯粹性.数学的抽象性来源于数学思维的逻辑严密性的要求.当研究对象的任何非本质的因素会妨碍逻辑思维时,数学就很自然地抛弃了非本质的因素.例如几何的直线,就只剩下"形式"的意义,而抛弃了线的粗细、质地、大小、长短等与研究角度(直线的形式,即其空间形式)无关的这些非本质的因素.或者,也可以说是对所有具有直线形式的事物的共同特征进行概括,然后再抽取出来成为作为数学对象的"直线".数学的抽象性同一般科学的抽象性相区别的三个特征是:

1.它们首要讨论的是量的关系与空间形式,而这些都是从事物的所有性质中抽象得出的.

2.数学的抽象性有着不断深入的层次,所达到的抽象程度远比其他的科学来得深远.

3.数学的活动几乎完全限于各种抽象概念及它们的相互关系的领域里,自然科学家经常要把他们发明的理论或得到的结果用试验去印证,但数学家只做论证的工作.

实践是发现数学结论或解法的媒介,但一切数学结论终归要通过论证.

数学的精确性(precision of mathematics)　数学的基本特征之一.指逻辑的必然性和量的确定性.数学研究量的关系,量的结构是纯粹的.它的概念是明确定义的,它的理论是按照严格的逻辑法则推得的.这种推理对每个懂得它的人来说都是无可争辩和确定无疑的.所以,数学结论具有逻辑的必然性和量的确定性.爱因斯坦(Einstein,A.)曾这样地描述数学:为什么数学比其他一切科学更受到特殊的尊重?一个理由是,它的命题是绝对可靠和无可争辩的,而其他一切科学的命题在某种程度上都是可争

辩的，并且经常处于会被所发现的事实推翻的危险之中.数学给予精密的自然科学以某种程度的可靠性.没有数学，这些科学是达不到这种可靠性的.当然，从运动和发展的角度看，数学的严格性也并不是绝对的，它的严格只出现在一个连续发展的过程中，而数学原理尚未定型，它有它的生命，它甚至还可以成为科学争论的主题.

数学的普适性(generality of mathematics)　数学的基本特征之一.指数学可以被广泛应用于自然科学和社会科学以及日常生活中的特性.现实世界中任何一种物质系统及其运动形式都有其质的规定性，又有其量的规定性，而且质一般要通过一定的量来表示.由于数学所研究的量及其关系普遍存在于各种物质系统及其运动形式之中，因此一切科学技术和社会科学原则上都可以用数学来解决有关问题.数学由于具有其研究对象所决定的高度抽象性、严谨的逻辑性以及广泛的适用性的特点，由于它自身的长期发展已创造的一系列概念、理论和方法，再加上电子计算机的出现，使数学在科学的定量化、精细化、系统化中起着重要的作用：

1.数学为科学研究提供简洁精确的语言，以便描述所研究的问题，表达科学内容，简化和加速思维过程.

2.数学为科学研究提供数量分析和计算的手段和技巧，以便对研究对象进行定量分析和准确的数值计算，从而精确地把握事物的质的特点和变化规律.

3.数学方法为科学技术研究提供可靠的逻辑推理和证明的工具，以便作出科学预见，把握超出感性经验以外的客观世界.

数学的这些应用，亦以较低的层次，反映在日常生活中.

数学的社会功能(social function of mathematics)　数学教育的基本概念.指数学科学在社会生活中的作用.数学来源于社会生活中人对自然和社会的认识，又反过来为之服务.数学因为它的科学美进入人的精神世界，数学又被用于改善人的思维品质.数学具有多方面的功能：工具价值、文化价值、智力价值，这些都是数学的教育意义的根据.

数学的工具价值(instrumental value of mathematics)　数学的功能之一.数学在生产、生活、科学研究中被应用来解决问题的使用价值.数学是理论思维的重要手段，是衡量科学技术发展水平的标志之一，现在现代数学方法正在渗透到科学技术的各个领域和社会生活的各个方面，成为一种具有普遍意义的方法.各门科学技术的数量化和计量化已经成为当今科学技术发展的重要趋势.科学技术和社会科学中所用到的数学分支越来越多，而且许多极其抽象的数学理论都得到了重要的应用，甚至几千年来一直作为纯理论研究的数论，它的许多结果如今也在计算方法、代数编码、组合论、计算机科学等领域得到了广泛的应用.数学不仅为科学研究提供一些数值解法和计算方法，还提供了抽象、概括、逻辑推理的工具，用来表达和概括研究对象的质的特点，探求新的规律.例如，经济数学不再限于运用数学方法进行数学统计，而是试图运用数学工具来探求一些经济规律.数学作为工具的意义的增长不是偶然的，这是现代技术发展的要求.客观存在的一切事物都是质和量的统一体.考察事物既要考察其质的规定性，也要考察其量的规定性，而且在考察事物的规定性时，也只有通过对该事物量的研究，才能准确地把握其质的规定性.

数学的文化价值(cultural value of mathematics)　数学的功能之一.数学作为具有悠久历史的文化活动的价值.作为文化活动，数学反映了思维活动和对善与美的追求.数学记载着人类数学思维的卓越成果，可以给人以巨大的精神享受，数学定下了所有心智活动所追求的客观真理的标准，并且被科学研究的实践所证实.数学还以它的简约之美，作为科学整理的表率.如同语言和音乐，数学是人类思维创造力的主要表现形式，同时它又是建立理论的一般工具.教育在使人懂得知识的同时，还使受教育者在科学的意义上懂得人生、懂得爱、懂得美、懂得社会公德，而且具备一定的解决问题的能力、欣赏能力以及高尚的情操，即有丰富的文化生活.而数学教育恰好具有这方面的教育功能，从而数学是代代相传的文化中的基本成分.

数学的智力价值(cognitive value of mathematics)　数学的功能之一.数学具有的发展人的智力的功能，其核心是可以用来进行思维教育，是“思维的体操”.这种价值来源于三个方面：1.数学学科的思维结果是否合乎逻辑作真理性的标准；2.数学学科以概括的理性思维作为寻求结果的手段；3.数学学习认识活动的核心是思维.

数学的思维教育作用，首先是增强人的思维意识.数学要求概括的明确性，推理的逻辑性，考察问题的完整性，解决问题的策略性，特别是通过逻辑推理去揭示感知所不能认识的规律的特点，都有助于思维意识的养成.其次是提高人的思维艺术.数学是自身成功地解决问题的基本方法，为学生处理日后在社会上碰到的问题，提供了观念和范例.再次是改善人的思维品质.数学有助于增强人的思维的广阔性、深刻性、灵敏性、批判性、精确性和条理性.

集合思想(idea of sets)　数学的基本思想之一.集合思想就是善于把一类事物看成一个总体.自然，这一总体是以各个这样的事物为元素的.客观世

界中任何两个事物总有差异，运用集合思想去看待它们，首先要善于把握研究角度，看出它们是否有某种共同性质，然后再把具有相同性质的事物看作元素，进而再把各个元素构成的整体看作“集合”. 这是对事物的一种强有力的概括. 集合、全集、子集、集合间的运算等，都反映了把事物或事物间的联系概括成总体或总体间关系的思想方法.

关系思想(idea of relation)　数学的基本思想之一. 关系和函数都是数学的基本概念. 函数是一种关系，函数关系是把反映事物之间的相互制约、相互依存的关系用序偶来表示. 更一般地，任一 n 元关系 R，总可以看成某一集合 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 的子集. 当$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$属于 R 时，就称 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 之间有关系 R，否则就称 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 无关系 R(其中，$a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \cdots, a_n \in A_n$；$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是集合). 用函数关系来研究状态之间的依存，是一种重要的数学思想. 按照这一思想，函数被看作是两个状态集合之间建立起来的一种基本的关系，同时，又是当一个集合(或状态)较难刻画时，用另一个集合(或状态)来刻画它的工具.

函数思想(idea of function)　见“关系思想”.

运算(operation)　数学的基本概念之一. 有两种解释：其中一种是把运算解释为“结合法则”，另一种解释作函数. 结合法则理解为由集合的两个元素结合成这个集合的一个新元素的法则. 如果在集合 $M=\{a, b, c, \cdots\}$ 中引进了某个运算“$*$”，就是指对于这个集合的任意两个元素(a, b)都能进行“$*$”运算，即存在惟一的元素 $c \in M$，是对元素 a 和 b 施行这一运算(结合法则)的结果，通常表示作 $a * b = c$. 另一种定义是：M 中元素的一切可能的序偶集合 M^2 到集合 M 的映射($M^2 \longrightarrow M$)，称为集合 M 中的运算(二元运算). 而结合法则的实质是映射. 运算的一般概念的掌握，有助于学生领会数学的一般性和抽象性的意义. 了解了这一点就可以对它作内容不同的各种解释，从而提供了把它应用到各种具体的情况中去的可能性.

方程思想(idea of equations)　数学的基本思想之一. 含有变元的等式称为方程. 若方程在某一集合上成为真命题，这个集合称为方程的解集. 用方程来描述客观世界数量变化的规律性是数学的重要思想. 客观世界的变化规律，往往可以从变元所遵从的等量关系中反映出来. 人们可以把变化看成若干变元有规律地变化的统一体，借助于既揭示的已被表出的规律性，去反映各变元之间的互相制约和相互依存. 并在一些情况下，由一部分变元的确定的值，导致其他变元的某种程度下的被确定(直到完全被确定).

极限思想(idea of limits)　数学的基本思想之一. 一个变量经无限多次变化，其值与一个定值无限接近，则称定值为这个变量变化的极限. 极限用变量的瞬时值来刻画. 由于这一瞬时值是可求取的，总可以找到合适的瞬时值，使之与极限足够接近，这就成功地利用了有限的、规则的、可求取的瞬时值去逼近无限的、不规则的、不可直接求取的范畴中的极限. 极限思想是数学思维的一种飞跃. 人们借助于“逼近”，把无限转化为有限，把不规则图形转化为规则图形，把不可直接求取的值转化为可以直接求取的值.

同构思想(idea of isomorphism)　数学的基本思想之一. 当着两个集合在某种意义下同构，则可以把对某个集合的研究，完全地转化为对另一集合的研究. 例如对实数序偶的加法和平面向量的加法而言，序偶集合和向量集合是同构的. 因而就加法来说，完全可以把对平面向量的研究转化为对实数序偶的研究. 在数学中最简单而常用的同构类比，就是数形结合、函数与图象、代数与解析几何等. 这就使得人们可以用代数方法来研究几何，或者用几何方法解决代数问题.

数学思想的教育(education of mathematical ideas)　一种特殊的教育. 数学不仅以一系列结论，而且以自己形成和发展的过程中体现的数学思想去培育学生. 数学思想是数学地分析问题和处理问题的方法论，是考察数学思维所获得的更高层次的理性认识. 对个体进行数学思想教育，可以促使人“数学地”看问题，从而有效地利用数学思维的成功经验，去对待事物.

数学语言(mathematical language)　一种特殊的语言. 指用符号、公式等表述数学理论的语言. 数学不仅是事实和方法的总和，而且也是用来描述各门科学和实际活动的事实和方法的语言. 数学语言是在下面几个方面改进自然语言的结果：

1. 按简化自然语言的方向.
2. 按克服自然语言中含糊不清的毛病的方向.
3. 按扩充它的表达范围的方向.

数学在某方面是描述其他科学和实践活动中产生的实际情况的专门语言. 解决数学以外产生的问题首先要把这些问题翻译成数学语言，并把所得结果再从数学语言翻回原来那个学科领域的语言. 懂得数学就意味着会用它去解决生活中、各种科学技术领域中以及实践活动中产生的各种问题.

变元(variables)　数学语言中可以表示各种具体内容的符号. 使用变元是数学语言同自然语言的本质区别之一. 由于使用了各种变元，数学语言能够很好地表示一般规律，从而数学语言可以表示形式，在这个形式中可以填进各种内容. 这些形式从个别的、具体的内容中抽出来，保留了关于整个事物或关

系的共同的东西.变元的采用,使得数学语言在暂时不被顾及语义的情况下,仅作为形式被研究,但它又随时可以被赋予丰富的语义.这样,既收到了纯形式运演之利,又保持了数学的实际应用价值.变元和它的值之间的联系,就是语言和它所表示的东西之间的联系.

经验材料的数学组织化方法(the methods to organize empirical materials mathematically)　一种加工原始材料的方法.所谓"经验材料",指数学理性认识活动中用以加工的原始材料,这些材料以被感觉、感知或初级的理性认识的状态进入个体的意识.它的对象可以是现实的种种具有一定性质、关系的事物,或者是诸如数据、图象等数学材料.对经验材料进行数学描述,就称为经验材料的数学组织化,简称数学化.它构成了数学活动的初级阶段.经验材料的数学化常用的基本方法有观察、实验、比较、抽象、概括、分析、综合、归纳、类比等.

观察法(observation)　一种重要的研究方法.观察法是人们在自然条件下,按照客观事物本身存在的实际情况,通过观察研究和确定周围世界的客观事物、现象的性质和关系,从而获取经验材料的方法.观察是受观察者的兴趣、爱好、知识、经验、态度以及客观环境等因素影响的,因此为保证观察的真实性,必须尽可能地排除上述诸因素的干扰.观察法在数学教学中常用来帮助学生正确获得数学概念、发现数学命题以及探索解题途经.

实验法(experiment)　一种重要的研究方法.实验法是人们根据课题规定的目的,借助专门的工具,人为地变革、控制和模拟客观对象,在理想条件下获取经验材料的研究方法.在上述意义下,实验法比观察法更有力,这主要表现在:

1.实验法能根据研究者的需要,突出某些主要因素,排除或削弱其他次要的、偶然的因素的干扰,使其某些属性或关系在简化的、纯粹的形态下暴露出来,从而能较为准确地认识它.因此,实验法具有简化和纯化数学对象的作用.

2.实验法具有可重复的特点,便于反复考察、探索.

实验法在数学教学中主要用于在一定条件下提出猜想,验证猜想.例如量出或剪拼三角形之内角,验证"三角形内角和等于180°"的命题;通过若干大偶数分解为两质数之和的实验,提出哥德巴赫猜想等.数学教学中的实验法,一般可归纳为两类:

1.定量实验,用来测定对象的数值、数量间的关系.

2.定性实验,用来判断数学对象间的某种关系或性质.

比较法(comparison)　一种重要的研究方法.通过比较确定两个或若干个研究对象的异同点的方法.比较法常常可使一事物区别于另一事物,使人们的认识更加清晰、精确.运用比较法的原则是:

1.彼此间具有确定的联系的对象才能比较,即比较应当有意义.例如,比较两个函数的性质、比较两个同类量的大小.

2.比较应按一定的步骤进行,即要求准确地区分进行比较的性质、方面.例如,比较两个函数时,分别地比较它们的定义域、值域、单调性、周期性、奇偶性等.

3.对数学对象的同一种性质所作的比较应当是完整的、彻底的.数学教学经常运用比较法,促进和加深学生对知识的理解和记忆.例如运用比较法帮助学生辨别数学对象或引出新概念等.

抽象(abstraction)　一种重要的思维方法.抽象是舍弃研究对象的非本质属性,抽取出其本质属性的方法.它可使人们透过现象,认识事物的内部联系和内在规律性,从而对现象作出科学解释.抽象过程是综合——分析——综合的过程,即从研究对象的整体出发,通过分析分离出各种属性,然后把本质属性结合起来.由于人们研究的目的有所不同,同一事物可从不同的角度来考察,从而作出不同的抽象.数学是研究现实世界空间形式和量的关系的科学.数学抽象是以抛弃其他一切特性,只保留事物的空间形式和量的关系为特点的.数学中的逐级抽象,使数学具有十分抽象的形式.在数学中,抽象方法的运用比比皆是.例如,数学概念的形成过程、公式化过程、推理证明和定理的获得过程、解题的一般方法和模式的获得过程等.概括是把从被考察的事物抽象出来的某种属性推广到具有这些相同属性的一切事物上去的方法.抽象和概括是紧密联系的.抽象是概括的基础,概括是抽象的成果.如上面例子中所列举的诸过程也是概括化过程.此外,以下过程可导致概括:

1.将某一固定的对象,在讨论中换成可变的对象(如把"三角形"换成"多边形").

2.取消对被研究对象的某种限制(如放宽对 $\sin\alpha$ 中角 α 的限制,把条件 $0<\alpha<\pi/2$ 换成 α 为任意实数).

概括(generalization)　见"抽象".

分析(analysis)　一种重要的思维方法.分析方法是把客观事物的整体分解为各个部分、方面、要素,以便逐个加以研究的思维方法.综合方法与分析方法相反,它是把关于客观事物的各个部分、方面、要素的认识统一起来,在思维中形成对客观事物整体认识的一种思维方法.人们最初接触到的经验材料,是感性的整体,经过分析,深入到经验材料的数学要素或数学规律,然后再综合起来,这时得到的整

体，乃是数学化了的理性的整体．在数学研究中，无论是一般意义下的分析和综合方法，还是在数学解题中寻求解法或表述解法意义下的分析和综合方法，都具有重要的作用．实际上，分析和综合是经验材料数学化的基本的思维操作方式．分析必须在过去综合结果的指导下进行，而分析的结果又是综合的起点．因此，两者是互相对立，又是互相依存、互相渗透的．

综合(synthesis)　见“分析”．

归纳(induction)　推理的基本方法．归纳法是从特殊到一般的推理方法；演绎法是从一般到特殊的推理方法．归纳法是从个别的或特殊的前提条件，推导出一般的、普遍性的结论．如果在前提中列举了条件的所有情况而推得的结论，称为完全归纳法；这时推得的结论是真实的、正确的．如果在前提中只列举了条件的一部分情况而推得的结论，称为不完全归纳法，或枚举法，这时得出的结论未必真实可靠，它只是一种猜想．但是这种不完全归纳法，往往是发现真理的有效方法．数学教学经常运用此法，从若干特殊事例中发现某些共性，进行归纳，引出新概念的定义，或提出某种猜想．让学生学会归纳，提出猜想，是培养其创造性思维的重要方法．演绎法的推理方向与归纳法正好相反：它是从一般性的前提条件出发，推导出个别场合下，特殊的结论(参见“演绎推理”)．

演绎(deduction)　见“归纳”．

类比法(analogy)　一种重要的推理方法．由两个或两类对象在某些方面的相同或相似，作出它们在其他方面也可能相同或相似的推理方法．数学活动中所作的类比大都是从对象的性质、关系、结构、系统、方法的类似性、一致性作出的．类比推理的结论称为类比猜想．类比猜想在数学发现中有重大作用．“类比是提出新命题和获得发现取之不竭的源泉”(波利亚(Polya，G．)语)．类比是一种由特殊到特殊的推理，其结论未必靠得住，因此类比猜想需要逻辑证明予以肯定或否定．

数学材料的逻辑组织化方法(the methods to organize mathematical materials logically)　一种建立数学体系的方法．把经验材料数学化的结果(数学描述)进行逻辑加工、整理和组织，使之形成严谨的数学理论体系的过程，称为数学材料的逻辑组织化过程．此过程所运用的种种方法统称为数学材料的逻辑组织化方法．主要的逻辑组织化方法有：概念的定义方法、构造命题的方法、推理与证明方法等．

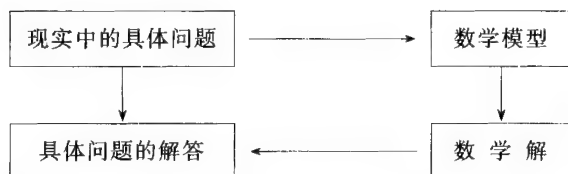
数学模型方法(mathematical modelling method)　一种重要的研究方法．数学模型就是根据研究目的，对所研究的过程和现象的主要特征、主要关系，采用形式化的数学语言，概括地表达出来的一种结构，也就是构造数学模型．通过研究事物的数学模型来认识事物的方法，称为数学模型方法．数学模型是数学抽象和概括的产物，其原型可以是具体对象及其性质、关系，也可以是数学对象及其性质、关系．初等数学中的数概念、方程、不等式、函数、三角函数、平面几何与立体几何等知识系统，都是数学模型．其中，有的数学模型又包括若干小的数学模型．数学模型方法的使用步骤是：

1．建立数学模型．通过数学抽象和概括，把经验材料转化为某种符合研究目的的数学表述，即数学模型．数学模型要反映现实原型的本质特征和主要关系；要加以合理的简化；要有严密的逻辑结构以利推演．

2．对数学模型检验和求解．检验所建立的数学模型是否反映了对象的主要特征和关系，能否改进、简化，然后用数学手段处理数学模型，得出数学解．

3．对数学解进行实际解释和评价．

上述过程用框图可表示如下：



数学模型的思想和方法对于数学教学具有较深刻的影响．它能够揭示数学知识的产生和运用，使学生在把客观世界转化为数学模型的过程中获得相应的能力，并获得具有广泛联系的系统的结构化的知识，认识数学的巨大作用．这样的知识是培养学生数学能力的重要基础之一．

概念(concepts)　思维的最基本形式．它是客观事物本质属性在大脑中的反映．主体对于同一类事物进行分析，分出各种属性，再进行抽象；撇开非本质属性，撷取本质属性，再加以综合；把对象的本质属性结合起来，最后予以概括，把对象推广到具有同样属性的事物的全体．这样就形成了这一类事物的概念．概念有内涵和外延两个重要方面．

数学概念(mathematical concepts)　反映数学研究对象及其决定性属性的思维形式．一个或一类数学研究对象的性质、几个或几类数学研究对象之间的关系，统称为它们的属性．具有某种相同属性的数学研究对象汇集到一起，构成一个具有该种属性的类，在数学中称为集合．一个类中诸多对象，对于确定那个类的相同属性来说，当然都是具有的；但是对于别的属性来说，这一类对象就不一定全都具有或全都不具有了，即具有某种相同属性的数学研究对象也是同中有异的．对于同一类数学研究对象所具有的种种属性可以进行如下的分类．首先，把这一类对象所都具有的属性算做一类，称之为这类对象

的共有属性.某些对象具有另些对象不具有的属性算做另一类,称之为这类对象的偶有属性.在这些共有属性中,这类对象之外的其他数学研究对象也可具有者,称为泛有属性;此类对象所独有者,称为特有属性.从另外的角度还可以把这类对象的共有属性区分为决定性属性和派生性属性,所谓决定性属性,就是具有这些属性的就是这类对象,否则就不是这类对象;所谓派生性属性,就是具有决定性属性的对象都必然具有的其他属性,亦即派生性属性是由决定性属性所派生出来的属性.通常的用以确定数学概念的属加种差的定义形式,其"种差"指的就是决定性的特有属性,其"属"反映了决定性的泛有属性.不过决定性的泛有属性,一般不是用反映具体属性的语言表述的,而是用反映数学研究对象所属的范围来表述的.

数学概念的外延(extension of mathematical concepts) 数学概念的要素.数学概念的外延就是数学概念所反映的数学研究对象所构成的集合,数学概念的内涵就是数学概念所反映的数学研究对象的决定性属性.表述数学概念的语词,称为数学概念的表词.任何一个数学概念都要具备内涵、外延和表词,因而把数学概念的内涵、外延和表词称为数学概念的三要素.

数学概念的内涵(content of mathematical concepts) 见"数学概念的外延".

数学概念的表词(term of mathematical concepts) 见"数学概念的外延".

内涵和外延的反变关系(inverse relationship between content and extension) 逻辑学中的一个重要规律.指同一系列的两个概念之间内涵和外延间的制约关系,即内涵越弱外延越大,内涵越强外延越小;反过来说,外延越大内涵越弱,外延越小内涵越强.这里所谓"同一系列",是指内涵之间有蕴涵关系或外延之间有包含关系.如果甲概念的内涵蕴涵了乙概念的内涵,则称甲概念的内涵强于乙概念的内涵;如果甲概念的外延包含了乙概念的外延,则称甲概念的外延大于乙概念的外延.例如,等边三角形与等腰三角形的关系.等边三角形的内涵强于等腰三角形的内涵,而等边三角形的外延显然小于等腰三角形的外延.

数学概念的种类(kinds of mathematical concepts) 数学概念种类划分的几个标准.依据不同的分类标准,可将数学概念按照不同系列划分出若干种类:

1.原始概念和定义的概念.凡不加定义而采用的概念称为原始概念或不定义概念;通过定义的形式给出的概念称为定义的概念.

2.单独概念和普遍概念.单独概念是反映特指的某一数学研究对象及其决定性属性的概念,单独概念的外延有且只有一个元素.普遍概念是反映一类数学研究对象及其决定性属性的概念.普遍概念的外延,可能包含无限多个元素,也可能包含有限个元素.

3.集合概念和非集合概念.集合概念是反映由同一类数学研究对象构成的整体及其决定性属性的概念.这里的"整体"是作为一个数学研究对象来考虑的,其决定性属性也是指这个整体的属性,而不是指原来那一类对象中的每一个对象的属性.不是集合概念的概念,称为非集合概念.

4.对象概念和关系概念.反映一个对象或一类对象及其决定性属性的概念,称为对象概念.反映几个对象或几类对象及它们之间相互关系的决定性属性的概念,称为关系概念.

原始概念(primitive concepts) 见"数学概念的种类".

不定义概念(undefined concepts) 见"数学概念的种类".

定义的概念(defined concepts) 见"数学概念的种类".

单独概念(single concept) 见"数学概念的种类".

普遍概念(common concepts) 见"数学概念的种类".

集合概念(collective concept) 见"数学概念的种类".

非集合概念(non-collective concept) 见"数学概念的种类".

对象概念(objective concept) 见"数学概念的种类".

关系概念(relational concept) 见"数学概念的种类".

概念的定义(definition of concepts) 给出概念的主要方法.运用已知概念通过明确外延、内涵和表词的形式来建立新概念的逻辑方法.数学概念的定义是运用已知的数学概念,通过明确外延、内涵和表词的形式来建立新数学概念的逻辑方法.任何一个数学概念的定义都必须由三个部分组成:

1.数学概念的表词,逻辑学中通常称为被定义项.

2.用来明确数学概念的外延或内涵的语词,逻辑学中通常称为定义项.

3.把定义项和被定义项联结起来的语词,逻辑学中通常称为定义联项.

例如,"两组对边分别平行的四边形称为平行四边形".这个定义中"平行四边形"是被定义项,亦即新数学概念的表词;"两组对边分别平行的四边形"

是用来明确新概念的外延和内涵的语词，就是定义项；“称为”是联结被定义项和定义项的语词，就是定义联项.

定义的模式(schema of definition)　几种常见的定义方式.由定义项来明确被定义项的外延、内涵的方式.常用的数学概念定义的模式有如下几种：

1.确定子集的模式.这种模式在逻辑学中称为“属加种差”的定义模式，这种模式的核心思想是：对于一个已知的概念，其外延当然是一个集合，通过增加或增强内涵的方式来建立新的概念，这个新概念的外延也是一个集合，而且是原来那个集合的真子集.例如，一组对边平行另一组对边不平行的凸四边形称为梯形.这里的“四边形”是“属”，“一组对边平行另一组对边不平行”是“种差”，两者结合起来就确定了四边形这个集合的一个真子集.

2.确定差集的模式.例如，非负整数就是整数当中不是负数的那些数.这里整数是一个集合，负数是一个集合.它们都是实数的子集(也是有理数的子集)，定义中陈述的定义项，就是要从整数集合去掉其中的负数，即要确定整数对负数的差集.

3.确定补集的模式.确定补集可以理解为确定差集的特殊情形，即由论域去掉它的一个子集所得的另一个子集.例如，整数中不是偶数的数称为奇数.这里的论域是整数，从整数集中确定偶数集的补集，从而定义了奇数.

4.确定交集的模式.例如，既是整数又是负数的数称为负整数.这里的负整数正是由负数和整数的交集确定的.

5.确定并集的模式.例如，有理数、无理数统称实数.这里的实数正是由有理数、无理数的并集确定的.凡是以“统称”、“合称”等语词作为定义联项的定义，均属确定并集的模式.

除了上述“属加种差”和运用集合运算定义的模式以外，还有一种重要的常用的定义模式就是构造型的定义模式.它又分为直接构造和递归构造两种具体的模式.

6.直接构造的模式.通过直接构造一种数学研究对象来定义数学概念的定义模式称为直接构造的模式.例如，中学数学中的无理数、虚数概念的定义，全是运用这种直接构造的模式.比如，“无限不循环小数称为无理数”，这个定义的语言陈述形式很像属加种差的定义，实际上在定义无理数概念之前，只有有理数的概念，而要定义的无理数并不包括在有理数之中，它是作为有理数的对立面出现的，这时就无法找到已知的某种数概念来作为无理数的属概念，因而不能运用属加种差的定义模式.无理数的定义用的是直接构造的定义模式.

7.递归构造的模式.递归构造的定义模式由两个主要部分组成：

1)直接指出某些对象是所要定义的概念外延所构成的集合的元素，这是奠基的部分.

2)以直接指出的那些对象为基础给出构造性的方法，用它依次构造出所要定义的概念外延所构成的集合的元素，这是递归的部分.

除了这两个部分之外，还有一个必不可少的部分，即指出此外再无所要定义的概念外延所构成的集合的元素.

定义的规则(rules of definition)　定义的几个注意事项.为了清晰而准确地给出概念定义时，所必须遵守的规则.这样的基本规则有如下两条：

1.定义项所运用的概念必须全是已知概念，以保证所下定义的清晰性.遵守这条规则，就能够保证定义中不产生直接循环、间接循环、先后倒序和缺少链条等四种错误，从而也就保证了定义的清晰性.

2.定义项所确定的对象纵横协调一致时，以保证定义的准确性，即：

1)理论体系自身纵向的协调一致；

2)个人与社会横向的协调一致.

纵向的协调一致是绝对不能违反的，即前面怎样定义，后面就要怎样使用.当然这并不排除某些概念在一个理论体系中的不断发展.横向的协调一致的要求，一般说来也是要遵守的.但是，在发现传统的定义或当今流行的定义存在某种问题需要特别予以纠正时，横向的协调一致的要求是可以突破的，即提出个人对某一概念的定义的独立见解.如果这种见解正确的话，虽然他提出的定义和社会上传统的定义或当今流行的定义不一致也不算违反第二条定义规则.在数学学科做到上面提出的纵横协调一致时，就可以保证定义不产生外延过宽、过窄、既宽又窄和全非所指的四种错误，从而也就保证了定义的准确性.如果所研究的学科中，需要对客观存在的某种实体下定义，纵横协调一致的要求还要包括理论与实践的协调一致.

以上两条是下定义的基本规则.在实际下定义时，一般要求定义项没有多余的条款，以保证定义的简洁性.

概念的划分(classification of concepts)　划分概念的方法，即把一个属概念分为几个种概念的逻辑方法.例如，“三角形”概念根据角的大小可划分为“锐角三角形”、“直角三角形”、“钝角三角形”这三个种概念.被划分的概念称为划分的母项，划分出来的各个种概念称为划分的子项，划分时所根据的标准称为划分的根据或标准.划分必须遵循以下规则：

1.划分的子项的外延的交集必须是空集.

2.各子项的外延的并集必须等于母项的外延.

3.每次划分必须按照同一标准进行.

4. 划分应按层次逐级地进行，不应越级划分.

二分法是一种特殊的划分，即把母项划分为两个子项. 二分法当然也可以多层次地进行. 根据划分的意义与规则可知，概念的划分对应地决定出其外延的一个分类. 例如，“整数”划分出“正整数”、“零”、“负整数”，对应地有整数集 Z 的一个分类：

$$Z = Z^+ \cup Z^- \cup \{0\},$$

其中 Z^+、Z^- 分别代表正整数集、负整数集. 概念的分类是概念划分的特殊形式，是根据事物的本质属性或显著特征所进行的划分. 例如，把“代数式”分为“有理式”、“无理式”.

概念的分类(classification of concepts)　见“概念的划分”.

划分的规则(rules of classification)　见“概念的划分”.

分类的类型(types of classification)　类型的基本形式，即依据分类所具有的特征，可将分类划分为不同的类型. 实际上，就是对分类本身进行了分类. 通常人们比较关注的分类的类型有三对：

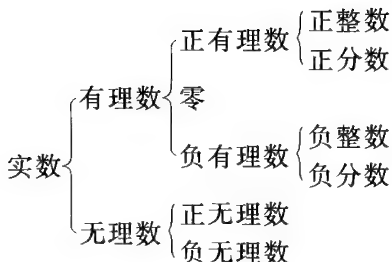
1. 按分类子项的多少，可将分类分为二项分类和多项分类，也称为二分法与多分法. 分类的结果有两个子项的称为二项分类，有三个或三个以上子项的称为多项分类. 例如，将整数分为能被 2 整除的偶数和不能被 2 整除的奇数就是二项分类. 将三角形分为锐角三角形、直角三角形、钝角三角形；将实数分为正实数、零、负实数三类都是多项分类. 以 m 为模，按其剩余数来划分，可将整数分为 m 个类，也是多项分类.

2. 按分类标准的多少，可将分类分为一维分类和多维分类. 以一条标准为依据的分类称为一维分类，同时以多条标准为依据的分类称为多维分类. 例如，对整数来说，可按其奇、偶；正、零、负两个维度同时进行划分，其结果如下表：

正 零 负 / 奇 偶	正	零	负
奇　数	正奇数	(不存在)	负奇数
偶　数	正偶数	零	负偶数

这样分类最后把整数分为五类.

3. 按分类次数的多少，可将分类分为一次分类和连续分类. 对一类研究对象，只进行一次分类就终止的称为一次分类；对一类研究对象连续进行多次分类的称为连续分类. 例如实数，可以对其进行一次分类，把它分为有理数和无理数，也可以对有理数或无理数的某一个再进行分类，或者同时对两者都要再进行分类，即连续分类. 例如，根据某种需要可对实数进行如下表的连续分类：



概念外延间的关系(relationship between extensions of concepts)　按外延关系区分的几种相关概念. 概念外延是一种集合，根据概念外延的重叠情况，概念外延间的关系有如下几种：

1. 同一关系(亦称全同关系). 如果概念 A 和 B 的外延完全重合，则这两个概念间的关系是同一关系. 例如，等边三角形与等角三角形就是同一关系.

2. 属种关系(亦称从属关系或真包含关系). 如果概念 A 的外延为概念 B 的外延的真子集，则这两个概念之间的关系是属种关系. 这时称概念 A 为种概念，B 为属概念. 例如，方程与代数方程，函数与有理函数，就分别是具有属种关系的概念.

3. 交叉关系. 若概念 A 和 B 的外延仅有部分重合，则 A 和 B 之间是交叉关系. 比如，矩形与菱形，等腰三角形与直角三角形，都分别是具有交叉关系的概念.

4. 全异关系. 若概念 A 和 B 的外延之交为空集，则这两个概念之间为全异关系. 比如三角形与平行线；有理数与无理数等，分别都是具有全异关系的概念. 通常只研究具有一定联系的概念间的全异关系：

1)矛盾关系. 如果具有全异关系的概念 A 和 B，它们的外延之并等于它们的某个共同属概念 C 的外延，那么就说 A 与 B 在 C 下为矛盾概念，即 $A \subset C$，$B \subset C$，且 $A \cup B = C$，$A \cap B = \varnothing$. 比如有理数与无理数在属概念实数下是具有矛盾关系的两个概念.

2)反对关系. 如果具有全异关系的概念 A 和 B 的外延之并为它们某一个共同属概念 C 的外延的真子集，即 $A \subset C$，$B \subset C$，且$(A \cup B) \subset C$，$A \cap B = \varnothing$，那么就称 A 和 B 之间具有反对关系. 比如有理数与无理数在复数范围内是反对关系.

概念间的同构关系(isomorphism of concepts)　两个代数体系之间的一种关系. 指两个代数体系两种概念之间满足下列条件的关系：设$\{A;\circ\}$和$\{B;\circ'\}$是两个代数体系，如果映射 $\varphi: A \to B$，使得 $\forall a_1, a_2 \in A$ 有

$$\varphi: a_1 \circ a_2 \to \varphi(a_1) \circ' \varphi(a_2),$$

即 $$\varphi(a_1 \circ a_2) = \varphi(a_1) \circ' \varphi(a_2),$$

并且 φ 是 A 到 B 的双射，则 φ 称为 $\{A;\circ\}\{B;\circ'\}$ 的同构映射，并称 $\{A;\circ\}$ 与 $\{B;\circ'\}$ 在映射 φ 下具有同构关系. 例如，设 Z_2 为以 2 为模的两个剩余类 $\bar{0},\bar{1}$ 构成的集合，$M=\{1,-1\}$，M 关于数的乘法构成群，对于 $\{Z_2;+\}$ 和 $\{M;.\}$ 考虑映射

$$\varphi:\bar{0}\to 1,\bar{1}\to -1,$$

显然 φ 是双射，而且可以证明，$\forall\ a_1,a_2\in Z_2$ 有

$$\varphi(a_1+a_2)=\varphi(a_1)\cdot\varphi(a_2),$$

所以 $\{Z_2;+\}$ 和 $\{M;.\}$ 在映射 φ 下是具有同构关系的. 同构概念可以推广到具有 n 个代数运算的代数体系上去.

判断(judgement)　形式逻辑术语. 指对思维对象有所肯定或有所否定的思维形态. 例如，"三角形内角的和等于 180°"是一个判断，它肯定了三角形内角和的一个性质."永动机不存在"也是一个判断，它否定了永动机的存在. 对思维对象有所断定，即有所肯定或有所否定，是判断的最基本的逻辑特征. 如果断定符合思维对象的实际情况，那么这个判断就是真的，否则就是假的. 因此，任一判断不是真的就是假的，这是判断的又一个基本的逻辑特征. 判断的形成与表达都必须借助于语句.

命题(proposition)　形式逻辑术语，即表达判断的语句. 一个命题不是真的，就是假的，不能又真又假. 例如，"数学是一门科学"是一个命题，它是一个真命题；"9 是质数"是一个命题，它是一个假命题；"哥德巴赫猜想是正确的"也是一个命题，虽然迄今人们还未能判明它的真假. 命题一般是陈述句，祈使句、命令句、疑问句、感叹句等都不是命题. 命题的真或假称为命题的真值，简称为命题的值. 真命题的值为真，假命题的值为假. 可以用"1"表示真，用"0"表示假. 也可以用 p,q,r 等字母表示任一命题，它们称为命题变项或命题变元. 为简便起见，在不致引起混淆时，常把命题变项称为命题.

数学命题(mathematical proposition)　与数学对象有关的命题. 数学中表达判断的语句. 数学命题大都具有"如果 A，则 B"的形式，即具有蕴涵式"$A\to B$"的形式. 例如，在"如果两条直线都和第三条直线平行，则这两条直线也互相平行"中，"两条直线都和第三条直线平行"是前提，"这两条直线也互相平行"是结论. 有些数学命题的前提或结论不十分明显，"对顶角相等"就是其中一例. 若把它叙述成"如果两个角是对顶角，则它们相等"，就容易分清前提和结论了. 前提或结论可能不止一个，例如，在"等边三角形中各角都相等，并且每一个角都等于 60°"中，就有两个结论. 使学生分清前提和结论对于顺利进行推理、论证具有很重要的意义.

数学命题的构成方法(formation of mathematical proposition)　构成数学命题的几种方式. 用一个或多个命题通过以下指出的逻辑联结词构成新命题的方法，也称为命题演算(或逻辑运算).

1. 否(并非)，将命题 p 否定，得到命题"非 p"，称为 p 的否定式，记为 $\bar{p}$ 或 $\neg p$，它的真值表为：

p	1	0
$\bar{p}$	0	1

例如，命题"$x=3$"的否定式为"$x\neq 3$". 当"$x=3$"为真时，"$x\neq 3$"为假；当"$x=3$"为假时，"$x\neq 3$"为真.

2. 合取(并且)，由命题 p,q 作出的新命题"$p\wedge q$"，称为 p,q 的合取式，读作"p 并且 q"，其真值表为：

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
$p\wedge q$	1	0	0	0

例如，由命题"2<3"及命题"2 为偶数"，可作出新命题"2<3 且 2 为偶数". 这是一个真命题.

3. 析取(或者)，由命题 p,q 作出的新命题"$p\vee q$"，称为命题 p,q 的析取式，读作"p 或者 q"，其真值表为：

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
$p\vee q$	1	1	1	0

例如，由命题"2<3"及命题"2=3"，可以作出它们的析取式"2<3 或者 2=3"，即"2≤3". 这是一个真命题.

4. 蕴涵(若…，则…)，由命题 p,q 作出的新命题"$p\to q$"，称为命题 p,q 的蕴涵式，读作"若 p，则 q"，其真值表为：

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
$p\to q$	1	0	1	1

例如，由命题"3=4"及命题"5=6"，可作出命题"若 3=4，则 5=6". 依真值表，它是一个真命题.

5. 等值(当且仅当)，由命题 p,q 作出的新命题"$p\leftrightarrow q$"，称为命题 p,q 的等值式，读作"p 当且仅当 q"，其真值表为：

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
$p\leftrightarrow q$	1	0	0	1

上述命题 p,q 等是不确指的，命题逻辑中称其为命题变量. 因之，由命题变量通过逻辑联结词构成的复合命题也是不确指的，命题逻辑中称其为命题函数(真值函数、命题公式，或简称为公式). 命题逻辑只把构成命题的真假作为问题，而不涉及命题的内容. 含量词的命题的构成方法：设 $\cup$ 为给定的全集合，而 $p(x)$ 为这样的语句，当 x 取 $\cup$ 中任一确定元素时，$p(x)$ 就成为一个可以判定真假的命题，则称 $p(x)$ 为 $\cup$ 上的一个条件命题. $\cup$ 中使 $p(x)$ 为真的元素的集合，称为条件命题 $p(x)$ 的真值集合. 例如，设全集为自然数集，条件命题"x 是 8 的因数"的真值集合是 $\{1,2,4,8\}$. 集合 A 上的方程(或不等式)的解集就是这个方程(或不等式)所给出的条件命题的真值集合. 关于复合条件命题的构成及使用的符号与命题的情况相同，表示为：

$$\overline{p(x)},\ p(x)\wedge q(x),\ p(x)\vee q(x),$$
$$p(x)\rightarrow q(x),\ p(x)\leftrightarrow q(x).$$

1. 全称命题的构成方法. 设 $p(x)$ 为 $\cup$ 上的条件命题，$A\subseteq\cup$，则把通过量词"所有"(记为 $\forall$)而构成的复合命题"对于所有的 $x\in A$，有 $p(x)$ 成立"，称为 $p(x)$ 在 A 上的全称肯定命题，简记为"$\forall x, p(x)$". 例如，"对于所有的 $x\in R$(实数集)，有 $\sin^2x+\cos^2x=1$"，就是一个全称肯定命题. 把"$\forall x\in A$，有 $p(x)$ 不成立"的复合命题，称为 $p(x)$ 在 A 上的全称否定命题，简记为"$\forall x\in A,\overline{p(x)}$".

2. 特称命题的构成方法. 设 $p(x)$ 为 $\cup$ 上的条件命题，$A\subseteq\cup$，则把通过量词"有些"(记为 $\exists$)而构成的复合命题"有些 $x\in A$，有 $p(x)$ 成立"，称为 $p(x)$ 在 A 上的特称肯定命题，简记为"$\exists x\in A, p(x)$". 把"有些 $x\in A$，有 $p(x)$ 不成立"的复合命题，称为 $p(x)$ 在 A 上的特称否定命题，简记为"$\exists x\in A,\overline{p(x)}$".

逻辑联结词(logical connectives) 见"数学命题的构成方法".

条件命题(conditional proposition) 见"数学命题的构成方法".

判定命题逻辑等价的方法(methods of determination of eguivalence between propositions) 判定命题逻辑等价的基本法则. 若两个命题(命题函数)A,B 的真假值总保持相同，则称 A 与 B 逻辑等价，简称为 A,B 等价，记为 $A\equiv B$. 若构成一个命题的简单命题不论取值真或假，它总为真(假)，则称这个命题为恒真(假)命题，用 $I(O)$ 表示. 这时有 $\overline{I}\equiv O,\overline{O}\equiv I$. 判定两个命题逻辑等价的方法：

1. 真值表法. 通过对 A,B 的真值表进行比较来判定 A,B 等价的方法. 例：若原数学命题为"若 A 则 B"($A\rightarrow B$)的形式，由此可作出以下三种命题：

1) 逆命题"若 B 则 A"，记为 $B\rightarrow A$；

2) 否命题"若 $\overline{A}$ 则 $\overline{B}$"，记为 $\overline{A}\rightarrow\overline{B}$；

3) 逆否命题"若 $\overline{B}$ 则 $\overline{A}$"，记为 $\overline{B}\rightarrow\overline{A}$.

由以下真值表，可以判定四种命题间的关系：

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A\rightarrow B$	$B\rightarrow A$	$\overline{A}\rightarrow\overline{B}$	$\overline{B}\rightarrow\overline{A}$
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1	1

由表可知，原命题与逆否命题等价；逆命题与否命题等价.

2. 等价式变换法. 利用真值表法可以验证下列等价式的正确性：

$\overline{\overline{A}}\equiv A$(双重否定律)；

$A\wedge A\equiv A$，$A\vee A\equiv A$(幂等律)；

$A\wedge B\equiv B\wedge A$，$A\vee B\equiv B\vee A$(交换律)；

$(A\wedge B)\wedge C\equiv A\wedge(B\wedge C)$，$(A\vee B)\vee C\equiv A\vee(B\vee C)$(结合律)；

$A\wedge(B\vee C)\equiv(A\wedge B)\vee(A\wedge C)$，$A\vee(B\wedge C)\equiv(A\vee B)\wedge(A\vee C)$(分配律)；

$\overline{A\wedge B}\equiv\overline{A}\vee\overline{B}$，$\overline{A\vee B}\equiv\overline{A}\wedge\overline{B}$(德・摩根律)；

$(A\rightarrow B)\equiv(\overline{B}\rightarrow\overline{A})\equiv\overline{A}\vee B$ 等.

根据这些已证出的等价式和命题代换原则(命题的任何一部分被与其等价的命题代换，得到的命题与原命题等价)，对命题进行变换，来判定两个命题的等价性的方法，称为等价式变换法. 例如，可如下证明 $A\vee(A\wedge B)\equiv A$(吸收律)成立.

$$\begin{aligned}A\vee(A\wedge B)&\equiv(A\wedge I)\vee(A\wedge B) &&(I\text{ 的性质})\\&\equiv A\wedge(I\vee B) &&(\text{分配律})\\&\equiv A\wedge I &&(I\text{ 的性质})\\&\equiv A. &&(I\text{ 的性质})\end{aligned}$$

四种命题之间的关系(relationship between four types of propositions) 见"判定命题逻辑等价的方法".

判定条件命题逻辑等价的方法(methods of determination of eguivalence between conditional propositions) 判定条件命题逻辑等价的基本法则. 全集合为 $\cup$ 的两个条件命题 $p(x),q(x)$，如果它们有相同的真值集合，则称它们逻辑等价(简称等价)，记为 $p(x)\equiv q(x)$. 判定两个条件命题逻辑等价的方法：

1. 判定不含量词的条件命题逻辑等价的方法有两种：

1) 真值集合的方法. 根据上述等价的定义去证明两个条件命题有相同的真值集合的方法.

2) 等价式变换法. 设全集合为 $\cup$ 的条件命题 $p(x),q(x),r(x)$ 的真值集合为 A,B,C.

在上一种方法的基础上可以证得下列等价式的

正确性：

$p(x)\wedge q(x)\equiv q(x)\wedge p(x)$（交换律）；

$(p(x)\wedge q(x))\wedge r(x)\equiv p(x)\wedge(q(x)\wedge r(x))$（结合律）；

$p(x)\wedge(q(x)\vee r(x))$
$\equiv(p(x)\wedge q(x))\vee(p(x)\wedge r(x))$（分配律）；

$p(x)\wedge p(x)\equiv p(x)$（幂等律）；

$p(x)\wedge(p(x)\vee q(x))\equiv p(x)$（吸收律）；

$\overline{\overline{p(x)}}\equiv p(x)$（双重否定律）；

$\overline{p(x)\wedge q(x)}\equiv\overline{p(x)}\vee\overline{q(x)}$（德·摩根律）.

同样可证，将上式中联结词 $\wedge$ 换为 $\vee$，$\vee$ 换为 $\wedge$，所得出的各式依然正确.

等价式变换法是以这些基本的等价式为基础，根据代换原则，通过推演，证明一个条件命题等价于另一个条件命题的方法.

例如：设条件命题 $p(x)$，$q(x)$ 的真值集合为 P，Q，则易知蕴涵条件命题 $(p(x)\to q(x))\equiv P\subseteq Q$. 由于 $\overline{p(x)}$，$\overline{q(x)}$ 的真值集合为 $\overline{P}$，$\overline{Q}$，因此又可知条件命题 $p(x)\to q(x)$ 的逆、否、逆否命题有下列等价式：

$$(q(x)\to p(x))\equiv(Q\subseteq P);$$
$$(\overline{p(x)}\to\overline{q(x)})\equiv(\overline{P}\subseteq\overline{Q});$$
$$(\overline{q(x)}\to\overline{p(x)})\equiv(\overline{Q}\subseteq\overline{P}).$$

但由于 $(P\subseteq Q)\equiv(\overline{Q}\subseteq\overline{P})$，$(Q\subseteq P)\equiv(\overline{P}\subseteq\overline{Q})$，故知

$$(p(x)\to q(x))\equiv(\overline{q(x)}\to\overline{p(x)}),$$

即原蕴涵条件命题与其逆否命题等价. 至于蕴涵条件命题 $p(x)\to q(x)$ 的真假，可依前述（见命题构成方法中的命题演算）蕴涵命题 $(p\to q)\equiv(\overline{A}\vee B)$ 推知，有

$$(p(x)\to q(x))\equiv\overline{p(x)}\vee q(x).$$

2. 判定含量词的条件命题逻辑等价的方法. 用上述的真值集合的方法，易证出下列等价式：

1) $\forall x(p(x)\wedge q(x))$
$\equiv(\forall xp(x))\wedge(\forall xq(x))$.

2) $\exists x(p(x)\vee q(x))$
$\equiv(\exists xp(x))\vee(\exists xq(x))$.

3) $\overline{\forall xp(x)}\equiv\exists x\,\overline{p(x)}$.

4) $\overline{\exists xp(x)}\equiv\forall x\,\overline{p(x)}$.

这些等价式可作为公式使用.

逆否命题的制作（construction of converse-negative propositions） 形成逆否命题的条件及过程. 指从原命题求出逆命题、否命题和逆否命题的过程. 如果一个原命题的前提和结论都是简单命题，则由定义可直接制作其逆命题、否命题和逆否命题. 例如，若已知原命题为："如果 a 是偶数，则 a^2 是偶数"，则逆命题为："如果 a^2 是偶数，则 a 是偶数"；否命题为：如果 a 不是偶数，则 a^2 不是偶数；逆否命题为："如果 a^2 不是偶数，则 a 不是偶数". 如果原命题的前提或结论是复合命题，则要利用定义和命题的否定的知识，制作与它相关的三种命题. 例如，若给定命题"如果 $a^2+b^2=0$，则 a 和 b 都为零"，这个命题可以写成

$$(a^2+b^2=0)\to(a=0)\wedge(b=0).$$

这个命题的前提是简单命题，而结论却是复合命题，其逆命题可以直接得到：如果 a 和 b 都为零，则 $a^2+b^2=0$；其否命题为

$$\neg(a^2+b^2=0)\to\neg[(a=0)\wedge(b=0)].$$

由德·摩根律，这个蕴涵式可以改写为

$$(a^2+b^2\neq 0)\to(a\neq 0)\vee(b\neq 0).$$

即否命题为：如果 $a^2+b^2\neq 0$，则 $a\neq 0$ 或 $b\neq 0$；其逆否命题为

$$\neg[(a=0)\wedge(b=0)]\to\neg(a^2+b^2=0).$$

由德·摩根律，得到

$$(a\neq 0)\vee(b\neq 0)\to(a^2+b^2\neq 0),$$

即逆否命题为：如果 $a\neq 0$ 或 $b\neq 0$，则 $a^2+b^2\neq 0$.

逆命题的制作（construction of converse propositions） 见"逆否命题的制作".

否命题的制作（construction of negative propositions） 见"逆否命题的制作".

分断式命题（proposition of divided conclusion form） 一种特殊的复合命题. 如果一个命题具有下述形式：

如果 A_1，则 B_1；
如果 A_2，则 B_2；
……………
如果 A_n，则 B_n；

并且 $A_1\vee A_2\vee\cdots\vee A_n$ 和 $B_1\vee B_2\vee\cdots\vee B_n$ 均为真命题，$A_i\wedge A_j$ 和 $B_i\wedge B_j(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$ 恒为假命题，则这个命题称为分断式命题，亦称这个命题构成一个闭系统. 例如，在实系数方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的理论中，命题：

1. 如果 $\Delta=b^2-4ac>0$，则它有两个不相等的实根.

2. 如果 $\Delta=b^2-4ac=0$，则它有两个相等的实根.

3. 如果 $\Delta=b^2-4ac<0$，则它无实根，

该命题就是一个分断式命题.

浩伯定律（Haupe's theorem） 关于分断式命题的一个定理. 如果构成一个分断式命题中的 n 个命题分别为：

如果 A_1，则 B_1；
如果 A_2，则 B_2；
…………
如果 A_n，则 B_n；

都是真命题，则其相应的 n 个逆命题：

如果 B_1，则 A_1；

如果 B_2，则 A_2；

…………

如果 B_n，则 A_n；

也都是真命题.浩伯定律亦称闭系统定律.在初等数学中就有很多可以应用浩伯定律的例子.例如，在直线和圆的位置关系一节中有这样一个定理：设⊙O 的半径为 r，圆心 O 到直线 l 的距离为 d：

1. 如果 $d>r$，则直线 l 和⊙O 相离.

2. 如果 $d=r$，则直线 l 和⊙O 相切.

3. 如果 $d<r$，则直线 l 和⊙O 相交.

这个定理是由 1，2，3 三个命题合起来构成的，三个命题的前提包括了所有的可能性，即 $(d>r)\vee(d=r)\vee(d<r)$ 为真命题，并且它们的结论互相排斥，所以这三个命题构成一个分断式命题.根据浩伯定律，当证明了命题 1，2，3 为真后，其相应的三个逆命题：

1. 如果直线 l 和⊙O 相离，则 $d>r$.

2. 如果直线 l 和⊙O 相切，则 $d=r$.

3. 如果直线 l 和⊙O 相交，则 $d<r$.

必定为真，这就是教材中逆定理的内容.浩伯定律是个普遍适用的逻辑规律.自觉地运用这个规律，会对数学教材中某些内容的逻辑结构加深认识.

充分必要条件(sufficient and necessary condition)　数学中的常用术语.如果命题 $p\to q$ 真，则称 p 是使 q 成立的充分条件，q 是使 p 成立的必要条件.例如，在真命题"如果两个自然数都能被 5 整除，则它们的和也能被 5 整除"中，"两个自然数都能被 5 整除"是"它们的和能被 5 整除"的充分条件，而后者是前者的必要条件.如果 $p\to q$ 和 $q\to p$ 同时真，则称 p 是 q 的充分必要条件，q 也是 p 的充分必要条件.例如，命题"如果一个整数能被 9 整除，则这个整数的各位数字之和能被 9 整除"和"如果一个整数的各位数字之和能被 9 整除，则这个整数能被 9 整除"都是真命题，因此，"一个整数能被 9 整除"和"这个整数的各位数字之和能被 9 整除"互为充分必要条件.在数学中有时使用"必需而且只需"、"当且仅当"等词代替"充分必要条件"一词，如果要证明命题 p 和 q 互为充分必要条件，由定义及命题的等价性，只须证明：

1. $p\to q$ 和 $q\to p$ 同时真.

2. $p\to q$ 和 $\neg p\to\neg q$ 同时真.

3. $q\to p$ 和 $\neg q\to\neg p$ 同时真.

4. $\neg p\to\neg q$ 和 $\neg q\to\neg p$ 同时真.

其中之一成立即可.如果已知 p 和 q 互为充分必要条件，则下列四个命题：

1. $p\to q$.

2. $q\to p$.

3. $\neg p\to\neg q$.

4. $\neg q\to\neg p$；

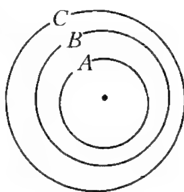
同时真.如果 $p\to q$ 真，且 $q\to p$ 假，则称 p 是 q 的充分不必要条件，q 是 p 的必要不充分条件.

充分条件(sufficien condition)　见"充分必要条件".

必要条件(necessary condition)　见"充分必要条件".

推理(deduction)　形式逻辑术语.指由一个或几个已知判断得出另一个判断的思维形式.一个推理一般由两部分组成，推理所根据的判断，称为前提，由前提得出的那个判断，称为结论.前提和结论是有逻辑联系的一组判断，推理正是断定前提和结论间的联系(必然的、或然的).作为前提的具体判断与作为结论的具体判断组成的具体推理构成了推理的内容；它的前提和结论自身都有真假，而作为前提判断的形式与作为结论判断的形式组成抽象推理，则称为推理的形式.

演绎推理(deductive reasoning)　亦称演绎法.推理方法之一.利用它可以从一个全称判断和一个特称判断得出一个新的或较小的全称或特称判断.例如，平行四边形的对角线互相平分(全称判断)，四边形 $ABCD$ 是平行四边形(特称判断)，所以四边形 $ABCD$ 的对角线也互相平分(新的特称判断).演绎推理具有三段论法的形式，即它总是从两个判断得出第三个判断.前两个判断称为前提，第三个判断称为结论.它包含三个不同的概念，每个概念在两个判断中各出现一次.在两个前提中必须有同一个概念，在上例中这个共同的概念是"平行四边形".演绎推理的正确性及结论的真实性，取决于两个前提以及所运用的推理规则的正确性，而与判断的具体内容无关.如上例，人们可将演绎推理用集合的语言写成以下格式(推理规则)：

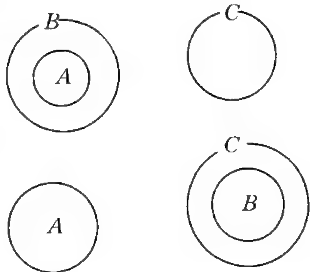


$$\frac{A\subseteq B, B\subseteq C}{A\subseteq C}$$

("由前提 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，可推出结论 $A\subseteq C$").这条推理规则的根据是集合间包含关系的传递性.这可以用维恩图直观地表示出来.数学中还有一些应用较广的三段论推理规则，如

$$\frac{A\subseteq B, B\cap C=\varnothing}{A\nsubseteq C};$$

$$\frac{A\cap C=\varnothing, B\subseteq C}{A\cap B=\varnothing}.$$



演绎推理可以分为以下几种：

1. 由比较一般的情况到不太一般的情况(或个

别情况)的推理.如上例.

2. 由一般情况到一般情况的推理.如所有偶数都能被 2 整除,所有奇数都不能被 2 整除,所以任何一个偶数都不能同时又是奇数.

3. 由个别情况到部分情况的推理.如数 2 是质数,数 2 是自然数,所以某些自然数是质数.

演绎推理的结论是真实的(当前提为真时,结论必定为真),因此它被用来作数学证明.

演绎法(deductive method)　即"演绎推理".

关系推理方法(method of relational deduction)　推理方法之一.指依据数学对象间的关系及其具有的性质所进行的推理.关系推理的前提和结论都是关系判断.数学中经常使用这一推理方法.关系推理可分为直接关系推理和间接关系推理.

直接关系推理是由一个关系判断推出另一个关系判断的关系推理.常见的直接关系推理有对称性关系推理和非对称性关系推理.

1. 对称性关系推理.当给定的关系 R 具有对称性时,以下推理是正确的:

$$\frac{aRb}{bRa}(\text{或表示为 } aRb\Rightarrow bRa).$$

例如,$AB /\!/ CD\Rightarrow CD /\!/ AB$;$\triangle ABC\cong\triangle DEF\Rightarrow\triangle DEF\cong\triangle ABC$ 都是正确的推理.

2. 非对称性关系推理.当给定的关系 R 不具有对称性时,以下推理是正确的:

$$\frac{aRb}{\overline{bRa}}(\text{或表示为 } aRb\Rightarrow\overline{bRa}).$$

例如,$(2>1)\Rightarrow(1\not>2)$;$(A\subsetneqq B)\Rightarrow(B\not\subseteq A)$都是正确的推理.

间接关系推理是由两个关系判断推出一个关系判断的关系推理.常见的间接关系推理有传递性关系推理和反传递性关系推理.

1. 传递性关系推理.当给定的关系 R 具有传递性,以下推理是正确的:

$$\begin{array}{l}aRb\\ \dfrac{bRc}{aRc}\end{array}\left(\text{或}\left.\begin{array}{l}aRb\\bRc\end{array}\right\}\Rightarrow aRc\right).$$

例如,a,b,c 为实数时,

$$\left.\begin{array}{l}a>b\\b>c\end{array}\right\}\Rightarrow a>c;$$

$$\left.\begin{array}{l}\triangle ABC\cong\triangle DEF\\\triangle DEF\cong\triangle HLM\end{array}\right\}\Rightarrow(\triangle ABC\cong\triangle HLM);$$

都是正确的推理.而以下推理:在平面 π 上

$$\left.\begin{array}{l}a\perp b\\b\perp c\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp c,$$

则是错误的.因为平面上直线间的垂直关系不具有传递性.

2. 反传递性关系.当关系 R 具有非传递性关系时,以下推理是正确的:

$$\begin{array}{l}aRb\\ \dfrac{bRc}{a\,\overline{R}c}\end{array}\left(\text{或}\left.\begin{array}{l}aRb\\bRc\end{array}\right\}\Rightarrow\overline{aRc}\right).$$

例如,在平面 π 上,

$$\left.\begin{array}{l}a\perp b\\b\perp c\end{array}\right\}\Rightarrow a\not\perp c,$$

是一个正确的推理.此外,数学中常根据集合 A 上的关系 R 的另外一些性质进行直接或间接关系推理.如在实数范围内,作以下一些推理:

$$(a=b)\Rightarrow a^2=b^2;$$

$$(a=b)\Rightarrow a\pm c=b\pm c\ (c\text{ 为任一实数});$$

$$(a\geqslant b)\Rightarrow a-b\geqslant 0;$$

$$\left.\begin{array}{l}a>b\\a=c\end{array}\right\}\Rightarrow c>b.$$

这些也都是正确的关系推理.

假言推理(modus ponens)　复合判断的推理方法之一.从一个假言判断的前提出发,通过断定它的前件或后件(包括其否定),而推出它的后件或前件(包括其否定)的演绎推理.例如:如果两个角是对顶角,那么这两个角相等.这个推理的大前提是假言判断,这是从肯定它的前件到肯定它的后件的推理.再如:如果一个数能被 4 整除,那么这个数也能被 2 整除.一个数不能被 2 整除,所以这个数不能被 4 整除.这个推理的大前提是假言判断,这是从否定它的后件到否定它的前件的推理.假言推理是根据假言判断所反映某事物的条件之间的依存关系进行推理的.假言推理根据假言判断的类型不同分为充分条件假言推理、必要条件假言推理和充分必要条件假言推理.

1. 充分条件假言推理.以充分条件假言判断为前提的假言推理称为充分条件假言推理.根据充分条件假言判断的特点,充分条件假言推理必须遵守如下两条规则:

1) 肯定前件就肯定了后件,否定前件不能否定后件.

2) 否定后件就否定了前件,肯定后件不能肯定前件.

这是由充分条件的性质决定的.这就是说,有了前件就一定有后件,没有后件一定没有前件.充分条件假言推理有两个正确推理形式:

① 肯定式:在前提中肯定假言判断的前件,结论肯定它的后件,其公式是:

$$\begin{array}{c}p\rightarrow q\\ \underline{\quad p\quad}\\ \therefore\ q\end{array}$$

这里 p 是前件,q 是后件,"→"表示"如果……则……"

② 否定式:在前提中否定假言判断的后件,结

论否定它的前件，其公式是：

$$\begin{array}{r} p\to q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

2. 必要条件假言推理. 以必要条件假言判断为前提的假言推理称为必要条件假言推理. 根据必要条件假言判断的特点，必要条件假言推理必须遵守如下两条规则：

1）否定前件就否定了后件，肯定前件不能肯定后件.

2）如果肯定后件，也就肯定前件；否定后件不能否定前件.

这是由必要条件的性质决定的. 根据这两条规则，必要条件假言推理有两个正确推理形式：

① 否定式：在前提中否定假言判断的前件，结论否定它的后件，其公式是：

只有 p，才 q，
非 p，
所以，非 q.

例如，数 a 只有是整数，才能是自然数，数 a 不是整数，所以数 a 不是自然数.

② 肯定式：在前提中肯定假言判断的后件，结论肯定它的前件，其公式是：

只有 p，才 q，
q，
所以，p.

例如，只有数 a 是偶数，才能被 6 整除，数 a 能被 6 整除，所以数 a 是偶数.

3. 充分必要条件假言推理. 以充分必要条件假言判断为前提的假言推理称为充分必要条件假言推理. 充分必要条件假言判断的性质是：有前件就有后件，没有前件就没有后件；有后件就有前件，没有后件就没有前件. 因此，肯定其中的一个，就必须肯定其中的另一个；如果否定其中的一个，就必须否定其中的另一个. 根据这种性质，充分必要条件的假言推理要遵守下列原则：

1）如果肯定前件，也就肯定后件.
2）如果否定前件，也就否定后件.
3）如果肯定后件，也就肯定前件.
4）如果否定后件，也就否定前件.

充分必要条件假言推理有四种正确推理形式：

① 肯定前件就要肯定后件的形式，其公式是：

p 当且仅当 q，
p，
所以，q.

例如，一个三角形两底角相等当且仅当它是等腰三角形；这个三角形两底角相等，所以这个三角形是等腰三角形.

② 肯定后件就要肯定前件的形式，其公式是：

p 当且仅当 q，
q，
所以，p.

③ 否定前件就要否定后件的形式，其公式是：

p 当且仅当 q，
非 p，
所以，非 q.

例如，一个自然数是偶数当且仅当这个数的平方是偶数；奇数不是偶数，所以奇数的平方也不是偶数.

④ 否定后件就要否定前件的形式，其公式是：

p 当且仅当 q，
非 q，
所以，非 p.

选言推理（deduction by disjunction）　复合判断的推理方法之一. 是一种具有两个前提的推理，其中一个前提是选言判断，另一个前提是选言判断的一部分，即支判断（或它们的否定）. 例如：

任何一个自然数或者是奇数或者是偶数　(1)
5 是奇数，　(2)
所以 5 不是偶数.　(3)

这是具有(1)和(2)两个前提的推理，其中：(1)是选言判断；(2)是选言判断中的一个支判断；(3)是结论，它是这个选言判断中的另一个支判断的否定. 从组成选言推理的三个判断来看，它的大前提是选言判断，小前提和结论往往是直言判断，因此也称为选言三段论. 选言推理又可分为相容选言推理和不相容选言推理.

1. 相容选言推理. 如果选言推理的一个前提是相容的选言判断，则称它为相容的选言推理. 如果相容选言判断是真的，那么它的各个选言支判断至少有一个是真的，并且也可以同时都为真. 根据相容选言判断的这个特点，相容选言推理有两条规则：

1）否认一部分支判断就必然承认另一部分支判断.

2）承认一部分支判断却不能否认另一部分支判断.

因此这种推理只有一种正确推理形式，即否定肯定式，可用公式表示如下：

p 或 q，
非 p（或非 q），
所以，q（或 p）.

例如：$x\in A$ 或 $x\in B$，但 $x\overline{\in} A$，则 $x\in B$. 由于 $x\in A$ 不排斥 $x\in B$，所以上式为相容选言推理.

2. 不相容选言推理. 如果选言推理的一个前提是不相容选言判断，则称它为不相容的选言推理. 如果一个不相容的选言判断是真的，那么有且只有一

个选言支判断是真的. 因此,根据不相容选言判断的这个特点,不相容选言推理有两条规则:

1) 承认一部分支判断就必须否认另一部分支判断.

2) 否认一部分支判断就必须承认另一部分支判断.

相应于这两条规则有两种正确推理形式:

① 肯定否定式:小前提肯定大前提中的一部分支判断,结论否定其他支判断,可用公式表示如下:

要么 p,要么 q,
p(或 q),
所以,非 q(或非 p).

例如,a 是有理数或 a 是无理数,若 a 是有理数,则 a 不是无理数.

② 否定肯定式:小前提否定选言判断中除了一部分支判断以外的其余的选言支判断,结论是肯定余下的那部分选言支判断,可用公式表示如下:

要么 p,要么 q,
非 p(或非 q),
所以,q(或 p).

例如,a 是正数或 a 是零,但 a 不是零,则 a 是正数.

联言推理(deduction by conjunction) 复合判断的推理方法之一. 这样一种推理,或者结论是一个联言判断,而各个前提是该联言判断的各个支判断;或者前提是一个联言判断,而结论是这个联言判断的一个支判断. 联言推理有两种正确形式:

1. 联言推理的合成式. 它是由全部联言判断的各个支判断为真,来断定联言判断为真的推理形式. 如果一个联言判断的各个支判断均为真,由联言推理合成式可以推出由这些支判断所构成的联言判断必为真. 例如,若想证明四边形 $ABCD$ 是平行四边形,只须分别证 $AB/\!/CD$,$AB=CD$,由联言推理的合成形式可得 $AB/\!/CD$,且 $AB=CD$,再由平行四边形判定定理可知四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 联言推理合成式的推理形式是:

p,
q,
所以,p 且 q.

在数学证明中经常用到这种推理形式,它可把要证明的问题首先分成各个部分进行,然后综合为一个统一的整体来完成.

2. 联言推理的分解式. 它是由联言判断为真,来断定这个联言判断的各个支判断必全为真的推理形式. 如果一个联言判断为真,则由联言推理的分解式可以推出这个联言判断的各个分支判断必为真. 例如,已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形,则由平行四边形的性质定理可知:$AB/\!/CD$,且 $AB=CD$,由联言分解式可得 $AB/\!/CD$,也可得 $AB=CD$. 可分别以它们为出发点来证明其他结论. 联言推理分解式的推理形式是:

$p \wedge q$,
所以 ,p(或 q).

联言推理分解式的作用在于,从多个成立的条件中分离出某一个条件来证明问题时,常常要用到这样的推理形式.

德·摩根定律(De Morgan rule) 德·摩根定律是英国数学家、逻辑学家德·摩根(De Morgan, A.)发现的,并以他的名字命名的定律. 它是命题逻辑中的重要的等值式. 它包括两个定律,第一个是合取否定式的德·摩根定律,逻辑表达式为 $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$. 此定律读作"非($p$ 并且 q)等值于非 p 或非 q. 它的意思是命题 p 与命题 q 合取的否定,等值于命题 p 的否定和命题 q 的否定的析取. 例如:

$$\begin{aligned} a+bi \neq 0 &\equiv \neg(a+bi=0) \\ &\equiv \neg((a=0) \wedge (b=0)) \\ &\equiv \neg(a=0) \vee \neg(b=0) \\ &\equiv (a \neq 0) \vee (b \neq 0). \end{aligned}$$

第二个是析取否定式的德·摩根定律,逻辑表达为 $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$. 此定律读作"非($p$ 或 q)等值于非 p 并且非 q". 它的意思是命题 p 与命题 q 析取的否定等值于命题 p 的否定与命题 q 的否定的合取. 例如:

$$\begin{aligned} (a-1)(a-2)\neq 0 &\equiv \neg((a-1)(a-2)=0) \\ &\equiv \neg((a-1)=0 \vee (a-2)=0) \\ &\equiv \neg((a=1) \vee (a=2)) \\ &\equiv \neg(a=1) \wedge \neg(a=2) \\ &\equiv (a\neq 1) \wedge (a \neq 2). \end{aligned}$$

德·摩根定律在数理逻辑的定理推演中,在计算机的逻辑设计中以及数学的集合运算中都起着重要作用. 例如,写出原命题"当 a,b 都是偶数,则 $a+b$ 为偶数"的逆否命题是

$\neg(a+b$ 为偶数$)\rightarrow\neg(a$ 是偶数 $\wedge\, b$ 是偶数$)$
$\equiv\neg(a$ 是偶数$)\vee\neg(b$ 是偶数$)$.

这就是说,如果 $a+b$ 不是偶数,则 a,b 中至少有一个不是偶数.

逻辑方阵(Boolean matrix) 亦称逻辑正方形. 彼此相关的四种命题的关系图. 在性质判断中,用相同的主项 S,谓项 P 中按质和量可构成如下四种不同判断:全称肯定判断 A、全称否定判断 E、特称肯定判断 I、特称否定判断 O. 这四种判断之间有如下四种关系:矛盾关系、差等关系、反对关系、下反对关系. 这些关系的真假情况是:

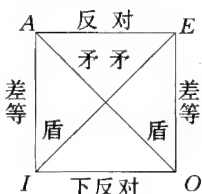
1. 矛盾关系,即用相同的主、谓项构成的 A 与 O 和 E 与 I 判断之间的关系. 在其矛盾关系中,如果已知判断 A(或 E)为真,则与其相矛盾的判断 O(或 I)必为假,反之如果已知判断为假,则其矛盾的

判断必为真. SAP 与 SOP 是矛盾判断,例如"所有自然数都是整数"与"有的自然数不是整数"是矛盾判断. SEP 与 SIP 也是矛盾判断.

2. 差等关系,即用相同的主、谓项构成的 A 与 I 和 E 与 O 判断之间的关系. 在差等关系中,如果已知全称判断 A(或 E)为真,则可断定特称判断 I(或 O)必为真. 然而,如果已知特称判断 I(或 O)为真,则不能判定全称判断 A(或 E)必为真,而是真假不定. 如果特称判断 I(或 O)为假,则可判定全称判断 A(或 E)必为假. 例如"所有的自然数都是整数"与"有的自然数是整数"是差等判断.

3. 反对关系,即用相同的主、谓项构成的 A 和 E 判断之间的关系. 在反对关系中,如果已知一个判断 A(或 E)为真,则可断定另一判断 E(或 A)必为假. 如果已知一个判断为假,并不能判定另一个判断必为真,而是真假不定,但二者可为同假. 例如"所有自然数都是整数"与"所有自然数都不是整数"是反对判断.

4. 下反对关系,即用相同的主、谓项构成的 I 和 O 判断之间的关系. 在下反对关系中,如果已知一判断 I(或 O)为假,则可断定另一判断 O(或 I)必为真. 如果已知一个判断为真,则并不能断定另一个判断必为真,而是真假不定,但二者可为同真. 例如"有的自然数是整数"与"有的自然数不是整数"是下反对关系.



A,E,I,O 四种判断的真假关系称为对当关系,可用四方图形来表示它们之间的关系,故称为"逻辑方阵".

换质法(contra-quality) 一种直接推理. 由主项为 S、谓项为 P 的判断,通过改变它的质,推出一个主项仍为 S,而谓项为 P 的矛盾概念 $\overline{P}$ 的新判断的推理方法. 它是从原来的肯定判断推出与它等值的否定判断,或者从原来的否定判断推出与它等值的肯定判断. 换质法有两条规则:

1. 改换原来判断的质,即将肯定变为否定,或把否定变为肯定.

2. 以原判断谓项的矛盾概念作新判断的谓项.

换质法适用于四种性质判断 A,E,I,O. 例如,以 A 判断:"所有矩形都是平行四边形"作前提,换质得 E 判断:"所有矩形都不是非平行四边形". 以 E 判断:"全体自然数对减法运算不是封闭的"作为前提,换质得 A 判断:"全体自然数对减法运算是不封闭的". 以 I 判断:"函数 $y=\tan x$ 是初等函数"作为前提,换质得 O 判断:"函数 $y=\tan x$ 不是非初等函数";以 O 判断:"函数 $y=\cot x$ 在 $x=k\pi$ 处不是连续的"作为前提,换质得 I 判断:"函数 $y=\cot x$ 在 $x=k\pi$ 处是非连续的(间断的)". 换质法推理形式可表示如下:

$$SAP \to SE\overline{P},$$
$$SEP \to SA\overline{P};$$
$$SIP \to SO\overline{P},$$
$$SOP \to SI\overline{P}.$$

单称肯定判断和单称否定判断也是可以换质的. 它们的推理形式是:

这个 S 是 $P \to$ 这个 S 不是 $\overline{P}$,

这个 S 不是 $P \to$ 这个 S 是 $\overline{P}$.

换质法的特点在于前提和结论是等值的. 对于某些问题有时需要用肯定判断来表达,有时需要用否定判断来表达. 用换质法可以选择对于相应情况的最适当的表达方式.

换位法(conversion) 一种直接推理. 通过互换原判断主项和谓项的位置,即前提的主项是 S,谓项是 P,而结论的主项是 P,谓项是 S,而得出新判断的推理方法. 换位法有三条规则:

1. 前提的质与结论的质相同,即如果前提是肯定判断,结论也是肯定判断;如果前提是否定判断,结论也是否定判断.

2. 把前提中的主项和谓项换为结论中的谓项和主项.

3. 在前提中不周延的概念,在结论中也不得周延.

A,E,I,O 四种性质判断的换位法举例如下:以 A 判断作为前提,换位后得 I 判断,例如:"所有的正方形都是矩形",换位得"有的矩形是正方形";以 E 判断作为前提,换位法后仍得 E 判断,例如:"所有的奇数都不是偶数",换位得"所有的偶数都不是奇数";以 I 判断作为前提,换位后仍得 I 判断,例如:"有的质数是偶数",换位得"有的偶数是质数";以 O 判断作为前提不能换位. 换位法推理形式可表示如下:

$$SAP \to PIS,$$
$$SEP \to PES,$$
$$SIP \to PIS.$$

单称肯定判断和单称否定判断也是可以换位的. 当单称肯定判断的谓项是一个普遍概念时,单称肯定判断只能换位得特称肯定判断. 当单称肯定判断的谓项是一个单独概念时,单称肯定判断只能换成单称肯定判断. 换位法的作用在于,它变换思考的对象,进一步揭示原判断谓项被断定的情况,从而加深对事物的认识.

换质位法(contraposition) 一种直接推理. 多次应用换质法与换位法(或者换位法与换质法)的推理方法. 人们可把原判断先换质,然后再把换质所得到的判断进行换位,最后得出一个判断;当然也可把

原判断先换位，再换质. 换质位法规则，既包括换质法规则，又包括换位法规则. 例如：

	所有自然数都是整数	SAP,
换质	所有自然数都不是非整数	$\to SE\overline{P}$,
换位	所有非整数都不是自然数	$\to \overline{P}ES$,
换质	所有非整数都是非自然数	$\to \overline{P}A\overline{S}$,
换位	有的非自然数是非整数	$\overline{S}I\overline{P}$,
换质	有的非自然数不是整数	$\to \overline{S}OP$.

性质判断 A,E,I,O 换质位法的推理形式如下：

原判断　换质位判断

$$SAP \xrightarrow{\text{换质}} SE\overline{P} \xrightarrow{\text{换位}} \overline{P}ES,$$

$$SEP \xrightarrow{\text{换质}} SA\overline{P} \xrightarrow{\text{换位}} \overline{P}IS,$$

$$SIP \xrightarrow{\text{换质}} SO\overline{P},$$

$$SOP \xrightarrow{\text{换质}} SI\overline{P} \xrightarrow{\text{换位}} SOP.$$

换质位法可从换质（或换位）开始，连续使用上述推理形式直到不能再作新命题为止. 换质位法的意义还在于它不仅有换质法的作用，而且兼有换位法的作用，即它不仅从正反两个方面来阐述一个事物，而且还从变换判断对象（主项）的角度加深对事物的认识，使人们更深刻的认识事物.

三段论(syllogism)　一种演绎推理. 以两个性质判断作前提推出一个性质判断作结论的推理方法. 例如：

所有的有理数都是实数　　(1)

所有的整数都是有理数　　(2)

所以，所有的整数都是实数　　(3)

它是由三个简单判断(1)、(2)、(3)组成，其中(1)、(2)是前提，(3)是结论. 这三个性质判断包含而且只包含三个不同的概念作主谓项，例中的三个概念是"实数"、"整数"、"有理数". 每个概念都在两个判断中各出现一次. 任意两个性质判断有且仅有一个概念是相同的. 由于三段论的前提和结论都是直言判断，因此又称它为直言三段论. 一个三段论中的三个作主谓项的不同概念，分别称为大项、小项和中项. 结论中的主项称为小项，以"S"表示，如(3)中的"整数". 结论中的谓项称为大项，以"P"表示，如(3)中的实数. 两个前提中所共有的项称为中项，以"M"表示，如(1)、(2)中的有理数在三段论的两个前提中，包含大项的前提称为大前提，包含小项的前提称为小前提，例中(1)是大前提，(2)是小前提. 由此可见，三段论是由大前提、小前提与结论组成的，形式结构如图所示，三段论的特点在于通过中项的媒介，把大项、小项联系起来.

M——P
S——M
S——P

三段论规则(rules of syllogism)　关于三段论的几个注意事项. 三段论有许多不同的形式，其中有一些是正确的，有一些是不正确的. 满足什么规则的三段论形式才能是正确的呢？下面给出判定一个三段论推理形式是否正确的三段论规则：

1. 三段论只能有三个性质判断和三个不同的概念作主谓项. 这条规则是从三段论的定义中直接引申出来的，不符合这条规则的，根本就不是三段论. 这里特别要注意在大前提和小前提中各出现一次的中项应当是同一概念，要防止犯四概念的错误. 例如：

有理数是实数，

实数有连续性，

有理数有连续性.

这里两个实数的概念是不同的，出现了四概念的错误.

2. 中项至少在一个前提中周延. 例如：

所有奇数都是整数，

所有偶数都是整数，

所有奇数都是偶数.

一个三段的结论反映小项与大项之间的一种确定的关系，这种关系是通过中项的媒介作用建立起来的. 如果中项在两个前提中都不周延，那么就可能是小项与中项的外延的一部分发生关系，而大项与中项的外延的另一部分发生关系，因而通过中项就得不出小项和大项之间的某种确定关系.

3. 在前提中不周延的概念，在结论中不得周延. 一个概念在前提中不周延，即在前提中没有断定 S（或 P）的全部外延，而只断定了部分外延，因而由部分外延的断定推不出对全部外延的断定.

4. 从两个否定前提不能得出结论. 如果两个前提都是否定，那么大前提与小前提的可能性有四种：EE,EO,OE,OO，不管是哪一种情况都得不到大项 P 和小项 S 之间的确定关系.

5. 如果前提中有一个否定判断，那么结论必为否定判断；如果结论为否定判断，那么前提中必有一个否定判断. 如果在三段论中由一个否定前提和一个肯定前提推出一个肯定判断作为结论，那么由两个否定前提就能推出一个否定判断作为结论.

6. 从两个特称前提不能得出结论. 两个特称前提只可能是下列三种情况之一：两个前提都是否定 OO；两个前提都是肯定 II；一个前提是肯定，另一个前提是否定 IO，都不能得出结论.

7. 如果有一个前提是特称的，那么结论也是特称的. 两个前提仍有三种可能：两个前提都是肯定；两个前提都是否定；一个前提肯定一个前提否定，结论都必为特称.

8. 如果大前提是特称，小前提是否定，那么就不能得出结论.

证明(proof) 形式逻辑术语.借助于若干真命题来确定某一命题为真的逻辑方法.一般地,人们把对数学命题 P 的证明,理解为属于所给理论的命题的有限序列 $(A_1,A_2,\cdots,A_n)$,它满足下列两个条件:

1.这个序列中的每个命题或是公理,或是定义,或是前面已经证明过的定理,或是假设(要证明的定理的条件),或者就是由前面的命题,按照(允许的)推理规则之一得到的.

2.这个序列的最后一个命题 (A_n) 是命题 T.

如果对于 T 可以作出至少一种证明,即可以求得至少一个满足1和2的命题序列,命题 T 就成为定理.证明总是由三个要素构成的:

1.论题,指的是其真实性需要加以证明的那个命题.

2.论据,指的是被引用来证明论题的那些真命题(题设、定义、公理或定理).

3.论证,指的是把论题和相应的论据联系起来的一系列的推理过程.

因此可知,论题是要证明什么的问题,论据是靠什么来证明的问题,论证是怎样来证明的问题.严密意义上的证明,可以说仅仅存在于某种形式化的公理体系的范围之内.在公理体系中,一切非基本的概念或命题,都要用基本概念或基本命题加以定义或进行证明.至于基本概念和基本命题的真实性,直接或间接地依赖于实践.

直接证法(direct proof) 亦称直接证明.一种证明方法.指引用论据直接地推出论题的证明方法.直接证法是从正面来肯定论题的正确性.欲证 $a\to b$ 为真,那么直接证法的方式可表示为:

$\because a$ 真,$\therefore a_1$ 真;(即 $a\Rightarrow a_1$)

$\because a_1$ 真,$\therefore a_2$真;(即 $a_1\Rightarrow a_2$)

……………

$\because a_m$ 真,$\therefore b$ 真.(即 $a_m\Rightarrow b$)

其中每论说一次"因为……,所以……",都有已知的定义、公理或定理作推理的依据.上述写法也可简化为:$a\Rightarrow a_1\Rightarrow a_2\Rightarrow\cdots\Rightarrow a_m\Rightarrow b$,故只要 a 真,就有 b 真,从而 $a\Rightarrow b$ 是正确的推理形式,也即 $a\to b$ 为真.

间接证法(indirect proof) 亦称间接证明.一种证明方法.指不是直接证明论题的真实性,而是通过证明论题的否定不真,或者证明与论题等价的命题的真实性,从而肯定论题的真实性的证明方法.数学教学常用的间接证法,有对偶法、反证法、穷举归谬法、穷举法、同一法等.

1.对偶法.代替论题 $a\to b$,而去证明和它等价的逆否命题 $\bar{b}\to\bar{a}$ 的方法称为对偶法.例如,欲证 $x^2\neq y^2\to x\neq y$,可对逆否命题 $\overline{x\neq y}\to\overline{x^2\neq y^2}$,也即 $x=y\to x^2=y^2$ 进行证明,这从等式的性质很容易证明.

2.反证法.$a\to b$ 的否定为 $\overline{a\to b}\equiv\overline{\bar{a}\vee b}\equiv a\wedge\bar{b}$,由此出发进行推理,如果发生矛盾,则 $\overline{a\to b}$ 不真,即可知 $a\to b$ 为真.这种通过反驳 $\overline{a\to b}$ 来证明 $a\to b$ 为真的方法,称为反证法.反证法总是从前提 $\overline{a\to b}$ 为真出发进行直接推理,直到推出某一同已知的事实或既有的公理、定理相矛盾,从而证明了原命题 $a\to b$ 真实性.关于这一点可作如下解释:这是因为该矛盾是运用允许的推理规则(正确的推理)的结果,因此至少应当有一个前提是假的.但是,任何一个公理、定义、以前证明过的定理都不可能是假的,所以,只有假设 $\overline{a\to b}$ 是假的.而 $\overline{a\to b}$ 是原论题的否定,因此原论题本身是真的,于是就完成了证明.

3.穷举归谬法.用反证法证明 $a\to b$ 为真时,由对反证法的上述说明,可转而去证 $a\wedge\bar{b}$ 为假.但是,$\bar{b}$ 可能包括多种情况,难以一概而论.不妨可设 $\bar{b}=\bar{b}_1\vee\bar{b}_2\vee\cdots\vee\bar{b}_m$.倘若能对 $a\wedge\bar{b}_i(i=1,2,\cdots m)$ 逐一进行反驳,即证明 $a\wedge\bar{b}_i(i=1,2,\cdots m)$ 都为假,也就证明了 $a\wedge\bar{b}$ 为假.这种证明方法称为穷举归谬法.

4.穷举法.如果有一组真命题 $a_i\to b_i(i=1,2,\cdots m)$,$a_1,a_2,\cdots,a_m$ 是所考虑的问题的所有可能情况,$b_1,b_2,\cdots,b_m$ 互不相容,则可断定它们的逆命题 $b_i\to a_i(i=1,2,\cdots,m)$ 都为真,这种证明方法称为穷举法.例如,$x>0,y>0$ 时,

$$\begin{cases}x>y\to x^2>y^2 & (1)\\ x=y\to x^2=y^2 & (2)\\ x<y\to x^2<y^2 & (3)\end{cases}$$

成立.以此为基础,在证明这些命题的逆命题时,可用穷举法.譬如要证(1)的逆命题

$$x^2>y^2\to x>y\quad(x>0,y>0)\qquad(4)$$

为真.假设 x 不大于 y,则 $x\leqslant y$.若 $x<y$,则由(3)得 $x^2<y^2$;若 $x=y$,则由(2)得 $x^2=y^2$.都与假设 $x^2>y^2$ 相矛盾.因此(1)的逆命题成立.仿此可证(2)、(3)的逆命题成立.

5.同一法.同一法证明的步骤是:先设法构造出符合论题题断的对象,再证明所构造的对象确有题设所述的性质,由于符合题设、题断的对象都是存在惟一的,可知所构造出的对象与题设所指的对象是同一个,从而论题成立.易见,同一法适用于题设、题断所指的对象是存在和惟一的论题.同一法的实质和根据是:论题的题设、题断所指的对象存在惟一时,原命题与逆命题等价,故可通过证明逆命题成立来代替证明原命题成立.

对偶法(duality) 见"间接证法".

反证法(reductio and absurdum proof) 见"间接证法".

穷举归谬法(proof by exhaustion) 见“间接证法”.

穷举法(exhaustion) 见“间接证法”.

同一法(method of identity) 见“间接证法”.

数学归纳法(mathematical induction) 一种重要而常用的证明方法.只适用于同自然数 n 有关的数学命题的证明方法.它以自然数序数理论中的归纳公理作为其理论基础.初等数学中常用的是第一数学归纳法和第二数学归纳法.

第一数学归纳法:设 $p(n)$是一个与自然数 n 有关的数学命题,如果,

1.命题 $p(0)$为真.

2.假设 $p(n)$为真,则 $p(n+1)$也真,那么就能断言命题$p(n)$对于任何自然数 n 都为真.

用数学归纳法证明命题时,上述两步骤缺一不可.第一数学归纳法可推广到以下更一般的情形.设 $p(n)$是一个与自然数 n 有关的数学命题,如果

1.对于某个自然数 n_0,命题 $p(n_0)$为真.

2.假设 $p(k)$ $(k\geqslant n_0)$ 为真,k 为自然数,则 $p(k+1)$也真,那么命题 $p(n)$对于大于或等于 n_0 的自然数都真.

第二数学归纳法:设 $p(n)$是一个与自然数 n 有关的数学命题,如果,

1.命题 $p(0)$为真.

2.假设对于小于自然数 n_0($n_0\geqslant 1$)的自然数 k 来说 $p(k)$为真,则 $p(k+1)$也真,那么命题对于任何自然数 n 都为真.

第二数学归纳法可推广到以下更一般的情形.设 $p(n)$是与自然数 n 有关的命题,如果

1.对某个自然数 n_0,命题 $p(n_0)$为真.

2.假设 $n_0<k<n_1$ 时 $p(k)$为真,则 $p(n_1)$也真,那么对于任何自然数 $n\geqslant n_0$,命题 $p(n)$都为真.

倒推归纳法(reversed mathematical induction) 一种特殊的数学归纳法.设 $P(n)$是依赖于自然数 n 的命题.如果 $P(n)$对某一类特殊的无限多个自然数成立,而且由 $P(k+1)$成立可以推出 $P(k)$成立,则 $P(n)$对任意的自然数 n 成立.

数学公理化方法(axiomatic method of mathematics) 一种常用的数学方法.从尽可能少的不定义的原始概念(基本概念)和一组不加证明的命题(公理)出发,经过精确定义和逻辑推理而得到其他的全部概念和定理的、建立数学系统的方法.公理化方法的作用和意义是:

1.分析、总结数学知识.凡取得了公理化结构形式的数学,由于概念和定理均已按照逻辑演绎关系串联起来,就有理由认为它是更有根据、逻辑清楚的,使用起来也更方便.

2.比较各科数学实质性的异同,有助于发现新问题,促使和推动新理论的创立.

3.在科学方法论上有示范作用.公理化方法是理论的更为完善的表述方法,它对现代理论力学及各门自然科学理论的表述方法都起到了积极的借鉴作用.

数学公理化的发展大致经历了三个阶段:

1.公理化方法的产生阶段.公元前 3 世纪,欧几里得(Euclid)完成的《几何原本》,是数学的第一个公理体系.其论域(指研究的对象和关系,它们是由原始概念来表述的)是惟一的,并且是先于公理而具体给定的(如“点”、“线”等).公理系统(指原始概念、公理的组成)是建立在人的直观经验基础上的.《几何原本》对后世的数学以至于科学的发展产生了巨大而深远的影响,但它是不完善的.譬如,缺少顺序、运动、连续公理,在证明中往往依赖于直观或利用了一些它的公设和公理无法证明的事实等.

2.公理化方法的完善阶段.19 世纪初,俄国数学家罗巴切夫斯基(Лобачевский,Н.И.)在剔除欧氏几何第五公设而保留其余公理的前提下,引入了一个与第五公设相反的公理,从而创立了非欧几何.非欧几何的出现,大大解放了人们的思想,提高了公理化的信誉,促进了抽象理论的发展.人们认识到,一个公理系统作为一个整体,当且仅当满足一定的条件(相容性、独立性、完备性等);而这些条件是否满足,可以采用解析法、模型同构来检验.

3.公理化方法的形式化阶段.德国数学家希尔伯特(Hilbert,D.)于 1899 年著了《几何学基础》一书,使公理化方法发展为形式的公理体系.形式公理体系的论域不惟一,如希尔伯特的体系可以解释欧氏几何,也可解释实数算术体系.形式公理系统要满足相容性、独立性和完备性.希尔伯特后来提出了形式化方案.它是由初始符号、形成规则、公理和变形规则等构成的完全符号化、抽象化的公理体系.希尔伯特试图以此解决数学的相容性问题.但是这个计划因 20 世纪 30 年代哥德尔(Gödel,K.)证明了不完全性定理而宣告失败.然而,它推动了数学基础、现代算法论等的研究.同时,也表明公理化方法有一定的局限性.

集合方法(method of sets) 一种常用的数学方法.指以集合(它的思想、方法、概念、理论、语言等)为基础确定数学概念和处理数学问题的方法.数学从大量事实中抽象出集合、关系和结构这三个基本概念.借助于这些基本概念可以建立起统一的数学,其中集合是最基本的概念.由于数学概念的定义、公式、定理等都是针对一类特定的数学对象的概括,因此是立足于集合概念之上的.运用集合的方法有利于促使人们看出表面上彼此很不相近的初等数学问题中的共性.例如,从集合观点来看,运算、函

数、几何变换、长度、面积和体积的度量等，是集合的映射这一概念的不同方面．用集合的语言可以统一并大大简化对许多问题的表述．例如，运用集合观点可精确、简化对方程与不等式的同解性的讨论．有关集合的概念、方法列入初等数学，将使数学课所使用的数学语言更加精练、准确和清晰．

分类讨论方法(method of listing cases) 一种常用的研究方法．当被研究的问题包含多种可能的情况，而人们不能对它一概而论的时候，就需要按照问题出现的所有可能情况进行讨论，综合每种情况下相应的结论，从而使问题得以解决的方法(人们也常称为“分情况讨论的方法”)．分类讨论方法的根据是概念的划分或集合的分类，把被研究的问题 p 中的某种条件所包含的种种情况视为一个个元素，于是得到以这些情况作为元素的集合 A．然后，把凡是可用同一种方法处理解决的情况(元素)放到一起做成 A 的若干子集 $E_i(i=1,2,\cdots n)$ 构成 A 的一个分类．分类的方法应遵循以下原则：

1．在对问题的某种条件分类时，要使用同一标准．由于划分、分类可多层次地进行，所以分类讨论方法也可以多层次的进行．

2．集合 A 中任一元素必须包含在某一类中，即 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i=A$．

3．所分的任何两类之间是互相排斥的，即两个类中没有重复的元素，亦即 $E_i\cap E_j=\varnothing$ $(i,j\in\{1,2,\cdots,n\},i\neq j)$．

关系方法(method of relations) 一种常用的研究方法．“关系”是现代数学的一个重要而基本的概念．“n 元关系”定义为 n 个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的笛卡儿积集合

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$$
$$=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in A_i,i=1,2,\cdots,n\}$$

的子集合．当 $n=2,A_1=A_2=A$ 时，就称为 A 上的一个二元关系．初等数学里揭示了许许多多的关系，其中不外乎是二元关系或多元关系，但是最常见最基本的是二元关系．例如，数或式的相等关系、三角形的全等与相似关系，实数的大小比较关系、方程与不等式的同解关系、命题间的等价关系等．有的关系还具有若干基本性质．如数的相等关系、式的恒等关系具有自反性(即 $(\forall a)(a=a)$)、对称性(只要 $a=b$，就有 $b=a$)、传递性(只要 $a=b,b=c$，就有 $a=c$)．此外，如果在 A 中还定义了代数运算，那么 A 上的某个二元(或多元)关系可能还适合一些与这个代数运算相联系的性质．例如，对于实数的大于关系，有：若 $a>b$，则 $a\pm c>b\pm c$ $(a,b,c$ 为实数)．因此，这种根据“关系”的定义，来确定对应、代数运算、函数、变换、映射等概念的方法称为关系方法．例如，A 到 B 的映射 f 可以描述为 $A\times B$ 的这样一个子集 S：$(a,b)\in S$ 当且仅当 $f(a)=b$ (其中 $a\in A,b\in B$)．

恒等变换法(identical transformation) 一种常用的研究方法．对问题给出的解析式作恒等变换，化为有利于解决这个问题的某种特定形式的方法．常见的恒等变换有以下若干方法：

1．因式分解法．在解题过程中，对某步骤出现的整式进行因式分解，促使问题得到解决的方法．例如，将方程 $x^2+5x+6=0$ 化为 $(x+2)(x+3)=0$；当 a,b 为相异实数时，为了证明 $a^5+b^5>a^3b^2+a^2b^3$，作差，并分解因式为

$$a^5+b^5-(a^3b^2+a^2b^3)=(a^2-b^2)(a^3-b^3).$$

从而有利于解决问题．

2．配方法．利用恒等变换把一个式子化为有一个加项是完全平方的特定形式，从而解决有关问题的方法．配方法可用于因式分解、求值、推导二次方程求根公式、研究二次函数的性质和图象、求二次函数的极值，也可用于解析几何有关问题的讨论等．

3．待定系数法(比较系数法)．为了确定某数学对象的表达式的各项系数，有时依据该数学对象间相等的定义，进行相应的表达式的已知系数和未知系数的比较，利用它们必然相等的性质而使问题得到解决的办法．此方法常用于有关多项式、复数、向量、矩阵等问题中．它是一种较为特殊的方法，只适用于表达式可归结为某种恒定形式的数学对象：例如，含相同文字的两个多项式恒等，当且仅当它们的同次项的系数相等；两个复数相等：$a_1+b_1i=a_2+b_2i$，当且仅当 $a_1=a_2,b_1=b_2$．

因式分解法(method of factorization) 见“恒等变换法”．

配方法(method of completing square) 见“恒等变换法”．

待定系数法(method of undetermined coefficients) 见“恒等变换法”．

几何变换方法(method of geometric transformation) 现代数学的基本方法之一．现代数学思想把任何平面或空间的几何图形都视为点的集合．设 F 与 F' 是几何图形，如果存在一个 F 到 F' 的映射，则称此映射为 F 到 F' 的一个几何变换，它把 F 变为 F'．初等数学常用的几何变换方法主要是合同变换与相似变换：

1．合同变换．如果两个图形 F 与 F' 间存在一个一一映射，使得 F 上任何两点间的线段长等于 F' 上对应点间线段长，那么就称图形 F 与 F' 合同，而这个映射就称为图形 F 到 F' 的一个合同变换．一般的合同变换由反射、平移和旋转三种变换组成：

1) 反射．如果图形 F 与 F' 间存在一个一一映射，使得对应的点所连线段都被某定直线 l 垂直平

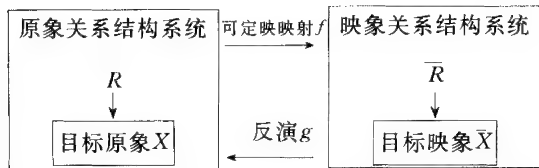
分，则称图形 F 与 F' 关于 l 对称，直线 l 称为其对称轴. 两个轴对称图形 F 与 F' 间的这个一一映射是合同变换，F 与 F' 是合同的图形. 这种合同变换就称为直线反射或反射.

2）平移. 如果两个图形间存在一个一一映射，使得对应的点所连线段互相平行、相等且同向，则称此映射为一个平移变换. 平移变换是合同变换.

3）旋转. 如果图形 F 与 F' 间存在一个一一映射，使得任意一对对应的点 A，A' 到定点 O 的距离相等，且 $\angle AOA'$ 等于定角 θ，则称此映射为一个旋转变换，定点 O 称为旋转中心，此定角 θ 为旋转角. 旋转变换是合同变换.

2. 相似变换. 如果图形 F 与 F' 间存在一个一一映射，使得 F' 上任意两点所连线段的长与 F 上对应点所连线段的长的比为一定值，则称此映射为一个相似变换，称图形 F' 相似于图形 F.

关系-映射-反演的方法（relationship-mapping-inversion） 现代数学的基本方法之一. 一个数学问题可以视为具有某些关系的若干数学对象的集合，称之为一个"原象关系结构系统"，简记为 R. 问题 R 中需要确定的元素称为"目标原象"，记为 X. 对问题 R 施行某种映射 f 后，便得到一个新问题，称之为"映象关系结构系统"，记为 $\overline{R}$. 目标原象 X 在映射 f 下的象，称为"目标映象"，记为 $\overline{X}$. 如果映射 f 把 R 映射到 $\overline{R}$，且 $\overline{R}$ 可通过一定的数学方法把 $\overline{X}$ 确定出来，则称 f 为一个"可定映映射". 对于一个给定的数学问题 R 来说，当在 R 中不易确定出 X 时，如果能够选择一个 $\overline{R}$ 及一个可定映映射 f，把 R 映到 $\overline{R}$，并能通过一定的数学方法，在 $\overline{R}$ 中把目标映象 $\overline{X}=f(X)$ 确定出来，然后再通过反演把目标原象确定出来. 这种通过步骤："关系-定映-反演-获解"的数学解题方法，称为数学中的 RMI 原理. 可图示如下：



这种方法实际是变换、化归问题的方法. 数学中的许多解题方法，像"对数法"、"坐标法"、"参数法"、"图象法"、"换元法"、"复数法"以及形数结合的思想等，都是 RMI 原理的具体应用.

极限方法（method of limits） 现代数学的基本方法之一. 由"无限接近"的思想产生出来的一种数学方法. 在中国，极限的思想可以追溯到公元 3 世纪数学家刘徽的"割圆术". 他在《九章算术注》中给出了"割圆术"：在圆内作内接正多边形，当正多边形边数增加时，它的面积与圆的面积就"接近"一些，而当边数无限增多时，正多边形的面积可以无限接近圆面积，最后当"割之又割，以至于不可割"时，正多边形面积在边数无限增多时的极限就是圆的面积. 刘徽用这种"极限"方法求出了圆面积和圆周率的一个近似值 $\pi=3.14$. 近代数学中极限的思想更有所发展，例如欧洲文艺复兴时期的一些数学家也把极限思想用于各种"实用"的目的. 如求图形的重心，求曲边图形的面积，求球体及其他旋转体的体积等，正是在这种研究（以及对无穷极数的研究）中产生了极限概念，使得极限思想和方法有了突飞猛进的发展. 数学中的极限方法应用得十分广泛，例如用来求函数的导数，用来求某个函数在某一区间里的定积分（求面积、体积、重心等的问题都可以化归求积分的问题）等. 极限的概念是用有限来定义无限的，因而它是有限和无限互相转化的中介环节. 例如，通过极限可以把无限转化为有限或者相反，前者可举出无穷级数求和，后者可举出把一个函数展开为三角级数或幂级数等.

统计方法（statistical method） 现代数学的基本方法之一. 从总体中随机取出的样本里所获得的信息来推断关于总体的性质的一种科学方法. 它属于统计学的研究内容. 从数学的角度来研究统计方法的学科（或统计学的数学理论），称为数理统计学. 数理统计方法分为两大主要类型：描述统计方法和推断统计方法. 描述统计是研究组织、整理大量资料（数据），并用统计量描述这些资料的方法. 最重要的一种统计量是样本均值，即样本值的算术平均. 有时也采用中位数. 有时还需要对样本成员间的关系进行描述，例如要求样本值关于样本均值的离散度，此时引入方差和标准差等. 用样本均值和标准差可以对相应的总体特征作出估计，特别是对正态总体，这种描述是足够的. 推断统计方法是在随机抽样的基础上，根据部分资料（数据）推断总体的方法，即利用样本资料（数据）对抽出样本的总体作出结论或决定的方法. 推断统计的主要内容有：样本分配、参数估计、统计假设检验、方差分析及非参数统计等. 统计方法有着极其广泛的应用，不仅在自然科学中有重要的应用，例如生物学、化学、物理学、天文学等中的统计应用；也不仅在社会科学中同样起着重要的作用，例如在人口学、经济学和社会学等中的统计方法；并且统计方法已经进入到了国民经济的各个部门，形成了诸如工业统计、基本建设统计、商业统计、交通邮电统计、文化教育统计、司法统计等专门的统计方法.

近似方法（approximate method） 一种重要的计算方法. 指以近似数为计算对象的数学计算方法. 近似地表示某一个量的真正值的数（准确数），称为

近似数.在实际问题中所遇到的数，多半是近似数，因此，近似计算方法是极其重要的.近似数与其真正值的差别称为“误差”.近似数的截取方法有去尾法（舍弃要求的第几位后面的所有数字）、收尾法（对要求写出 n 位的数从第 $n+1$ 位起舍去，在第 n 位加上一单位）和四舍五入法，近似数的精确度通常用“绝对误差”和“相对误差”及相应的误差“界”来描述.通常用“有效数字”和“可靠数字”来表述精确度.在进行近似计算时，误差问题是基本的问题.在数学教学中，首先要求的，是弄清并遵守这样几个数字计算法则：

1.在近似数相加（加数不超过 10 个）或者相减的时候，小数位数较多的近似数，一般只要比小数位数最少的那个加数多保留一位，其余都舍去；计算结果应保留的小数位数和原来近似数里小数位数最少的那个相同.

2.在两个近似数相乘或相除时，有效数字较多的近似数一般只要比另一数多保留一个有效数字，其余的都舍去；在计算结果里从第一个不是零的数字起应保留的数字的个数和原来近似数里有效数字较少的那个相同.

3.在近似数乘方或者开方时，计算结果里从第一个不是零的数字起应该保留的数字和原来近似数的有效数字的个数相同.

在近似方法教学中，主要应使学生理解学习近似计算的实际意义，正确地建立起近似数的概念；同时使学生学会利用上述数字计算法则，进行合理的近似计算.

变换方法（transformation method） 现代数学的基本方法之一.利用变换来简化或研究某些问题的方法.例如把一种运算转化为另一种运算，以得到简化效果的方法；或者将一种几何图形变换成另一种几何图形，以解决一些用其他方法所不能或不易解决的问题等.变换方法是数学中应用最广泛、最有力的工具之一.在解微分方程时可以用变换方法，把解微分方程的问题变换为解代数方程的问题，从而转化为较初等的数学运算.现代数学中许多变换问题已成了专门的研究课题，例如拉普拉斯变换、傅里叶变换等.利用变换方法除了可以简化某些问题的解法外，还往往有助于深入理解所研究问题的实质.实际上，许多数学课题正是在变换中才得以认识的.例如，二次曲线的分类问题，又如对各种变换下不变性质的研究甚至构成了某些数学学科的主要内容.

几何作图方法（geometric construction method） 一种重要的数学方法.指在有限次使用某种特定工具的条件下，作出所要求的图形的方法.按规定寻找某种方法作出所求的图形的过程，称为解几何作图问题，解得的图形称为该几何作图问题的解.在传统的欧几里得几何课程中作图工具限于应用不带刻度的直尺和圆规，即通常所谓的“尺规作图”.在尺规作图中，如果根据所给条件能够作出所求图形，则称这个问题为作图可能问题，这时说这个图形是可作的.如果作不出所求图形，那么可分为两种情况：1.所求的图形实际上不存在，这时说这个问题是不成立的；2.所求的图形是存在的，但只用尺规无法作出（如三等分一个任意角），这时说这个问题是作图不可能的.

可用尺规进行的基本操作是：

1.过任意两个点可作一直线.

2.直线可以向其两方任意延长.

3.以任一点为圆心，以任意长为半径，可以作一个圆.

4.对两个已知的图形（直线或圆），如它们相交，可求其交点.

5.在已知图形（直线或圆）上，或已知图形外，可以任取一些点，但不得取具有某种特殊性质的点.

这些基本操作也称为作图公法.实际上，它们与欧几里得（Euclid）的几何公理是等价的，前三条本身就是几何公理.所谓几何作图就是有限次地进行上述几种操作得出图形来.作图方法的研究工作对数学的发展起了巨大的推动作用.笛卡儿（Descartes，R.）创建解析几何的直接动机之一，就是用代数方法来解决几何作图问题.解析几何的产生对作图方法有很大的影响：人们发现，作图公法所限定的几种作图基本操作归根结蒂是为着确定一些点，而通过建立坐标系就可以用代数方法求解，并且能够解决作图的可能和不可能的问题.凡用尺规能作出的数都是：“由表示单位长度的 1，经过有限次加、减、乘、除以及开平方所得到的实数.”由此立即可知几何三大作图不可能问题的不可能性.对这三个问题的研究促进了扩域及超越数理论的发展.作图不可能问题是人们最先遇到的数学上不可解的问题，它的研究促进了人们对不可解问题的认识，这种新的思想方法对数学发展起了重要的促进作用，例如对用根式求解 n 次（$n>4$）代数方程的不可能性的证明促使了群论的产生.以上所述限于尺规作图，实际上人们也对作图工具作进一步的限制时的作图方法进行了研究.例如，只用圆规或只用直尺来作图.人们已经证明，只用圆规就能完成尺规作图能完成的一切任务；而只要平面上有一个预先画好的圆以及它的圆心，只用直尺，也可以作出尺规能作出的所有图形来.

数学基础论（theory of mathematical foundation） 数学理论的基础.它是为数学的有效性建立可靠依据的学科.在数学基础研究中由于基本观点的不同而形成了各种流派，主要是：逻辑主义、直觉

主义和形式公理主义.

逻辑主义(logicism) 数学基础理论的一个分支.以逻辑为数学的惟一基础,认为数学可以化为逻辑的数学基础观.其主要论点是:数学概念可以从逻辑概念出发,经由明显的定义而得出;数学定理可以由逻辑命题出发,经由纯逻辑的演绎推理而得出.因此,全部数学都可以从基本的逻辑概念和逻辑规则推导出来,从而数学成为逻辑的分支.逻辑主义的主要代表人物是罗素(Russell,B. A. W.).逻辑主义的形成,可以分为数学理论的算术化和算术理论的逻辑化这样两个阶段.逻辑主义者虽然是失败的,但其工作对数学的发展做出了重要贡献,主要是:对排除悖论提出了一系列有益的见解;成功地把古典数学纳入了一个统一的公理系统,虽然这个系统不是纯逻辑的,但这样的工作都成为公理化方法在近代数学发展中一个重要起点;基本上完成了从传统逻辑到数理逻辑的过渡.

直觉主义(intuitionism) 数学基础理论的一个分支.其根本出发点是关于数学概念和方法的"可信性"考虑."可信性"的标准是"存在必须是被构造",亦即数学上的概念和方法都是构造性的.只承认按固定方式经有限步骤能够定义的概念和能够实现的方法才是有效的.故构造性亦称能行性.现代直觉主义者的代表是布劳威尔(Brouwer,L. E. J.).直觉主义派的基本观点决定了其在数学工作中的基本立场是:

1. 在无穷观的问题上彻底采纳潜无限而排斥实无限.

2. 否定传统逻辑的普遍有效性而重建直觉主义逻辑规则.

3. 批判古典数学,拆除一切非构造性的数学框架,重建直觉主义的构造性数学.

形式公理主义(formalism) 亦称形式公理学派.数学基础理论的分支之一.其观点如下:

1. 就"无穷观"问题而言,认为古典数学中包含"绝对无穷"(实无限)概念的命题确实是"超越人们直观性证据之外的东西".

2. 既然肯定了实无限概念,也就承认超穷集合的概念.

3. 主张对古典数学作形式化的奠定,使之成为形式公理化理论,而这个理论本身必须证明是协调的(无矛盾的).

形式公理学派的创始人是希尔伯特(Hilbert,D.).希尔伯特想把全部数学都纳入到形式公理化中去的计划,已为哥德尔(Gödel,K.)在1931年公布的"不完备定理"指明是不能彻底实现的.

数学课程(mathematics curriculum) 数学课程论的基本内容.指数学学习的内容、范围和进程,是经过组织的具有学科目的的教育内容.课程在教育学中具有哲学含义,在教育行政方面具有法令含义,在学校教育方面具有实践含义.一般地说,由国家制定的新法令意义的课程,称为正式课程;由地方教育行政机关、学校和教师制定的课程,称为实践性课程.正式课程既可指一个学习阶段(如九年制义务教育、高中、大学)的全部教育内容(包括课内、课外),也可指一门学科的教育内容.由国家确定的数学课程,一般是按照国家规定的教育方针,根据学生的身心发展状况,在一定时期内使学生达到规定的培养目标,完成规定的教育任务所设计的数学教学内容.在中国,设计数学教学内容的依据、目的、要求和各年级的课时安排,均由国家教育部(教育委员会),在教学计划中作出规定;而数学教学内容的教学目的、编排原则、编排方式和各项内容应该达到的教学要求,则由国家教育领导部门通过数学教学大纲来进行设计.有关出版社、个人可按照国家统一的教学计划、数学教学大纲编写数学教科书,经过试验,报国家教育部(教育委员会)审定通过后供各地学校采用.地方教育行政机关、学校和教师都可根据国家颁发的教学计划、教学大纲和自己的条件,设计地方、学校、班级的实践性课程.现代数学教育学要求,数学课程的设计者必须了解数学课程发展(过去、现在和未来),并且掌握课程的评价方法,使自己的设计进一步符合社会的发展和适合学生学习需要.

作为科学的数学(mathematics as a science) 数学教育学中相对于或区别于"作为教学科目的数学"而采用的一个名词,简称"数学科学".它指的就是通常所说的纯数学或基础数学.作为科学的数学,它的研究对象是现实世界的数量关系和空间形式,这种特殊的研究对象是数学区别于其他科学的基本特征.数学发展到现在,分支众多,体系庞大,其内容具有高度抽象性,其理论体系和推理方法具有逻辑严谨性,其应用也极其的广泛,具有普遍的适应性.它还有丰富多彩的思想、方法和特殊、完善的语言系统.这一切使得数学科学不仅在它的内容、意义和方法上,而且在它的思维方式上,对工程技术、自然科学、社会科学的学习、研究和应用,都有极大的作用.

作为教学科目的数学(mathematics as a teaching subject) 学校教学科目中的数学,简称"学科数学".弄清它与"数学科学"的联系及区别,是数学教育学的基本问题.两者的联系是,"学科数学"的内容是"数学科学"的初步的、基本的知识;"学科数学"(教材)的表述方式,仍然大体保持着演绎的特征,"学科数学"尽可能反映出"数学科学"的基本方法.从历史上看,数学科学的发展是由数学萌芽时期到常量数学(初等数学)时期,然后演变到变量数学

时期，最后发展到近现代数学时期，而人类由儿童到少年、青年的各个时期，比较适宜于学习的数学内容，恰好也是按照上述四个时期所排成的序列. 例如，小学阶段学习萌芽时期的数学，中学阶段学习初等数学，大学阶段学习变量数学与近现代数学. “学科数学”与“数学科学”的差别除了在深度、难度上有不同外，还有着许多本质上的不同：

1. 任务不同. “数学科学”的任务在于揭示客观世界中空间形式和数量关系等数学现象的奥秘，而“学科数学”的任务则在于向青少年一代传授最必要、最基本的数学知识. 前者虽然也受到一定社会因素的制约和策动，但它着重解决的是从数学的角度刻画自然和社会中的非心理因素的现象，因而具有一定的相对独立性；而后者着重解决的是如何传授知识的问题，它必须服从于一定社会需要和人的心理因素的制约，要把客观的数学规律同人的主观认识规律统一起来.

2. 认识的主体不同. “数学科学”是以数学专业工作者、数学家为主体，由他们用数学专著的形式把认知的结果反映出来，而作为教学科目的数学，则以学生为认识主体，表现为数学教材.

3. 结构特征不同. “数学科学”表现为数学专著结构，它的特点是科学的系统性和结构的严谨性，而且不断追求统一和集中；而对于“学科数学”来说，这种统一和集中的原则，是作为数学的基本精神和方法来看待的，因而同样把它反映在数学的基本结构中. 除此之外，数学教材的结构还要考虑学习者的认识的过程和结构.

4. 思维方式不同. 作为“数学科学”，是用尽可能严密的演绎体系来反映，并以形式逻辑和抽象思维作为其外部特征，而作为“学科数学”，它强调正确地反映科学认识的辩证思维过程，以及形象的、直觉的、归纳的和类比的数学探索性思维，同时出于学会科学演绎和掌握足够容量的知识的需要，保留了演绎科学的特征.

数学教学计划(mathematics teaching program) 教学计划的一个分科，是数学教学的依据. 教学计划是由国家教育行政机关颁发的. 一般说来，它是按某一学制制定的国家法令依据、指导思想、基本原则，规定这一教学计划的培养目标、适用范围、时间安排(全年教学时间、周课时、每课时时间、课外活动和家庭作业时间等)、课程设置及其说明(对知识、技能、能力的要求)等. 数学教学计划可以包含在上述教学计划之中，也可以在总教学计划的后面单独行文. 它不仅是教学的依据，而且也是制定教学大纲和编写教材的依据，同时还是对学生进行考试(不是选拔考试)以及进行教学评价的依据.

数学教学大纲(mathematics teaching syllabus) 教学大纲的一个分科. 指由国家教育行政部门按照教学计划制定的关于数学课程的文件. 数学教学大纲包含以下内容：

1. 数学的研究对象和它在社会中的地位作用，数学课程在这一学习阶段中的地位和作用，以及选择、编排数学教学内容的指导思想.

2. 数学课程的教学目的. 一般包括基础知识、基本技能、能力(如运算能力，逻辑思维能力、空间观念或空间想象能力、分析和解决问题的能力)，以及品质态度和辩证唯物主义观点等方面.

3. 依据教学目的，确定选择和编排教学内容的原则. 诸如处理必学内容、选学内容如何选取和分配，各数学分支及其教学内容在本课程内如何编排，与其他学科如何联系等的原则.

4. 根据教学目的确定教学注意事项. 如明确依据，重视思想教育，理论联系实际，因材施教，重视基础知识、基本技能和能力的培养，重视做练习，注意复习巩固等.

5. 各分支的教学内容及其在各阶段末的总要求和在教学过程中的具体要求. 这种内容和要求可以分成几种水平，以利因材施教.

数学教学大纲不仅是教学的依据，而且也是编写数学教材、对学生进行考试(不是选拔考试)以及进行教学评价的依据.

数学课程标准(mathematics curriculum standards) 亦称数学课程纲要. 与数学教学大纲相类同的文件(参见“数学教学大纲”).

数学教学对象(objects of mathematics teaching) “教谁”的问题，这是数学教学过程的四要素(为什么教、教谁、教什么、如何教)之一. 从教育性质来划分，数学教学对象有公民和非公民的区别(因而有义务教育阶段和非义务教育阶段之分)；从学习者的年龄来划分，数学教育对象有儿童、少年、青年和成人的区别；从学习范围来划分，数学教学对象有一般学生、文科学生、理科学生、数学专业学生的区别；从学习途径来划分，有面授生、函授生、广播、卫星电视教育学员的区别；从学习条件来划分，数学教学对象有基础好坏、师资强弱、时间多寡、设备优劣的区别，家庭、周围环境的差异，学习者心理特征(如注意力、想象力、记忆力等)和学习态度、对数学的爱好程度上的差异等. 数学教育的任务之一就是综合处理上述四要素，使得性质、年龄、范围、学习条件、途径相同或大致相同的教学对象能够尽可能克服其他方面的差异，从而大面积提高数学教学质量.

数学课程特性(characteristics of the mathematics curriculum) 数学课程的基本特点. 数学课程具有以下特性：

1. 科学性. 数学是研究现实世界的数量关系和

空间形式的科学，其中的概念、定理、公式都是经过前人长期探索和逻辑论证而确立的科学真理，因此科学性是数学课程的主要特性.

2. 系统性. 代数、几何、分析到 19 世纪末都相继奠定了严格的逻辑基础，使数学成为一个严密、系统的整体结构. 因此作为符合数学知识结构要求的数学课程具有较强的系统性.

3. 教育性. 数学科学含有丰富的辩证唯物主义因素，要用辩证唯物主义观点阐述数学课程内容，体现数学来源于实践，又反过来作用于实践的辩证唯物主义观点，体现运动、变化、相互联系的观点；适当介绍中国数学史，激发学生的民族自豪感；通过数学课程的实施养成学生良好个性品质.

4. 实用性. 数学课程内容具有应用广泛性，可以运用于解决社会生产、社会生活以及其他学科中的大量实际问题，运用于训练人的思维.

5. 可接受性. 数学课程的内容及其抽象性和概括性的程度要适合学生的认知发展水平，密切联系学生已有数学基础知识的实际，使学生得以接受.

数学课程发展(curriculum development in mathematics)　数学课程演变的历史、过程及趋势. 指包括数学课程改革过程中所从事的一切革新、创造、实验研究、实施和推广在内的一项系统工程. 数学课程发展是 20 世纪初和 20 世纪 50 年代以来世界范围内兴起的数学课程改革的活动. 它含有以下三个方面的内容：

1. 对全民族的. 根据本民族的文化、语言特点、数学课程的传统和社会发展的需要，结合学生的年龄特征和数学学科的要求，设计数学课程、制订数学教学大纲和编写数学教材，并研究如何帮助所有的学校、全体教师达到既定目标.

2. 对教师的. 主要是指师资培训，包括职前的和在职的培训. 帮助教师不断更新数学知识，提高教学水平，鼓励教师参与课程研究活动.

3. 对学校的. 主要是指给学校创造足够的教学条件，特别是配备足够的合格教师，其中也包括配备电子计算机等现代化的教学手段，进行计算机辅助教学和计算机管理教学.

数学课程发展的理论方案过去出现过若干个，其中最主要的有：行为主义方案、“新数”方案、结构主义方案、形成法方案、整体化教学方案等.

数学课程发展的动力(dynamics of curriculum development in mathematics)　数学课程发展的力量源泉. 推动数学课程发展的动力来自各个方面，其中最基本的，也是世界各地数学课程发展的共同的动力有如下几种：社会的、数学的和教育的动力. 在推动数学课程发展的所有动力中，社会的动力是首要的. 社会上经济的和技术的发展对数学教育提出了新的要求，数学课程的设置必须与社会的发展相适应，同时经济和技术的发展也为数学课程的发展提供了必要的条件. 20 世纪，数学取得了惊人的发展. 结构观点的形成，新的分支层出不穷，计算机的发展引起了数学应用和研究重点的转移. 这一切势必推动各类学校数学课程的发展，引起数学课程的内容、方法和结构上的变革. 新的教育理论或教育研究方法也必然会成为数学课程发展的动力. 例如，皮亚杰(Piaget, J.)的教育理论和布鲁姆(Bloom, B. S.)的教育研究方法都推动了数学课程的变革.

行为主义方案(the behaviorist approach)　一种数学课程方案. 其目的在于通过数学课程的变革来改革数学教与学的方法，使数学教育能取得更有成效的一种行动方案. 它的心理学基础是刺激—反应学说，即认为任何学习过程都可以构造成一个或一组适当的刺激—反应的程序，学习过程的效果表现为“客观上”能够觉察的行为的改变. 因而在这个程序里，学习目的决定所要求的行为变化，目的是否达到(即行为变化)是可以检查的；简单的目的通过个别的和单独的刺激来达到，较复杂的目的要通过简单目的的叠加来实现，这些都要经仔细考虑构造出来. 行为主义主要研究扩充和精炼行为控制的手段. 这种方案最明显和一致的应用是程序学习和计算机辅助教学. 行为主义方案的优点在于它的内容具有完整的结构，教学过程是从明确规定了的起点一步步地展开，朝向精确的目标，同时也向教师提供了一些手段，向学生提供了清楚易懂的指导. 但它对如何提高学生学习兴趣和充分发展其学习潜能以及数学优秀生的培养则考虑甚少，因而有一定的局限性.

“新数”方案(the “new-math” approach)　一种数学课程方案. 它是 20 世纪 50 年代末和 60 年代初兴起的，主要涉及数学课程内容的现代化，把数学课程的改革看成是内容的更新. 这个方案是法国著名数学研究团体——布尔巴基(Bourbaki, N.)小组工作的一个间接的副产品，在他们的论著中，提出了要以统一的语言更精确地重新组织数学，以强调数学的结构. 在这种数学思想的倡导下，大学的数学教学从内容到方法都以一种全新的组织形式和语言呈现. 由此而来的“新数”方案的基本原则是：要把内容的公理化的演绎体系变成中小学数学教学的中心，那些不从属于演绎方式的内容，如数学的应用，都要放到次要的地位. 因而，中学的某些传统课题，如欧氏几何、三角等都作为没有重要作用的内容而被删掉，代替它们的是集合论的语言和知识，以及概率、统计和某些计算机科学的知识，甚至还包括映射、群、向量空间等词汇及微积分和向量代数的初步知识. 该方案设计的数学课程要求儿童在学校生活早

期阶段所接触到的数学内容和语言，却没有考虑以什么作为教材以及如何系统组织教学，特别是缺少实际生活的支持，以及很少顾及到儿童接受“统一数学”的年龄因素，因而在实施中遇到许多困难. 它在初级水平下引入这些较高数学领域中的基本概念，甚至它的目标也几乎只限制在为那些在大学继续研究数学的人做准备.

结构主义方案（the structuralist approach） 一种数学课程方案. 其特点是如何把数学科学的结构教给认知结构水平较低的学生. 它的主要倡导者布鲁纳（Bruner, J. S.）提出：人的认知结构是已获得的概念与思维能力的结合，简单的认知结构通过不断加入新的概念而发展成为更复杂的认知结构，在发展的最高阶段，认知结构相当于包含所有概念和过程的要素的科学结构. 数学教学就是要发展向认知水平较低的学生传递这种数学科学结构的过程. 而达到该目标的手段是“发现学习”，同时它也是数学教学的目的，即让学生获得自己学习数学知识的能力. 基于上述认识，该方案引入了“螺旋式”课程，以保证螺旋式地在更高知识水平下重新处理同一数学对象. 在认知的较低阶段，数学对象是学生凭借其环境经验地发现的. 数学课程发展的主要任务是为体现数学基本结构的发现过程而设计有趣的和有意义的教学模式. 结构主义方案是在“新数”方案遭到非议的基础上改革而来的，它在数学课程发展中更多地考虑了认知心理学的研究成果.

形成法方案（the formative approach） 一种数学课程方案. 它是在两项假定的基础上进行的：

1. 任何学校教育的目标都是赋予学生最理想的基本认知能力和充满激情的态度.

2. 这些因素可以根据个性特点加以描述，即创造力、智力、成就、动机等.

在发展这些因素的过程中，方法和内容是由个性发展的结构决定的，而不是由数学科学的结构决定的. 因此，该方案的课程发展人员的任务是发现和恰当地安排最适于发展预期因素或促进这些因素发展的数学内容和方法. 各门数学学科在教学过程中以尽可能独到的方式和综合的程度相互关联. 在形成法方案的研究中，瑞士教育心理学家皮亚杰（Piaget, J.）通过对数学概念形成的研究表明，儿童认知能力的发展是有阶段的，由低到高从具体的运演水平到形式运演水平，逐级抽象. 因而，该方案就是要根据这些水平来设计数学课程，以促进儿童认知向更高水平发展. 形成法方案的特点在于它较多地考虑学生的心理发展，但如何兼顾数学科学知识体系，则是一个仍待解决的问题.

整体化教学方案（the integrated-teaching approach） 一种数学课程方案. 它和形成法方案有相同的认知理论基础，而且是同时开展研究的. 但整体化教学方案强调的是学习内容的选择必须适合学生的兴趣和需要，即必须考虑实际需要和与他们的个人及职业生活有关的问题. 来自实际的各种问题决定着教学的内容，以此来推动学生的个性发展. 由此，该方案教学的问题所涉及的领域不止一个学科，即不能用一门学科的素材、概念和见解加以解答. 因此，整体化教学方案取消了分科教学，而是根据实际问题的需要把各科结合起来. 在此方案中，数学的特点是数学化和提供把实际情境和数学系统联系起来的模型. 数学思想的实际意义变成了教学过程和学习过程的主题. 整体化教学方案的课程设计强调了数学学习的直接意义和应用，有助于激发学生的学习动机，但对于数学科学本身的系统性和内在逻辑的学习，以及所能达到的数学理论高度都是值得进一步探讨的.

混合数学（integrated mathematics） 中国近代曾采用的一种数学课程名称. 它最早出现于 1923 年 6 月，北京政府教育部公布的“新学科各科课程纲要”，它在初中“把算术、代数、几何、三角四项联络贯通成为一种混合数学”. 按该课程纲要编写的混合数学，有商务印书馆 1923 年起开始出版的“新学制初级中学用”的《混合算学教科书》和中华书局 1925 年发行的“新中学教科书”《初级混合数学》等. 后因各地教混合数学的“师资难得”，都另编新的或修订原有的分科教科书. 1929 年，由南京政府教育部颁行的《初级中学课程暂行标准》提出混合教学“只以师资与课本尚乏相当之准备，实施自多扞格. 各科中最感困难者，当推算学与自然两科”，因此“算学及自然，兼订混合制与分科制两种标准，可由各校自行采用”. 至 1941 年公布施行的《修正初级中学数学课程标准》删去了“本科用分科并教制或混合制，可由各校自行酌定”这一条，混合数学遂明文取消.

大众数学（mathematics for all） 一种数学课程观点. 这种观点认为，在数学学习中，不同的人可以达到不同的水平，同时又存在一个人人都能达到的水平. 数学课程应建成大众数学的思想是由著名的荷兰数学教育家弗勒登塔尔（Freudenthal, H.）倡导，并将其作为数学教育的一项主要原则. 他认为，数学起源于现实，它是常识的系统化，常识经系统化成为规则，这一规则又变成了高一级的常识，以此发展下去，形成了庞大的数学科学的等级体系. 人们在同一个社会中生活、工作，背景是一致的，都会碰到某些问题，因此都需要一定的数学并要求对它的掌握达到一定的水平. 当然，由于人与人之间存在着差别，以及所从事的工作性质不同，每个人所能达到及所需达到的水平是不同的. 建立大众数学的原则并不只是指教给所有的人同样的数学，而是指学校必

须将数学教给所有的人，使得每一位正常智力的学生都达到他所能达到的水平.从这种意义上说，数学教育的目标就是努力提高所有学生都必须达到的水平.大众数学的思想在数学教育界有很大的影响，正逐步为世界各国研究人员所接受并付诸于实践.

数学课程的类型（types of mathematics curriculum） 数学课程的组织形态和分类形式.它是在一定的数学教育目的和设置数学课程的思想指导下形成的.对数学课程进行分类的目的旨在使课程能明确、清晰地体现不同的社会需要，适应不同类型的学生学习.划分数学课程类型的原则可以不同，分类原则不同，课程类型也就不同.主要依据数学内容，是分科形式组织的，还是以统一形式组织的，可以有“分科的数学课程”和“统一的数学课程”；依据数学教育内容，是重科学知识的体系，还是重儿童生活经验来划分，就有“以学科为中心的数学课程”和“以儿童为中心的数学课程”.

以学科为中心的数学课程（subject-centred mathematics curriculum） 数学课程的类型之一.从数学科学中选取部分知识内容，按照数学的逻辑顺序组织而成的学校数学课程.以学科为中心的数学课程是以捷克教育家夸美纽斯（Comenius，J. A.）、英国教育学家斯宾塞（Spencer，H.）为代表的学科中心课程论在数学课程设计中的反映.以学科为中心的数学课程，强调以社会实践为基础的间接知识，认为只有从系统的数学知识本身出发，才能保证学生牢固地掌握它，以满足社会的需要，而且可以使学生在较短的时间内以较少的精力获取人类长期积累起来的数学知识.中国20世纪50年代、60年代制定的数学教学大纲和依据这些大纲编写的教材，强调了给学生系统的基本科学知识，强调了基础知识的教学和基本技能的训练，强调了代数、几何各自的系统性，是属于以学科为中心的数学课程.

以儿童为中心的数学课程（child-centred mathematics curriculum） 数学课程的类型之一.以一系列儿童自己组织的数学活动而形成的数学课程.儿童通过自己的数学活动，获得经验，培养兴趣，解决问题，锻炼能力.以儿童为中心的数学课程是以杜威（Dewey，J.）为代表的儿童中心课程论在数学课程设计中的反映.在以儿童为中心的数学课程中，既不传授系统的数学知识，也没有统一的教科书，而是强调儿童的需要、兴趣和个性，强调儿童通过自己的数学活动学习、掌握数学知识，获得最有用的经验.日本的综合教育基本上属于以儿童为中心的数学课程.以儿童为中心的数学课程的优点在于，注重学生自身的数学活动，注意学生学习数学的兴趣和爱好，加强了数学学习和数学应用间的联系.它的缺陷是忽视传授系统的数学知识.

以问题为中心的数学课程（problem-centred mathematics curriculum） 数学课程的类型之一.中国古代数学强调以问题解决为中心，以算法为主线的数学.如《九章算术》即为一代表作.20世纪，美国改造主义教育学派的问题中心课程论在数学课程设计上也反映了这一思想.这个学派主张围绕着“改造社会”的“中心问题”来组织学校课程，使学校教育成为建立教育者主观设想的“社会新秩序”的工具.以问题为中心的数学课程主要分为以生活问题为中心的课程和核心课程.核心课程介于“以学科为中心的课程”和“以儿童为中心的课程”之间，它打破了学科界限，从一些由课程设计者编制的问题出发，把两三门学科结合起来（即把数学知识与其他学科的知识结合起来），学生在教师指导下解决这些问题，通过解决问题的一系列活动学习数学知识.以生活问题为中心的课程基本上与核心课程相似，所不同的是，课程内容侧重于生活问题.这种课程既强调内容，又强调学生的兴趣与活动.中国在“文化大革命”中强调“联系实际”而提出“以典型产品带教学”的数学课程.近年来，英、美等国实施的“问题解决”教学就是以问题为中心的数学课程设计的典型例证.

分科的数学课程（compartmentalized mathematics curriculum） 数学课程的类型之一.按照不同的学科来组织和设置的数学课程.这种学科的划分通常以数学的不同分支为依据.如中国曾经长期采用过的在中学分代数、平面几何、立体几何、解析几何和微积分初步等数学课程，就是一种分科的数学课程.数学课程按不同学科来设置，是近代数学课程改革的结果，是社会生产的发展和科学进步在学校数学课程设计中的体现.在数学教育发展史上，分科的数学课程的诞生，使得学校的数学教学内容更加丰富、多样，具有重要的历史推动意义.但随着科学的高度发展，在学校里，学科的增加与并存，有可能导致教学内容过多，不利于学习者身心的发展.因此，在现代数学课程的改革过程中，又出现了对不同学科进行综合的趋势.

统一的数学课程（unified mathematics curriculum） 数学课程的类型之一.指那种打破了数学不同分支之间的界限，加强了有关学科内容上的联系的一门综合性较强的数学课程.例如，美国编制的《统一的现代数学》，打破了算术、代数、几何、三角的分科体系，用现代数学的集合、关系、映射、群、环、域等基本概念重新组成综合的体系，这是统一的数学课程的典型范例.中国2000年新编高中数学课本（试验修订本），也是综合的数学课程教材.自进入20世纪以来，数学科学在高度分化发展的同时，还进行着相反的统一的过程，进行着不同领域之间的结构、思想、方法互相渗透的过程.统一的数学课程

是数学科学的发展在学校数学课程的设计中的反映．一般地，这类课程强调数学科学的基本结构，强调用数学的基本结构统一地处理各学科的内容．统一的数学课程的优点在于它重视各学科之间的联系，但它往往忽视学生心理发展的特性．

区分的数学课程（differentiated mathematics curriculum） 数学课程的类型之一．按照学生"数学能力"的水平或"数学学业"的程度，为不同的学生或班组提供的不同类型的数学课程．设立区分的数学课程的原因是课程设计者发现，在机会相同的条件下不同学生的数学成绩差距很大．区分的数学课程可以采取不同的形式，可以以学习内容为基础来区分，也可以在同样的数学课程中按进度区分，还可以在同样的课程、一致的进度下，通过给有能力的学生更深入的材料、更难的练习、更大范围的应用等手段来区分．例如，中国 1984 年制订的《高级中学数学课本》分甲、乙两种版本就是一种区分的数学课程．设立区分的数学课程是更深入地研究数学课程理论和实践的结果，它为使儿童的数学能力得到更好的发展提供了一种有力的教育措施．如何设立区分的数学课程才能达到有效区分的目的是目前世界各国数学课程研究人员都在考虑的问题．

必修与选修的数学课程（compulsory and elective mathematics curriculum） 区分的数学课程的一种形式．把数学课程区分为同一学年或同一学习阶段内所有学生都必须学习的和依据不同学生的特点与出路，允许学生个人自由选择的两类．如中国 20 世纪 90 年代中期开始在天津、山西、江西实验的，在高级中学设立了必修数学课程，在高三年级又设立限定选修的数学课程．现代社会一方面要求每一个人具备一定的解决社会面临问题的各种能力，另一方面又要求充分发挥各自的个性，这就导致学校既要使儿童受教育的机会均等，又要对每个人施以适合其能力和个性特长的多样教育．数学课程设立必修与选修制正是基于这种要求而诞生的．哪些数学课程应设为必修课，应开设哪些数学选修课，也是当今世界上许多国家的数学课程研究人员正在研究的课题之一．

数学教材（mathematics teaching materials） 供教师讲授学生使用的数学教学材料．它一般是根据一个国家或地区教育行政部门颁布的数学教学大纲（或课程标准）编制的，它要在其中体现教学大纲规定的教学目的，包括教学大纲列出的教学内容，并达到教学大纲提出的各项教学要求．从很多国家的情况来看，现今的数学教材已成为指导学生学习数学的配套的材料系列，其中以教科书为主体，包括课外习题集、教学挂图、学习卡片、课外读物、计算机软件、幻灯片、电影片、录像片等辅助材料．从发展趋势看，通过计算机学习数学的作法已引起普遍重视，并正在一些国家逐步推开，这势必会不断提高计算机软件在中学数学教材中的地位．

数学教科书（mathematics textbooks） 亦称数学课本，供学生用的数学学习材料的主体部分，习惯上仍称数学教材．数学教科书的编写要以数学教学大纲为依据，在体现其教学目的、教学内容，达到其教学要求的前提下，教科书编者可根据需要和自己的见解与经验，确定知识内容的体系，设计包括学习知识、训练技能、发展能力、培养态度等方面的整体方案，选择某种教材编写方法进行编写．数学教科书一般由若干章组成，每一章又包括若干节，每一节是一个相对独立的学习单元，一般包括知识讲解、例题、习题等．在每一章里，有些教科书还安排了引言、小结、复习题、阅读材料、实习作业、研究性课题等．

数学教学参考书（mathematics teaching reference books） 教学参考书的一种分科．指同数学教科书相配合、供教师在教学中使用的参考书，有时亦称数学教学指导书．旨在帮助教师了解教科书的编写意图，更好地掌握教科书，搞好教学．数学教学参考书通常包括以下几个部分：指出全书及其各个部分的教学目的要求；分析教科书里各部分内容的地位作用及与前后知识的联系，并指出其中的重点、难点和关键；对各部分内容的教学提出建议，包括如何讲解重点、如何突破难点、如何设计教学过程、采用哪种教学手段等；提供一些参考资料，如数学史料、典型教案等；提供教科书里习题的部分或全部答案、提示或简解．

数学课外习题集（mathematics supplementary exercise books） 数学教材系列品种之一．作为数学教科书里习题的补充，可与教科书配合使用．供学生根据各自情况从中选用．

数学教学挂图（display diagrams in mathematics teaching） 数学教材系列品种之一，是教师教学和学生学习的辅助材料．挂图常用于展示教科书里的某些疑难内容（如立体几何里的某些复杂图形），以便于理解．挂图还常用于对某一部分知识进行归纳、整理，表明它们之间的逻辑关系和横向联系，因而在复习阶段展示这种挂图，有助于学生从整体上掌握认识这些知识的体系，使记忆更加牢固．现在计算机辅助教学、图形计算器等也逐步得到引用．

数学通用教材（popular mathematics teaching materials） 一种统编教材．1977 年，国家教育部决定改革"文化大革命"中各地编写教材的状况，从全国调集 200 多名专家、教师和人民教育出版社的编辑人员，用全国中小学教材编写工作会议的形式重新编写全国通用的中小学教材，亦有人称这套教材为统编教材．数学教材是分别根据教育部 1978 年 2

月颁布的《全日制十年制学校小学数学教学大纲》和《全日制十年制学校中学数学教学大纲》编写的，并于1978年秋季开学时在全国小学和初中一年级全面试用，课本(教科书)上并署以“中小学通用教材数学编写组”编.

数学教材的弹性(flexibility of the mathematics teaching materials)　数学教材的选择性.指数学教材在达到教学大纲规定的基本要求的基础上，适应喜爱和擅长数学学生的学习要求或毕业后参加工作的学生的需要，增加部分选学内容，从而使教材具有一定的弹性.它是为使教材体现因材施教、发展个性而采取的一种手段.在教材中体现一定程度的弹性，已是各国中学数学教材的较为普遍的作法.具体作法大体上有两种：

1.安排一些选学内容和课外阅读材料.

2.采取适当方式提高某些必学内容的教学要求，如补充未列为基本要求的公式、定理的证明过程，增加一些较难的例题和习题等.

对上述有弹性的内容，教材上常用标记“*”号或排印其他字体的文字等方式标明.

数学教材的体系(system of the mathematics teaching materials)　数学教材的框架结构.指在一个学习阶段的数学教材中知识内容的整体结构和编排次序.比如中学数学是由初等代数、初等几何、函数、三角、概率统计等几方面知识组合而成，作为教材可以采取一些不同的体系.从各国数学教材情况看，其体系大致可归为三类：

1.用统一的观点来处理整个数学内容，如美国在20世纪60年代初出版的《统一的现代数学》，中国于1997年编写的高级中学数学试验课本.

2.将整个内容按数和形归为两类分别安排，例如，中国20世纪80年代、90年代的中学数学课本，从初中二年级到高中二年级，代数、函数、三角、概率统计等知识组成一个系统，平面几何、立体几何、平面解析几何等知识组成另一系统，教学时两条线齐头并进.

3.将整个内容分成几大部分，各阶段分别学习每个部分中的一些内容.各国的小学数学教材、日本的中学数学教材大都采用这类安排.如日本的初中数学，将整个内容分成数与式、图形、函数、概率统计四个部分，每学年在这四个部分各学习一些内容.

数学教材的编写(writing of mathematics teaching materials)　形成数学教材的步骤之一.通常分为以下几个步骤：编者学习、领会作为教材编写依据的教学计划和数学教学大纲，力求准确地贯彻它们的意图；向工厂、农村、学校等各个方面作社会调查，了解社会对数学知识的需求和对编写教科书的意见；根据教学大纲中规定的知识内容和学习要求，确定教科书的体系，并按照教科书编写的一些原则进行编写.中国按照国家教育部门的规定，编出教科书初稿后，应对初稿(或其中一部分)进行小范围试验；根据试验结果对教科书进行修改，编出送审本，送全国中小学教材审定委员会审查；通过审查后，可以正式出版，供各地学校选用.编写教科书的原则一般包括：处理好科学性与可接受性的关系，系统性与循环性的关系，掌握知识、训练技能与培养能力的关系，以及教科书要富有启发性、趣味性、可读性等.

数学教材的审定(examination and approval of mathematics teaching materials)　形成数学教材的步骤之一.指在颁布全国统一教学大纲的国家里，所编各科教材一般由国家最高教育行政部门或其所属专门机构审定.如日本的中学各科教材均需送文部省审定.1986年中国国家教育委员会成立了全国中小学教材审定委员会，负责全国中小学各学科教学大纲和教材的审定.该委员会由国家教育委员会聘请专家、教师和教育行政领导干部组成.和各科教材一样，数学教材则由审定委员会下设的数学学科审查组先行审查而后通过审定.凡经委员会审定通过的中小学数学教材，将列入国家教育委员会批准推荐的中小学数学教材及教师用书目录.该委员会还颁布了《中小学教材审定标准》，其中就教材内容、教材体系、教材的文字、插图、音像教材、教学挂图，以及教材中的练习和作业等，都提出了一些原则性的要求.

数学教学论

数学教学论(theories of mathematics teaching)　数学教育学的一个分支.它主要研究数学教学过程的规律.范围包括：数学教学的目的和任务、数学教学的过程、数学教学的原则与内容、数学教学的组织形式与课的类型、数学教学的手段与方法，以及教学效果的检查与评价等.

数学教学过程(process of mathematics teaching)　数学教学论的基本概念之一.指数学教师借助于一系列辅助手段(教科书、直观教具、教学技术手段)来实现的一种复杂的控制过程.教学控制过程包括接收、加工、储存、信息传输.在教学过程中发生教师和学生之间两个方向的信息传输：教师把他从大纲、教材、数学文献和教学法文献中得到的信息，以及学生水平和思维能力方面的信息进行加工，并且使用一定的手段把数学的信息传输给学生.学生接收从教师、教科书和其他来源得来的信息并且加工，再按教师的要求用答问、练习和解决问题的形式把关于掌握教材的质量和思维发展程度的信息反馈给教师.后者是教学过程实质性的组成部分.在教学

的每一步，教师都要估计学生思维活动的水平、思维的发展、概念的形成和掌握教材的质量，这样才能进行有效的教学.

数学活动的教学(teaching of mathematical activities)　一种教学方式. 它是根据学生在学习数学的过程中的数学思维活动而进行的教学. 它相对于“数学结论的教学”而存在. 由于“数学”可以表示一种思维活动(数学活动)，或者表示这种活动的结果(理论)，通常把相应的数学教学分别称为“数学活动的教学”及“数学结论的教学”. 前者指以“数学活动”为统称的那些思维活动教学的一个领域，后者指数学理论初步的教学的领域. 传统的数学教学法只强调“数学结论的教学”是比较片面的，“数学活动的教学”则是针对其弊端而发展起来的现代数学教学法，以致有人称之为“数学教育学”的一个历史新阶段. 存在“数学活动教学”的根据是，学生发现那些在科学上早已被发现的东西的时候，他是像第一次发现者那样去推理的. 数学教育的任务是形成和发展那些具有数学思维(或数学家思维)特点的智力活动结构，并且促进数学中的发现，因此数学活动的教学在数学教育中具有重要的积极意义.

数学结论的教学(teaching of mathematical conclusions)　见“数学活动的教学”.

数学教学目的(aims of mathematics teaching)　数学教学论的基本概念之一. 它是教育方针和培养目标在数学教学中的具体体现. 它是确定数学教学内容和选择数学教学方法的基本依据，是数学教师教学工作的指南，是教学质量评估的主要标准. 因此数学教师必须自觉掌握数学教学目的，并且在整个教学过程中贯彻执行. 在数学教育史中曾经存在两种基本倾向：

1. 实用主义倾向，把数学看作有助于解决实际问题的实用课程.

2. 形式陶冶的倾向，把数学看作锻炼思维的课程.

这两种基本倾向在不同历史时期有不同的发展，在现代数学教育中也有不同程度的反映. 中国的学校数学教学目的是根据教育方针培养德、智、体、美、劳全面发展的，有社会主义觉悟、有文化的劳动者. 一般地，对数学教学目的的规定，包括了三方面的内容：

1. 知识和技能方面的要求. 切实学好现代社会中每一个公民适应日常生活、参加生产和进一步学习所必需的数学基础知识与基本技能(一般称为“双基”)，包括基本的数学思想和数学方法.

2. 发展能力方面的要求. 培养数学运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力，逐步形成分析和解决实际问题的能力.

3. 思想教育方面的要求. 结合数学教学进行辩证唯物主义观点的教育、爱国主义教育、个性品德教育.

三个方面相辅相成是一个整体，如学好“双基”是培养能力的基础，也是形成辩证唯物主义观点的重要组成部分；反之，能力的发展，为学好“双基”、进行思想教育准备了条件；思想教育对学好“双基”、提高能力又会产生重要的动力.

数学知识教育(mathematical knowledge education)　数学教学的目标及手段之一. 指数学知识传授本身所具有的教育意义. 数学知识传授，不单是使学习者掌握数学领域内的各种基本事实，形成数学基本技能，而且要使之了解各种基本事实的联系、各种基本事实与现实世界的关系，形成数学知识特有的结构性的图景. 数学知识教育往往是国家公民教育的组成部分，又是多方面的后继学习或从事各种工作的基础教育.

数学双基教学(teaching of fundamental knowledge and elementary skills of mathematics)　数学知识教学中一个常用的术语. 指数学基础知识与基本技能的教学，简称双基，即在现代社会中每一个公民要适应日常生活、参加生产和进一步学习所必需掌握的数学知识和必须形成的数学技能. 这些并非泛指的每一项知识与每一种技能. 所谓基础数学知识指的是比较系统的，十分重要的，不可或缺的概念、定义、公理、定理、公式、法则的知识体系；所谓基本数学技能指的是比较合理的运算、变形、作图、推理、论证、比较准确的口头或书面表述等经常用到的技能. 经验证明，“双基”也是培养和发展能力的基础.

技能(skill)　教育学的基本概念之一. 指个体运用已有的知识经验，通过练习而形成的智力动作方式和肢体动作方式的复杂系统. 技能带有一定的操作技术性质，它以动作(行为)方式为人们所掌握，技能与能力不同.

1. 技能是个体身上固定下来的复杂的动作系统，而能力则是个体顺利完成活动任务的直接有效的心理特征；技能是对动作和动作方式的概括，而能力则是对调节认识活动的心理活动过程的概括，是较高水平的概括.

2. 学校教育的任何一个教学科目，不仅要教给学生系统的知识，同时还要形成一定的技能，知识和技能都是具体的教学内容，而能力则是教育所要达到的目的.

3. 知识、技能的掌握，并不意味着能力的高低. 在学校教育中，出现所谓“高分低能”的现象，说明了在教学过程中，反映学生掌握知识、技能的分数可能很高，而他们分析问题和解决问题的能力却仍有可能很低.

数学文化教育(mathematical culture education) 数学教学的目标及手段之一.指数学的文化价值所产生的可以增进受教育者文化素养的功能(参见“数学的文化价值”).

数学思维教育(mathematical thinking education) 数学教学的目标及手段之一.指数学在提高人的数学观念和思维意识,增强人的思维能力、改善人的思维品质方面的功能(参见“数学的智力价值”).

数学概念的教学(teaching of mathematical concepts) 数学教学的具体任务之一.数学概念是数学知识体系的“细胞”,是建立数学理论的基础.正确地理解、掌握和运用数学概念是学好数学理论的前提.数学概念的教学是一项非常重要的任务,一般来说它要经历以下三个步骤:

1.引入概念.这是概念教学的关键.要注意阐明概念的存在性、必要性和合理性.引入方法多种多样,可对数学模型直接观察而引入新概念,也可以通过计算、推理、作图来发现新概念.但是,任何一种方法都要符合学生认识发展的规律,以及概念发生发展的规律.

2.讲解概念.这是概念教学的核心.要揭示数学概念的内涵和外延,要指明定义中的关键字、词、符号的含义和定义中的条件.还要让学生明确认识概念间的关系,在数学知识体系中不断加深对概念的认识.

3.运用和巩固概念.这是概念教学的目的.要使学生能正确运用数学概念,通过一定的练习来分清易于混淆的界限,还要使学生了解数学概念在运算、推理、证明中的理论指导作用,这样不仅能使学生牢固掌握数学概念,而且有利于提高学生的基本能力.

数学命题的教学(teaching of mathematical proposition) 数学教学的具体任务之一.指数学中的公理、定理、公式的教学.在数学教学中,不仅提出必要的公理,而且还要说理.这种说理不是对公理的推证,而是使学生理解公理是不可缺少的,这种说理一般采取实验、验证的方式进行.定理、公式的教学要求:

1.应使学生认识它的条件和结论.

2.应使学生掌握定理、公式的证明方法,为此教师应重点讲解证明定理、公式的思路和方法.

3.应使学生掌握定理、公式的应用.不要只局限于通过例题、习题的教学使学生初步认识所学定理、公式的应用,还应进一步使学生掌握它们在理论上和生产实践中的广泛应用.

4.要使学生认识定理、公式间的关系,使知识系统化.教师讲授定理、公式时,应让学生了解每个定理、公式在数学知识体系中的地位作用,来龙去脉,通过总复习把学过的数学知识整理成系统知识.另外,研究讨论一些定理、公式的推广,也是使学生认识定理、公式间关系的好方法.

数学能力的培养(fostering mathematical ability) 数学教学目的之一.数学基本能力包括有关数学基础知识的运算能力、思维能力、空间想象能力、分析和解决实际问题的能力等.培养数学能力的基本途径是:

1.使学生牢固掌握数学基础知识.这是培养学生数学能力的根本.

2.在传授数学知识过程中,教师严格遵守逻辑规律,正确运用逻辑思维形式,作出示范,潜移默化地培养学生逻辑思维能力.

3.有计划地引导学生进行各种数学思维.由具体思维到抽象思维,由综合性思维到分析性思维,由直觉思维到自觉思维,由开展性思维到压缩性思维,由单向思维到逆向、多向思维,由再造性思维到创造性思维.

4.培养数与式的灵活变形能力.这是正确、迅速解题的重要条件.

5.有计划地安排练习,按口头练习、板演、课外作业等各自教学要求去布置作业,指导学生练习.

6.指导学生阅读书籍、做数学实验或撰写小论文.

数学教学中的思想教育(ideological education through mathematics teaching) 数学教学的重要任务之一.数学教学中的思想教育大体可以分为一般的思想教育和数学思想教育.数学教材具有内蕴的思想性,通过数学教学,激励学生为实现四个现代化学好数学的热情,培养学生的辩证唯物主义和历史唯物主义观点等,在渗透一般思想教育的同时,数学课还要依据数学科学自身的特点,去进行思想教育.事实上,数学所反映和蕴蓄的精神、方法、态度,它所培养的人的意识、思想和意志,是正确的人生观和世界观的科学基础之一.

此外,人类在建立数学和解决数学问题的过程中,采取了一定的指导思想.这些指导思想在后继认识活动中被反复运用和证明其正确性,它反映着科学知识整理的最严密的最经济的方式和方法,而称之为数学思想.通过数学思想,可以把数学科学成果同现实世界联系起来,深深地植根于自然科学和社会科学的土壤之中,从而能为各行各业的人所运用.因此,对学生进行数学思想方面的教育,是数学教学中思想教育的重要组成部分.

能力(ability) 教育学的基本概念之一.指个体在迅速、成功地完成某种活动中经常地、稳定地表现出来的个性特征,即个体所具有的重要的和持久的心理特点.例如,思维的机能系统或结构形式在个

体身上固定下来，成为他顺利地进行思考活动而表现出来的个性特征，并使之具有经常的、稳定的性质，这便是思维能力. 而思维能力又包括分析与综合能力、概括与抽象能力、判断能力与各种推理能力等. 认识过程体现着认知活动的一般规律性，然而具体的认知活动总是在个体身上发生的，因而具有很强的个性特征. 为了实现认知活动而在个体身上经常地、稳定地表现出来的认知心理特点，就是认识能力，也就是通常所说的智力. 智力既有层次又有完整的结构. 所谓智力层次是指在全人口中，表现出标志人的智力水平的三种状态：低常、正常和超常. 所谓智力结构是指人的认识能力，主要由感知能力、记忆能力、思维能力和想象能力构成了人的认识能力的一个完整统一体.

数学能力(mathematical ability)　数学教育的基本概念之一. 指个体迅速、成功地完成数学活动(数学学习活动、数学研究活动)的一种稳定的个性特征. 逻辑思维能力表现了数学能力的典型特征，尽管这种能力也为其他领域所需要，但在数学中它表现为用数和符号来进行思维活动的能力，具有较高的抽象水平和较高的心智活动标准. 事实上，在数学的感知、记忆、思维、想象活动中都表现出很强的个性，并且这种个性特征以某种机能系统或结构形式在个体身上固定下来，使之具有一种经常的、稳定的性质，这种个性特征就是数学能力. 数学能力从活动水平上可以分为"再造性"数学能力和"创造性"数学能力. 所谓再造性数学能力是指迅速而顺利地掌握知识、形成技能和灵活运用知识、技能的能力. 这通常表现为学生学习数学的能力. 所谓创造性数学能力是指在数学研究活动中，发现数学新事实，创造新成果的能力.

数学能力测定(measurement of mathematical ability)　数学能力的测验法则. 在能力实验和研究中，通常把数学能力分为若干级别，例如分为：

1. 知识和信息(如定义、符号、概念).
2. 熟练技巧和技能(包括解题的技巧和技能).
3. 把数据翻译成符号或图表，以及相反的作法.
4. 理解力(如对推理、论证的分析和掌握).
5. 创造性(如提出独特的解题方法和不同的证明定理方法).

这里把第一项作为能力的最低要求，把第五项作为能力的最高标准. 在能力测定中，研究者编制一些与测定能力类别有关的测验题，以被考察者为样本进行一些测验，获得每一个学生对各种测验的分数. 然后用统计技术，从那些测验分数之间的相关的情况中去决定这些测验是怎样联系着的. 用那些分数上高度相关的测验来断定大体相同的能力，用那些分数不相关的测验来测定能力的不同量级. 不同的测验题目系列用来测定能力成分的不同因素.

数学能力结构(structure of mathematical ability)　数学能力成分间的一种特定关系. 实验研究发现各种数学能力测验结果之间都存在着一定的正相关，但都并未达到完全相关. 既然各种能力之间都存在着正相关，那就足以证明有一个存在于一切能力之间的共同因素，称之为普遍因素 G. 各种能力之间都未达到完全相关，又足以证明除了普遍因素 G 外，还必然存在着特殊的因素 S. 于是心理学家们断言，智力就是由 G 和 S 构成的. 这就是所谓智力结构学说. 在数学能力的结构中，基本成分为：数学观察能力、数学记忆能力、逻辑思维能力和空间想象能力. 数学能力的核心成分是逻辑思维能力. 逻辑思维能力又包括分析能力、综合能力、概括能力、抽象能力、判断能力和各种推理能力.

数学观察能力(mathematics observation ability)　数学能力的基本成分之一. 通过数学活动而形成的一种对数学关系和事实形式化知觉的能力. 所谓"形式化"就是把对象所共有的基本关系和联系用一般的形式结构表示出来. 它是一种概括化的知觉，它从对象的内容中分离出来，一般的形式结构是在具体的内容中被感知到的. 如果这种对数学关系和事实的形式化知觉，形成一种机能系统或结构形式在一个人身上固定下来，使之具有经常的、稳定的性质，这种形式化知觉的特征就表现出一定的数学观察能力. 数学观察能力是学习数学活动中的一种重要智力表现，必须使学生主动地从各种数学材料中最大限度地获取对掌握数学有用的信息. 数学教学除了注意发展学生观察的目的性、持久性、精确性和概括性外，还必须注意引导学生注意从具体事实中分离出数量之间的纯粹关系. 学生的数学观察能力在小学就开始萌发，到后期他们不仅感知个别数量，而且还有数量间的关系；到中学已经能够在感知一个问题的过程中，对问题的数据进行分析——综合的知觉化处理，并在以后获得明显的发展.

数学记忆能力(mathematics memory ability)　数学能力的基本成分之一. 指一个人在实践活动中(特别是在学习过程中)顺利地从事识记、保存、回忆和识别数学事实的个性特征. 数学记忆主要体现为对概括的数学材料、抽象的数学关系和符号、独特的题目类型、推理和证明的模式以及概括的解题方法的记忆. 学生随着年龄的增长，记住重要的数学关系，典型的推理和运算的模式的意识在逐渐增强，而对具体材料的记忆则退居次要的地位. 他们的记忆逐渐从保持特殊的、具体的、对后来发展无关紧要的东西中解脱出来. 能力强的学生的记忆是概括的，他们对题目的类型、解答的概括的方法、推理的模式和证明等都能较为迅速地记住，并能牢固地保持下来.

分析能力(analysis ability) 逻辑思维能力之一.分析是指把客观事物的整体分解为各个部分、方面、要素,以便逐个加以研究的思维方法.寻求数学题解的分析法是一种执果索因的因果分析.如果这种分析机能以一定的结构形式在个体身上固定下来,形成一种持久的、稳定的个性特征,这就是分析能力.综合是把关于客观事物的各个部分、方面、要素的认识统一起来,在思维中形成对客观事物整体认识的一种思维方法.数学解题中的综合法是一种由因导果的综合.如果这种综合机能以某种结构的形式在个体身上固定下来,形成一种持久的、稳定的个性特征,这就是综合能力.人们在实际思考问题的过程中,分析与综合往往是结合起来使用的,分析中有综合,综合中有分析.不过在证明数学问题时,一般是先用分析法来分析论题,找出使结论成立的必要条件,然后用综合法进行表达,同时,证明条件是充分的,从而完成了证明.这样便为人们证明问题提供了一个完整的思考过程.如果这种分析—综合机能,以一定的结构形式在个体身上固定下来,形成一种持久的、稳定的个性特征,这便是分析与综合能力.在数学中这是一种基本而又十分重要的能力.

综合能力(synthesis ability) 见"分析能力".

概括能力(generalization ability) 逻辑思维能力之一.概括是指摆脱具体内容,并且在各种对象、关系或运算的结构中,抽取出相似的、一般的和本质的东西的思维过程.人们在对数学对象进行概括时,一方面必须掌握同数学对象之间发现相似的情况,另一方面必须掌握解法的概括化类型和证明或论证的概括化模式.如果这种概括机能以某种结构形式在一个人身上固定下来,形成一种持久的、稳定的个性特征,这就是概括能力.概括能力一般表现为:

1.从特殊的和具体的事物中发现某些一般的和他已经知道的东西的能力.

2.从孤立的和特殊的事物中看出某些一般的,尚未为他所知道的东西的能力.

某些学生只要分析了一个例题、一道题目,就能够对那一类型全部例题或题目的有关共性,形成一个确定的概括.对他们来说,对这一个别现象(例题、题目)的本质的深刻理解代替了对同一类许多现象的比较与分析.这也就反映了他们的概括能力.抽象是指在头脑中舍弃所研究对象的某些非本质的特征,揭示其本质的特征的思维过程.抽象是以一般的形式反映现实,从而是对客观现实的间接的、媒介的再现.抽象机能反映在思维过程中善于概括归纳,善于运用,善于抓住事物的本质,开展系统的理论活动.如果这种抽象的机能以一定的结构形式在个体身上固定下来,形成一种持久的、稳定的个性特征,这就是抽象能力.从一定意义上来讲,概括和抽象是数学的实质,数学思维主要是概括和抽象思维.因为数学是抽象的科学,数学全部内容都具有抽象的特征,从具体材料中,即从数、已知图形、已知关系中进行抽象的能力,是一项重要的数学能力.必须运用抽象思维来学习数学,同时在学习数学的过程中来培养和提高抽象思维的能力.

抽象能力(abstraction ability) 见"概括能力".

判断能力(judgement ability) 逻辑思维能力之一.判断是指反映对象本身及其某些属性和联系存在或不存在的思维形式.数学中的判断,通常称为命题.掌握命题的结构,命题的基本形式及其关系,以及数学命题中充分条件和必要条件等都是数学判断的基本内容.判断是概念相互联系的形式.每一个判断中都确定了几个概念之间的某种联系或关系,而且判断本身就肯定这些概念所包含的对象之间也存在联系或关系.推理是指由一个判断或几个判断推出另一个新的判断的思维过程.思维之所以得以实现概括的、间接的认识过程,主要是由于其中有推理过程存在.在数学中,提出问题,明确问题,提出假设,检验假设,这一系列思维过程的完成主要是依靠逻辑推理.数学中的正确推理要求前提真实,并且遵循逻辑规则来正确运用推理形式,以得出真实的结论.根据已经建立的概念及已经承认的真命题,遵循逻辑规则运用正确逻辑推理方法来证明命题的真确性,是探索数学新事实和学习数学的重要的思维过程.如果上述判断和推理的机能以一定的结构形式在个体身上固定下来,形成一种持久的、稳定的个性特征,这就是判断和推理能力.在数学中,不论是定理的证明,公式的推导,习题的解答,还是在实际工作中与数学有关的问题的提炼与解决,都需要判断和推理能力.数学才能或能力的基本特征,就是在数学关系、数与字母符号的领域内概括的、简缩的和灵活的思维.这里的所谓"简缩"思维指的就是推理、判断的思维过程的简缩.数学活动中推理过程,以及相应的运算系统的简缩或者省略,是能力强的学生所独有的特点.能力强的学生从不展开它的全部逻辑结构,而是以简缩的过程来推理判断.

推理能力(deduction ability) 见"判断能力".

运算能力(operation ability) 数学能力的基本成分之一.指运用有关运算的知识进行运算、推理求得运算结果的能力.运算实际上是一个演绎推理过程,运算即是推理.数学运算在初等数学阶段主要是四则运算,整式、有理式、根式运算,指数、对数及三角函数运算.到高等数学阶段就有极限运算,微分、积分运算,向量、矩阵运算,数据、信息处理和概率运算,集合、逻辑运算以至于更广义、更抽象的运算.数学运算能力当然包括所有这些方面的运算能力.要

培养上述各种运算能力，首先要学生掌握各种运算的有关知识(如环绕运算对象的概念、性质，运算的定义、法则等). 在运算过程中必须对上列各种因素进行全面的、足够的训练. 运算能力的内容也是在发展的. 随着计算器的普及，在中学不再需要去学四位数学用表，不需要多作多位数数值计算的训练，但需要发展估算能力，发展处理大量数据的能力. 再由于运用程序计算器以至计算机，由程序保证可以进行更多种、更复杂的运算，这时就需要学生通过学习程序设计或算法语言来获得使用它们的运算能力了. 当把知识过渡到技能阶段的时候，要让学生明确计算的目标、计算的步骤以及每个计算步骤的依据.

逻辑思维能力(logical thinking ability) 数学能力的基本成分之一. 指运用逻辑形式正确地、合理地进行思考的一种持久的、稳定的个性特征. 逻辑思维能力在数学中大量表现为分析与综合能力、概括与抽象能力、判断能力和各种推理能力. 因为数学是一门逻辑性很强、逻辑因素十分丰富的科学，所以一般地说，数学对发展学生的逻辑思维能力起着特殊的作用，当然还因为在学习数学时要进行非常多的各种逻辑因素的训练. 在数学教学中，逻辑思维能力强的学生，在数学活动(如解题)中是以思维的简缩性、灵活性、可逆性和概括性为其基本特征的. 思维的简缩性就是缩短推理过程，用简缩的结构来进行思考的过程. 能力强的学生在没有意识到法则和定义的情况下，马上转到适当运算的操作中去，完整的多级结构推理被运算成分的简略联结所代替，于是便出现了推理过程的简缩和思维过程越过中间环节而迅速地从已知条件过渡到问题的结论. 思维的灵活性是指摆脱旧的思维序列的束缚和影响，灵活地从一种思维过程转向另一种思维过程. 数学能力强的学生，在解题时，善于从多方面去试探问题的解法，摆脱定型化、惯用的解题方法的束缚和影响，较容易地重新组合已经建立了的解题模式和运算系统，表现出思维过程具有很大的灵活性和机动性. 思维的可逆性是指从正向思维序列转向逆向思维序列的过程.

空间想象能力(spatial visualization ability) 数学能力的基本成分之一. 指人们对于客观存在着的空间形式，即物体的形态、结构、大小、位置关系，能在头脑中反映出正确的形象来的能力. 在数学中，空间想象能力体现为在头脑中从复杂的图形中区分基本图形，分析基本图形的基本元素之间的关系(垂直、平行、从属及其基本变化关系等)的能力；借助图形来反映并思考客观事物的空间形状和位置关系的能力；借助图形来反映并思考用语言或式子来表达空间形状和位置关系的能力. 空间形状和位置关系的直观想象能力是基本的、重要的. 空间想象能力的形成主要通过学生对几何体的面积和体积计算，掌握直线和平面，掌握多面体和旋转体的教学和解题实践来进行. 空间想象能力的提高有很强的年龄特征和个性差异. 更多地依靠通过立体几何的教学来培养，但这种能力发展的基础却深深地扎在平面几何之中. 因此，为了发展学生的空间想象能力必须从平面几何入手. 由紧紧依赖于图形的直观想象，发展到脱离开图形进行抽象思维，由视觉形象成分占优势发展到语言逻辑思维成分占优势；由平面到立体，由低级向高级发展；由再造性想象向创造性想象方向发展.

解决问题能力(problem solving ability) 数学能力的基本成分之一. 所谓问题是指有意识地寻求某一适当的行动，以便达到一个被清楚地意识到，又不能立即达到的目的. 而解决问题指的就是寻求达到这种目的的过程. 掌握数学就是善于解题，不仅善于解一些标准的题，而且善于解一些要求独立思考、思路合理、见解独到的和有发明创造的题. 因此，从广义上说，学校学生的数学活动，主要的就是解决各种类型的数学问题. 解决问题是对知识、技能、思维和能力的综合运用过程. 如果解决问题的机能形成了一种持久的、稳定的个性特征，这就是解决问题能力. 在现代数学教学体系中，为了发展学生的数学思维和提高他们的数学能力，要求在数学课中必须有一个适当的习题系统，这些习题的配置和解答过程，应当考虑要部分地适应发展学生的数学思维和提高数学能力的特点和需要.

数学观念(mathematical sense) 数学的基本概念之一. 指用数量关系和空间观念去观察问题，并用数学的思维方式去思考问题、处理问题的自觉意识或思维习惯. 也就是常说的空间和数量观念、抽象意识、推理意识、整体意识、化归意识等. 培养人的数学观念，是数学教育的目的.

推理意识(deduction awareness) 一种数学思维形态. 指推理或讲理的自觉意识，是数学的严密逻辑性的反映. 它表现为遇到问题时自觉推测，寻根问底，据事论理. 推理意识包括演绎推理、归纳推理、类比推理的自觉意识. 培养推理意识，有三方面的作用：有助于形成良好的道德品质，提高实际生活能力；有利于培养学生正直和诚实，遵守法规、尊重真理与严肃认真的工作态度；有利于有条理地记忆，有意识地对所学知识进行逻辑的分析、综合、分类整理，把知识系统化.

抽象意识(abstraction awareness) 一种数学思维形态. 在学习数学的过程中形成的一种思维习惯：从本质上看问题. 它包括了能有意识地区分复杂事物与现象的主要因素与次要因素、本质与表面现象，能抓住本质去解决问题，自觉地把适当的问题化

为数学问题(即自觉地进行抽象概括,建立数学模型的习惯).这意味着对事物现象的结构、事物之间或事物内部各元素间关系的敏感,其中包括对数量及形状的敏感.抽象意识是数学的抽象性的反映.数学教学,尤其是概念教学中,教师应有意识地提供机会,让学生体会抽象思想,形成抽象意识.培养抽象意识有助于培养思维的深刻性,以及抽象概括能力;也有助于加深对数学的应用性的认识,增强运用数学知识的能力.

整体意识(integration awareness)　一种数学思维形态.指全面地、从全局上考虑问题的习惯.它是数学辩证思维特征的一种反映.客观世界是一个整体,只有从某一个研究角度认识了客观世界的整体性,才能对之概括和抽象,因而整体意识先于抽象意识而贯注在数学的研究中.培养整体意识,不能仅强调一个整体,还要强调整体与局部的关系,整体与局部的相对性,整体与结构的关系.培养整体意识,有助于发展人的系统思想,培养人的思维的广阔性,培养求异思维.它可以促进人的思维的积极变化:由着重对事物的单方面研究,转向着重对事物的各种类型的联系和结构的研究.

化归意识(transformation awareness)　一种数学思维形态.指解决问题的过程中有意识地对问题进行转化,使之变为已经解决或易于解决的问题;它还意味着用联系、发展、运动变化的眼光来观察问题、认识问题.客观世界的多样与统一,事物之间在一定条件下可以互相转化,各类事物或事物的各种形态在人脑中的认知水平存在不一致性等特征,要求人们在观察问题、处理问题时具有化归意识.化归意识是问题解决的最基本的意识.思考问题的分析过程,其实就是一个化归的过程.数学中的无限到有限的化归,数到形的化归,曲线到直线的化归,空间到平面的化归等,都解决了一些难于解决的数学问题.数学上的函数、对应、同构的概念突出地反映了联系的观点,成为化归的有力工具.在心理学上,瑞士儿童心理学家皮亚杰(Piaget,J.)把认知的方式分为顺应与同化,其中同化就是化归.数学以化归为基本的策略,可以培养人的化归意识.

数学教学原则体系(system of principles in mathematics teaching)　数学教学基本原则的结构.指反映数学教学工作所遵从的各原则的相互联系的有机整体.包括数学教学论原则、数学教学整体性原则、教学与发展相结合的原则、教师的主导作用和学生的主体地位相统一的原则、理论联系实际的原则、抽象与具体相结合的原则、严谨性与量力性相结合的原则等.

数学教学论原则(principles in theory of mathematics teaching)　数学教学的基本原则之一.数学教学活动所遵循的依据.通常指科学性、自觉性、积极性、直观性、可接受性、巩固性和因材施教等原则.科学性,主要指教材必须是无可争议的科学知识,知识间的联系应合乎逻辑制约,并且作系统的而不是杂乱无章的编排.自觉性和积极性主要指在教学过程中必须启发学生的自觉性和积极性,使他们形成外部动机和内部动机相统一的学习意向.直观性原则是指尽可能地使学生从直观出发概括数学现象的本质和规律,防止形式和内容脱节.可接受性原则指的是教学的内容和方法,都是同学生当时已掌握的知识基础相适应的,是学生力所能及,可以接受的.巩固性原则指教学不仅应当使学生获得知识和技能,还应当能巩固和保持所学的知识和技能.因材施教原则指教学应当面向全体学生,并对不同的学生,予以区别对待,使之各自在原有基础上得到较充分的提高.随着对数学教学规律的认识的深入,数学教学论的原则也有所变化和发展.

数学教学的整体性原则(integration principle in mathematics teaching)　数学教学的基本原则之一.指整体地反映数学教学本身的规律所遵循的依据.具体的数学教学系统是数学教育这一系统的子系统.教学原则应该统一在整个数学教育或培养人这一系统之中,数学教学的整体性原则,从教学与发展、教师与学生地位、教材与实际相互关系出发,从更高层次上把握数学教学,使之具有强有力的教育性,实现人的完善的整体教育目标.

教学与发展相结合的原则(integration of teaching and development)　数学教学的基本原则之一.为使数学教学论诸原则得以实现,必须从发展人的能力(人的发展除了智力,还有情感、品格、态度等非智力的方面),尤其是发展思维能力的目的出发,只有在培养人的总体目标下,来看待各个具体的教学原则,才能使数学教学发挥更大的作用.教学与发展相结合的原则,包括:

1.不仅要重视科学的既有事实,还要注意科学发展的过程.

2.要在教学原则体系中注重积极的进取精神.

3.要在教学中面对全体学生,即要因材施教,对每一个学生负责,使每个学生都在自己原有的基础上得到提高和发展.

教师的主导作用和学生的主体地位相统一的原则(integration of teacher guidance and student-centred learning)　数学教学的基本原则之一.教学原则体系的正确贯彻,意味着教师的主导作用和学生的主体地位得到体现;反过来两者的统一,又是正确贯彻教学原则体系的必要条件.教师的主导作用,是指在教学过程中,教师作为过程的设计者、引导者、组织者所起的作用;学生的主体地位,指学习过

程中学生处在认识主体地位．教师主导作用主要体现在：

1．要有“导”的过程，不要用“灌”来代替．要尽量遵循国家制订的课程标准（或教学大纲）精心设置知识和能力发展的“最近发展区”，让学生一步一步由“不知”走向“知”．

2．要有确定的方向去引导和控制课堂．

学生主体地位体现在学生成为学习的主人，能够自觉地、主动地、有效地学习．通过自己的思维，把新知识纳入自己原有的知识结构．

理论联系实际的原则（integration of theory and practice） 数学教学的基本原则之一．理论联系实际是一条辩证唯物主义的原则．数学理论来源于现实世界，它的抽象性、严密性和系统性，都是为了更精确、更广泛、更有效地刻画客观世界．理论联系实际有助于领会抽象的数学知识，培养学生从生活实际和生产实践中概括出数学问题的能力，有助于让学生在实践中认识理论的适用范围和用法，在实践中对理论认识进行检验，培养学生把数学知识应用于实际的能力，并且指导教师从实际需要出发去看待教学内容和教学要求，防止教学内容与实际脱节．

抽象与具体相结合的原则（integration of abstraction and concreteness） 数学教学的基本原则之一．因为纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系，所以是非常现实的材料．但是为了能够从纯粹的状态中研究这些形式和关系，必须使它们完全脱离自己的内容，把内容看成无关重要的东西放在一边，并以极度抽象的形式反映现实世界的空间形式与数量关系．在学生学习数学的过程中，他们所获得的数学知识，绝大部分都是来源于间接经验，如果不以具体事物作对象和以实践经验作基础，那么他们所获得的知识是片面的、不完全的．因此必须注意抽象与具体的层次性，在教学中必须把抽象和具体结合起来，由具体到抽象，再由抽象到具体，从而使学生在感性的具体经验基础上领会抽象知识，这就是教学中的抽象与具体相结合的原则．

严谨性与量力性相结合的原则（integration of rigour and receivability） 数学教学的基本原则之一．数学教学要求学生，在论证中概念正确、推理有据、前后连贯、逻辑性强、叙述精练；在运算上要正确、迅速、合理；在符号使用上要恰当、鲜明，使人易懂易辨．总之要培养学生一丝不苟，认真负责，严格要求的科学态度．作为教学科目的数学与数学科学有所区别，它的严谨性既是相对的又是有层次的，它要根据学生年龄特征而逐步加深的．在学校数学教材里，有的概念采用了严格的定义，而有的概念则只采取描述方法加以解说；还有的定理作为公理而使用，或不加证明而使用等．数学教学的严谨性的要求是相对的．既表现出知识发展的层次性，又指明了教学的阶段性，适应学生身心发展、知识经验的积累和智力的发展水平，使他们在可以接受的限度内逐步加以提高．这就表现了严谨性和量力性原则的统一．

数学教学工作（works of mathematics teaching） 学校教学工作的一种．指数学教师在日常教学应当进行的工作．它包括备课、上课、检查和批改作业、组织学生的课外活动、学生学习成绩的考核以及教学研究等．

备课（lesson preparation） 教育学的基本概念．指教师在上课前进行的一系列准备．备课是上课的基础，它对课堂教学质量起决定性作用．备课的主要工作有四项：

1．钻研教材与大纲，阅读参考资料．

2．深入了解学生，研究学生的情况．

3．制定教学计划（学期教学计划、单元教学计划）．

4．写好教案．

课堂教学（classroom teaching） 学校教学工作的基本形式．课堂教学是在教师的组织和主持下，按照教学大纲和教材的要求，有目的、有计划地为完成既定任务而由师生共同参加的教学活动．数学课堂教学要使学生掌握必要的数学基础知识，培养和形成他们的数学基本技能，培养和发展他们的数学能力，同时还要使学生受到思想品德教育．数学课堂教学要有主要的教学目的，教学材料选择要符合基本教学目的，分量恰当，安排符合学生认识规律，教学方法运用必须科学，组织教学过程必须周密，并要留有机动的余地．若留下几分钟让学生提出问题、质疑问题，课堂上给予解答、吸取反馈信息，常可提高课堂教学的质量．

数学课外活动（extracurricular mathematics activities） 课外活动的一种．指在数学课堂教学以外，学生所进行的多种多样的数学学习活动．它是课堂教学的必要补充，可以体现因材施教的原则，称为“第二课堂”．正确组织和吸引学生参加数学课外活动，可以扩大学生的知识领域；培养和发展学生的兴趣、才能和特长，为进一步学习数学和选择职业创造有利的条件．活动的方式可以是制作教具，指导阅读数学书刊，办数学墙报，编数学论文集，进行专题报告（如中外数学史、著名数学家的故事、某些现代数学理论的通俗介绍等），办数学故事会，进行数学竞赛，举办数学游戏，实地测量等．

数学教学方法（methods of mathematics teaching） 教学方法的一种．教师指导学生学好数学基础知识，提高数学基本技能，发展数学才能，进行思想品德教育的方式、方法．它既包括了教师教的方

法，也包括了学生学的方法. 数学教学方法对于激发学生学习数学的兴趣，实现数学教学目的，提高数学教学质量，都起着重要的作用. 数学教学方法是随着教学活动的开展、社会的前进而逐渐发展起来的. 远在中国春秋末期和古希腊时期，就有讲解、问答、练习、复习等方法的记载. 古代主要采用讲授法，近代推行了演示、观察、实验、参观等新方法，并改进了讲解、谈话等方法. 近些年来随着现代科学技术的进步，现代化教学手段的使用，教育学与心理学新成就的出现，信息论、控制论与系统论新学科的建立与发展，为数学教学方法的改进与发展提供了良好条件. 常用的数学教学方法有：启发、讲解、谈话、练习、讨论、演示、实习、观察、复习等，其中，启发、讲解、谈话、练习等用的较多. 当前国内外正在实验的数学教学方法有：发现、研究、自学辅导、程序教学、最优化教学、算法化教学、“读读、议议、讲讲、练练”等.

启发式教学法(heuristic method)　常用的教学方法之一. 教师依据教学过程的客观规律，通过周密的教学设计，充分调动学生的自觉性，引导他们积极思维，掌握知识的教学方法. 启发式教学思想由来已久，在中国“启发”一词源于孔子. 在《论语》中，孔子说：“不愤不启，不悱不发，举一隅不以三隅反，则不复也.”后人将这两句话中“启”、“发”二字抽出来，连贯起来，从而形成启发式教学的概念. 古希腊思想家苏格拉底(Sokrates)，用“问答法”来启发学生的独立思考. 在教学过程中，教师的教与学生的学是矛盾统一体. 教师的教是外因，学生的学是内因，外因通过内因起作用. 教师在教学中启发诱导学生的积极思维，才能收到良好的教学效果. 从学生的认识规律来看，学生的学习过程是通过感觉器官获得感性认识，然后再通过思维上升到理性认识，使之获得完整的知识. 为此，教学中教师必须善于启发诱导学生，自己动脑思考问题，自己动手解决问题，从而使学生经常处于积极自觉地思维之中. 现代启发式教学思想，是在辩证唯物主义理论的指导下，批判地继承了过去的教学理论遗产，在现代心理学和教育学发展的基础上，进一步完善的. 其特点是：强调学生是学习的主体，教师要调动学生学习的积极性，实现教师主导与学生主体相结合；强调学生智力的充分发展，实现系统知识的学习与智力的充分发展相结合；强调激发学生的内在学习动力，实现内在的动力与学习的责任感相结合；强调理论与实践联系，实现书本知识与直接经验相结合.

讲解法(didactic method)　常用的教学方法之一. 教师对一些较复杂的数学问题、概念、定理、法则和公式等进行较系统严密的解释、分析和论证的教学方法. 由于讲解法主要是由教师作系统而连贯的讲解，这样就能使学生在较短的时间内获得较多的知识. 在数学教学中，特别是在高中和大学数学教学中，讲解法应用很广泛. 讲解法的进行一般多是先引出新课题，随后突出解决问题的重点，明确解题的途径，继而解决问题，最后予以综合与总结.

谈话法(dialogue method)　常用的教学方法之一. 教师不直接讲授数学知识，而是由教师提出问题，激发学生积极思考，引导学生运用已有的知识和经验回答提出的问题，借以获得新知识、巩固旧知识或检查知识的教学方法. 谈话法对于高度集中学生的注意力，充分地激发学生的思维活动，提高学生的语言表达能力等都具有很好的作用. 谈话法一般可分为启发式谈话、问答式谈话和讲授式谈话三种. 启发式谈话法主要用于传授新知识；问答式谈话法主要用于复习、巩固与检查已学过的知识；讲授式谈话法主要在教师讲授过程中或在学生活动过程中进行. 这种方法有助于提高学生听讲的积极性，提高传授知识的效率，有助于学生明确学习重点，顺利地完成独立作业.

练习法(practice method)　常用的教学方法之一. 在教师的指导下，让学生通过独立作业掌握基础知识、进行基本技能训练的教学方法. 它适用于解答习题，也可以用来学习新教材. 用这种方法进行新教材教学，要首先给学生一定时间阅读新教材，然后指导学生进行讨论，最后总结. 练习法的基本要求是：

1. 教师不要直接讲授教材，而是引导学生自己去发现命题、论证定理和公式等，题目难易程度要适当.

2. 在学生做作业或论证定理时，教师应有意识地察看部分学生作业，发现问题及时纠正. 对于多数学生不会解答的题目，教师要讲解；学生普遍做错的问题，教师在总结时要加以纠正.

发现法(discovery method)　当代国内外试行的教学方法之一. 在教师引导下，借助所提供的适于学生再发现活动的材料，使学生通过自己探索、尝试过程来发现问题、解决问题，并以此达到掌握知识、发展智能的教学方法. 这种教学方法是从青少年、儿童的好奇、好问和好动的心理特点出发而提出来的. 使用这种教学方法，能使学生成为知识的发现者，而不是知识的消极接受者. 20 世纪 60 年代，美国心理学家布鲁纳(Bruner, J. S.)根据瑞士心理学家皮亚杰(Piaget, J.)的“过程一结构”心理学(关于智力结构发展理论)提出的学科结构教学理论，提倡广泛使用“发现法”. 他在《发现行为》一书中对发现作了详尽的描述：“发现不限于那种寻求人类尚未知晓之事的行为，正确地说，发现包括着自己头脑亲自获得知识的一切形式.”布鲁纳之所以提倡“发现法”，主要有三个理由：

1. 他赞同“关于人类的全部生活的最独特之点，

在于人类能够亲自发现"这样一个观点.认为人不是一个被动的有机体,而掌握一个概念、解决一个问题,都是一个主动过程.

2.他认为学习的中心环节是头脑中的"重新组织"或"转换",以便有所发现.

3.他十分强调"直觉思维"在学习中的作用.

布鲁纳从心理学角度认为,用"发现法"进行教学有四点好处:

1.能不断提高学生的智慧,并发挥其潜力.

2.因为学习中有所发现,就能够激发学生的学习兴趣,产生自行学习的内在动机.

3.使学生学会发现的试探法.

4.能够巩固对知识的记忆.

研究法(inquiry method) 当代国内外试行的教学方法之一.教师依据教学目的、教学内容,向全体学生提出富有思考性的研究题目与具体要求,先由学生个人独立思考,然后学生互相研究讨论,提出初步的答案,再由教师总结提高的教学方法.研究法可使学生深刻地理解知识,灵活地运用知识;充分调动了学生学习的积极性与主动性;发展了学生的智能,尤其是创造思维能力.因此,研究法对于提高数学教学质量是一种很好的教学方法.研究法的教学步骤是:

1.教师提出问题(输入信息).

2.学生独立思考教师提出的问题(处理信息).

3.互相研究(信息输出与新信息输入).

4.回答教师问题(信息反馈).

5.教师总结提高(新信息输入).

自学辅导法(guided self-learning method) 当代国内外试行的教学方法之一.在教师指导下,使学生通过自学而掌握知识,发展智能的方法.这种教学方法,以学生自学为主,有利于培养自学的能力,养成良好的自学习惯,保证学生在教学过程中的主体地位,力求实现积极主动地学习.

程序教学法(programmed instruction method) 当代国内外试行的教学方法之一.以联结说为本质的一种教学法.美国心理学家斯金纳(Skinner,B.F.)直接继承和发展了沃森(Watson,J.B.)的联结说,创造了程序教学法:

1.把学习内容分成循序渐进的小步子的问题.

2.要求学生作出积极反应.

3.反应有反复以获得强化.

4.自定步调.

5.使学生每次尽可能作出正确反应,尽可能减少错误率.

这种"小步子"和"及时强化"的原则,使学生的学习循序渐进,并不断感受到成功的愉快.但程序教学也暴露出无视学生的智力活动,妨碍独立思考的弱点.同时,在课堂讲授中,内容分步的大小,应依据学生反应情况由教师随机地调节,使之处于最佳思维状态.而程序教学以分步的形式,使学生直接接受最佳思路,并且规定的程序很难适应实际学习情况的变化.

指导作业法(supervised practice method) 当代国内外试行的教学方法之一.在教师指导下,学生通过独立作业来掌握基础知识和基本技能的授课方法.教师指导学生所作的各种练习题要精心选择和配备.指导的步骤是,首先进行必要的讲解或示范,然后让学生独立完成各种题目,最后由教师进行必要的总结,再有针对性地布置一些作业.教师指导学生阅读教材时,可以事先开列出应弄清的问题,作为学生阅读和研究的线索.教师也可针对教材中难懂的地方组织大家讨论,以求得透彻的理解.这种教学方法的特点有利于培养学生独立研究问题和解决问题的能力.

知识结构单元教学法(unit of knowledge structure method) 当代国内外试行的教学方法之一.把教材按照知识的内在联系,将教学内容划分为若干单元进行教学的一种方法.这种方法是由北京景山学校开始实验的.每个单元的教学过程,大致可根据"整体—部分—整体"来安排,也就是先使学生对整个单元教材有初步全面的了解,再对其中某些部分做深入的研究,最后做出归纳总结.单元教学法的基本步骤是:

1.学生自学,并要编写自学纲要.

2.教师重点讲授基础知识.

3.归纳整理,进行综合训练.

4.学生进行小结、检查.

问题教学法(problem-oriented method) 当代国内外试行的教学方法之一.由教师启发学生提出问题,引导学生思考,然后再进行启发性讲解,分析和揭示有关的规律,从而达到解决问题和帮助学生掌握知识的目的.这种方法充分体现了启发式教学的精神.

尝试指导及信息回授法(guided trial and information feedback method) 当代国内外试行的教学方法之一.由上海市青浦县数学教改实验小组总结出来的教学方法.它将教材组成一定的尝试层次,通过教师指导学生进行尝试学习,同时回授学习结果,从而强化所获得的知识和技能.具体步骤是:

1.启发诱导、创设问题情境,探究知识尝试.

2.归纳结论,纳入原有知识体系.

3.变成练习的尝试.

4.回授尝试效果与回授调节,组织质疑和讲解.

"读读、议议、讲讲、练练"法("read,discuss,talk,practice"method) 当代国内外试行的教学方

法之一.上海育才中学从1977年开始实验的教学方法.这种教学方法主要是改变教师统包到底的课堂教学局面,让学生成为学习的主人,变被动学习为积极主动学习,教会学生思考,充分调动学生的学习积极性.它的教学过程是"读读、议议、讲讲、练练"."读读",教师引导学生自己读书,是课堂教学的基础;"议议",学生互相议论,主动探索,是课堂教学的关键;"讲讲",是讲解、解惑,可由教师讲,也可由学生讲,是加深理解、发展智能的重要步骤;"练练",学生利用学到的知识解决问题,是巩固知识的必要途径.实践证明,这种教学方法有利于培养学生的自学、思考、探索、表达等能力;有利于因材施教,进行个别指导;有利于教学相长,共同提高.

阅读指导法(guided reading method) 亦称读书指导法.当代国内外试行的教学方法之一.教师指导学生独立阅读教科书和参考书以获取知识,并培养独立阅读能力的教学方法.独立阅读能力是自学能力的重要组成部分,对于提高在校学习效果,离校后主动地获取新知识,较好地适应工作需要具有重大作用.运用阅读指导法要注意:

1.充分发挥教科书的作用,通过预习、复习、回答问题、演算习题、编写阅读提纲等,指导学生认真阅读教科书.

2.指导学生读思结合,读练结合,养成独立的阅读能力与习惯.

3.指导学生选择书籍,广泛涉猎,扩大知识领域.

4.指导学生总结阅读经验,提高阅读效果.

在教学实践中,阅读指导法往往要与其他教学方法结合运用.

计算机辅助教学(computer assisted instruction) 一种新的辅助教学形式.指利用电子计算机协助进行的各种教学活动,是现代电化教学的高级形式.计算机辅助教学始于20世纪50年代,主要从事于技能训练的重复性工作.20世纪60年代开始主要用于程序教学,教师先把教学内容分成许多小步子并编成相应的计算机程序(课件),计算机运行这些程序,通过声音与屏幕上显示的文字、图象向学生授课,必要时向学生提问,学生则按键回答,然后由计算机对答案及时作出判断.计算机还可以解答学生的询问,模拟过程并演示实验.计算机辅助教学可以大大缩短学时,可以把教师从反复训练技能、批改作业、登记学生成绩等事务性和重复性工作中解放出来,有利于教师进一步提高教学质量;还可以让学生在微机或计算机终端上学习.因此,完全能够根据个人的时间、要求和基础,安排学习计划和进度,这是因材施教的先进教学方式.计算机辅助教学使数学教学成为实验的学科,改变烦琐计算,进行自主探索,适应个别差异;……将是继书面语言的使用、学校的创立和教科书的普遍运用之后,教育史上的第四次革命.

计算机管理教学(computer managed instruction) 一种新的教学管理模式.利用计算机收集学生回答问题(包括考试)的资料,并把这些资料的分析处理结果提供给教师,以便于教师管理与指导教学过程,其中较突出的是计算机辅助测试系统.简单的只由一台微型计算机和一些附加设备组成.比较复杂的则备有若干题库,库里存放着成千上万道题目,系统软件可以根据教师的要求自动形成考卷,供学生们在计算机的终端上解答,或另用规定格式的纸卡(或答卷纸)解答后输入计算机.系统软件将立即评分并把成绩记录下来.这种系统软件一般还能布置并批改作业,提供课堂讨论题和课外辅导材料.

数学教学研究(research in mathematics teaching) 学校教学研究的一种.指数学教师对教学工作进行个人或集体研究.一般是从研究数学教学大纲开始,但为了保证各门学科间的密切联系和学生学习的前后衔接,教师还应当了解相近学科的教学大纲,其次是研究数学教材.熟练掌握教材是教师顺利完成教学任务的基本条件.教学研究还应包括思想教育的内容,研究如何结合教材内容,不失时机地向学生进行思想品德教育的问题.此外,教师还要结合教学工作实际进行经验总结;有条件的还可搞数学教学实验,进行一些专题研究.教研组与学科备课组是开展教学研究活动的得力组织,学校要加强教研组与学科备课组的建设.提倡在个人钻研的基础上,加强集体研究,互相观摩教学,进行各种有关数学教学内容和教学方法的改革实验.

课堂教学评价(evaluation of classroom teaching) 教学评价的重要组成部分.教学评价是现代教学不可缺少的组成部分,它综合运用了社会、教育心理、数理统计等科学理论,是一门交叉科学.课堂教学评价是教学评价的一部分,实际上就是对一节课或几节课进行评价,比如观摩教学后的评议就是课堂教学评价.课堂教学评价的目的在于肯定成绩,总结经验,找出差距,改进教学.评价时要以教育方针和教育目的为准绳,从课堂教学的实际出发,对课堂教学进行实事求是的评论,并指出优缺点.评论过程中应该根据教育学、心理学和数学、数学教育学的理论进行具体分析.课堂教学评价多采用分析法和综合法.分析评价法是把每节课分解为几个项目,分别进行评定;综合评价法是对一节课进行整体评价.分析评价法与综合评价法并不是对立的,在实践中,往往是在综合指导下先进行分析评价,然后再在分析评价的基础上进行综合评价.

数学教师的素质(qualities of mathematics

teachers) 数学教师的业务和思想修养.教师是塑造人类灵魂的工程师,是培养年轻一代具有丰富的知识、较强的能力、高尚的道德和理想的园丁.数学教师必须学习哲学、教育学、心理学、数学教育学等教育学科,并能够按教育规律指导工作.数学教师还应具备如下素质:

1.严密的逻辑思维能力.

2.敏锐的观察能力.

3.创造性的工作精神.

4.坚强的意志性格.

数学学习论

数学学习论(theories of mathematics learning) 数学教育学的一个分支.它是揭示学生学习数学的心理规律的理论.一方面研究学生学习知识技能的性质与基本过程、方法与方式;另一方面研究影响学生学习的多种因素及其相互关系.主要研究内容有学习过程理论、概念的获得与应用、解决问题与创造性、认知结构与迁移、认识发展与学习准备、学习动机等.

学习(learning) 教育学的基本概念.指在教育目标的指引下学习者因获得经验而产生行为变化的过程,既包括知识、技能的学习,智力的开发及能力的培养,也包括思想观念的变化和个性品质的形成.教育的作用就在于帮助学习者有效地进行学习,提高人们认识世界和改造世界的能力,以适应不断变化的客观世界对人们的需要,因此对学习的本质及其规律的研究和探讨就成为人类长期以来力求解决的问题.

桑代克的学习理论(Thorndike's learning theory) 当代西方流行的一种学习理论.指美国心理学家桑代克(Thorndike,E. L.)在"尝试、错误"理论的基础上,用刺激与反应的联结来解释人的学习.还根据对动物的实验研究提出了三条基本的学习规律:

1.效果律:在情境与反应间建立的可以改变的联结,如果并发或伴随着满足的情况,联结就会增强;如果并发或伴随着烦恼的情况,联结就会减弱.

2.练习律:一个已形成的可以改变的联结,若加以应用,联结就增强;如不应用,联结就减弱.

3.准备律:学习者若正准备以某种方式、途径反应,能实现该反应就得到满足,学习就产生效果;反之,没有准备以某种方式反应,被迫作此反应则产生烦恼,学习就不能产生效果.

桑代克把他的法则用于教育实践,特别是他的效果律、练习律对教育实践有较大影响,然而他过分强调刺激与反应的联结,忽视了理解、顿悟在认识中的能动作用,受到了格式塔心理学派的尖锐批评.1930年以后效果律、练习律做了两项修改:

1.单纯的练习并不一定能引起进步,必须同时引起满足的效果才能使联结增强.

2.在练习过程中,赏比罚更有力.

同时,桑代克还列举出相属性、印象性、极性、同一性、心的系统等六个法则作为他的学习规律的补充.

桑代克关于学习的学说还被称为关于学习的"联结说"或"试误说".

行为主义的试误说(trial and error of behavioralism) 简称试误说.见"桑代克的学习理论".

关于学习的*S-R*理论(*S-R* theory of learning) 指学习的"联结说",其中,*S* 代表刺激(Stimulus),R 代表反应(Response),*S-R* 表示刺激与反应的联结.故将关于学习的刺激与反应的联结理论,称为"关于学习的 *S-R* 理论"(参见"桑代克的学习理论").

斯金纳的学习理论(Skinner's learning theory) 当代西方流行的一种学习理论.指斯金纳(Skinner, B. F.)从实证主义思想和操作主义立场出发来研究动物和人的行为.他认为一切行为都是由反射(刺激与反应间的一种可以观察到的相互关系)构成的,心理实验者的任务就是给予已知的刺激,观察学习者的反应,从而探究学习规律.斯金纳把行为分为两类:应答性行为和操作性行为.前者是由刺激引起的反应,后者不是由刺激而是由有机体本身发出的反应.与此相应的反射也有两种:刺激型的条件反射和操作型(亦称反应型)的条件反射.斯金纳的条件反射是操作型的,在这种反射中,行为是自然的,它是获得刺激的手段和工具.斯金纳在研究了人的学习行为后,总结出了习得反应、条件强化、泛化作用与消退作用等学习规律,并把学习概括为:如果一个操作发生后,紧接着给予一个强化刺激,那么其强度(出现这种反应的概率)就增加.练习本身并不提高速率,只能为进一步强化提供机会.把强化看作是关键,利用强化物来控制行为.斯金纳还把他的操作条件作用说和积极强化的理论引进了教室,在课堂上强调行为目标和及时反馈,创造了著名的程序教学和教学机器,在教学上产生了很大影响.但斯金纳的这种理论把人的学习过于简单化地归结为机械的操作条件反射,否认人的学习的意识特点,无视学生的智力活动和独立思考,不承认人类学习具有任何特别的属性,把人的学习同动物的学习等同看待,受到了认知派的批评.

格式塔派的学习理论(Gestalt school's learning theory) 当代西方流行的一种学习理论."格式塔"是德文"Gestalt"的音译,又译为"完形",意思是形式或一种被分离的整体.格式塔派(亦称"完形派")认为人类和高等动物的学习是对整个环境做有组织

的反应过程.学习并不是依靠"尝试",而是由于"顿悟"的结果,所以格式塔派的学习理论又被称为"顿悟说".格式塔派认为,学习是学习者对自身的心理环境的重新组织和重新构造的过程.在一般的情况下,动物感知的都是一些整个的"式样"或"形状",即是个"格式塔"(完形),并以此与外界运动的环境保持平衡.但当动物的生活环境发生变化,遇到了困难和问题时,这个"形"就出现了某些"缺口"或"缺陷",动物脑的活动便有一种渡过"缺口",弥补"缺陷","完结"图形的倾向,即在一定条件下尽可能构成"完形"的倾向,这种填补"缺陷"的活动就是学习.格式塔派还把学习归之于认知结构的变化.格式塔派的学习理论,重视整体,强调顿悟和理解,看到了人的智慧的作用,但是它把学习看成是先验的机能,排斥经验作用,把顿悟与试误对立了起来.格式塔派的理论,对以后出现的认知心理学有较大影响.

认知派的顿悟说 (insight of cognitive psychologists) 简称"顿悟说".见"格式塔派的学习理论".

关于学习的 *S-S* 理论 (*S-S* theory of learning) 学习的认知派的理论,其中第一个 *S*(Sign,符号、标记)代表作用于学习者的一种刺激,第二个 *S*(Significance,符号对象、标记对象)代表作用于学习者的第二种刺激,*S-S* 代表这两种刺激之间的相互关系,故用 *S-S* 表示认知派的学习理论(参见"格式塔派的学习理论").

布鲁纳的认知结构论(Bruner's theory of cognitive structure) 当代西方流行的一种学习理论.美国心理学家布鲁纳(Bruner,J. S.)认为在刺激与反应之间存在着一个认知过程.学习就是通过认知获得意义和意象,从而形成一个认知结构的过程.认知是指对事物的了解和理解,包括感知、领悟和推理等;认知结构是学习者头脑里的知识结构,是在学习过程中通过同化作用,在心理上不断扩大并改进而积累起来的知识体系,并在学习的过程中不断地变动.学习的意义不在于被动地形成刺激与反应的联结,而在于主动地形成认知结构.人的认知过程就是通过主动地把感官接受的事物不断地进行选择、转换、储存和应用.

学习分类(taxonomy of learning) 学习论的一个分支.在教育学和心理学领域中,人们根据不同的目的,常对学习进行分类,其中比较著名的有:

1. 加涅(Gagne,R. M.)的分类法.

2. 布鲁姆(Bloom,B. S.)的分类法.他根据学习所要完成的任务把学习分为六类.

3. 按学习环境和学习材料的复杂程度把学习分为五类.

在各种学习分类方法中,加涅和布鲁姆的分类在国际上影响很大,前者主要用于实验研究的设计,后者主要用于课程的设计.

加涅的学习分类(Gagne's taxonomy of learning) 当代西方流行的一种学习分类方法.美国教育心理学家加涅(Gagne,R. M.)把学习分成八类,分成八个不同的水平,形成由低而高的阶层,开始几个阶层很简单,也很基本,但越往后越复杂,最后几个阶层则更为复杂和抽象.他所分成的八类是:

1. 信号的学习:巴甫洛夫的经典性条件反射.

2. 刺激—反应(*S-R*)的学习:操作性条件反射.

3. 连锁的学习:一系列刺激—反应动作的联合.

4. 言语的训练:与第三类连锁的学习一样,只不过它是语言单位的连结.

5. 辨别的学习:认出诸多刺激的异同之处.

6. 概念的学习:在对刺激进行分类时,对事物一般特征的反应.

7. 规则的学习:概念的联合.

8. 问题解决的学习:在各种情况下使用规则,达到最终的目的.

加涅的分类反映了不同水平的学习,并且每一类都蕴含着前一类,以前一类或前几类的完成为基础.加涅的分类为实验研究的设计提供了方便,有时也被教育心理学家当作课堂学习的一个模式,并收到较好效果.

布鲁姆的学习分类 (Bloom's taxonomy of learning) 当代西方流行的一种学习分类方法.美国教育和心理学家布鲁姆(Bloom,B. S)根据完成教育任务的不同,把学习分成六类:

1. 知识:对知识的简单回忆和记忆.

2. 了解:理解的最低阶段.

3. 应用:在特定的情况下使用概念和原则.

4. 分析:区别和了解事物的内部联系.

5. 综合:把思想重新综合为一种新的完整的思想,产生新的结构.

6. 评价:根据内部的证据或外部的标准做出的判断.

布鲁姆的分类,开始几个阶段比较容易完成,并且每一类都是建立在先前获得的技能或能力上,譬如,理解需要知识,应用需要理解,并且更需要知识等.而布鲁姆的分类对于有计划的教学或使学生的学习水平逐步提高很有指导作用,有利于课程计划的设计和对教学效果的评估,有利于教学质量的进一步提高.

学习动机(motivation in learning) 学习论的基本概念之一,指直接推动人去学习的内部动因.它是由各种动力因素组成的复合体,其中包括:学习需要、学习兴趣、对学习必要性的认识、学习情绪、意志因素等.学习动机与学习目的既有区别又有联系.学习动机是引起学习的原因,学习目的是学习要达到

的结果．但是学习目的又常常是引起学习动机的诱因，对学习动机的激发、维持起着支配与调节作用．学习动机可以分为直接的学习动机与间接的学习动机．例如，对学习活动的好感、好奇心、兴趣、探索自然社会的奥秘求知欲，以及克服困难的喜愉体验等都属于前者，而对于想满足家长、教师的期望，博得集体舆论的好评，争取考试得好成绩，成为科学家，为国家、为人民，志愿上大学等都属于后者．直接学习动机比较具体，带有更多的近景性，并且有实效；间接的学习动机有更多社会性和理智色彩，既富有远景性，又有概括而持久的定向作用．

学习习惯(learning habits)　学习论的基本概念．指在学习中所表现出来的一种固定的学习方式．好的学习习惯不仅仅使学习有较高的效率，较好的成绩，而且能使学生对学习充满信心；不好的学习习惯，则给学习带来很多困难，事倍功半；因此学校和家庭要重视学生良好的学习习惯的培养．一旦良好的学习习惯形成，也就养成了良好的学风．培养良好的学习习惯的方法主要有：

1. 模仿法．
2. 带有强制性的训练方法．
3. 使学生充分理解所要形成的学习习惯的价值，并带着很强的决心开始努力，不被任何例外破坏自己的意图，利用一切可能的机会来认真实践，逐步形成良好的学习习惯．

对于不良习惯，也可通过上述三种方法加以克服．

学习方法(learning methods)　学习论的基本概念．指学习时所采取的手段、方式、途径．常用的学习方法可以概括为两种类型：

1. 接受式学习：主要是接受性地掌握知识，如教师讲，学生听；教师操作，学生观看等．这种方法有助于提高效率和较快地获取知识．
2. 发现式学习：它不是较机械地记忆概念，而是通过概念的重新组合得出新的概念．在这种方法的运用过程中，必须进行分析、综合、归纳、类比、推理、判断和进行新的抽象概括，是一种较能提高人的认知能力，又较好地掌握所学材料的方法．

在实际学习过程中，需要根据所学材料的传授条件、学生原有基础的不同，把各种不同的学习方法有所侧重地结合起来．

学生心理的个别差异(individual differences in student's psychology)　反映学生个体特征的因素之一．指学生之间在稳定的心理特点上的差异，如性格、兴趣、能力等方面的差异．个别差异不仅表现为特点不同，而且表现为同一特点的不同水平．心理的个别差异是在独特的自然基础上，在一定的条件下受到家庭、学校、社会环境的影响，并通过实践活动而形成和发展的．在教育工作中，研究和了解学生心理的个别差异，就是为了根据学生已有的心理特点，同时考虑到他们其他方面的特点，采取适当的措施，使他们在德、智、体诸方面都得到发展．当前，许多国家的教育工作者都比较重视个别差异，以发挥个人的智力优势．在这方面采取的教育措施主要有：

1. 注意早期教育．
2. 强调全面发展．
3. 提倡因材施教．

学生性格的差异(differences in student's personalities)　反映学生个体特征的因素之一．指学生对现实的态度及活动中的意志特征的差异．从学生对现实的态度和意志特征看，他们的性格有不同的表现．一部分学生对自己所从事的活动有明确、稳定的目的，并且符合社会的要求．他们在活动中守纪律，自制能力较强，表现出主动精神和毅力．第二部分学生在活动中也有目的，但是在意志特征上有缺陷，如缺乏自制力或缺乏坚韧和顽强性等．第三部分学生在活动中没有较长远、明确的目的，如学习目的不明确，兴趣和志向经常改变，但是他们在完成某些具体任务时都能表现出一定的意志力．第四部分学生活动的目的性不强，而且意志薄弱．学生性格的差异也表现在他们对现实的态度或意志的某一个别特征上，如是否勤勉、诚实、勇敢、坚定、有毅力、有社会责任感、集体主义精神以及批评与自我批评的态度等．另外，由于气质不同，学生的同样的性格特点在形成过程中和表现上也会显示出个别差异，因此为了分析学生性格上的差异，还必须了解学生的气质特点．

学生兴趣的差异(differences in student's interests)　反映学生个体特征的因素之一．指一个人力求认识并趋向某种事物所特有的意向的差异，兴趣标志一个人参加某种活动的积极性，是个体主观能动性的一种体现．学生兴趣的差异通常表现在学习活动中，主要有下述两个方面：

1. 学生兴趣所指向的对象各不相同．有的学生对理论和规律的知识有较浓厚的兴趣，有的学生却对直观的具体的知识或具有鲜明实践意义的知识感兴趣，也有的学生对实验操作和科技活动有兴趣，还有些学生对文艺或体育有兴趣．当然也有兴趣分配比较平衡，即不表现出有任何突出兴趣倾向的学生．
2. 学生的兴趣在范围和稳定性上也是各不相同的．例如，有的学生兴趣多样，什么事物都想知道，什么活动都想参加，而有些学生的兴趣则局限在较窄的领域中．有的学生的兴趣发生很快但易于转移，也有的学生则有较稳定持久的兴趣等．“兴趣是最好的老师”，数学教师在教学中要首先注意培养学生对数学学习的兴趣．

学生能力的差异(differences in student's abilities) 反映学生个体特征的因素之一.指学生之间稳定的个性心理特征的差异.主要表现在以下几个方面:

1.一般认识能力的差异.在注意、记忆、观察、思维和想象等认识能力上,不同学生表现出不同的特点.

2.特殊才能的差异.在特殊才能方面,学生的个人特点表现得最为明显.有的学生具有文学艺术的才能,有的具有科学技术方面的才能,有的具有体育才能,有的具有组织才能等.同是具有某种才能,他们所具有的心理品质也可能有所不同.

3.能力发展的水平及表现早晚方面的差异.不论是一般能力还是特殊能力,都有发展水平的不同.有些学生能力发展水平较高,在某些方面表现出优异的才能,而有些学生由于种种原因,一般能力发展水平较低或者某些方面的能力薄弱,甚至有些缺陷.另外,有些人才能早期表现,而有些人的优异才能表现较晚,甚到在晚年时期才表现出来.

学生智力的差异(differences in student's intelligence) 反映学生个体特征的因素之一.指学生智力发展水平的差异.智力包括观察力、记忆力、注意力、思维力和想象力等五个基本因素.不同的学生在智力上存在着个别差异.它可以做下面三方面的分析:

1.超常、正常和低常:心理学一般都按照人的智力发展水平,划分为超常、正常、低常三种类型.国外是通过智力测验所得到的智商来表示的.智商在100左右者,表示智力正常;140以上表示智力超常或"天才";70以下表示智力低常.

2.智力早熟和大器晚成:有的人智力发展较早,即所谓智力早熟,例如德国数学家高斯(Gauss,C.F.)10岁时,就迅速巧妙地算出了由1到100这100个数的和.也有的人智力发展较晚,即所谓大器晚成,例如,有1000多项发明的、杰出的科学家爱迪生(Edison,T.A.)和物理学巨匠爱因斯坦(Einstein,A.)等,在小学甚至到初中阶段,学业成绩并不突出,而到了青年、中年时期智力迅猛发展.可见,人的智力发展是有年龄阶段的,而且存在差异.

3.正态分布:根据日常观察和心理研究,在全人口中,智力一般呈正态分布.中国科学院心理研究所最近对228000个儿童进行调查,发现超常儿童占3‰左右,痴呆儿童占3.4‰.国外的许多研究也大致如此.除痴呆外,所有智力正常的学生都能学到不同水平的数学.

数学知识的学习(learning of mathematical knowledge) 数学学习的目的之一.数学基础知识,一般是指数学教学大纲(或课程标准)规定的教学内容,包括数学的概念、公理、定理、法则、公式,以及数学的思想方法、推理论证方法等.对于数学概念的学习,要以辩证唯物主义的观点为指导,掌握概念的本质.要从接触过的实例中或从数学知识的新旧联系中,认识数学概念是直接或间接地来源于客观实际的.这样既可加深学生对数学概念的理解,又可培养辩证唯物主义观点.对与新概念有关的实际问题要善于进行观察、比较、分析和概括;对相近又容易混淆的概念,要用对比的方法分清它们之间的区别与联系,揭示它们各自的本质属性和逻辑关系.对于公式、法则、定理的学习,要明确它们的适用范围,并且要将常用的重要公式、法则、定理牢固记忆,表述时要简练、准确,对于关键性词语务必深刻理解其含义.推导证明,要分清条件和结论,要着重分析推导证明的思想方法,要掌握推导证明的规范的书写格式.推理论证方法,也是数学基础知识的重要组成部分.在中学数学中常用的推理论证方法有归纳法、演绎法、综合法、反证法和数学归纳法等.要逐步熟练掌握运用这些数学基本方法.

数学能力的形成(development of mathematical ability) 数学学习的目的之一.根据数学的特点和中学数学教学目的,中学数学教学应着重培养学生的运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力,以逐步形成用数学知识去分析问题和解决问题的综合能力.运算能力的形成:中学数学里的运算能力是指笔算、口算、表算能力和恒等变形、方程和不等式的变形等能力.深刻牢固地掌握基础知识是提高运算能力的基础,灵活运用基础知识是提高运算能力的关键.为了提高运算能力,还要掌握一些具有规律性的简捷计算方法,熟记一些常用的数据.逻辑思维能力的形成:逻辑思维是指遵循逻辑规律、符合逻辑形式的思维过程.逻辑思维能力是中学数学教学培养的三种特殊能力的核心,它几乎寓于一切数学学习活动之中,特别寓于一切定理、法则、公式的证明、推导过程之中.掌握分析与综合、归纳与演绎、直接证法与间接证法,既是学习数学的基础知识,又是培养逻辑思维能力的基本途径.空间想象能力的形成:空间想象能力主要是通过学习平面几何、立体几何培养起来的.当然,学习代数的某些内容也有助于空间想象能力的形成.

数学概念的学习(learning of mathematical concepts) 数学学习的基本内容之一.主要包括以下三点:

1.要透彻地理解数学概念,这就是说要咬文嚼字,逐字逐句地推敲.比如,"含有两个未知数,并且含有未知数的项的次数都是1的方程称为二元一次方程."这个概念中包含着"元"、"次"、"项"这些定义概念.只有掌握"元"、"次"、"项"这些概念,才能掌握

好“二元一次方程”这个概念.

2. 要注意概念随着数学的发展而扩张，给予它新的定义，并把以前的概念作为它的特例. 例如，乘法这个概念的定义，最初是以相同加数的加法来定义的，随着数的范围的扩大，由研究自然数进入研究有理数时，就必须给乘法以新的定义. 这时乘法有着更广泛的意义，但自然数的乘法定义仍然是它的特例. 有些概念有一个逐步深化的过程，及时用新的概念去统一旧的概念，就能避免旧知识对新知识的干扰，使概念逐步深化.

3. 要注意使用概念解题，在使用中加深理解. 有些题目如能恰当地使用概念，往往能使解法十分简捷.

总之，对于一个数学概念，理解的标志是做到“六能”：能清晰地理解，能明确地记忆，能用自己的语言解释，能与相近的概念进行比较并找出差异，能举出正、反例子，能养成使用概念术语的习惯.

数学定理、公式、法则的学习(learning of mathematical theorems、formulae、rules)　数学学习的基本内容之一. 数学定理、公式和法则是推理论证和各种运算的依据，必须牢固地掌握，在深刻理解的基础上记忆. 因为导出的过程便是所谓数学化的数学活动. 比如，什么是定理的条件，什么是定理的结论；它的逆命题是否正确；改动定理的部分条件，结论会随之发生什么变化等，都要搞清楚. 这样，才能理解定理的实质及其客观正确性. 初学定理时困难在于分不清条件和结论，不理解显然正确的东西为什么还要证明，建立不起条件与结论间的联系. 要减少困难就要注意打好基础. 在初中代数与几何的学习中，应该注意教科书上或老师有意识安排的那些培养思维能力的题目. 通过分析这些题目，有助于理解证明，培养思考问题的能力与习惯. 记忆公式和法则也是一样，必须先掌握其来龙去脉，不能死记硬背. 实际上，记住某些公式的推导方法要比记住公式本身更为重要，更有价值. 比如，记住推导等比数列求和公式所用的错位相减法，不仅可以迅速导出公式本身，而且适用于求一些特殊数列的前 n 项和.

数学思维(mathematical thinking)　一种最重要、最基本的思维. 指数学对象“纯粹的量”的本质和数学对象间“纯粹的量”的规律性的关系在人们头脑中的反映. 在数学学习中，不仅广泛应用了这样一些思维过程：分析—综合、概括—抽象、归纳—演绎、猜测—搜索，并且还充分运用了概念、判断、推理等思维形式. 由于用数学来描述刻画客观规律具有符号形式化、数量精确化和概括公式化的特点和优点，这些特点使人们从特殊规律中概括出一般规律，或者从一般规律中演绎出特殊和个别的规律，都变成了一种数学公式和方程的演算过程. 这就大大简化、加速了思维进程，并且正是由于这种符号形式化、数量精确化、概括公式化的特点，使人们能够将思维过程程序化.

从思维的内容来看，数学思维有三种基本类型：确定型思维、随机型思维和模糊型思维. 所谓确定型思维，是指事物变化服从确定的因果联系的一种思维方式. 这种思维的特点是事物后面的运动状态必然是前面运动变化状态的逻辑结果. 所谓随机型思维，是指反映随机现象统计规律的一种思维方式. 具体一点来说，就是事物的发展变化往往有几种不同的可能性，究竟出现哪一种结果完全是偶然的、随机的；但是某一种指定结果出现的可能性则是服从一定规律的. 就是说，当随机现象由大量成员组成，或者成员虽然不多，但出现次数大量的时候就可以显示某种统计规律. 这种统计规律在人们头脑中的反映就是随机型思维. 确定型思维和随机型思维，虽然有着不同的特点，但它们都是以普通集合论为其理论基础的，都可以分明地精确地进行刻画. 但是在客观现实中还有一类现象，其内涵、外延往往不是明确的，常常呈现出“亦此亦彼”性. 为了描述此类现象，人们只好使用模糊集合论的数学语言去描述，用模糊数学概念去刻画. 从而创造了对复杂的模糊系统进行定量描述和处理的数学方法. 这种从定量角度去反映模糊系统的思维方式就是模糊型数学思维.

上述三种思维型是人们对必然现象、或然现象和模糊现象进行逻辑描述或概率统计描述评判的不可缺少的思维方式. 数学思维以高度概括和极度抽象的形式出现. 它的这种特点，恰恰反映了人类一般抽象思维的典型特征. 正是由于数学思维有了这种典型特征，从而保证了数学思维存在的普遍性和广泛的适应性. 现代科学技术发展的一个明显的特征是数学思维正在到处渗透. 生活在当代社会的每一个公民，如果不具备一定的数学思维能力，是难以在当代社会中得以生存和发展的. 同时，在探索未知的过程中，一般均要通过形象思维、逻辑思维和直觉思维，才能完成由前提到结论的过渡. 形象思维、逻辑思维和直觉思维，统称为数学思维成分.

数学思维成分(components of mathematical thinking)　见“数学思维”.

形象思维(thinking in images)　数学思维成分之一. 指凭借事物的具体形象和表象的联想来进行的思维. 形象大致可分为三类：

1. 视觉形象，这是外界事物的现象反映在人脑中的映象.

2. 经验形象，这是建立在实践基础上的许多映像的集合，或者说是一个映象群.

3. 观念形象，这是以形象的形式来反映事物的本质.

形象思维是人类根据认识需要所进行的一种理性思维活动.它在数学研究和教学中都起着重要作用.正如苏联数学家柯尔莫哥洛夫(Колмогоров,A.H.)所指出的:"只要有可能,数学家总是尽力把他们正在研究的问题从几何上视觉化."概括、抽象、归纳、演绎是抽象逻辑思维的方法,而联想、想象、类比和相似是用于形象思维的基本方法.形象思维过程和其他任何一种思维活动一样,也是由前提通过接通媒介过渡到结论的.所不同的是,这里的接通媒介是形象形式的知识;形象形式的知识的一个特点是,它往往并不进入人类公认的知识体系.逻辑思维活动在一定条件下可以转化为形象思维的活动.形象思维和逻辑思维都属于理论认识的范畴,都是事物的本质和事物之间规律性的关系,在人们头脑中的概括的、间接的反映.

逻辑思维(logical thinking) 数学思维成分之一.指按照逻辑规律、逻辑法则进行的思维.形式逻辑是研究人类正确的思维规律和形式的科学,而辩证逻辑则揭示更高级的规律.形式逻辑和辩证逻辑的真理性是为人类亿万次的实践所证实了的,它们是可以运用于一切科学领域中的思维方法和规律.数学是一门逻辑性很强,逻辑因素十分丰富的科学.数学知识大都表达为数学命题,这些命题的结构形式、逻辑作用、论证方法以及它们之间关系的研究都依靠了逻辑思维.数学要求明确地阐述概念、恰当地判断、合乎逻辑地进行推理,这都要求数学比其他科学更加需要逻辑思维形式.在数学科学范围内进行思维也需要使用比较、分析与综合,同时还必须遵守同一律、矛盾律、排中律和充足理由律这样一些形式逻辑的基本规律.逻辑思维除经常表现为形式逻辑的思维方式外,还有辩证逻辑的思维方式.数学中的辩证逻辑思维是指对数学对象及其性质之间一般和个别的相互关系的动态认识的一种思维活动形式.确定数学中的辩证逻辑思维,可以从两个方面来进行:

1. 看逻辑推理和证明的水平,即从一般与特殊、归纳与演绎、有限与无限、抽象与具体、理论与实践等来判别.

2. 分析其思维方法,看其是否符合对立统一,量变、质变和否定之否定三个规律.

而形式逻辑思维方法更多是指观察比较、分析综合,归纳演绎等.

直觉思维(intuitive thinking) 数学思维成分之一.指人们在思维过程中,有时会突然闪现出某些新思想、新观念和新办法.比如,突然在思想上产生经过长期思考而没有得到解决的问题的解决办法,发现了一直没有发现的答案,突然从纷繁复杂的现象中顿悟了事情的实质.这种"突然闪现"、"突然产生"、"顿悟",就是直觉.人们在认识过程中的这种特殊的认识方式,就称为直觉思维.直觉思维的形式不是以一次前进一步为特征的,而是突然认知的,是顿悟的形式,是认识过程的飞跃.一般说来,新的科学观念是从前面的思想联想起来的,而这种联想是过去经验和教育在人们的头脑中造成的.尽管直觉思维常常表现出"突然"、"顿悟"的形式,但是直觉思维也是基于过去的经验和教育的结果.直觉是某种外部刺激所带来的联想,是神经联系的重新组合和认识思维结构上的突破、更新.正是这个原因才使得一个人能以飞跃、迅速、越级和放过个别细节的方式进行思维,从而使他在思想中激起和释放出某些新思想、新观念和新办法.直觉在教学过程中也是客观存在的,并且有其特点.研究这些特点,对发展学生的直觉思维,促进其创造性思维能力的发展有着重要意义.受到其他事物的启发,是捕捉直觉思维的一条重要途径.利用具有启发作用的事物和所要思考的对象的某些相似之处,进行"类比"、"联想"和"迁移",有助于触发学生的直觉思维.直觉思维的基本特征是前提和结论之间的接通媒介,不是抽象形式的知识,也不是形象形式的知识,而是人的直觉.由此可见,直觉思维也是构成数学思维的一个不可缺少的重要的思维成分.

数学思维分类(classification of mathematical thinking) 数学思维的基本类型的划分.从心理学角度看,数学思维可分为感知动作思维、具体形象思维、抽象逻辑思维以及辩证思维.

感知动作思维(sensorimotor thinking) 数学思维的基本类型之一.指在感知和操作中进行的思维.它以感知动作的存在为界,感知和动作停止了,它也就停止了.

具体形象思维(concrete operational thinking) 数学思维的基本类型之一.指离开感知和动作而利用脑中所保留事物形象所进行的思维.它是把各种感官所获得并储存于大脑中的客观形象的信息,运用比较、分析、抽象等方法,加工成为反映事物的共性或本质的一系列意象,以这些意象为基本单元,通过联想、类比、想象等形式,形象地反映客观事物的内在本质或规律的思维活动.它以不离开具体形象为特征.

抽象逻辑思维(formal operational thinking) 数学思维的基本类型之一.指离开具体形象思维,运用概念、判断和推理等进行的思维.它是在感性认识取得材料的基础上,运用概念、判断和推理等理论认识形式,对客观世界间接、概括的反映的过程.它以概念性、抽象性、逻辑性为基本特征.抽象逻辑思维可分为经验型抽象逻辑思维和理论型抽象逻辑思维.它具有两个阶段:从感性具体上升到思维抽象;

从思维抽象上升到思维具体.

辩证思维(dialectical thinking) 数学思维的基本类型之一.指客观辩证法在人们思维中的反映,是客观事物和客观过程的内容发展的辩证法在逻辑思维形式中的再现.它反映了概念、判断、推理等的灵活性、可变性和辩证矛盾的特性.

上升性思维(upgrading thinking) 一种具体思维活动.以实践所提供的个别性经验作为思维活动的起点,整个思维活动的目的是使个别性经验认识上升为普遍认识的思维,称为上升性思维.它必须依靠比较、分析、抽象等方法.

发现性思维(discovery thinking) 一种具体思维活动.指建立或探索数学的概念、规律、方法的思维,它主要包含直觉思维、归纳思维、类比思维、辨析思维这些思维形式.从目的看,它的重点是事物的本质或事物之间可能有的联系;从性态看,它是发散性的;从实质看,它所得的结论并不需要充足的理由.

创造性思维(creative thinking) 一种具体思维活动.人类高级的思维活动,是指带有创见的思维.通过思维不仅能够揭露客观事物的本质及内在联系,而且在此基础上可以产生新颖、独特的东西,至少是思维者的头脑中以前不存在的东西.它具有独创性、灵活性、综合性等特征.

求同思维(commonality thinking) 亦称集中思维.一种具体思维活动.就是"多入一出"的思维,多种信息输入,一种信息输出.具体来说,就是严格按照概念、定理、定义、公式、法则,使思维规范化,学会做题目的最好模式,掌握知识的一般规律.求同思维有利于知识规律的掌握.

集中思维(concentration thinking) 见"求同思维".

求异思维(differential thinking) 亦称发散思维.一种具体思维活动.就是"一入多出"的思维,一种信息输入,多种信息输出.具体来说,就是依据定理、公式和已知条件,产生多种想法,广开思路,提出新的假设,新的构思,发现和解决问题.求异思维有利于提出多种设想,培养创造性思维.

发散思维(divergent thinking) 见"求异思维".

灵感思维(inspirational thinking) 一种具体思维活动.指对某个疑难问题长期沉思之后,遇到某种刺激后,突然激发出来的思维.它是在一定知识信息储备的基础上,对疑难问题久经沉思之后的几种信息之间的突然沟通,具有突发性、偶然性、独创性、突逝性等特点.

数学思维的品质(qualities of mathematical thinking) 个体在数学思维过程中所具有的特征和特点.它是由数学思维对象、方法等特点所决定的.用微观的观点来分析,数学思维的品质包括:灵活性、独创性、深刻性、目的性、合理性、开阔性、主动性、批判性、论证性、记忆的条理性、语言文字的简明性等.数学思维活动的好坏与思维的品质有着直接的关系.苏联教育学家巴班斯基(Бабанский,Ю. К.)通过实验研究,证实了中学生学习是否顺利,与他们的思维是否具备下列思维品质密切相关,这些思维品质是:思维的独立性(相关系数 0.89)、分清实质性(0.87)、思维的合理性(0.85)、思维的灵活性(0.85)、语言的逻辑性(0.85)、思维的批判性(0.84)等.以上数学思维的各种品质,彼此之间是息息相关的,往往处于有机的统一之中,同时会组成一定的相互关联的综合体,在学生学习活动中,它们会以另外一些独特的思维品质的形式表现出来.当前国内外数学教育家共同的看法是:数学思维的各种品质确定了思维的质量,影响着思维的结果,因此数学思维品质对数学教育有着特殊的重要意义.培养学生的良好的数学思维品质,不仅有助于数学教学的顺利进行,而且是数学教育的目标之一.

数学思维的灵活性(flexibility of mathematical thinking) 数学思维的品质之一.指思维活动灵活的特征.它是由思维者能否灵活运用已有知识和选择最优的思维方法所决定的.在整个思维活动的过程中,思维的灵活性表现在:

1.思维方向的灵活性:可从不同角度、不同方面,并能用多种方法中的最优方法来思考问题,这就是思维起点的灵活性.数学思维方向的灵活性常表现为:能从隐蔽的已知条件中看出新的条件,分析出实质性的问题,从而很快地由一般的解题途径转向另一种最优的解题途径.

2.思维过程的灵活性:在思维活动中,运用各种公理、法则、定理以及规律的自觉性高.

3.思维结果运用的灵活性:在思维中注意力的迁移反映得快,能举一反三,触类旁通.

数学思维的灵活性程度可以测定.如果从一题多解的解数、一题多变的变化数为客观指标,可从三个方面来进行测定:

1.多解或"发散"的程度:例如"一解"规定得一分(这是在量方面的统计).

2.伸缩与精细的程度:例如让测试的学生"尽可能多地写出表示"1"的数学式子,被测试的学生写出的越多,便能反映出"质"的区别.通过测试,要求统计并评定成绩(这是在质方面的统计).

3.对注意力迁移水平的测定:例如运用不同的方法达到多解和举一反三的程度等.

对学生数学思维灵活性的测定,有助于教师发现学生在思维和知识方面存在的问题,并针对问题改进教学,提高数学教学质量.

数学思维的独创性(creativity of mathematical thinking)　数学思维的品质之一.指思维活动的创造精神的体现.它是思维的灵活性、深刻性、批判性、开阔性等思维品质相互渗透、相互作用、高度协调、合理构成的产物,是一种比较高级的思维品质.一般在人的灵感状态下,往往会产生思维的独创性.而人类科学的发展,要有所发明、有所发现、有所创新,这一切都离不开人们思维的独创性.值得重视的是:如果在解答某一数学问题时,具有别人尚未发现或不同于常规的非一般化的思考方式和途径,即在已知领域中有所突破,在未知领域里有所创新,那么这也是一种思维独创性的表现.思维独创性的反面是思维的守旧性,即总是按自己已习惯的常规的方法去思考和解决问题.在数学学习中,要敢于除旧,鼓励学生创新,培养"发散思维"能力,克服思维的守旧性,逐步发展思维的独创性.思维的独创性程度可以测定.例如,以自编数学应用题的数量为指标,可以从两个方面对学生进行测定:

1.测定直觉编题→形象编题→语词或数学编题的水平、程度.

2.测定模仿编题→半独立编题→独立编题的水平、程度.

通过教师和学生一起评定,不仅能发现问题,便于有针对性地纠正,而且学生能在自编应用题的"创造"性活动中,较客观地反映出独立性、发散性、新颖性的特点,对学生思维独创性的培养和发展是十分有益的.

数学思维的深刻性(depth of mathematical thinking)　数学思维的品质之一.指思维活动的抽象程度和逻辑水平,以及思维活动的广度、深度和难度.它是一种开展系统的理性活动,透过现象看本质,分清事物实质的思维品质.思维的深刻性既表现在严密的思维活动过程之中,又表现在思维活动结果的广度和深度之上,并能经受实践的检验,达到举一反三、触类旁通的效果.思维的深刻性的反面是思维的表面性,它表现为认识的肤浅性,只知其现象而不知其本质.在数学教学中,要注意发展学生思维深刻性的品质,加强学生数学语言的训练,提高学生的逻辑思维能力,培养学生透过现象看本质,分清问题实质的思维能力,并要求学生做到:问题已解完,思路不要断,深入再探索,争取新发现.

数学思维的目的性(purposefulness of mathematical thinking)　数学思维的品质之一.指思维活动的方向性、针对性和前后一致性的思维特征.数学思维的目的性往往是指在解决某数学问题时,要力求思维的方向总是放在该问题的目的基点上,从而作出明智的选择,以及力求寻找捷径达到解决问题的目的.思维的目的性明确,就可以少走弯路,大大地节约时间和精力.

数学思维的合理性(rationality of mathematical thinking)　数学思维的品质之一.指思维活动的全过程要符合逻辑性、思维的结果要具有充足的理由的思维特征.它要求思维的逻辑严密、结论正确;它是思维基本规律中充足理由律的具体反映.在数学中思维的合理性,也是数学的严谨特点的具体要求.在实践中,不同思维水平的人,就有不同的思维的合理性.具有较好的思维合理性品质的人,往往能有依据、有条理、有理由、有效地解决所思考的问题;而缺乏思维合理性品质的人,常常是思维混乱、概念模糊、理由不足、推理错误.在数学教学中,应该要求学生思路清晰、合理,每一步运算和推理都要有条不紊,清楚明白;要求学生思考缜密,防止"以偏代全",以想当然代替事实.要求学生言必有据(这是思维严谨性的核心要求),每一步运算和推理,都应有充足的理由,正确的依据.这样长期加强训练,学生的思维就会日趋严谨、逻辑严密,对数学思维合理性品质的培养大有益处.

数学思维的开阔性(broadness of mathematical thinking)　数学思维的品质之一.指从多角度、多方向、多途径全面思考问题的思维特征.它具有思维的概括性和全面性等特点.数学思维的开阔性是思维最显著的特征,也是思维的灵活性、独创性、深刻性的基础.从信息论来讲:思维的开阔性要求能从同一信息源中产生出多种多样的、为数众多的信息,从所给和所得到的信息中又产生新的信息.从心理学来讲:思维的开阔性决定于一个人的优势兴奋中心区域的大小.在大脑两半球的优势兴奋中心区域内,新的条件反射容易形成.如果思维时这一区域不够开阔,形成通路的机会就少.当然,思维的开阔性也和一个人已有的知识经验、思维能力是分不开的.缺乏丰富而系统知识经验和良好的思维能力,就不可能具备思维的开阔性.数学思维的开阔性,往往表现在能对所学数学知识进行综合、归类和条理化、概括化;能运用类比和概括的方法去解决数学问题;在可能的情况下,能使数学题一题多解、一题多变,并可使其结论不断引申和拓广等.

数学思维的主动性(initiative of mathematical thinking)　数学思维的品质之一.指思维活动中积极思考的思维特征.它是各种思维品质的基础和先决条件,也就是说离开了思维的主动性,就谈不上具备思维的灵活性、独创性、深刻性、开阔性等思维品质.它的特点是持续不断地努力思考所要解决的问题,善于思索各种问题的各个方面,有非把问题解决不可的愿望,并且还有积极探求各种解题的方法,以及研究条件变化后该题的各种变形等.思维的主动性和人的爱好、情感、意志、思想等都有着密切的关

系. 数学思维的主动性往往表现为数学思维的活跃性与积极性.

数学思维的论证性(provableness of mathematical thinking) 数学思维的品质之一. 指在思维活动中，符合逻辑、正确推理的思维特征. 它是逻辑思维、理论思维在人的思维中的具体体现. 它反映出思维是一种不断抽象的理论认识，而人的认识的理性阶段，尤其需要思维的论证性. 它要求思维具备逻辑性、层次性和合理性，并且符合思维的基本规律，即同一律、矛盾律、排中律和充足理由律. 具有较强思维论证性的人，往往能够迅速、明确、有效地解决实际问题，并且又能清楚、准确、有条有理地论述. 数学思维论证性的特点较突出地表现为：能够耐心而精心地搜集足以进行数学推理的定义、公理、定理、公式等. 力求在数学论证中做到：思考缜密、思路清晰、语言精确、条理清楚、言必有据，每一步论证都要有已证过的真命题和已知条件作为可靠的依据，而且要遵循正确的思维规律和基本形式，善于去伪存真，准确地揭示假设与结论之间的因果关系.

数学思维的志向水平(ambitional level of mathematical thinking) 数学思维的品质之一. 指个体对数学思维的积极程度和各方面的倾向性和专注性. 志向水平对数学思维具有重大意义.

数学学习意向(disposition of mathematics learning) 数学学习论的基本概念之一. 指学生对学习某一数学知识的愿望. 这种愿望越强烈，学习的积极性就越高. 它是数学学习动机的综合表现，是外部动机和内部动机相互作用的结果.

数学学习动机(motivations for mathematics learning) 数学学习论的基本概念之一. 指学习数学的念头、愿望、理想. 它分为数学学习的外部动机和内部动机. 外部动机是指考虑到学习结果所引起的动机，也称间接动机；内部动机是指由学习活动过程所引起的动机，由学习材料直接引起，并且直接作用于学习材料，又称直接动机.

数学美(beauty of mathematics) 数学的基本特征之一. 指数学所给予人们的美的感受. 它是一种理性的美，抽象形式的美. 具备一定的数学修养，是感受数学美和发现数学美的前提. 数学美主要表现为数学的简洁性、对称性、统一性和奇异性等.

数学思维的简单性原则(simplicity of mathematical thinking) 数学教学的一个根本原则. 它要求思维者对多样的数学材料进行尽可能简单和统一的处理，又称多样的统一的原则. 它是个体的思维对客观世界的复杂多样性作出反应的原则. 它是在人类思维实践中形成的，产生的内因是人类思维对形式和简约的需要，外因是客观世界呈现出来的和谐性. 基底法、公理化、模型化、形式不变原理等体现了数学思维的简单性原则.

问题情境(context of problems) 数学学习论的基本概念之一. 指个体面临的数学问题和它所具有的相关经验所构成的系统. 合适的问题情境，指的是外部问题和内部知识经验条件的恰当程度的冲突，使之引起最强烈的思考动机和最佳的思维定向的这样一种情境.

思维的数学水平(mathematical level of thinking) 形式逻辑术语. 指在对某一数学问题思考中，个体所反映的数学知识水平. 在与志向、联系、探索等水平并列时，是指运用数学知识去描述和思考的那个阶段，它不仅取决于知识的数量和深刻程度，还取决于由知识的有效结构所决定的知识品质.

良好的数学知识结构(well-established structure of methematical knowledge) 数学学习论的基本概念之一. 指以基本知识为主干的，具有众多生长点和开放面的，以广阔的逻辑覆盖面和宽广的创造性空间为特征，在积累中保持良好的活动性的那样一种知识结构.

数学知识的基本结构(basic structure of mathematical knowledge) 数学知识的基本特征之一. 指由知识之间内在的联系所联结而成的知识整体. 它由两个要素组成：

1. 最基本的知识.
2. 其他知识与最基本知识的联系，其中最基本知识和其他知识都是相对于所讨论范围而言.

数学学习的认识结构(knowledge structure of mathematics learning) 数学学习论的基本概念. 指人在数学认识活动中的心理过程(感觉、知觉、思维、想象、记忆、注意等个性差异)，是学习者的主体结构. 它反映了学习的心理规律，通常由具体到抽象，由简单到复杂，以归纳、类比等似真推理为主.

数学学习的认知结构(cognitive structure of mathematics learning) 数学学习论的基本概念之一. 指学生头脑中的数学知识结构. 认知结构是认识的主体结构和客体结构的统一体，是学生观念的全部内容的组织.

数学知识的逻辑意义(logical significance of mathematical knowledge) 数学知识的基本特征之一. 指数学知识的逻辑体系所具有的意义. 个体可以通过已学知识或已观察到的现象获得某一知识的逻辑意义.

数学知识的潜在意义(potential significance of mathematical knowledge) 数学知识的基本特征之一. 当个体具有有关知识基础或能力水平时，这一知识就对于这些个体具有潜在意义. 例如图论理论对于数学系学生具有潜在意义，但对于中学生就缺乏潜在意义.

数学知识的心理意义(psychological significance of mathematical knowledge) 数学知识的基本特征之一.当新知识同个体原有知识建立联系,发生相互作用后,成为个体自己的知识,就称建立了数学知识的心理意义.它对于学习者来说是最根本的意义.

思维的策略水平(tactical level of thinking) 形式逻辑术语.指思维对某些外部刺激的基本反应方式的合理程度.这一层次的反应方式,因其适用于广泛的解决问题的思维而区别于解题的具体思路和方法.从宏观看,策略水平是思维者能对所采用的数学方法及所建立联系过程,进行自觉合理控制的那样一种层次.尽量把思考提高到策略水平,有助于增强人的思维品质,借以学会解决更广泛的问题,收到"举一反三"的效果.

升格策略(upgrading strategies) 一种普遍适用的思维策略.当人们研究的是某些元素(或是维数或抽象水平较低的对象)的关系时,把问题归结为这些元素所在的整体(或是维数或抽象水平较高的对象)的关系或性质的问题.通过对整体(或是维数较高的或抽象水平较高的层次上的)的性质、关系的考察,而使原来的问题获得解决.这样的策略即为升格策略.

降格策略(lowering strategies) 亦称退化策略.一种普遍适用的思维策略.指当复杂事物一时认识不清时,暂退到简单情形的一种策略.退化的目的是为了循序渐进.它遵循了人们认识事物初始由简单到复杂的规律.

递归方法(successive lnduction) 降格策略反映到数学思维中的一种方法.指从初始条件出发,利用递推关系而求得一般结果的方法,例如降维法.

缩格策略(condensable strategies) 亦称质化策略.一种普遍适用的思维策略.指尽可能对题目的条件与结论进行分析,抓住最基本的条件,把问题归结为单纯的相互独立的元素的问题.例如化复杂图形为简单图形,化复杂量为基本量,化曲为直等都是缩格策略.

公理化方法(axiomatic approach) 缩格策略反映到数学思维中的一种方法.它是从尽可能少的不加定义的原始概念和一组不加证明的原始命题(公理、公设)出发,运用逻辑规则推导出其余命题和定理,以致建立整个体系的一种方法.

更格策略(changing strategies) 一种普遍适用的思维策略.指在解数学问题时,保持某些不变性质,改变信息形态,借以解决问题的策略.

数学变换方法(mathematical transformation) 更格策略反映到数学思维中的一种方法.指在研究和解决数学课题时,采取迂回的手段达到目的的一种方法,也就是把要解决的问题先进行信息变换,使之转化为便于处理的形式.具体地讲,将复杂的问题通过变换转化成简单的问题;将难的问题通过变换转化成容易的问题;将未解决的问题通过变换转化成已解决或较易解决的问题.它是解决数学问题中常用的最基本的方法之一.变换的形式有:传递形式的变换、符号表达方式的变换、空间关系的变换等.

分格策略(separating strategies) 一种普遍适用的思维策略.指把综合性较强的数学问题看成若干个子问题构成的整体,把一个问题分解为若干个较易解决的子问题的策略.

数学策略的本质(nature of mathematical strategies) 数学思维策略的原则.尽可能地把不熟悉的问题转化到熟悉的领域,把新问题转向语义丰富域,即具有充实内容而意义丰富的知识领域.

数学思维的联系水平(related level of mathematical thinking) 数学思维的品质之一.思维可以看作是建立未知与已知联系的过程.狭义的联系水平,是指思维者掌握已知与未知联系的达成程度;广义的联系水平,是指思维的一个阶段性的层次,即掌握了已知与未知的联系,它在时序上处于阶段的末尾,又处在使用数学知识和工具进行描述之前.需要志向的激励,数学知识的使用,策略的指导和借助探索等去揭示和提高思维的联系水平.

瞬时记忆(instantaneous memory) 亦称感觉记忆.记忆的一个层次,指无意中形成的记忆.外来的信息会直接进入这一层次的记忆,但除非记忆者有意识地把这些信息送到其他层次的记忆中去,否则1秒左右即会消失.

短时记忆(short-term memory) 记忆的一个层次,是最活跃的一种记忆.这一层次的记忆容量有限,新信息很快就取代了原有信息.短时记忆中的信息,除非控制系统把它有意义地转入长时记忆,否则20—30秒内即会消失.

长时记忆(long-term memory) 记忆的一个层次.指信息在短时记忆里经过整理后,可储入长时记忆,通常会留存很长时间.长时记忆具有巨大的容量.

数学思维的图论分析(graph theory analysis of mathematical thinking) 一种数学思维的研究方法.指运用图来研究数学思维,具体可分为三步:

1. 把思维过程表达为图.
2. 进行图的运算.
3. 对运算结果作思维解释.

它既是辅助思维的工具,又是借以进行思维教育的工具.

连通问题(connectivity problem) 一种图论问题.在可以把问题归结为建立两元素间联系的数学

问题中，思维图的运算可以归结为安插新的结点和边，最终完成包含表示这两元素结点的一个连通图．这类数学问题称为连通问题．

最小点基问题(minimum base of points)　一类涉及多变元的数学问题．运用图论方法时，在画出有关思维图之后，通过其最高强连通分支，找出解决问题的最小点基，从而把问题归结为最少独立变元的问题，以此显示解题思想并导致问题的解决．

数学教育的研究方法

数学教育的研究方法(research methods in mathematics education)　数学教育学的重要研究领域之一．对数学教育的目标、内容、方法、活动及其特征进行研究，探讨其规律性的科学方法．它追求数学教育内部各要素之间和其他学科教育之间的关系，以及数学教育的质与量之间的变化规律性．常用的研究方法有理论的研究方法、历史的研究方法、实证的研究方法和实验的研究方法等．

理论的研究方法(theoretical research method)　数学教育的研究方法之一．指对现实社会中已经发生或正在发生的复杂教育问题的性质和相互关系，从理论上加以分析综合、抽象和概括，通过各种尝试，以期发现其内在规律或一般性结论的研究方法．

历史的研究方法(historical research method)　数学教育的研究方法之一．指对所研究的教育问题，结合过去的历史经验和当前实践的一种研究方法．实际上，教育的历史经验是研究现实问题的基础，现实的教育问题是历史教育问题的发展．也就是：从教育问题的历史中吸取教育思想启迪；把当前研究的教育问题，放到教育科学的历史位置上，用比较的方法对历史和现实资料进行分析，以便从历史的全局上把握当前教育问题的本质．

实证的研究方法(positive research method)　数学教育的研究方法之一．通过收集教育资料，进行调查和统计、分析和比较，以及剖析典型的教育事例，来研究构成教育问题的基本因素，以把握教育问题的实质和规律性的方法．观察和调查是常用的实证方法．教育观察方法，是指研究者对复杂的教育现象和事实，作出宏观的、深刻的、完整的体察和分析，借以把握隐藏在大量一般教育现象中的实质问题或达成规律性的认识．教育调查方法，是指研究者根据一定的教育目的或研究目的，拟出一系列的调查课题，通过一定的调查手段，对一定的教育对象作调查，并对调查结果作出定性或定量的分析，从中引出必要的结论或论断．

实验的研究方法(experimental research method)　数学教育的研究方法之一．它是人们认识客观事物和现象的规律性的科学方法．广义说来，教育者所选择的教育内容、方法和实施过程等都是为达到教育目的所作的教育实验，但狭义的教育实验须满足以下条件：

1. 为验证某种教育假说，事前要提出一定的实验条件．

2. 根据所提条件，采取一定的控制手段，以求得实验的严密性．

3. 可以在适当条件下，使实验重复进行，以求得实验结果的客观性．

教育评价(educational evaluation)　教育学的基本概念．指按照一定社会制度的教育方针所确定的教育目标和价值标准，对教育实践活动进行系统调查，对受教育者的发展变化及影响此发展变化的诸种因素进行价值判断，为教育决策提供依据的全过程．

数学教育史

数学教育史(history of mathematics education)　研究人类社会的数学教育活动的历史发展及其规律的学科．它是数学教育的重要研究领域之一．它主要是研究学校的数学教育活动的历史发展及其规律，总结数学教育的历史经验，指导当前的数学教育改革．数学教育史是数学史与教育史的交叉学科．数学教育既受当时社会的教育制度和教育思想的制约，同时又受当时数学发展水平、数学思想和方法的制约．因此数学教育史具有两重性，它既具有教育的社会性的一面，又具有数学的非社会性的一面．数学教育起源于人类对传授数学知识的需要，具有数千年的悠久历史．根据教育和数学历史发展情况，数学教育史可划分为四个时期：

1. 原始社会和奴隶社会的数学教育(数学教育的萌芽和建立时期)．

2. 封建社会的数学教育(数学教育的发展和停滞时期)．

3. 近代资本主义社会的数学教育(近代数学教育的兴起时期)．

4. 现代资本主义与社会主义社会的数学教育(现代数学教育的改革时期)．

中国数学教育史(history of mathematics education in China)　研究中国的数学教育活动的历史发展及其规律的学科．根据中国数学教育发展的具体情况，中国数学教育史可划分为四个时期：

1. 原始社会、奴隶社会和封建社会初期的数学教育(中国古代数学教育的萌芽和建立时期)．

2. 封建社会中晚期的数学教育(中国古代数学教育的发展和兴盛时期)．

3. 半封建半殖民地社会时期的数学教育(中国近代数学教育的兴起和发展时期).

4. 社会主义社会时期的数学教育(中国现代数学教育的改革时期).

中国古代数学教育的萌芽和建立时期,分为两个历史阶段:

1. 从原始社会到西周是学校出现以前早期数学教育的萌芽阶段. 这时数学知识的传授只能在生活、生产和劳动中进行.

2. 从西周开始到南北朝是学校数学教育的建立阶段. 这时数学教育已经从生产和生活中分离,成为学校教育的一个专门的学科.

中国古代数学教育的发展和兴盛时期,分为三个历史阶段:

1. 从五代到隋唐是数学教育制度的确立和数学教育的发展阶段.

2. 宋元时期是古代数学教育的兴盛阶段.

3. 从明到清初是古代数学教育的沉寂阶段.

中国近代数学教育的兴起和发展时期,分为两个历史阶段:

1. 从鸦片战争到清末是中国近代学堂数学教育的兴起阶段.

2. 从辛亥革命到新中国成立是近代学校数学教育的发展阶段.

中国现代数学教育的改革时期,分为六个历史阶段:

1. 从 1949 年到 1957 年是社会主义数学教育的创建与调整阶段.

2. 从 1958 年到 1965 年是社会主义数学教育的改革阶段.

3. 从 1966 年到 1976 年是社会主义数学教育的衰退阶段.

4. 从 1977 年到 1989 年是社会主义数学教育的复兴阶段.

5. 从 1990 年到 1999 年,是社会主义数学教育的发展和普及九年义务教育阶段.

6. 2000 年初开始进入社会主义数学课程改革和创新阶段.

先秦的数学教育(mathematics education before Qin Dynasty) 中国古代数学教育萌芽时期的数学教育,即中国秦朝以前的数学教育. 在原始社会中,人们的祖先在生产劳动中已出现了记数和简单的几何形状等数学知识,这种数学知识的积累和传授是在生产劳动中进行的,是数学教育的萌芽. 在殷商甲骨文中不仅记录了数与形的知识,而且出现"教"、"学"、"师"等字,说明数学知识的传授已开始从生产和生活中分离出来,作为教育的内容之一. 到西周时期对学校数学教育的建立已有明确的记载.《礼记·内则》云:"六年教之数与方名","九年教之以数、日,十年出就外傅,居宿于外,学书计".《周礼》"大司徒"篇明确指出培养贵族子弟的官学"乃教之六艺":礼、乐、射、御、书、数,其中"数"即数学.《周髀算经》为周公、商高问答之辞,后人所说的:"周公作九章之法,以教天下."这说明西周时期重视数学教育,其目的是培养具有实用性的数学知识和技艺的官吏. 春秋、战国时期百家争鸣,私学很盛. 私学也进行包括数学教育在内的"六艺"教育. 孔子特别重视礼乐和伦理道德教育,他的弟子很多具备"六艺"知识. 墨家学派更重视自然科学,在《墨经》一书中包括有丰富的几何学和逻辑学知识. 这些知识的传授也是采用私学的形式. 春秋战国时期已普遍用算筹进行计算,筹算的应用对中国古代数学计算的发展和数学教育的普及起了很大作用.

汉代到南北朝的数学教育(mathematics education from Han Dynasty to the Southern and Northern Dynasties) 中国古代数学教育创建时期的数学教育. 在汉代,中国著名的两部古算书《周髀算经》与《九章算术》相继问世,它们标志着中国的数学教育已经进入一个新的阶段. 尤其《九章算术》是当时官方培养数学人才的重要教科书,并成为后来两千年中国数学教科书的典范. 它确立了中国封建社会数学教育的目的、内容和方法,体现了数学教育密切联系实际和重视计算能力的培养这两个突出的特点. 魏晋南北朝时期出现了著名的数学家赵爽、刘徽、祖冲之、祖暅和重要的数学著作《九章算术注》、《海岛算经》、《孙子算经》、《张丘建算经》、《夏侯阳算经》及《缀术》等. 这些著作的出现,进一步充实了中国古代数学教科书的体系. 这一时期官学兴废无常,但私学始终不断,"家学"有所发展. 如著名的数学家祖冲之,一家两代都精于历算,对数学做出了杰出的贡献.

隋唐的数学教育(mathematics education in the Sui and Tang Dynasties) 中国古代数学教育制度确立初期的数学教育. 隋初文帝时提倡学校,在中央设立国子寺,专门管理学校教育工作. 据《隋书·百官志》记载:"国子寺祭酒……统国子、太学、四门、书学、算学,各置博士、助教、学生等员."其中算学设"算学博士 2 人、算学助教 2 人,学生 80 人,并隶于国子寺". 这是中国由国家建立的第一所数学专门学校,在世界数学教育史上也是一个重要的创举. 唐朝继承隋朝的数学教育制度,使唐代的数学教育有相当的发展. 唐太宗时"贞观二年(628 年)大收天下儒士……其书算各置博士学生,以备众艺". 显庆元年(656 年),在国子监内添设算学馆,从而使"算学"成为国子监的六学(国子、太学、四门、律学、书学、算学)之一. 据《唐六典》记载:"国子监的算学馆内有算

学博士 2 人，助教 1 人，学生 30 人. 学制为七年，分科教授.”唐高宗还令历算学家李淳风与算学博士梁述、太学助教王真儒等注释《算经十书》20 卷，即《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《五曹算经》、《张丘建算经》、《夏侯阳算经》、《五经算术》、《缀术》、《缉古算经》为国学使用. 这是中国数学教育史上第一次由国家审定的数学教科书.《算经十书》的颁布，对以后中国数学教育的发展有着深远的影响.

宋元的数学教育(mathematics education in the Song and Yuan Dynasties) 中国古代数学教育兴盛阶段的数学教育. 北宋元丰七年(1084 年)秘书省刊《算经十书》(祖冲之的《缀术》已失传，代之以徐岳的《数术记遗》)，这是世界数学教育史上首次印刷的数学教科书. 同年还颁布了“算学条例”. 北宋崇宁三年(1104 年)，将元丰“算学条例”修改成国子监“算学敕令”. 这是中国由政府颁布的第一部数学教学制度的法令，推动了数学教育的发展. 南宋鲍澣之重刻《算经十书》(1212—1213 年)，他在《九章序》中称：算学在“本朝崇宁亦立于学官，故前世算数之学，相望有人”. 可见当时对数学教育以及对数学教科书的重视. 在宋元时期，除官学外，私学、家学、书院等民间数学教育也很发达. 著名数学家秦九韶曾从隐君子受数学. 数学家李冶弃官后，隐居在山西桐川和河北的封龙山，著书讲学，收徒讲授天元术. 杭州著名数学家杨辉编写数学书五种，内容多为通俗易懂的教学用书. 他在《乘除通变本末》中写有“习算纲目”，是他多年从事数学教育工作的经验总结，是中国最早的一份数学教学大纲. 元代著名数学家朱世杰，曾周游湖海 20 余年，在扬州一带讲学，“四方之来学者日众”. 他对数学研究和数学教育事业做出了重要贡献. 这些私学、家学和书院对宋元数学的繁荣发挥了重大的作用.

明清的数学教育(mathematics education in the Ming and Qing Dynasties) 中国古代数学教育沉寂时期的数学教育. 从明代到清初是中国数学教育史上的一个沉寂时期. 这时，算学的国家考试制度久已废止，民间算学大师后继无人. 明代采用八股取士，考试内容以朱熹注的《四书》为主. 八股考试不仅取消了数学内容，更严重的是束缚与窒息了知识分子的积极性和创造性. 同时，官府独尊理学和陆、王心学，理学家大力宣扬数学神秘主义的象数学，卑视实用科学，反对设立算学馆，认为这是“徒有烦费，于国事无补”. 这无疑会严重阻碍数学教育的发展. 这时期民间数学教育在推广实用数学和普及珠算上有很大发展，由于商业发展的需要，产生了商业算术，由于算盘的发明使珠算得到普遍使用. 特别是明代数学家程大位编纂的《算法统宗》是一部著名的数学教科书，流行国内外，对珠算的普及和推广影响极大. 在明清的私塾、蒙馆等民间教育中传习珠算是数学教育的一个重要内容. 明清之际，西方初等数学传入中国. 明万历年间利玛窦(Ricci，M.)与徐光启合译欧几里得(Euclid)《几何原本》前六卷(1607 年)，对培养明清一代的数学家起着一定的作用. 清代的数学教育主要是在钦天监内的算学馆进行，朝廷举办的科举不设数学. 清初康熙帝重视数学，请传教士入宫讲数学，并主持编纂《数理精蕴》53 卷(1723 年出版)，这是一部比较全面的初等数学百科全书，对数学教育的普及影响颇大. 清代的私学、家学颇为盛行. 以清初数学家梅文鼎为主而形成的宣城学派以及梅文鼎、梅珏成组成的梅氏数学世家就是代表. 随后，以戴震为代表的乾嘉学派着重培养数学人才，整理研究中国传统数学，他们不仅在融会贯通中西数学方面做出了重大贡献，并且有自己的创造，促进了清代的数学研究和数学教育的发展.

清末的数学教育(mathematics education in the late Qing Dynasty) 中国近代数学教育兴起阶段的数学教育. 从鸦片战争到清末是中国近代数学教育的兴起阶段. 鸦片战争以后，中国逐步沦为半殖民地半封建社会. 清政府和洋务派为了适应当时国内外的需要，开始兴办新的教育，其宗旨是企图学习西方的科学技术，以“求强致富”. 例如，1862 年(同治元年)在北京设立同文馆；1863 年，在上海和广东设立同类学校，为中国自办新式教育之始. 1865 年，在上海设立江南机器制造局；1866 年，在福建设立船政学堂等，这种教育称为洋务教育. 以上机构在初期均以翻译西方科学技术著作为主，提倡“中学为体，西学为用”. 后来出于对“制器精，算学明”的认识，十分重视数学著作的翻译，西方高等数学就是在这种背景下传入中国的. 1866 年，清政府接受恭亲王奕䜣的建议，在同文馆内增设算学馆，1868 年，聘请著名数学家李善兰任总教习. 同文馆学制八年，四、五两年为初等数学，后三年增设微积分和测量课程等. 算学馆的教科书同时采用传统数学和西方数学，如《算经十书》、《数理精蕴》、《几何原本》、《代数学》、《代微积拾级》等. 光绪末年(1898 年)建立京师大学堂，同文馆并入其中，这就是北京大学的前身. 同治、光绪年间，新式学校在全国各地兴办，不论是普通的新中小学堂，还是技术学堂，数学都是必修课. 开始了中国数学教育的新时期.

鸦片战争以后，英、美、法、俄等国为了巩固他们在华的既得利益，从思想文化方面控制中国人民，他们也在中国兴办教育，设立教会学校. 例如在道光二十五年(1845 年)，美国圣公会主教文氏在上海设立约翰书院(后改为约翰大学). 同治十年(1871 年)，在武昌设立文华书院(后改为华中大学). 道光三十

年(1850 年),法国传教士在上海设立徐汇公学和文纪女塾(圣玛利亚女校的前身).1860 年,俄国宗教事务部在北京设立东西学堂.1864 年,美国长老会狄考文(Mateer,R. C. W.)在山东登州设立文会馆.1874 年,英国总领事和傅兰雅(Fryer,J.)在上海设立格致书院.1888 年,美国美以美会在北京设立汇文书院;1893 年,公理会在通州设立潞河书院,后二校合为燕京大学.1888 年,美国长老会在广州设立格致书院,后为岭南大学等.以上学校全由在华传教士掌管,教科书也全采用翻译的西方著作.这种教育称为教会教育.当时普遍使用的数学教科书有《数学启蒙》、《笔算数学》、《代数备旨》、《形学备旨》、《八线备旨》、《代形合参》等.

1902 年,清政府颁布《钦定学堂章程》(即"壬寅学制"),后又对学堂章程进行两次修订,其中"癸卯学制"是中国近代第一个以法令公布并在全国推行的学校教育系统.1905 年,帝谕"立停科举,以广学校",至此科举制度完全废止.这期间中国已开始自编中学数学课本.1904 年,上海商务印书馆编著《数学教科书》等中小学全套教科书,为中国正式出版中学数学课本之始.清末民间教育的形式也在改变,如湖南浏阳算学馆、刘彝程主持的求志书院、广方言馆、扬州的知新算社等,由教师出题,学生解答,定期出版"算学课艺".1903 年,扬州知新算社"课艺章程"中研究项分四科,即普通研究科、高等研究科、特别研究科、应用研究科.在后三科中高等数学已成为研究主体.

民国时期的数学教育(mathematics education in the Republican period) 中国近代数学教育发展阶段的数学教育.自 1911 年辛亥革命到新中国成立这一时期,是中国近代学校数学教育的发展阶段.1912 年,国家成立教育部,颁布了《学校系统令》,次年又做了修订,形成了"壬子癸丑学制",基本上反映了资产阶级民主共和国的性质.规定将学堂改为学校,中学五年制改为四年制;提倡以"美育代替宗教",第一次提出了德、智、体、美"四育平均发展"的方针."五四运动"推动了教育改革,1922 年教育部颁布了《学校系统改革令》的新学制,即"壬戌学制",中小学年限改为"六、三、三"制,这种学制一直沿用至今.在这个新的教育时期中,算学改称为数学,自编中小学数学课本有较大发展.新数学课程纲要规定初中"把算术、代数、几何、三角四项联络贯通成为一种混合数学".1923 年,商务印书馆出版"新学制初级中学用"《混合算学教科书》;又如陈文编实用主义代数、几何、三角;秦沅、秦汾合编代数学、几何学、三角学;段育华编《混合数学》;程廷熙、傅种孙合编《初级混合数学》等.1932 年正式课程标准,又增设了实验几何,代数中又引入函数.但高中仍多采用西方数学教材的编译本.刘开达总结数学教学经验,编写了《中学数学教学法》,该书于 1941 年由商务印书馆出版.这是中国自编数学教学法的图书之始.当时的教育部为"整齐毕业程度,增进教学效率",1933 年决定进行中小学毕业会考;1939 年,全国各院校统一了高考数学试题,这是中国近代数学教育中统一高考之始.在高等数学教育方面,1912 年北京大学创办了数学系,随后北京师范大学、天津南开大学、南京大学、清华大学等也陆续建立了数学系.从 20 世纪 20 年代起,中国已能自己培养较高水平的数学人才.20 世纪 30 年代,清华大学等校开始招收数学研究生,培养出了一批著名数学家.这时,中国出现了不少著名的数学教育家,如熊庆来、姜立夫、吴在渊、傅种孙、江泽涵、秦汾、赵访熊等.当时在解放区,发展着另一种性质不同的数学教育,如苏区的"列宁小学"、"劳动小学".抗战时期陕甘宁边区的鲁迅师范学校和边区中小学,以及解放战争时期的中小学,这些解放区的数学教育体现了新民主主义教育的新方向.教师自编数学教材,坚持理论联系实际,以及启发式的教育,为新中国的数学教育提供了有益的经验.

新中国的数学教育(mathematics education after the founding of The People's Republic of China) 中国现代数学教育发展时期的数学教育.中华人民共和国的成立,开始了中国现代社会主义数学教育的新时期.主要特点是改革旧教育,建立与健全社会主义教育的新体系.这一时期可分为六个历史阶段,即社会主义数学教育制度的创建阶段、改革阶段、衰退阶段、复兴阶段、普及九年义务教育阶段和改革创新阶段.

1. 自 1949 年到 1957 年是社会主义数学教育的创建阶段.1951 年,教育部召开第一次全国中等教育会议,制定"普通中学数学课程标准".1952 年,教育部组织"中小学各科教学大纲起草委员会",编订了中国建国后的第一个《中学数学教学大纲》.这个大纲是以苏联教学大纲为蓝本,制订了数学教学的目的、内容和要求,奠定了中国社会主义数学教育的基础.根据这个大纲,人民教育出版社出版了一套编译自苏联的中学数学课本.如基谢廖夫(Киселёв,А. П.)的《代数》、《几何》,雷布金(Рыбкин,Г. Ф.)的《平面三角》等.随后又翻译了苏联凯洛夫(Кайлов,И. А.)的《教育学》和伯拉基斯(Брадис,В. М.)的《中学数学教学法》等.当时学习苏联经验,促进了数学教师教育思想的改造和数学教学质量的提高.1954 年和 1956 年,教育部两次修订了中小学数学教学大纲,更加明确指出了数学教育的思想教育任务和发展学生的"逻辑思维和空间想象力".学习苏联教育经验,改造旧教育取得很大成绩,但也存在着结合中

国实际不够、生搬硬套的偏向.例如,在中国十二年制学校中盲目照搬苏联十年制学校数学教材,延长了算术课教学时间,取消了高中解析几何课,降低了中学数学知识水平.

2.自1958年到1965年是社会主义数学教育的改革阶段.1958年的教育革命对数学教育的目的、任务、大纲和教材、数学课程现代化等问题展开热烈的讨论,提出了各种改革方案,编制试用了九年一贯制教材,进行了各种群众性的数学教学改革试验.师生下厂下乡,联系生产实际问题进行教学.1960年,在上海召开的中国数学会第二次代表大会上,强调教学内容现代化,建立新教材体系,建议中学增加解析几何、微积分和概率统计等内容,并建议取消欧氏几何体系,建立以函数为纲,数形结合的教材新体系.这种数学教育内容现代化的方向是正确的,符合国际上数学教育现代化运动的潮流,但把大学数学内容下放到中学;过分强调联系生产实际,削弱了数学基础知识的教学;大砍几何学,破坏了数学的科学性、系统性,使数学教学质量受到影响.1961年,教育部总结了全面学习苏联和群众性教育革命的经验教训,颁布了大、中、小学的《暂行工作条例》,制定了《全日制中小学数学教学大纲》,这个十年制教学大纲,把初一算术完全放到小学,平面几何完全放到初中,高中增加了平面解析几何和概率初步,提高了中学的数学知识水平.人民教育出版社编写了十年制中小学数学教材和教学参考书,中学代数五册,平面几何二册,立体几何一册.1963年,教育部规定中、小学恢复"六三三"学制,制定了新的《全日制中小学数学教学大纲》,在这个大纲中第一次提出数学教学要培养学生的"计算能力、逻辑推理能力和空间想象力"的三大能力任务.人民教育出版社编写了一套"十二年制中学数学课本",一直使用到"文化大革命"前,使中小学的数学教学质量得到稳步提高.

3.自1966年到1976年的"文化大革命"十年是社会主义数学教育衰退阶段.1966年,全盘否定建国后十七年的教育工作.在"文化大革命"十年中,学校"停课闹革命"、"开门办学"、下乡下厂、学工学农,高校有四年停止招生,后来试点招收工农兵学员.正常教学秩序遭到严重破坏,出现了数学教育空前的严重衰退现象,严重降低了学生的知识水平.

4.自1977年到1989年是社会主义数学教育的复兴阶段.中共十一届三中全会后,中国进入了以经济建设为中心,改革开放的新时期,数学教育开始了复兴改革、"教材要反映出现代科学文化的先进水平"的现代化的新阶段.1977年,教育部召开全国中、小学教材编写工作会议,1978年颁发了全日制十年制学校数学教学大纲(试行草案),并编写了一套《全日制十年制学校》数学课本(试用本).新大纲提出了新的教学目的,在教学内容上提出了"精简、增加、渗透"三原则,增加了微积分和概率统计等初步知识.1980年,教育部制订《六年制重点中学数学教学大纲》,1983年,教育部颁发了高中数学两种要求的"数学教学纲要",对普通高中提出"基本要求",对重点高中提出"较高要求",微积分和概率统计初步改为选学内容.1981年,数学开始分科教学.人民教育出版社编写新教材,初中数学代数课本4册、几何课本2册,高中数学课本代数2册、立体几何1册,解析几何1册.1986年,国家教委成立了"全国中小学教材审定委员会",改革教材审定制度,鼓励各地根据大纲自编教材.1986年,国家教委根据"适当降低难度,减轻学生负担,教学要求尽量明确具体"的原则,制订了新的《全日制中学数学教学大纲》,1990年,国家教委制订了该教学大纲的修订本,1987年,新编《高级中学课本代数》二册,初中教材仍用《初级中学课本代数》四册,《初级中学课本几何》二册,其他仍采用原课本.在此期间全国各级数学教研组织纷纷建立,高师院校加强了数学教育理论的研究和招收数学及数学教育研究生,各地进行各种数学教学方法改革实验,有的还编写出数学实验教材,有些中小学开设了电子计算机选修课,国内和国际数学教育学术交流空前活跃.使中国数学教育现代化有了新的进展.1977年,全国高考制度的恢复,1978年,开始全国中学生数学竞赛的广泛开展,1986年起,中国正式参加国际数学奥林匹克竞赛,并多次取得团体总分第一的优异成绩,大大提高了中学生学习数学的积极性,并有利于数学人才的发现和培养.

5.自1990年至1999年,社会主义数学教育发展阶段.1990年,国家教委重新颁布《现行普通中学教学计划的调整意见》,同时修订了中学数学教学大纲——《全日制中学数学教学大纲(修订本)》.这次修订的原则是,根据九年义务教育教学大纲的精神,减去过多的内容,降低过高的要求,将原来列的内容分为必修和选修两类.从1990年起,停止供应甲种本,只供应与基本要求相适应的"必修本".与此相适应,分科编写了义务教育三年制初级中学数学课本《代数》三册、《平面几何》三册、高中数学课本《代数》二册、《立体几何》一册、《解析几何》一册.在内容上,初中增加了统计初步知识,高中增加了极限的简单应用和概率初步知识.1997年新编高中数学试验课本,将各科综合为一科,共四册,第一、二册为必修课,第三、四册分别为理科和文科限定必修课,并在江西、山西和天津市试用.

6.自2000年开始,为中国社会主义数学课程改革和创新阶段.2000年3月,教育部颁发了新的《数学教学大纲》(试用修订版)和《国家数学课程标准》

(征求意见稿),对初、高中数学课本进行了修订,高中数学新教材的试点省、市扩大到25个.对中学数学教育进行了现代化革新,以适应21世纪科教兴国的需要.中国的数学教育正按照邓小平"教育要面向现代化、面向世界、面向未来"的指示前进,进入了空前繁荣的新时期.

世界数学教育史(history of mathematics education in other parts of the world) 研究世界主要国家数学教育的历史发展及其规律的学科.可按以下四个历史阶段进行概述:

古代原始社会和奴隶社会的数学教育.数学教育起源于古代人类在生产劳动中所获得的数学知识的积累和传授.在奴隶社会,由于教育与生产劳动脱离,产生了学校,建立了学校数学教育雏形.大约在公元前3000年最早出现的奴隶制国家,被称为世界文明古国的中国、埃及、巴比伦、印度,出现了最早的数学知识和数学教育的萌芽.公元前8世纪以后,古希腊奴隶社会达到繁荣时期,它在数学科学和数学教育方面都有很大发展,对后世有重大影响.

中世纪封建社会的数学教育.中世纪从公元5世纪西罗马帝国灭亡到14世纪,是欧洲封建社会形成和发展时期.中世纪欧洲的教育是宗教神学思想占统治地位,各科都渗透着神学思想,数学教育也不例外.在11世纪由于生产力的发展,在欧洲的新兴城市出现大学,如意大利的萨拉尔诺大学,法国的巴黎大学,英国的牛津大学和剑桥大学等.数学作为"四艺"的内容,都学习算术与几何.从14世纪开始,由于资本主义因素的增长,科学的迅速发展,学校教育发展很快.宗教课不再成为学校教育的中心,开始重视古典文化和自然科学的教育.作为文艺复兴摇篮的意大利的数学比较发达,它的算术、代数、几何、商业算术等数学书,对英法等国影响很大.但英国比较落后,甚至在1570年,女皇竟下令从大学课程中砍去全部数学.

近代资本主义社会的数学教育.从17世纪英国资产阶级革命开始到19世纪末,欧、美、日各国相继进入资本主义社会.逐步确立了资本主义学校的数学教育制度.数学成为初等、中等、高等各级各类学校的重要课程.日本著名数学教育家小仓金之助把这一时期划分为以下四个阶段:

1.16世纪是人文主义教育时代.

2.17世纪至18世纪中叶是实在主义教育的发展时代.

3.18世纪中叶至19世纪40年代是教育的变革和数学课程的确立时代.

4.19世纪40年代至19世纪末是数学教育的停滞时代.

20世纪的现代数学教育.资本主义的进一步发展和社会主义社会的数学教育,是数学教育为适应社会生产发展和现代科学技术迅速进步需要而进行现代化改革的伟大时期.这一时期可划分为三个阶段:

1.1900年到第一次世界大战的20世纪初,数学教育改革运动.

2.1920—1945年两次世界大战间,现代数学教育的发展.

3.1945年到现在,数学教育的现代化运动.这一阶段又可划分为三个不同的发展年代:

1) 20世纪50年代后期到20世纪60年代是"新数学"运动高潮年代.

2) 20世纪70年代是"回到基础",现代化的调整年代.

3) 20世纪80年代改革趋势,是"大众数学"、"问题解决"年代.

古代埃及、巴比伦的数学教育(mathematics education in ancient Egypt and Babylon) 世界数学教育史的重要部分之一.古代埃及是世界最早的文明发源地之一,现存的两部古埃及纸草书是世界上最古老的数学书,它记载着4000年以前关于算术和几何知识.埃及数学知识的长期积累,世代相传,产生了数学教育,促进了数学的发展.古代埃及很早产生了象形文字,产生了数学、天文等科学的萌芽,并首先产生了学校.最初是在公元前2500年以前,"古王国"史料中记载的宫廷学校,它是专为帝王官吏的子弟设立的;还有将科学知识传授给预备将来提任僧侣的儿童的僧侣学校;后又产生收容手工业者子弟的文士学校.教学生一些书写、计算等数学知识,这是古代奴隶社会学校数学教育的萌芽.大约在公元前2000年建立的巴比伦王国,也是古代文明的一个发源地,从发掘出来的大量刻有楔形文字的泥板中,有60进位制的平方数表和立方数表,有采用了位值制,用数表解二次方程问题以及简单的几何知识.巴比伦也有宫廷学校和僧侣学校,教学生了解一些天文、数学知识,以备管理国家、主持寺庙或建筑宫殿等需要.僧侣是文化和科学知识的掌握者,寺庙里附设的神庙学校,教给学生普通的计算、几何、天文、历法等科学知识,以培养一般的官吏和僧职人员.发现的泥板书就是当时的数学教科书.

古代希腊、罗马的数学教育(mathematics education in ancient Greece and Rome) 世界数学教育史的重要部分之一.希腊从公元前8世纪开始进入奴隶制社会,在公元前5—4世纪达到全盛时期.在古希腊的许多城邦国家中,以雅典的教育制度和数学教育对西方影响最大.希腊的教育是西方奴隶社会的典型代表和发展的高峰.经济繁荣、政治民主、思想自由,为各学派百家争鸣创造了条件,有助

于科学和哲学从宗教分离出来，为文化、科学、数学、哲学和教育的繁荣奠定了基础. 雅典的教育目标不仅是要把统治阶级子弟训练成身强力壮的军人，更要求将他们培养成为具有多种才能，能言善辩，善于通商和交往的政治家和商人，还重视智育、德育、美育，培养身心和谐发展的公民. 雅典教育制度规定：男子从 7 岁起入文法学校，学习阅读、写字和计算. 雅典的大哲学家柏拉图(Plato)，非常重视数学和数学教育，在他学园门口写着："不懂几何不得入内". 他主张 17 岁青年进入高级学校必须学习"四艺"科目：算术、几何、天文和音乐. 认为"调兵列阵"、"统计船只"等需要算术，"建造兵营"等需要几何. 主张 20 到 30 岁的教育属于发展智慧阶段. 这时学习数学的目的不是为实际应用，而是为"唤起思考的能力，引导心思去面向本质与实在"、"把握真理". 柏拉图重视数学知识的理论化、逻辑化，对数学的发展也是有益的. 在他的学派中产生了不少数学家. 希腊数学教育的最大成就，首推欧几里得(Euclid)的《几何原本》. 它继承了埃及、巴比伦的数学，总结了希腊数学的成果. 它的伟大历史意义在于用公理法建立起演绎的数学体系的最早典范. 对数学教育所起的作用之大、影响范围之广、时间之长，是任何一本数学教材都无法比拟的. 从 1482 年到 19 世纪末，竟用各种文字印刷出版了 1000 版以上. 在这以前，它的手抄本统治几何学已达 1800 年之久，可以说它培育了历代的数学家.

古罗马从公元前 3 世纪中叶起形成了一个地跨欧亚非三洲的大帝国. 罗马的教育制度基本上仿照了希腊雅典的教育制度. 在 7—12 岁的初级学校，主要学习读、写、算；在 16—18 岁的修辞学校设有数学、天文等"四艺"科目，培养有渊博知识的人. 公元 1 世纪后，基督教成为罗马帝国的国教. 由基督教掌管教育，希腊式学校被视为异端加以禁止，世俗学校逐渐消亡，教会学校取而代之. 数学教育也要为神学服务，把数学的重点放在计算教会历法和神化的整数性质上面，严重影响了数学的发展. 罗马不重视数学教育和理论数学. 只教些简单的测量和计算的实用数学知识，古希腊的数学成就也没能通过罗马传入近代欧洲. 从这时起到封建社会结束长达千余年之久，西欧的世俗学校已不复存在，教会学校成为惟一的学校教育组织形式，造成数学教育的长期落后和停滞.

古代印度和阿拉伯的数学教育(mathematics education in ancient India and Arabia)　世界数学教育史的重要部分之一. 印度也是古代文明发源地之一，印度文字最早产生于公元前 2000 年的阿拉伯文化时期. 据说是一种图画文字，这种文字被毁没后，又产生了新的文字，但大量是写在白桦树皮和树叶上，不易保存，因此印度数学在 7 世纪以前缺乏可靠的史料. 另一方面印度数学和占星术有关，所以数学书籍带有浓厚的宗教气息. 书中将计算方法和结果用难懂的诗歌写出来，以致后人不易了解. 印度在算术、代数、三角方面贡献很大. 数字"0"的发明和印度记数法经阿拉伯传入欧洲，对数学的发展产生了极大影响. 在印度的宫廷学校和神庙学校中，主要讲授婆罗门教的《吠陀》经，培养官吏和僧侣的子弟将来为官为僧. 公元前 8 世纪印度出现古儒学校，学习阅读、书写及基本计算知识. 对有些学生也讲授占星术、天文、几何知识，但全部学科都渗透着婆罗门教的神学精神.

从公元 7 世纪到 13 世纪期间，阿拉伯人建立了从印度到西班牙地跨亚、欧、非三洲的庞大帝国. 信仰伊斯兰教，实行政教合一的宗教国家. 它吸收了东西方悠久的文化，并加以发展，创造了中世纪时期灿烂的阿拉伯文化和教育. 当时超出了西欧的水平，对后来西欧文化教育的发展有很大贡献. 阿拉伯在数学上也很发达，例如阿拉伯数字的传播，9 世纪大数学家花拉子米(al-Khowārizmī)创立代数学，于 12 世纪传到西欧，成为大学的主要数学教材，一直使用到 16 世纪. 阿拉伯教育与伊斯兰教有着密切联系，在清真寺附设的初等学校里，对儿童进行识字教育和计算知识教育，还设有一些专门学校，培养政府官吏、国库会计等，课程有《可兰经》、法律、算术、几何等. 后来还出现了几所大学，如公元 830 年，在巴格达设立的大图书馆"智慧馆"，既是译书的中心，也是一所大学，以教授自然科学知识著称. 花拉子米曾任这所图书馆的管理人，对促进东西方文化交流做出了一定贡献.

文艺复兴时期欧洲的数学教育(mathematics education in Europe during The Renaissance)　世界数学教育史的一个重要阶段. 欧洲文艺复兴时期是从 14 世纪开始到 16 世纪末，正是资本主义孕育、发生、发展和封建制度解体的过渡时期. 这时要求一种新的世界观——人文主义世界观，以人性的解放为中心，打碎宗教套在人们头上的精神枷锁，促使文学、艺术、科学、哲学的新生和发展，其结果自然科学和数学出现了前所未有的成就. 正如恩格斯(Engels,F.)所说："这是一次人类从来没有经历过的最伟大的进步的变革，是一个需要巨人而且产生了巨人的时代."在数学上发明了被称为近代计算奇迹的三大发明中的小数和对数；意大利数学家塔尔塔利亚(Tartaglia,N.)和费拉里(Ferrari,L.)发现了三次方程和四次方程的一般解法和虚数；德国数学家雷格蒙塔努斯(Regiomontanus,J.)著的欧洲第一本三角学名著《论一般三角形》，使三角学脱离了天文学成为独立的数学科目，到 16 世纪末已制定出详细

的三角函数表.16世纪末全欧洲兴起中等教育热，重视培养能积极从事社会、政治、工商业的各种活动家.教育对象的扩大，使新兴资产阶级及少量城市平民子弟开始接受学校教育.但在教育内容上只重视人文学科，意大利于1500年出现与教会学校相对抗的近代中等教育萌芽.法国于1526年创立了“法兰西学院”.德国于1526年首创城市中学，后来建立起培养青年职业能力的实科中学.英国在文法中学基础上出现了公学.这些学校都十分重视人文学科，以拉丁语为中心，但不讲授数学.他们认为数学只是对庶民和商人所必需，而对培养贵族和绅士则不需要.正如著名数学史家卡约里(Cajori,F.)在《初等数学史》中所说：“直到18世纪末以前，英国中学的普通学生不会2021被43除的除法.”在英国的大学甚至公布法令砍掉数学课程，认为数学属于技术，不值得在大学教授.同样，法国在16世纪多数学校也不讲授数学课.

17、18世纪欧洲的数学教育(mathematics education in Europe during the 17th and 18th centuries)　世界数学教育史的一个重要阶段.从17世纪中叶英国进行资产阶级革命开始，到19世纪初，英、法、德等国先后进入资本主义社会.在这一时期中，由于数学、科学的迅速发展及其在生产和军事方面的广泛应用，同时由于启蒙思想的普及，打破了传统束缚，还由于对数学教育的实用价值和形式价值的广泛承认，以及学校教育制度的近代化，使数学教育在大学、中等学校、小学的各级各类学校中确立了应有的地位.但英国的数学教育走的却是一条渐进改良的道路.在17世纪虽然出现了牛顿(Newton,I.)这样划时代的伟大数学家，但在英国的数学教育却落后于法国和德国.后来，由于海外贸易发展的需要，从17世纪后半叶到18世纪盛行的“计算学校”中，数学课程占有了主要位置，而在其他学校对数学课仍不够重视.直到18世纪末和19世纪初，英国数学教育才有了很大发展.法国数学教育是以法国大革命为中心建立起现代社会教育的，作为革命时期教育精神的典型是哲学家和数学家孔多塞(Condorcet,M.-J.-A.-N.-C.M.de)提出的教育计划(1792年)，“以一切人的教育机会均等，陶冶理性和判断力，教授真理，培养近代人，以适应现代要求的理智为教育目的”.重视科学知识的价值，特别是数学和物理课的教学成为最重要的课程.这个教育计划和教育家卢梭(Rousseau,J.J.)的《爱弥儿》的教育思想，对法国的教育发展有重要影响.法国的初等、中等学校都重视数学的教学，这时的数学教科书多为当时第一流的数学家所著.例如，欧拉(Euler,L.)的《代数》(1768年)是18世纪后半叶的标准教科书，勒让德(Legendre,A.-M.)的《几何原理》(1794年)是被各国采用为初等几何教科书的名著.该书保持逻辑证明严谨，同时也承认直观方法，并包含有三角法.德国数学教育受法国影响，在小学和中学就十分重视数学和自然科学课程.中学各年级数学课每周6学时，讲授算术、代数、几何、三角法和解析几何等，教材采用数学家欧拉的《代数》(1771年德文版)，这是当时影响最大的代数教材.德国在30年战争(1618—1648)后，著名教育家夸美纽斯(Comenius,J.A.)在《大教学论》中提出的教育思想和教学理论，在《泛智学校》中提出的普及初等教育和学校教育改革方案，以及他提出的学年制和班级授课制，算术和几何并列统编的数学教学大纲，都是十分先进的改革，为近代资产阶级教育体系奠定了基础.

19世纪欧洲的数学教育(mathematics education in 19th century Europe)　19世纪英、法、德的数学教育.可从英、法、德三国分别概述：

英国的数学教育.英国直到19世纪30年代才在中学课程中确立了数学课，但仍只承认数学的教养价值，而不承认其实用价值，只重视形式陶冶.1868年，“学校调查委员会”的报告，对当时的数学教育提出了批评.认为教师不关心教学法的改善，特别是几何教科书一直使用欧几里得(Euclid)的《几何原本》，教学效果不好.虽然在1870年成立“几何教授改良协会”，1897年改为“数学协会”，研究数学教育问题，但在这30年内的数学教育也没有多大的重大进步，直至20世纪初.

法国的数学教育.在19世纪初期法国的中等学校，实行了欧洲最高水平的数学教育，所用教材也较英国先进.例如，拉古芦尔(Lacroix,S.F.)的《代数》也不像英国那种形式主义的，在1860年还引进了函数概念.又如1874年出版的梅雷(Meray,H.C.R.)的《初等几何》，从与欧氏几何完全不同的公理出发，强调实用性，将平面与空间内容融合在一起，是一本反映数学教育近代化思想的几何教科书.在1890年的数学教学大纲中，出现了函数概念、函数图象和导数，增加了近代数学的一些内容.法国重视数学，因而数学课在中学课程中占有较高地位，有算术、代数、几何、三角、画法几何，还包含天文、静力学、动力学等.到1890年法国政府强调中学教育目的形式为陶冶价值，批判了数学内容过重，过分地强调理论.对于数学教育价值的争论和改革意见直到20世纪初.

德国的数学教育.在19世纪初，德国教育在洪堡德担任教育部长后进入繁荣时期.在新人文主义运动和斐斯泰洛齐教育思想影响下，推动了初等学校和中等学校教育改革.1810年制定的中学教育计划，削减了古典学科内容，重视起数学教育.同年起，

重新建立柏林大学等，使德国大学成为哲学、科学和学术中心．但不久 1815 年的“神圣同盟”一建立，政治上走向反动，否定各项教育改革，加强教育的君主主义和宗教性，出现了教育上的倒退．1848 年以后文科中学教学内容变动很大，自然科学被认为危险学科，数学教学时间减半，而且删去了实用内容，甚至规定“中等教育的本质是严密的非实利主义和形式教育的结合”（1856 年）．当时的数学教科书成为无任何应用知识，枯燥无味的形式主义，而且水平较低．直到 1871 年德意志帝国统一后，中学受裴斯泰洛齐（Pestalozzi，J. H.）和赫尔巴特（Herbart，J. F.）教育理论的影响，在数学教学中才开始重视直观、实验、实测，强调内容的实用化、生活化，强调函数和图象等新的思想．例如，亨利齐（Henrici，J.）与特罗特拉因（Treutlein，P.）合著的《初等几何学教科书》（1881—1883）脱离了欧氏几何与勒让德几何的束缚，融合几何、代数、三角，并用射影几何学的观点统一了起来，此外还包含了测量等应用部分，且融合三角与解析几何．还有霍茨妙拉（Holzmuller，G.）著的《初等数学教科书》三卷，是世界上最初出现的融合算术、代数、几何和画法几何的综合的数学教科书．

19 世纪美国的数学教育（mathematics education in 19th century America） 美国近代数学教育的兴盛阶段．美国独立前的教育完全是宗主国英国教育的移植，学校主要控制在教会手中．1776 年，美国独立后资本主义日益发展．1807 年开始产业革命，到 1860 年美国工业已跃居世界第四位，到 19 世纪末已处于领先地位．美国的数学教育在经济发展中迅速普及和发展．从 1862 年到 1919 年，用近 60 年的时间普及了义务教育．从 19 世纪 20 年代起，美国公立学校迅速发展．美国人称这一时期为“教育史上的教育觉醒时代”．到 19 世纪末，中学数学的内容已将算术移到小学，几何由大学下放到中学，因此代数、几何、三角成为中学的固定课程．1865 年开始推行的数学教材，有数学家鲁宾孙（Robinson，H. N.）编写的《循序渐进的高级算术》、《新代数教程》、《新几何与三角》，内容既注重理论，又很实用，简明易懂，被学校广泛采用．1870 年，美国成立“全美教育协会”（NEA），在 1893 年提出数学教育改革方案，认为数学教育目标是精神陶冶和升大学的准备，教育课程由分科式改为综合式，并注意了算术、代数、几何之间的关系，引入几何初步，从具体模型、实体测量入手等．美国也逐渐关心数学教授法的研究，戴比斯（Davis，M.）著的《数学的逻辑和有用性，它的最好教学法的事例和说明》（1850 年）是美国中学教育最初的教学法用书．此外，还有关于算术教学法方面的用书：布尔克斯（Brooks，E.）的《算术的哲学》（1880 年）以及杜威（Dewey，J.）与马库雷朗（Mcclеran，J. A.）合著的《数的心理及其在算术教学法的应用》（1895 年）．这时还出现了一些近代化的教科书，例如著名天文学家、数学家纽科姆（Newcomb，S.）的《初等几何》（1881 年）、《学校用代数》（1882 年）中较早地采用了函数的概念．这种数学教育改革趋势一直进入到 20 世纪．

贝利运动（Perry movement） 亦称贝利-克莱因运动．20 世纪初数学教育近代化的改革运动．最先倡导的是当时最保守的英国的贝利（Perry，J.）教授，他领导了英国的数学教育改革运动．他在 1901 年 9 月召开的英国科学协会的数学物理学和教育学的联合年会上，发表了题为《数学的教学》的著名讲演，对当时的数学教育进行了强烈的批判．在讲演中他强调了以下各点：

1. 完全脱离欧几里得（Euclid）《几何原本》形态．
2. 充分重视实验几何学．
3. 重视各种实际测量与近似计算．
4. 充分利用坐标纸．
5. 多教些立体几何和画法几何知识．
6. 要比过去更多地利用几何学知识．
7. 应尽早教授微积分概念．
8. 要重视实用数学．
9. 要早期引入小数，早期学习对数．
10. 改善入学考试制度和试题．

贝利在讲演前印发了他给“教员养成所”制定的数学教授要目，分为初等数学和高等数学两部分．他在讲演中强调数学的实用价值，他认为学习数学的效用有八项：

1. 养成高尚情操，给心情以欢乐．
2. 养成精神的开发和逻辑思维能力．
3. 数学可作为研究自然科学的武器．
4. 可通过有关考试．
5. 可成为人们精神工具和终生教育的手段．
6. 使人们脱离开自己的看法，对事物进行严密的思考，使之获得精神的自由．
7. 可理解作为应用科学基础的数学原理．
8. 对哲学研究提供完全逻辑的辅助工具．

贝利主张数学教学方法彻底改革，提倡实用的数学教学法．他说：“所谓实用数学对学问的研究方法，其更本质的观念为：在儿童们为了解事物的根源之前，必须对那些有亲近感，且进行观察了解之谓也．”他还说：“按照我的经验，一般的人，都可成为发现者和知识的开拓者，而且越早越好地给他以试练自己的机会，即使简单的事物，与其教师指出，不如叫学生自己去发现，对其自己来说，就感到是有价值的，精神上是永久性的．”贝利的讲演对英国的数学教育给与了划时代的影响．英国教育部把实用数学

列入考试纲目，牛津和剑桥大学把实用几何列为考试内容，英国中学教材从此不再采用《几何原本》. 他的讲演对于欧美各国数学教育界也产生了很大影响. 1902 年，美国数学会主席穆尔(Moore，E. H.)在讲演中提出中学数学各科融合的统一数学，并且提倡实验室法的教学方法. 法国在 1902 年对中等教育制度进行全面改革，制定了"中学数学教授要目". 它的方针是：

1. 提倡直观，使教学简单易懂.

2. 将属于高等数学的，但容易理解又对近代科学技术有重要意义的内容，早期引入中学课程中.

3. 引入函数概念和图象以及微积分，这样使代数与几何关系密切.

4. 在几何中多使用具体的直观的运动和对称，使证明简单明了.

根据新要目编写的教科书中，最有名的是法国波莱尔(Borel，(F.-É.-J.-)É.)所著的《代数学》(1903 年)、《几何学》(1905 年)及《三角法》等，被称为 20 世纪初最好的数学教科书之一.

德国的新主义数学运动. 德国著名的大数学家克莱因(Klein，(C.)F.)于 1904 年在德国自然科学会议上，发表题为《对中学数学和中学物理的注意》的讲演. 他说："教育方法必须用发生的方法，因此空间的直观、数学上的应用、函数概念是非常必要的. 教授几何时，应在教科书卷头写上：'《几何原本》不是为儿童写的书'."他在格丁根大学发表了著名的《中等学校数学教育讲义》(1907 年)和《高观点下的初等数学》(1908 年). 他在 1905 年米兰会议上领导制定了数学教学的"米兰要目". 克莱因主张：

1. 顺应学生心理的自然发展，选择和排列教材.

2. 融合数学各分科，密切和其他科学联系.

3. 不过分强调数学的形式陶冶，重心应放在应用方面，养成用数学方法去观察自然现象和社会现象的能力.

4. 为达到这一目的，必须以函数观念和直观几何作为数学教学的基础.

克莱因强调说，作为数学教育内容统一的原则是："几何形式、函数观念是学校数学教育的灵魂. 以函数概念为中心，将全部数学教材集中在它的周围，能够进行充分的综合."他还用近代数学的高观点改造传统的中学数学，主张加强函数和微积分的教学，以充实代数内容，用几何变换的观点改造传统几何，解析几何纳入中学数学. 这些数学教育改革思想，对世界各国中学数学教育近代化有着深远的影响. 根据"米兰要目"编写的《新主义数学》教科书(1908 年)将几何、代数、三角、解析几何、微积分融为一体，获得很大成功.

国际数学课程调查会(international surveystudy of mathematics curriculum) 贝利运动中研究数学课程改革的国际组织. 20 世纪初的数学教育改革运动，经贝利(Perry，J.)、克莱因(Klein，(C.)F.)、穆尔(Moore，E. H.)的提倡和一批数学教师们的努力，已成为国际上普遍重视的问题. 在 1908 年于罗马召开的第四届国际数学家大会上，由美国史密斯(Smith，D. E.)提议，发起组织了"国际数学课程调查会"，有 28 个国家参加，选出德国的克莱因，担任该会会长. 会议出版了各国提出的数学教育报告书. 在 1911 年于意大利召开的会议上，有两个值得注目的报告：

1. 意大利提出的《对中学几何学严密性的报告》. 它根据数学的严密程度，将几何学的教授法进行分类. 指出根据学生年龄特点，几何教育应有三期变化：第一期为直观的，第二期为少量演绎的，第三期为严格演绎的.

2. 法国提出的《数学各科融合程度的报告》.

在 1912 年于英国召开的会议上有 27 国参加，提出数学教育报告书 150 种，其中，克莱因的德国报告书最为详细. 这些报告书出版后，成为数学教育史上的重要文献. 在 1929 年，该会出版了《从 1910 年起约 20 年间的数学教育的主要变动和倾向》，有世界主要国家的报告. 国际数学课程调查会于第一次世界大战后的 1922 年解散. 这次数学教育改革运动也遇到很多困难和阻力，在数学教育中传统观念比较强，一般教师水平低，脱离传统重新组织教材有困难. 由于第一次世界大战中断了这次有重要意义的数学教育改革运动，在第一次世界大战后各国的数学教育发展情况不同. 德国和意大利由于法西斯反动政治和纳粹教育理论的影响，使数学教育出现停滞和后退；法国的数学教育由先进转向保守倾向；英国的数学教育由保守出现缓慢进步；美国由于经济的飞速发展和心理学的发展，促进了数学教育的顺利发展，特别是"数学课程全美委员会"的报告书《中等教育的数学的改造》(1923 年)，反映了当时美国数学教育研究的成果，直到 1950 年，对数学教育还具有指导意义.

新数学运动(new mathematics movement) 数学教育现代化运动. 在 20 世纪 50 年代末，由美国首先发起的一场数学教育现代化的改革运动，声势浩大，影响遍及世界各国，这在数学教育史上是空前的. 1957 年，苏联人造卫星发射成功，引起了美国极大的震惊，国家决策人认识到面临二次大战后科学技术的惊异进步和数学在许多新领域的应用，美国的数学教育确实落后了，因此作为科学技术基础的数学教育必须相应地进行巨大的变革，于是掀起了这场新数学运动. 1958 年，美国政府通过《国防教育法》，以立法形式拨出巨款改革教育，并在"美国数学

协会"(MAA)和"数学教师联合会"(NCTM)的协助下，成立了"学校数学研究小组"(SMSG)，动员全国数学教育界进行全面地数学教育改革，形成了全国性的运动.各种学会团体也在纷纷发表数学教育改革计划.1959年，数学教师理事会制定了"中学数学课程"，同年9月美国全国科学院在伍兹霍尔又召开会议，全面研究中学数理教学改革问题，并提出课程改革的四个新思想：

1.学习任何学科，主要是使学生掌握该学科的基本概念、基本原理和基本方法，即所谓结构思想.

2.任何学科的基础知识都可以用某种方式教给任何年龄的学生，即所谓早期教育的思想.

3.过去教学只培养逻辑思维能力，今后应重视发现能力，或称之直觉思维能力.

4.激发学生学习积极性的首要条件不是考试，而是对数学的真正兴趣，提出教材的趣味性.

1962年，美国编写出版了《统一的现代数学》6卷12分册.这套新数学教材的特点是：

1.结构化、统一化：以代数结构为主轴，统一中学数学内容；集合论为初中、高中数学中心题目.

2.公理化、抽象化：把集合论和几何公理法搬进教材中.

3.内容现代化，增加现代数学内容：将数理逻辑、近世代数、计算机、程序设计、概率统计、矩阵、向量、微积分与微分方程等充实进教材，并要求使用现代数学语言.

4.体系上取消分科：几何代数化，打破欧氏几何体系，用各种方法代替欧氏几何体系.

5.精简传统数学：强调逻辑演绎，强调实际操作意义.

6.教学方法多样化：研究电化教学、程序教学、个体教学，并积极提倡"发现法".

1963年，在坎布里奇召开的学校数学教育会议上，报告书《学校数学的终点》提出了更雄心勃勃的计划：要求到1990年初中毕业生要学完传统高中的课程，高中毕业生要基本达到理工科大学三年级的数学水平.在新数学运动中教育学家和心理学家，如布鲁纳(Bruner,J.S.)的学习理论、皮亚杰(Pieget,J.)的心理学都做出了贡献.美国SMSG的新数学教科书，在20世纪60年代曾流行一时.但经过10多年的教学试验，终因内容过难，过于抽象化，大多数学生不能接受，数学水平明显下降，造成多数落后生而以失败告终，为此引起全国人民对数学教育现代化的争论和反对，终于在1973年SMSG组织解散，甚至提出了"回到基础"的口号.1974年，美国成立"数学教学全国咨询委员会"，调查新数学运动，承认了10年间学生成绩是下降了，并认为改革不成功的原因，主要是由于过于偏重抽象理论和公理化.有人说："现代数学大纲的一个大错误，是考虑数学太多，考虑儿童太少."但也有人认为新数学运动不是失败，只须做一些调整即可，并认为"在某些方面新数学运动还是相当成功的"、"新数学运动所追求的目的无疑是值得追求的".因此，应该全面地客观地评价新数学运动，吸取经验教训，以便更好地进行今后的现代化改革.

欧洲的现代数学教育改革(educational reform of modern mathematics in Europe)　欧洲的新数学运动.在欧洲对数学教育现代化运动有重大影响的是"欧洲共同市场"国家(OEEC)在1959年11月召开的数学教育改革会议，地点在法国巴黎郊外罗瓦奥蒙.在这次会议上，法国数学家布尔巴基学派主要成员之一迪厄多内(Dieudonné,J.)的发言，被认为是新数学运动的一个里程碑.新数学运动的指导思想就是布尔巴基学派的观点在数学教育上的表现.他说："我所考虑的改革方案，如果用一句口号来概括，那就是：欧几里得(Euclid)滚蛋."这个发言曾引起了赞成和反对两派的争论.根据这次会议精神在1961年制定了"现代中等学校数学课程"的教学大纲，把欧洲的数学教育改革运动推向了高潮.1962年在瑞典的斯德哥尔摩和1966年在莫斯科召开的"国际数学教育委员会"会议，后者编辑的《数学教育的新倾向》报告书，以及1964年根据"国际教育到达度(学力)评价计划"对12个国家进行内容广泛的数学学力调查，都给数学教育现代化提供了丰富资料.1969年，在法国里昂召开了第一届"国际数学教育会议"(ICME)，它是由"国际数学教育委员会"(ICMI)组织的每四年召开一次的会议，会议上交流的各国数学教育改革的经验，促进了数学教育改革的深入开展.英国于1961年的"南安普顿会议"决定在中小学引进"现代数学".以此为开端，进行英国数学教育现代化的改革，并成立了"学校数学设计"(school mathematics project，简称SMP)机构，制定出新数学教学大纲，编写了中学数学课本11册.增加新内容：集合、函数、群、代数结构、矩阵、向量、概率统计等.改革数学教学方法，重点在培养学生的数学观点和训练学习方法上，采用直观教学和发现数学方法.这套SMP数学新教材实行10年后，由于教材难度过大，超过了一般学生智力发展水平，学生数学成绩下降，引起了英国教育界和公众的广泛批评，又开展了"恢复基础"运动，并于1976年对SMP教材作了大修改.在法国20世纪60年代进行的现代数学教育改革也是搞得最热烈的.1960年，颁布新的中小学数学教学大纲体现了现代化，广泛使用集合的概念和符号，初中就引入代数结构和拓扑结构内容，高中开始学习微积分.1969年又颁布新的中小学数学教学大纲，现代化程度又提高了一步：从

初中一年级开始就系统学习集合论基础知识，把集合与关系作为数学的基本研究对象；从初中三年级起逐步引入系统的数学结构概念；大量删减欧氏几何内容，用向量几何代替，使几何内容代数化．这个大纲试行以来基本顺利，在中学教师中赞成改革的占 85%．10 年中法国的改革比较成功，中学生的数学水平，包括计算能力有所提高．主要原因是：

1．布尔巴基学派在法国数学界有很大影响，教师对现代数学比较熟悉．

2．布尔巴基学派数学家非常关心中小学数学教学改革，积极参加制定大纲和编写教材工作．

3．在全国大城市成立了“数学教学研究会”，培训中学教师能胜任现代数学教学工作．

4．为初中学生家长编写小册子，帮助家长了解现代教学的内容和教学要求．

5．课本编写比较系统，并能根据学生对数学不同的要求，分成几种不同的水平，对计算能力的培养也没有过分削弱．

1979 年，法国教育部又修改、编写了新的教学大纲和课本，主要变动是：

1．综合几何内容有所增加．

2．实际计算能力的训练有所加强．

3．联系实际的内容也有所增加．

4．注意了学生的接受能力，在低年级对集合等抽象理论的要求有所降低．

1968 年，德意志联邦共和国教育部长会议发表《在普通教育的学校关于数学教育现代化的奖励和方针》，并决定从 1972 年开始实施数学教育纲领计划．德意志联邦共和国数学课程现代化的特点是：

1．数学教学改革比较谨慎，虽然引入了集合概念，但没有用结构思想统一教材内容．

2．传统数学内容与现代数学概念并重，并注意运用现代数学观点处理传统内容．

3．保留了平面几何与立体几何的主要内容，抛弃了欧氏几何的公理体系，并增加了几何变换内容．

4．教材编排上分科与混合两种体制并存，十年制学校采用混合编写，十三年制学校采用分科编写．

苏联的数学教育现代化（modernization of mathematics education in USSR） 20 世纪 60 年代后苏联的数学教育改革．在十月革命后建成社会主义国家的苏联，重视国民教育，主张对全国公民实行无差别的、免费的、与宗教无关的普通义务教育．苏联的教育是以培养全面发展的社会主义新人为目标，它的特点是教育与生产相结合，理论与实际相结合．重视数学课程，作为基础课虽年限少，但却配备了较多学时．例如，1964 年十年制普通中学中，6--8 年级每周 6 学时，9—10 年级每周 5 学时．苏联中学数学教材是数学教育家基谢廖夫（Киселёв，А．П．）于 19 世纪末编写的《算术》、《代数》、《几何》，在俄罗斯和苏联使用了 50 年，这在近代数学教育史上是罕见的．苏联在第二次世界大战后的数学教育改革，开始于 1955 年，颁布了新的教育计划和新数学教学大纲，精简了不重要的内容，增加了导数与函数内容，以提高数学课的科学水平，还于 1956 年出版了新编的巴尔斯柯夫（Барсуков，А．Н．）的《代数》与尼基金（Нцкцтцн，Н．Н．）的《几何》教科书．但是苏联系统地大规模的数学教育现代化改革是从 1964 年开始的，在当时成立了以著名数学家柯尔莫哥洛夫（Колмогоров，А．Н．）为首的确定数学教学内容委员会，制订了 4—10 年级数学教学大纲，并于 1968 年公布．新大纲的基本思想是在数学课程中贯彻集合论的观点，把映射作为几何课程结构的基础；几何是根据柯尔莫哥洛夫提出的五组公理为基础展开的欧氏几何体系，作为证明几何命题的主要工具是几何变换以及平面和空间的向量；在 9—10 年级增加了数学分析初步知识．这个大纲在中学数学内容和结构现代化方面迈出了重大一步．它具有新思想、新结构，反映了中学数学同现代数学科学技术的要求．与美国相比，苏联的现代化方案是比较稳健的．1974 年，苏联公布了教学大纲的修订稿，编写了 6—8 年级的《代数》、《几何》，9--10 年级的《代数和分析初步》、《几何》等．在使用新教材的过程中，由于课程内容太多，学生负担太重，苏联教育部于 1978 年公布了重新修订的《苏联八年制学校和中学数学教学大纲》．但这个大纲基本上保持了原大纲的基本内容和体系，只是精简了少量次要内容，加强了数学课的综合技术教育内容．值得注意的是新大纲除包括所有学生必修的最低限度知识以外，为了发展学生最感兴趣的科学（数学和物理）和个人才能，引进了选修课的新大纲，还为为加深数学学习而在高年级举办的数学专业学校制订了数学教学大纲．

对苏联十年数学教育现代化改革的评论，出现两种不同意见：

1．认为“不应该把集合的理论作为阐述中学数学的基础，不应该把学校几何课程建立在映射理论的基础上”，要求“回到基谢廖夫”的传统讲法．

2．认为数学课程应当进一步现代化，增加学习内容，如数理逻辑基础知识、向量运算和群论初步等．

同时，也有人认为“真理应当是两种意见的某种折中”．苏联数学教育家斯托利亚尔（Столяр，А．А．）在所著的《数学教育学》中提出一个新的观点，认为：“数学教育现代化与其说在中学学习现代数学，毋宁说是现代的数学教学．”即把学校数学的教学建立在现代数学的思想基础上，并使用接近于现代数学的风格和语言，向现代数学思维发展．苏联在总结 50

年教育改革经验基础上，于1984年发表《普通学校和职业学校改革的基本方针》，将普通教育由十年制改成十一年制，制定了新的数学教学大纲：低要求的和高要求的教学大纲，以进一步提高教育质量，推进数学教育现代化.

日本的数学教育现代化（modernization of mathematics education in Japan） 日本的现代数学教育改革. 日本的近代教育开始于明治维新，积极学习西方资本主义国家教育，1872年，颁布新学制，创建新学校. 效仿法国的学区制，中学数学教材大都采用美国的算术、代数、几何、三角的译本. 日本学校数学教学内容，由国家统一管理是在1902年根据"中学校令"公布的"中学数学教授要目". 这个教授要目一直使用到1931年. 它采用分科主义，不许融合；偏重逻辑不容纳直观主义；不重视函数概念，与当时正在兴起的贝利运动的世界潮流背道而驰. 但在1913年，黑田稔大力介绍欧美数学教育改革思潮；1915年，森外三郎译出了德国的《新主义数学》；1921年，林鹤一译出了克莱因（Klein,(C.)F.）的《德国的数学教育》；1924年，数学教育家小仓金之助出版《数学教育的根本问题》等，这些都对日本的数学教师有很大影响，促进了日本数学教育改革运动的开展. 1919年成立了"日本中等教育数学会"，并创刊杂志，推进了数学教育的改革. 1931年改订中学校令施行规则，公布新的数学科教授要目，才使经过30年的数学教育得到真正的改革. 它的纲领是：

1. 允许数学各科的综合处理.
2. 采用直观几何.
3. 重视数值三角法.
4. 重视函数概念的养成.
5. 教材要适应实际生活.

同时也促进了将微积分、解析几何、统计等引入中学教材，以适应科学的时代要求，更新了数学内容，重视启发学生的数理思想. 但在1941年以后及二次世界大战中日本的教育具有浓厚的国粹主义思想，为军国主义的侵略战争服务. 二次世界大战后的日本数学教育，经历了三个历史时期：

1. 1945—1955年是"生活单元"时期. 1947年文部省发行"生活单元"教科书，它是根据美国杜威（Dewey,J.）的实用主义教育理论，以儿童为中心，选择日常生活需要的教材. 实行结果造成数学成绩下降，引起教师的不满和反对，认为"数学科所教的不是数学".

2. 1955—1965年是"系统学习"时期. 1958年施行中学学习指导要领，1961年开始使用新编教科书，在其内充实了数学教学内容，加强了系统性，以适应经济发展和科学技术的需要.

3. 1965—现在是数学教育现代化时期. 文部省于1969年、1970年修订了初中、高中数学教学大纲，方针是考虑数学的发展和数学对社会所起的作用，用新的观点从本质上改革教学内容. 初中数学引入了集合、概率、图形的变换思想和拓扑观点，明确了函数概念；高中数学增加了集合、映射、向量、矩阵、电子计算机和框图、概率、逻辑和平面几何公理结构等新内容. 为了提高中学的数学教学水平，从1972年开始采用了新编的现代化教材. 这套新教材实行的结果，由于教材内容繁、难、深，改革走过了头，它只适应少数天才学生学习使用，造成了大量的落后生. 为此受到了教师和社会人士的反对，批评现代化为"超现代化"，要求"回到基础". 文部省于1977年、1978年公布了新的"留有余地"的初中、高中数学教学大纲，编写了各年级相应教材，并规定于1981年、1982年开始使用. 方针是：留有余地的轻松愉快地进行有效的学习；减少数学学时、减轻学习负担，发展个性教育. 初中数学取消了集合、逻辑内容，高中数学的六门课中"数学Ⅰ"为必学，其他五门课"数学Ⅱ"、"代数・几何"、"基础解析"、"微分・积分"、"概率・统计"，则根据学生将来的去向而选修.

总之，日本的数学教育现代化的改革是比较稳健的，从1977年以后正处于调整巩固和放缓改革步伐阶段. 20世纪80年代以来日本进一步研究改革教学方法，提出了"问题解决"教学法. 这是针对现代数学问题的新的应用与发展，引导学生用数学理论去解释更广泛的事物现象，并在解决问题过程中培养数学的观点、思考方法及运用知识的能力. 同时由于计算机教学的逐步推广，大大提高了教学效果.

美国的数学教育（mathematics education in USA） 20世纪美国数学教育简史. 20世纪初，美国对中小学进行了改革，将中小学学制四・八制，改为小学六年，中学分初中和高中各三年. 1916年，在美国数学协会（MAA）主持下，成立了由著名的数学家和中学数学团体的代表组成的"全美数学诸规定委员会"，研究制定中、小学数学教育指导文件，这是数学教育最早的研究机构. 1923年，该委员会以"中等教育数学的改造"为题指出："本会已于1916年组成，改造运动已在全国展开，数学教育的总目标如下：我们洞察我国实际环境并驾驭它，并为理解各方面的文明进步，必须理解量及空间的关系，具备分析这一切的能力."目标还对实用的目的、训练的目的、教养的目的三方面有所要求，各项目还列有细纲，这时美国已明确提出数学在生活中的应用——对自然现象的观察、思维的训练，奠定了中小学数学教育的基础. 1935年，美国数学协会（MAA）和"数学教师联合会"（NCTM）共同组成了关于"中等学校数学的位置"的联合会. 这个委员会不限于研究数学教育内部的教学内容和教学方法，它广泛地研究关于数

学教育的各种问题，对美国数学教育改革的推进起了重大作用.第二次世界大战以后，联合委员会强调数学教育形式的改革，并试行数学教学内容的革新.如加利福尼亚大学的布劳奈尔(Brownell,W.A.)等设计的八年制小学校用教科书中对7、8年级目录，进行了大胆改革.自1948年以来，以佛罗里达大学的葛佳(Gager,W.A.)教授为中心与佛罗里达州教育局，所组成的教育课程委员会，做出了出色的改革工作，并于1953年出版了他们编写的教科书《综合数学》1—4卷.美国在20世纪30—40年代，中学数学教育的改革中综合数学内容，埋下了20世纪60年代数学教育现代化时编写《统一的现代数学》的种子.1951年开始，美国以依利诺伊大学为中心的研究组织(UICSM)早已察知美国数学教育的缺欠，并开始了研究和实验.宣传、讨论数学教育改革活动，此时形成了全国性运动，这就是从美国开始的“数学教育现代化”运动，也称“新数”运动.学校数学研究组(school mathematics study group，简称SMSG)编写出从幼儿园到大学预科的全套教材、教师手册、课外读物等，其中中学数学教科书《统一的现代数学》6卷12分册，中国已有译本，实为“现代化”的代表作.这种以结构化思想编写的中学数学教科书，终因内容过难、过深，不能为中学教师、学生所接受，甚至引起社会上的批评，最后以失败而告终，SMSG也解散.“新数”失败后，20世纪70年代提出了“回到基础”(Back to basics)的口号.20世纪80年代，美国又在积极进行数学教育改革活动.NCTM发表了《行动议程》(An agenda for action)对20世纪80年代及今后设想的学校数学教育提出了八项建议.把“问题解决”作为20世纪80年代学校教学的核心.1989年5月，NCTM又发表了《中小学数学课程与评估标准》，指出了教育目标，促进数学教学改革，提高教学质量，使现在中小学的学生能够适应21世纪的生存需要.教育目标是培养有数学素养的社会成员，即要达到以下五项标准：

1.要懂得数学的价值.

2.对自己的数学能力要有信心.

3.有解决数学问题的能力.

4.学会数学交流.

5.学会数学的思想方法.

这是指导美国20世纪90年代数学教育的纲领性文件.

2000年4月，NCTM又发表了《学校数学的原则和标准》作为指导美国新世纪数学教育的纲领性文件.

英国的数学教育(mathematics education in UK)　20世纪英国数学教育简史.英国中学里将数学作为正式学科设置，是从19世纪初(1830年左右)开始的.当时的数学教学只重视教养价值，尚未重视实用价值；近代数学的重要概念和方法，都不列入教材内容，只讲些从古希腊到17世纪初的古典数学.19世纪中叶以后，对数学教育的重要性、改革的必要性开始有所觉悟，于1870年产生了“几何教授改良协会”的教师团体.该会会长认为，“数学教师若能脱离欧几里得(Euclid)的严格束缚，给几何学以新的生命力，才能取得很大成功.”该会在当时还是很有革新意义的，编写出《几何》、《代数》、《三角》等教科书，但只限于一些古典内容.20世纪初的1901年9月，在英国学术协会年会上，讨论了数学教育问题，英国皇家学院教授贝利(Perry,J.)作了有名的题为《数学的教学》的讲演，成为后来世界范围内的数学教育现代化的先声.他提出的《初等数学纲目》给20世纪初的数学教育以很大影响.英国政府在1944年通过教育改革法案(白特勒法案)，规定教育由国家领导，延长义务教育年限.第二次世界大战后，1961年的“南安普顿会议”决定在中小学引进“现代数学”.英国的数学教育以此为开端，在教学内容、教学方法等方面都发生了深刻变化.从20世纪60年代起采用了加宽课程的办法，所谓加宽课程是在中学数学教学中增加测量练习、形状和空间、图表演示、逻辑思维培养等方面的知识.从此中学数学教育打破了传统的框框，在教学内容方面反映出了20世纪数学研究所取得的新成果.当时，提出了“学校数学设计”(school mathematics project，简称SMP)和“纳非尔德数学方案”等多种数学改革方案，并制定出新的数学教学大纲，在改革数学教学内容结构方面做了新的尝试.依SMP编写的《英国中学数学教科书》，是20世纪60年代数学教育现代化中有代表性的教科书.但也因过于追求“现代化”导致内容过难，教学效果不良，遭到社会上数学界的非议而失败.1977年，英国众议院由各党派联合组成了以科克罗夫特(Cockcroft,W.H.)为主席的“数学教学状况调查委员会”，全面考查了英国中小学数学教育，提出了在改革数学教育现代化过程中的种种弊端，开展“恢复基础”工作，特别强调了要加强数学教师的培养、培训工作.以科克罗夫特为主席的“数学教学状况调查委员会”经过四年的调查研究，于1982年1月发表了《科克罗夫特报告》，全面总结了20年来英国中小学数学教育的经验教训，并对今后发展方向提出了指导性意见.他的报告书给后来英国数学教育以重大影响，在他的报告中提出下列建议：

1.开设适应学生智力差异的课程，使所有学生都能受到适于自己能力的数学教育，获得数学基本知识和技能，有余力者可突破最低要求，充分发挥其智力潜力取得更大成就.

2.继续推广小学的加宽课程.

3. 强调培养能力，批评了在“恢复基础”工作中造成重技术训练、轻能力培养的倾向，提出今后数学教育，在中小学要加强心算、口算、估算的教学，提高学生在不同环境中解决问题的能力.

4. 改革数学考试方法，提出数学考试必须遵循两个原则：试题应使学生能够表现出他们的知识水平而不应一味出难题；考试不应使学生失去学习信心. 为此应设分级数学考试，对不同水平的学生应出不同的考试题目，并应重点考查数学能力.

5. 在数学教学中可广泛使用计算器.

6. 加速对数学师资的培训. 加强教师的职前训练和在职训练，是改进和提高教学水平的保证.

今后的数学教师必须具备大学本科的数学专业水平，并需经过教育科目的训练. 科克罗夫特报告的总目标，反映了英国中小学数学教育进一步适应科学技术发展的要求，促进了 20 世纪 80 年代英国数学教育的发展.

法国的数学教育（mathematics education in France） 20 世纪法国数学教育简史. 19 世纪起，法国数学家辈出，且大都对中学数学有所关注. 如勒让德（Legendre，A.-M.）、拉格朗日（Lagrange，J.-L.）、波莱尔（Borel，(F.-É.-J.-)É.）曾编写了出色的教科书，他们重视直观几何和函数概念；阿达马（Hadamard，J.(-S.)）于 1898 年出版了《初等几何学》，这些都对数学教育的改革起到巨大促进作用. 布尔巴基（Bourbaki，N.）学派在数学科学上很有建树，前任国际数学教育委员会（ICMI）主席南巴黎大学教授卡汉（Kahane）致力于国际数学教育，做出了杰出的贡献. 法国的数学教育，在教育思想上深受 18 世纪法国著名启蒙思想家、崇尚自然的教育家卢梭（Rousseau，J. J.）的影响. 他主张“人在自然状态中具有自由平等的天赋人权”，主张对儿童进行适应其身心自然发展的“自然教育”，他的著作《爱弥儿》就是叙述“自然教育”的一幅美好蓝图. 法国青年数学家，如布尔巴基学派多受卢梭自然主义的影响. 法国在教育行政上是高度的中央集权制，学校制度、课程、教学大纲、师资及教学时数均由国家法令统一规定全国通行. 从法国近百年来的四次改革方案看，教育有以下特点：

1. 义务教育年限由 8 年延长到 10 年（6 至 16 岁）.

2. 依据学生的能力进行升学指导，中学设立“观察期”和“方向指导期”.

3. 提高职业技术教育的地位，加强中、小学教育与职业教育的联系.

法国的中等教育特点是各类学校界限严格，各阶段分科分组繁杂、考试制度严格、师资要求很高. 如初中四年，高中三年，高一分为 A 组（文科）、C 组（数学、自然）和 T 组（技术）三组，高二分为 A 组（文学、哲学）、B 组（经济和社会科学）、C 组（数学和物理）、D 组（工业技术）和 E 组（经济技术）五组. 各组的数学教学内容和要求有所不同. 1925 年法国对中小学教育进行过一次改革，方针是使所有学生在前 6 年都学习共同的一般知识，到第 7 年才把所有学生分成哲学组和数学组，而数学组每周要有 5—9 课时的数学. 1938 年，法国的数学教育又进行了一次改革，特别是打破了传统的区分庶民教育和上层教育的阶级专校制，中小学教育内容也有所改善. 在中学六个年级实行“平等（机会均等）的科学教育”，增加了数学内容. 二次世界大战后的 1959 年，法国公布了《教育改革法令》，规定义务教育年限延长到 16 岁，取消中学入学考试，发展继续教育，提高职业技术教育地位. 1977 年，议会通过了《法国学校体制现代化建议》（简称《哈比改革方案》），该方案要求普通中小学加强职业技术教育，改革中学数学、物理、化学及工艺学科体系，加强实验教学，强调教育必须适应学生能力和个性发展，加强个别指导，要求各级学校加速采用现代化教学手段. 法国自 20 世纪 60 年代以来，进行的现代数学教育改革尽管进展比较顺利，但到 1975 年也暴露出相当严重的问题：如大量删减综合几何内容，学生缺乏处理图形的能力；忽视了理论的实际来源和数学的作用，不利于培养用数学工具解决实际问题的能力，对大多数学生来说没有学到实际有用的数学知识和技能. 于是在 1977 年，法国教育部对教学大纲作了较大的修改，颁布了初中各年级的数学教学大纲，并根据新大纲编写了各年级的教材，陆续投入使用. 其主要特点是减少了形式主义的内容，更加重视解决来自数学或其他学科的问题，并重视电子计算机的使用等. 目前，法国数学家正在继续这一改革事业.

德国的数学教育（mathematics education in Germany） 20 世纪德国数学教育简史. 第一次世界大战后，德国在 1919 年制定的魏玛宪法，废除了君主政体，建立起资产阶级共和制度. 废除了等级的双轨学校制，建立了统一的学校系统. 规定了 8 年义务教育. 1925 年开始增设上层建筑学校、德意志中学. 在中学里日耳曼主义和德意志化是最突出的特色. 关于教育方法的学说，是重视作业教育. 在数学教育中作为作业教育的内容，在中等学校各年级开设画法几何和测量. 另外根据教育部的关于中等教育统一方案，以文科课程（德语、历史、地理、哲学、宗教）为中心的作业教育，数学教育是以数学发展史为重点，重视与一般文化和哲学的关系. 教育当局强调，数学科“重点应放在数学发展的历史上，应重视数学同其他文化、哲学间的关系，数学教师应学习一般文化的历史”. 1925 年制定的教学大纲中引入不

少近代数学内容，其数学水平有空前的提高. 在数学教育中不仅纳入解析几何和微积分，而且采用函数论初步、测量和画法几何以及有关的球面三角、天文学及其在绘制地图上的应用等. 在中学最高年级设有"从历史及哲学观点进行概括"，说明数学史与文化史、古典语的关系. 从数学教学内容来看，已将克莱因(Klein,(C.)F.)《新主义数学》的精神融合在课程中，并且重视数学的实际应用，可见数学课的内容非常广泛，而且程度也相当高. 这时期出版了关于数学教学法的著名著作——利茨曼(Lietzman,W.)的《数学教育方法论》三卷. 第一卷是数学教学系统的一般方法总论(1919年)，第二卷是数学教学分论(1916年)，第三卷是应用数学教育理论(1924年). 利茨曼是克莱因的学生，并在格丁根大学开设数学教育讲座，是德国数学教育界的代表人物，他提出了数学教育三原则：

1. 心理的原则.
2. 实利的原则.
3. 教育的原则.

1932年，德国纳粹法西斯掌权后，提倡狭隘的国家主义、法西斯主义，使德国各级各类学校教育开始走向反动和倒退. 在数学教育中甚至主张"在数学方面也必须发展德意志固有的数学精神，必须排斥犹太的拉丁的数学精神". 1938年进行中小学教育改革，使数学教材偏重于应用数学知识，将教材减少到最低限度，并减少了数学教学时间. 第二次世界大战后，1949年成立了德意志联邦共和国(西德)，对教育进行过一系列改革，实行地方分权，各州学校教育差别很大. 1958年成立"德国教育委员会"，建立各州统一的教育制度. 现在学制实行12年义务教育，初等教育有四年制小学和六年制小学，中学则保存了欧洲的传统色彩，学生在上完四年制小学后进入三种不同类型的学校：

1. 为高等学校输送人才的九年制"完全中学".
2. 以专门技术教育为中心的六年制"实科学校".
3. 毕业后立即就业的五年制"初级中学".

在实行六年制初等教育的州，毕业后可以进入七年制学术性的"完全中学"、四年制的技术性的"实科中学"和三年制的"初级中学"，接受中等教育. 各类学校都根据州制订的教学计划，数学被列入重点学科，授课时数较多，仅次于国语. 1958年，召开的各州教育部长常设会议上，提出作为各州共同的国民学校到高中的"数学纲目". 对数学教育的目标规定如下："数学是在坚实的基础上，经过多年积累起来的精神劳动的成果，是人类教养的重要部分. 数学教育对所有儿童，必须完成下列课题：提高数学的认识能力，通晓数学的结构，必须使儿童明确数学在广泛范围内的应用，并且数学教育必须培养儿童的钻研能力和意志的集中."在高中数学添设了一些现代数学内容：集合、对应、向量、群等，这些概念应作为新教材的统一观点、统一的方法而导入. 在德意志联邦共和国各州，数学纲目中都多少有些不同. 根据1968年的各州教育部长会议的决定，要认真执行《在普通教育的学校关于数学教育现代化的奖励和方针》. 根据这个方针各州又制订了数学教学纲要，并要求从1972年开始实施. 教科书采取州组织的审核制度，其编辑出版发行则委托民间企业办理. 德意志联邦共和国正在废除完全中学、实科中学和初级中学的双轨制，走向以综合中学为中心的制度. 德国自从克莱因倡导数学教育改革以来，在历史上形成一个独立的传统，现在正在适应社会发展，探求新的改革.

撰　稿　丁尔升　马忠林　王　凝　王玉阁　王俊明
王鸿钧　文晓宇　伊　晓　刘凤璞　刘贤俊
孙宏安　孙瑞清　杨树林　吴　华　佟玉芝
宋正友　张孝达　陆克毅　林少杰　周学海
孟宪儒　孟祥文　饶汉昌　贺长礼　贺贤孝
郭思乐　梁贯成　谢瑶妮　蔡上鹤　颜秉海
潘福田

审　阅　丁尔升　马忠林　张孝达　郭思乐

数 学 哲 学

数学哲学(philosophy of mathematics)　关于数学发生和发展的一般规律的学问. 它主要研究数学的对象、性质和方法的本体论、认识论和方法论问题. 它是数学与哲学的交叉学科,属于哲学的一个分支学科.

客观事物具有质与量的规定性,是质与量的对立统一. 数学与自然科学的区别在于它的研究对象的特殊性:数学不直接研究事物的规定性,而是研究事物的量的规定性;自然科学则是以物质世界为直接研究对象,具体地研究客观物质的质的规定性. 因此,从这个意义上说,数学是研究量的科学. 但是,数学研究的量是存在于具体事物中的抽象的量,例如,自然数、实数、三角形、圆、常量、变量、结构等. 它们是对客观事物的量及其关系的抽象反映,它不能为感官所知觉,只能为思维所把握. 数学对象的这种特殊性和抽象性对于数学哲学是至关重要的. 正是由于这种特殊性和抽象性才导致一系列不同于"科学哲学"或"自然辩证法"(现称"科学技术哲学")的特有的数学哲学研究对象和范围.

数学对量的认识是不断深入的,或者说不断揭示出量的新的表现形式的,因此数学哲学必须从该时代所揭示出来的量的具体表现形式中,概括出该时代数学研究对象的特点,以回答该时代数学是什么的问题. 例如,亚里士多德(Aristotle)把古代数学的研究对象概括为数量,说明古代数学是研究数量的科学;恩格斯(Engels,F.)把近代数学的研究对象概括为现实世界的空间形式和数量关系,说明近代数学是研究数与形的科学;布尔巴基学派把现代数学研究对象概括为结构,说明现代数学是研究结构的科学. 这些概括准确地反映了不同时代数学研究对象的特点.

由于数学对象的特殊性和抽象性,以及这种抽象性随着数学的发展而不断提高,所以在数学哲学史上出现过数学对象如何存在,它的存在性和客观性,以及更一般地,数学存在性是什么的问题,这些问题至今仍然是数学哲学讨论的. 数学对象的存在性和客观性是数学哲学研究的重要问题.

认识对象决定着认识方法. 数学对象的特殊性和抽象性,产生数学研究方法的特殊性. 自然科学是研究具体的物质事物,可以通过观察、实验和归纳来研究;数学是研究抽象的思想事物,它除了应用观察和实验的方法外,还必须应用演绎法;自然科学的成果只要通过实验证实,就可以得到人们的承认;而数学的成果则必须通过演绎证明才能得到数学界的承认,所以数学特有的研究方法成为数学哲学的一个重要研究对象.

正是数学存在着特有的认识方法——演绎法,才在数学性质问题上产生不同的看法:数学是演绎科学还是经验科学? 数学发展的动力是实践还是逻辑? 抑或是二者的辩证统一? 检验数学理论真理性标准是实践还是逻辑证明? 这类有关数学性质的问题是数学哲学必须探讨和回答的另一类重要问题. 因此,数学的对象、性质和方法是数学哲学的主要研究对象. 这些研究对象是随着数学的发展而变化的,所以作为研究数学发生和发展一般规律的数学哲学又不能不涉及数学的发展史.

既然数学哲学是研究数学的对象、性质和方法的本体论、认识论和方法论问题,从总体上把握数学发生、发展的一般规律,这就决定了它的学科地位和性质. 数学哲学作为数学与哲学的交叉学科,它是处于数学与哲学的中间地位. 数学是研究事物的量及其关系的具体规律,而数学哲学是研究数学发生、发展的一般规律,哲学则是研究自然、社会和思维的最普遍的规律,所以哲学、数学哲学和数学三者之间的关系是普遍、一般和特殊的关系.

数学哲学与数学是一般与特殊的关系. 数学揭示的是某事物的量的具体的或特殊的规律;而数学哲学则是从数学的大量成果(历史的、现实的、认识的、思想的)概括和总结出数学发生和发展的一般规律,这种规律性的认识一般表现为数学观和数学方法论. 数学是数学哲学研究的基础和根据,从这个意义上说,没有数学就没有数学哲学. 另一方面,数学哲学又通过一定的数学方法论影响着数学的发展. 数学史上的大量事实说明,这种影响既有正面的,又有负面的. 一般说来,凡是正确地反映数学发展规律的数学观和方法论可以促进数学的发展;凡是错误地反映数学发展规律的数学观和方法论总是阻碍着数学的发展. 因此,作为一个数学哲学家必须严肃认真地研究数学发展的规律,为数学家提供正确的数学观和方法论. 作为一个数学家必须在纷繁的哲学观点中选择正确的数学观和方法论.

数学哲学与哲学是一般与普遍的关系. 数学哲学研究的是数学发展的一般规律,而哲学研究的是自然、社会和思维的最普遍规律,所以哲学概括出来的规律比数学哲学概括出来的规律更普遍,包含着数学的一般规律. 因此,虽然数学哲学是建基于数学

之上,但又往往受一般哲学思想的影响.另一方面,数学哲学的研究成果为哲学的发展提供新的养分,可以丰富和发展哲学.哲学史上的大哲学家常常直接参与研究数学哲学或者吸收数学哲学的最新成果,为自己的哲学观点提供数学根据,从而丰富和发展哲学.数学哲学的研究还与科学哲学、自然辩证法(或科学技术哲学)和数学基础等学科有着密切的关系.

作为研究数学发生和发展的一般规律的数学哲学,与数学同样有着悠久的历史.不过,它与任何事物一样,有其从孕育到独立发展的过程.尽管数学哲学早已存在,但它在20世纪之前,还只是附在哲学的母体之中,处在孕育阶段.这时的数学哲学研究是零散的,而且是为其研究者的哲学观点服务的,为其哲学观点提供数学例证.

20世纪初兴起的西方科学哲学是以科学活动和科学理论为对象,探讨科学的本质、科学知识的获得和检验、科学理论的逻辑结构等有关科学认识论和方法论问题.科学哲学把数学作为自然科学的一部分,研究数学发展中的一些哲学问题,标志着数学哲学开始从一般哲学的母体中分离出来.

20世纪50年代,在中国建立的自然辩证法学科,是马克思主义关于自然科学的技术的理论成果的概括和总结,是与历史唯物主义相并列的一个哲学分支学科.自然辩证法同样把数学作为自然科学的一个部分,研究其中的一些哲学问题.这时,数学哲学虽然从一般哲学分离出来,但仍然附属于科学哲学或自然辩证法,还没有真正获得独立发展.

使数学哲学研究发生革命性变化的是集合论悖论引起的数学基础危机.19世纪末,集合论被公认为是数学的基础.当数学家们为数学推理有了可靠基础而欢欣雀跃的时候,数学家发现了集合论悖论.开始是个别的,后来越来越严重,特别是英国哲学家、数学家罗素(Russell,B. A. W.)于1902年在集合论中发现著名的罗素悖论,从根本上动摇了数学基础.为了给数学重新奠定牢固的基础,一些数学家和逻辑学家从各自的数学观出发,提出解决数学基础问题的不同方案,形成数学基础研究的三大学派:逻辑主义、直觉主义和形式主义.因此,当时的“数学基础”一词有其特定的含义,它包含两方面的内容:数学观和解决悖论的具体方案,即数学哲学和数学.这样一来,在此后的一段时间内,无论是中国或外国都把“数学基础”作为“数学哲学”的同义语.它标志着数学哲学第一次从哲学母体中真正分离出来,研究数学自身发展的哲学问题,并直接为数学的发展服务.这时,数学哲学虽然从一般哲学的母体中分离出来,可是,它又从属于“数学基础”、“科学哲学”或“自然辩证法”.现在,数学哲学正经历着第二次分离,即从“数学基础”、“科学哲学”或“自然辩证法”分离出来,成为独立的一个哲学分支学科.

随着数学基础研究的深入,解决悖论的具体方案已经发展成数理逻辑,成为数学的一个独立分支学科.这时在西方,“数学基础”成为数学哲学的代名词.1972年,美国出版的《哲学百科全书》中没有设置“数学哲学”条目,而只设置了“数学基础”,它的内容包括:公理化方法、认识论讨论、柏拉图主义和构造主义、数理逻辑(哥德尔不完全性定理、希尔伯特方案的发展和公理集合论).1980年出版的《大英百科全书》第15版,也没有设置“数学哲学”条目,同样只设置了“数学基础”条目,其内容包括:公理方法、发生方法、1900年以后的基础危机(悖论、直觉主义、逻辑主义、形式主义和元数学方法)、当前的倾向(直觉主义的数学基础、数学基础的非直觉主义研究)等.它们所列的“数学基础”的内容大都属于数学哲学研究的内容.这说明直到20世纪70年代,西方一般还使用着“数学基础”,没有正式给它起个名字.但是,已经有人开始把研究数学发生、发展的一般规律的学问称为“数学哲学”了.例如,巴克尔(Barker,S.)的著作就直接以“数学哲学”作为书名.美国数学哲学家宾纳塞拉夫(Benacerraf,P.)和普特南(Putnam,H.)于1964年编辑的一部论文集,也直呼《数学哲学:选读》.因为它是选择19世纪末以来有关数学哲学的一些代表性论文,所以加了“选读”二字.这部《数学哲学:选读》把所选的论文划分为4类:数学基础、数学对象的存在性、数学的真理性和维特根斯坦论数学.这种划分反映了当时一些数学哲学家对数学哲学的看法,即数学哲学已经不再局限于研究数学基础的哲学问题,而是研究数学的本体论、认识论问题.林夏水在《数学哲学的对象和范围》(《自然辩证法研究》,1988年第3期)一文中,根据数学哲学研究对象的变化,提出数学哲学不能再寄名于“数学基础”之下,而应该成为独立的哲学分支学科.这是因为,随着数学基础问题研究的深入,它已经发展分离出数理逻辑的专门学问,它属于数学的一个分支学科.“这样,数理逻辑从数学基础分离出去以后,数学哲学继续留在数学基础的名下,也就显得名不正言不顺了.”因为“数学基础问题的提出,其本意是要解决数学的推理基础问题的,它应该属于具体科学的任务”.此外,“数学基础并不能包括数学哲学的全部内容,而且数学发展到如此丰富的内容,我们也有必要从哲学上做专门的、全面的反思,总结出带有普遍性的问题,作为数学继续发展的借鉴.因此,应该把数学哲学作为一门独立的哲学学科来进行研究”.

数学哲学不能再寄于“数学基础”之名下,那么它是否可以放在“自然辩证法”之中呢?不能,因为根

据中国自然辩证法课程的教材《自然辩证法概论》(国家教委社会科学研究与艺术教育司组编,高等教育出版社 1991 年修订版,供理工农医类硕士研究生使用)一书所说的,自然辩证法是"关于自然界和科学技术发展的一般规律以及人类认识和改造自然的一般方法的科学".可是,尽管数学作为一门科学,它与自然科学一样,存在着一些共同性的哲学问题,但是,数学在科学分类上,不属于自然科学,有其自身特有的科学问题.它们并不表现为共性与特殊性的关系.因为数学研究对象的特殊性以及它比自然科学的研究对象广泛得多,所以研究自然科学的哲学问题的自然辩证法不可能包括研究数学的哲学问题的数学哲学.例如,自然科学家一般不会认为他们的研究对象是不存在的.但是,在数学哲学中,关于数学对象是什么、它是否存在、如何存在这类本体论问题的争论从来就没有停止过.在认识论上由于数学的研究对象不同于自然科学,产生了研究方法的不同.研究方法的不同便引出了一系列长期争论的问题,例如,数学是经验科学还是演绎科学?数学发展的根本动力是实践还是逻辑?检验数学理论的真理性标准是什么?逻辑证明在数学发展中的作用和地位怎样?它与实践检验的关系如何等?这些问题并不是一般的自然观、科学技术方法论和科学技术观所能包括或替代的.因此,数学哲学已经到了从自然辩证法分离出来,独立地研究自身的问题的时候了.

数学哲学能不能包括在科学哲学中呢?不能.因为科学哲学是以科学活动和科学理论为研究对象,探讨科学的性质、科学知识的获得和检验、科学的逻辑结构等有关科学认识论和方法论的基础问题.具体地说,它主要研究科学方法论、科学合理性理论、元科学和基础研究四个方面.根据上面关于数学研究对象的特殊性所引起的数学哲学研究的特有的问题,显然它们也不是科学哲学所能包括的.因此,数学哲学也不能寄托在"科学哲学"的名下.

既然数学哲学不能再寄于"数学基础"、"自然辩证法"或"科学哲学"之名下,那么它应该成为一门独立的哲学分支学科.上面所论述的数学哲学的研究对象和理论框架,正是作为一个分支学科独立发展的标志.

数学哲学虽然与科学哲学或科学技术哲学相并列,但它们有着密切的关系.上面所说的数学哲学与科学哲学或科学技术哲学的血缘关系,正是这种密切关系的反映.数学作为一门科学,它是科学的一部分,所以研究科学认识论和方法论的科学哲学所得到的成果对数学哲学有一定的借鉴意义;另一方面,数学哲学的成果对于科学哲学、自然辩证法也有一定意义,前者是后者的深化.

至于数学哲学与哲学意义上的数学基础的关系,那是一般与个别的关系.因为数学基础的哲学问题固然是数学哲学的重要部分,但它并不能反映整个数学哲学概况.数学哲学不仅要时刻关心和研究数学基础研究中提出的哲学问题,而且要关心和研究整个数学发展提出的哲学问题,特别是数学前沿提出的哲学问题.

数学本体论(mathematical ontology) 数学哲学术语.指研究数学对象及存在方式的学问.它研究的主要问题有:数学对象是什么?它的存在性和客观性如何?这是哲学上的本体论在数学哲学中的具体表现.

数学是研究量的科学,但是数学对量的研究并不是停留在一个水平上的,而是由浅入深地,不断揭示和研究量的不同表现形式的.就数学史来看,人们首先认识的是名数,它与事物的质相联系,然后才从不同的具体名数概括或抽象出其共同的数量特征,出现抽象的数概念.这时的数都是一些不变的量,数学家称之为常数或常量,随着研究运动物体的数量关系的需要,数学家又揭示出量的新的表现形式——变量.19 世纪中叶以来,现代数学进一步深入研究量的运算及其性质,揭示出量的又一新的表现形式——结构.当然,这并不说明量只有这 4 种表现形式,而是说明数学对量的研究不是停留在一个水平上,一个层次上,而是由低层次进入更高的层次,由表层进入更深的里层,它将随着数学的发展而不断呈现出新的形式.数学家不断揭示出量的新的表现形式:名数、常数、变数和结构,成为不同时期数学研究的对象.从抽象性角度来看,量的这些表现形式一个比一个更抽象,构成一个抽象的层次序列.数学哲学就是要从数学不断揭示出来的量的具体表现形式中,概括或抽象出反映该时代数学研究对象的一般特点,回答该时代数学是什么的问题.

正是数学对象这种特殊性和抽象性,才引起古希腊数学哲学家关于数学对象如何存在的争论.在古代,当数学对象由具体的名数发展到抽象的数概念时,人们第一次遇到抽象与具体或一般与个别的关系.亚里士多德(Aristotle)以前,许多哲学家把"一般"的数学对象当作像"个别"的存在物那样真实地存在着,引起理论上的一些困难,所以亚里士多德才提出数学对象如何存在的问题,并且阐明数学对象是抽象地存在于事物之中的.后来,"一般"与"个别"的关系更发展为中世纪关于共相(即普遍、一般)是否真实存在的唯名论与实在论之争.当数学进入研究结构的层次后,作为唯名论与实在论争论的继续,表现为现代数学哲学中形式主义与柏拉图主义关于无穷总体(或实无穷)的存在性和客观性问题.

正是数学对象抽象性程度的提高,才引起现代数学是研究纯量的科学还是研究结构的科学的争

论，以及能否用“结构与质的对立”的范畴来代替哲学中“质与量的对立”这对范畴的争论.

数学认识论(mathematical epistemology) 数学哲学术语.指研究数学认识过程的特点和规律性的学问.数学作为对客观存在的事物的量的一种思维或认识，它与其他一切认识一样，遵循“认识——实践”的辩证唯物主义认识路线.另一方面，由于它的研究对象的抽象性和特殊性，又产生与自然科学不同的、特有的研究方法——演绎方法.自然科学的研究对象是具体的物质，所以可以应用观察、实验和归纳的方法；数学的研究对象是抽象的思想事物，它是看不见的，只能用思维来把握，所以它在探索性研究中除了使用自然科学的一般研究方法外，还必须应用演绎法，特别是在发表某一结果或定理时，不能用实验来证实，而只能用演绎法来证明.数学认识方法的这种特殊性，就产生思维与存在的关系这一认识论问题的争论，它在数学哲学中具体表现为关于数学性质和数学理论真理性的争论.

关于数学的性质.在现代数学产生以前，数学问题大多产生于生产实践，并且直接为生产或科学技术服务.尽管早在公元前3世纪，欧几里得(Euclid)建立起第一个公理系统，出现公理方法，一些数学家认为几何得出的结论比算术或代数更可靠，主张代数结果的正确性要通过几何证明来保证，但是还没有引起数学性质的哲学争论.其原因正如美国数学史家克莱因(Kline,M.)所说的：“从大约公元前200年起到1870年前后为止，几乎整个数学都建基于经验和实用的基础上，从明显的公理出发进行推理证明的观念早已看不见了.”当然，在近代，哲学史上的经验论与唯理论之争涉及数学是经验科学还是演绎科学的问题.笛卡儿(Descartes,R.)建立唯理论时，认为数学是一门理性的演绎科学.莱布尼茨(Leibniz,G. W.)在批判英国哲学家洛克(Locke,J.)的经验论中，也论述过数学知识是先验的、必然的真理.德国哲学家康德(Kant,I.)为了调和经验论和唯理论，建立先验论哲学，论述数学是先天综合判断.19世纪中叶以后，数学进入现代发展阶段，开始分为纯粹数学和应用数学.一般所说的数学都是指纯粹数学，而纯粹数学表现为一系列的逻辑推理，表现为一种逻辑思维.这时，关于逻辑思维与存在的关系问题突显出来，产生了数学的性质是什么，或者说数学是演绎科学还是经验科学，抑或是拟经验科学这类认识问题的讨论.与此相关的产生了数学真理性的标准是实践还是逻辑上的相容性，以及实践检验和逻辑证明的关系的长期争论.

数学理论的真理性标准问题主要讨论数学理论作为一种认识、一种思维结果，要不要回到实践中证明自身的真理性，逻辑证明在数学认识中的作用，以及它与实践的关系如何.这些问题与数学性质的问题紧密联系.一般说来，凡是认为数学是经验科学的学者，都把实践作为检验数学理论的真理性标准；凡是认为数学是演绎科学的学者，都把逻辑上的无矛盾性作为检验数学理论真理性的标准.唯理论哲学家莱布尼茨认为：存在“推理真理”和“事实真理”，前者是必然的，后者是偶然的；与这两种真理相应的存在着两种推理原则：矛盾原则和充足理由原则；数学的推理基础是矛盾原则，所以数学真理是必然真理，而“必然真理是天赋的并且是靠内在的东西来证明的，而不能是像我们建立事实真理那样靠经验来建立的”.在唯理论与经验论两种观点之外，在数学哲学史上还出现第三种观点，即拉卡托斯(Lakatos,I.)的拟经验论.他从研究数学的理论结构出发，提出数学理论是一个拟经验系统，从而说明数学是拟经验科学.对于这种拟经验系统的真理性，要受到两类潜在证伪者(逻辑证伪者和启发式证伪者)的检验.

数学方法论(methodology of mathematics) 数学哲学术语.指研究数学思维活动的一般规律和方法的学问.数学作为一门具体科学，它的方法论应该属于具体科学方法论，这只是问题的一个方面.另一方面，由于数学研究对象是事物的量，这种量普遍地存在于各门具体科学(包括自然科学和社会科学)的研究对象之中，因此作为研究量的方法论，即数学方法论，对于各门科学的研究又具有普遍意义.所以，在一般科学方法论中又有“数学方法”的研究.不过，科学方法论中所说的“数学方法”含义更广，它不仅包括一般的数学方法和具体的数学方法，而且还包括应用数学成果解决自然科学和技术科学的数学方法.这里所讲的数学方法论含义比较窄，它是指研究数学的一般方法，即从具体的、个别的数学方法概括出抽象的、一般的数学方法理论.因此，所谓数学方法论就是以具体的数学研究方法为对象，探讨各种数学方法的性质、特点和联系，并从个性中找出共性，从个别中探索一般，从而得出关于数学研究方法的规律性认识.

认识方法是由认识对象决定的，同时它又受到世界观的影响.这在数学哲学中表现为，数学方法论与数学观的统一.数学家在自己的研究工作中不仅创造或发明具体方法，形成一定的方法论，而且也产生对数学的总体看法(即数学观)，并且在以后的数学研究中，根据已有的数学观，而主张或应用与这种数学观相应的方法论.在这方面的典型例子是数学基础三大学派解决数学基础问题的方案都是基于它们的不同数学观而提出解决问题的不同方法的.还有，认为数学是一门艺术的数学家，强调用美学的观点和方法来思考和研究问题，评判结果.数学史上的

算法倾向与演绎倾向，总是与该时代占主导地位的数学观相联系的. 这说明数学观对数学方法论起着一定的影响.

毕达哥拉斯的数学哲学(Pythagoras philosophy of mathematics)　古希腊的一种数学哲学观. 它主张数是万物的本原的数学本体论思想. 毕达哥拉斯(Pythagoras)是古希腊数学家、数学哲学家，生于伊奥尼亚的萨摩岛，在南意大利的克罗顿组织社团(称为毕达哥拉斯学派). 他逝世后，其学派被迫解散.

正像古希腊哲学产生于神话一样，古希腊数学哲学也是萌芽于古代的神数术. 根据法国学者列维-布留尔(Levy-Bruhl，L.)在《原始思维》一书的考证，在抽象的数概念出现以前，原始人对数的认识曾经历过一个漫长的阶段，即"每当他想到作为数学的数时，他就必然把它与那些属于这个数的，而且由于同样神秘的互渗而正是属于这个数的什么神秘的性质和意义一起来想象. 数及其名称同是这些互渗的媒介. 因此，每一个数都有属于它自己的个别的面目、某种神秘的氛围、某种'力场'". 这就是说，在原始人的思维中，一方面数在实际应用中，与被计数的东西相联系，另一方面它在集体表象中又与某种神秘的属性相联系. 数在集体表象中的神秘性质在不同原始民族有其不同的表现，出现数字崇拜，产生神数术. 后来，神数术被进一步神秘化，发展出"字数术". 希伯来文和希腊文的每一个字母都有音和数这两种意义，一个词中各个字母的数的总和就是这个词的数，这就是所谓"字数术". 虽然数的这种神秘性在不同民族有其不同的表现形式，但都被用来或解释某些事物、事件. 例如，用"1"表示善、完美、秩序、幸福的本原，用"2"表示与之对立的恶、缺陷、混乱、痛苦的本原. 这从一个侧面反映原始人试图用数来解释自然现象，体现一种原始的神数自然观.

毕达哥拉斯把古代的神数术加以系统化，发展成一种神秘主义的数论，赋予数以各种神秘的意义. 在毕达哥拉斯时代，寻找万物的本原是一个重要哲学问题. 他认为，水、火、土、气这些元素虽然可以解释物质事物，但不能解释像数、音乐这类抽象的思想事物. 因此，他在神数论的基础上，根据卵石组物法，猜测到事物具有量的规定性，进而把事物所具有的量看成事物的本质和原因，提出"万物皆数"的自然观. 这是哲学史上第一次用数来观察、解释万物的学说.

毕达哥拉斯的关于数是万物的本原的"数本说"，包含三方面内容：

1. 万物由数生成，或"万物皆数". 对此，公元前3世纪，古希腊哲学家第欧根尼(Diogenes，L.)有一段记载："亚历山大(Alexander，R.)在他的《哲学家的师承》中说，他在那些关于毕达哥拉斯的回忆录中发现如下一些信条：万物的本原是单子(monad)或1(unit)；由这个单子产生不定的2(dyad or two)，不定的2是从属单子的质料，单子是原因；由单子和不定的2产生出各种数目；由各种数目产生出点；由点产生出线；由线产生出平面图形；由平面图形产生出立体图形；由立体图形产生出一切可感觉的物体，产生出可感物体的四种元素：水、火、土、空气；这些元素互相交换就完全变成另一些物体，它们组合产生出有生命的、精神的、球形的世界……"

2. 数的本原是1、有限与无限、奇与偶. 他们赋予"1"各种神秘的性质，使它可以生成各种数目、各种图形、各种物体(有生命的和无生命的)，因此"1"是万物的始基(本原). 同时，"他们把数目的元素抽象成奇数与偶数，前者是有限的，后者是无限的；他们认为，1这个数目是由两个元素合成的(因为它既是奇数又是偶数)，并且由1这个数目产生出其他一切数目，整个的天都只不过是一些数目". 这就是说，数的元素是1、奇与偶、有限与无限.

3. 数与事物的关系. 毕达哥拉斯学派认为：事物就是数；事物模仿数；数是事物的形式因和质料因；数独立存在于可感事物之中.

虽然"数本说"用精神的东西来解释世界是唯心的，也为无理数的发现所动摇，但它用数表示万物的思想，在科学的数学化以及正在进行数字化革命的今天，表明其思想是深邃的.

柏拉图的数学哲学(Plato philosophy of mathematics)　古希腊的一种数学哲学观. 它主张数学观念是天赋的、先验的，它居于感性世界与理念世界之间，是人通往理念世界的必经阶段的数学哲学思想. 柏拉图(Plato)是古希腊哲学家、数学哲学家. 他先后到过麦加拉、埃及、居勒尼，结识了一些自然科学家和数学家. 后来他回到雅典创办学园(即柏拉图学园)，成为当时研究和传授哲学、数学和自然科学的中心. 公元529年，东罗马帝国皇帝下令禁止活动，学园被迫关闭，前后历经900多年.

柏拉图及其所建立的学派很重视数学. 据说，在其学园竖着一块匾额："不懂几何者，不得入内."这里说的"几何"就是指全部数学. 柏拉图的数学哲学观点主要包括数学的居间性；数学对象分离独立存在于可感事物之外；理念数论及物质元素的几何结构. 这些观点与他的理念论是相辅相成的.

1. 数学在认识论中的地位——居间性. 他在《理想国》中，提出认识的4个阶段：想象、信念、理智和理性. 想象和信念是对可见世界的实物及其影像的一种意见；理智和理性是对可知世界的知识，其研究对象分别是以实物作影像和理念. 数学的研究对象是"实物作为影像"，它的研究方法是"从假设出发"，

"由假设下降到结论".因此,数学是属于理智认识阶段,在真实方面比不上理性,所以"它比意见明确些又比知识模糊些".这表明数学是处于从感性认识过渡到理性认识的一个阶梯,一个中间阶段.柏拉图对数学知识的定位,第一次触及数学的性质问题.

2.数学对象分离独立存在于可感事物之外.这涉及抽象与具体、一般与个别的关系问题.他把一般当作单个的存在物一样真实地存在,所以数学对象分离独立存在于可感事物之外.他的学生亚里士多德(Aristotle)在《形而上学》*M* 卷对这一观点做了系统批判.

3.理念数论及物质元素的几何结构.柏拉图晚年为了克服理念论的困难,把理念论与毕达哥拉斯学派的"数本说"结合起来,提出一种不成文的学说——理念数论的自然观.在柏拉图看来,既然数等同于理念,成为万物的本原,那么作为数学的一部分的几何学的研究对象——点、线、面、体也应该成为万物的本原.因此,他便在《蒂迈欧篇》里用它们构造物质元素的几何结构,分别用角锥体、立方体、八面体和 20 面体代替构成物质世界的火、土、水、气 4 种元素;由这 4 种立方体的组合和转化,生成宇宙万物.

亚里士多德的数学哲学(Aristotle philosophy of mathematics) 古希腊的一种数学哲学观.它主张数不是事物的本原,而是存在于可感知事物中的不可感的抽象属性的数学哲学思想.亚里士多德(Aristotle)是古希腊哲学家、数学哲学家,他 18 岁到雅典入柏拉图学园学习,柏拉图(Plato)去世后离开学园.公元前 335 年在吕园另立讲坛,创立吕园学派,又称"逍遥学派".公元前 323 年,雅典发生反马其顿运动,亚里士多德被指控犯"亵渎神灵"罪,避难于卡尔基,次年病逝.

亚里士多德研究过数学,但他作为一位哲学家主要是对数学进行哲学反思.他主要通过批判毕达哥拉斯学派和柏拉图的数学哲学观点,确立自己的观点.

1.数学是理论科学.亚里士多德研究领域涉及哲学、政治学、逻辑学、数学、物理学、天文学、生物学等科学,使他成为科学史第一个分类学家.亚里士多德在《形而上学》一书中,根据科学研究目的的不同把科学分类:理论科学、实用科学和生产性科学.接着,他根据研究对象的不同进一步把理论科学划分为物理学、数学和神学(即哲学).这是第一次确立数学在科学分类中的地位.

2.数学是研究数量的科学.他认为,数学是研究存在的一部分及其属性,而对象是"静止的"、"不能独立存在"的;它"涉及可感的量,但不是作为可感的量,而是具有一定质的量".亚里士多德在《范畴篇》中把数量区分为离散的和连续的,离散的数量是数,连续的数量是量.他认为,算术是研究数及其属性(例如,奇偶性、对称、比例等)的学问,几何学是研究量及其属性(例如,对称、相交、相等、平行等)的学问,所以数学是研究数量及其性质的科学.

3.数学对象是抽象的存在.亚里士多德之前的哲学家分不清这些关系,把一般当作个别的存在物,一般像个别的具体事物一样,真实地独立存在着.这种流行的看法反映在数学哲学中,则表现为毕达哥拉斯学派关于"数学对象独立存在于可感事物之中"和柏拉图关于"数学对象独立分离地存在于可感事物之外"的观点.亚里士多德在《形而上学》一书中首先批判这些观点,并从不同角度阐明,数学对象是一种抽象的存在,是存在于可感事物中的不可感之物.他说:"可理知的物质存在于可感觉的事物之中,但不是作为可感觉的事物,即数学对象(Metaphysica)."所以数学对象是抽象地存在于可感事物之中.这一观点标志着人类在现象与具体、一般与个别的关系问题上的认识大大前进了一步.

4.数不是事物的本体而是事物的属性.无论是毕达哥拉斯学派的数本说,还是柏拉图的理念数论,实际上是主张数是万物的本原(或本体).亚里士多德在《形而上学》一书的 *N* 卷中集中批判数是事物的本体的观点,阐明数是事物的属性,即"1"不是事物的形式,而是计量的单位;"不定的 2"不是事物的质料,而是数量的属性、关系.

博伊西斯的数学哲学(Boethius philosophy of mathematics) 古罗马的一种数学哲学观.它主张数学属于思辩哲学,研究事物中不变动的形式的科学哲学思想.博伊西斯(Boethius, A. M. S.)是后期罗马的数学家、哲学家.他出身于贵族家庭,早年在雅典和亚历山大里亚等地受教育,熟谙希腊文.曾任西罗马皇帝提阿多列克的宫廷顾问.510 年任执政官,520 年升任首席执政官.522 年因被怀疑与东罗马勾结被判通敌叛国罪入狱,于 524 年被处死.

博伊西斯作为一名中世纪的数学哲学家,主要关心的数学哲学问题是一般与个别的关系问题.这是中世纪唯名论与实在论的争论在数学哲学中的表现.博伊西斯学识渊博,有大量著述和译著.他最早把亚里士多德(Aristotle)的《范畴篇》和《残篇》等译成拉丁文,并作了注释,传到西欧.他著有《论三位一体》等 5 种神学著作和《哲学的慰藉》、《波菲利〈导论〉注释》及有关算术、几何、音乐、天文"四艺"的著作.

1.关于一般与个别的关系问题.博伊西斯在《波菲利〈导论〉注释》一书中,针对新柏拉图主义的奠基人之一波菲利(Porphyre)在《亚里士多德〈范畴篇〉导论》一书中,关于一般(种、属)和个别事物的关系所提出 3 个问题(即种和属是真正存在的还是纯粹

理智的产物?如果它们是真实存在的,那么它们是有形体的还是无形体的? 它们是存在于感性事物之外的,还是存在于感性事物之内的?),根据亚里士多德的哲学观点做了回答.他认为:"种"和"属"既存在于理智之中,也存在于个别事物之中.他关于一般与个别的论述为中世纪唯名论与实在论的争论做了理论准备,也成为以后争论的焦点.

2. 数学是属于思辩哲学.博伊西斯认为,哲学可以区分为思辩哲学和实践哲学;思辩哲学又分为:自然哲学(研究存在于物质与运动中的形式);数学(研究不具有质料的不变动的形式);神学(研究存在于质料和运动之外的形式).实践哲学分为伦理学、政治学与经济学.由此可见,博伊西斯认为数学是思辩哲学,因为它是研究不具有质料的、不变动的形式科学.这与亚里士多德的分类法有些相似.

培根的数学哲学(Bacon philosophy of mathematics) 欧洲中世纪的一种数学哲学观.它肯定了数学在科学中的基础地位,强调只有数学能发现和表现真理的数学哲学思想.培根(Bacon,R.)是英格兰哲学家、基督教僧侣.他除了研究哲学和神学之外,还涉及数学、力学、化学、天文学、地理学、光学、透视学、视像成因、年表学、音乐、医学、文法、逻辑、形而上学、伦理学和神学等方面,号称"万能博士".他著有《大著作》、《小著作》、《第三著作》及《哲学研究纲要》等,但只有《大著作》完好地保存下来.

培根主要关心数学哲学中的数学的科学地位、证明与经验的关系等问题,这与中世纪的哲学状况和数学状况是相联系的.

1. 占星学是数学的一个学科.占星学是中世纪数学的一个分支.它包含着许多迷信、巫术的非科学成分,成为当时占卜吉凶祸福的工具,为王公大人的决策提供"理论根据".同时,有人以占星学不科学为借口,把真正的数学内容也给否定了.培根通过区分占星学中真正的数学和虚伪的数学(即魔术的数学)来排除其中的非科学成分.他认为:"天体是一切变化的第一个本原,是世界上物质的原动力";占星术和天文学是研究"天空怎样改变物的",是数学的分支;它们与魔术毫无相同之处.占星术的材料是在经验基础上获得的,并被证实的,它与任意的象征主义和神秘主义毫无共通之处,而是与数学的实验相联系的,所以占星术是属于数学的一个特殊的学科.

2. 数学是科学的基础.培根认为,数学"是其他科学的大门和钥匙",是科学的基础.因为数学是数量的科学,而量是一个基本范畴,其他范畴如时间、地点、质,都要求表现其中的量的关系;构成物体的要素多少及其比例决定着物体的特性,所以量是物体特性的基础.因此,他认为:只有数学能发现和表现可靠的和没有错误的真理,其他科学的真实性决定于能否以数量形式来表现,所以其他科学的可靠性是以数学为基础的.他还认为:"数学具有(论证)包罗万象的经验(方法)……这些经验适用于所有科学……(而)任何一门(科学)要了解这些经验都离不开数学",而且"我们在数学中能够达到没有错误的完全真理,以及在各方面都无可置疑的确信".

3. 数学是天赋的,但其对象是感觉的复合.培根在与数学有关的透视学部分,把感觉对象分成两个层次 29 个感觉要素,即简单层次(每一个感官单独感觉,即"专门感觉")和复合层次(专门感觉的复合,即"一般感觉").人们可以根据感觉材料判断事物的性质、状态和关系.例如,从数量的连续性与单独性的感觉可以判断事物的多少,从形状的感觉可以判断事物的曲、直、凹、凸.这就是说,数学对象是感觉的复合.但他又认为,数学知识是天赋的,它产生于其他科学知识之前,并引起人们对其他科学的知觉.他说:"对数学真理的理解是天赋的",苏格拉底(Socrates)使儿童回忆数学定理的事实,说明数学知识的先天性.

4. 证明与经验的关系.培根曾做过许多实验,深感实验对于科学的重要性.他是第一个提出"实验科学"概念的人,他强调经验比推理更重要.他说:"获得认识有两种方法,即通过推理和通过经验.推理作出一个结论,并使我们承认这个结论,但并没有使这个结论确实可靠.它也没有消除怀疑,使心灵可以安于对真理的直观,除非心灵通过经验的方法发现了它;人们对于被认识的有许多论证,但是因为他们缺乏经验,便忽视这些论证,因此既不知道避害也不知道就利."不过,他所说的经验不同于人们所理解的经验.培根把经验区分为外部的和内部的.内部经验是"人通过内在启发的经验从上帝那里得到了一种理解能力来认识恩赐和荣誉的神圣真理";外部经验是"被感性经验所唤醒的人找到了自然和艺术的秘密原因(因果的解释)".这表明他的经验论倾向带有神秘主义色彩.

笛卡儿的数学哲学(Descartes philosophy of mathematics) 近代欧洲的一种数学哲学观.它主张自然界是按照数学设计的,数学是一门理性的演绎科学的唯理论数学哲学思想.笛卡儿(Descartes,R.)是法国哲学家、数学家.在哲学上他是二元论和唯理论者,西方近代哲学的创始人之一.笛卡儿的研究领域涉及哲学、数学、法学、医学、力学、光学、天文学等学科.他著有:《指导心智的规则》(写于 1628 年,1701 年出版,汉译为《探求真理的指导原则》)、《论方法》(1637 年)、《形而上学的沉思》(1641 年,汉译《第一哲学沉思集》)、《哲学原理》(1644 年)等著作.

文艺复兴时期,希腊著作大量传入西欧,并直接

译成拉丁文，改变了人们对权威的信仰，转向探讨大自然，强调人的理性和个人自由，为资本主义的产生做了思想准备. 资本主义生产的发展促进科学技术和数学的发展，特别是微积分和解析几何的创立标志着数学的革命. 自然科学和数学的发展，使人们进一步怀疑教会关于知识来源于权威、信仰的理论，认识到知识来源于对自然的观察和实验. 因此，产生了英国哲学家培根(Bacon，R.)和洛克(Locke，J.)的唯物主义经验论. 另一方面，随着希腊文化的传入，毕达哥拉斯(Pythagoras)的“万物皆数”和古希腊数学家、哲学家柏拉图(Plato)关于宇宙的几何结构的思想，为欧洲人所接受，形成了关于自然界是按照数学设计的思想. 人们在寻找知识是新的、牢固的基础时，“数学是惟一被大家公认的真理体系. 数学知识是确定无疑的，它给人们在沼泽地上提供了一个稳妥的立足点；人们又把寻求真理的努力引向数学”. 这样就出现以数学作为知识可靠性典范的笛卡儿和莱布尼茨(Leibniz，G. W.)的唯心主义唯理论. 其后，康德(Kant，I.)通过调和经验论和唯理论而提出数学是先天综合判断知识.

在笛卡儿时代，经验哲学虽然走向衰亡，但还具有相当影响；科学技术虽然开始奠定在实验基础上，但还存在着可疑或不确实，只有数学知识是明白而确切的. 笛卡儿正是根据数学研究的特点建立起唯理论，同时也阐述了他的数学哲学观点：数学是一门理性的演绎科学. 他的这一观点是通过论述经验、直觉、演绎及其关系来表达的. 他认为，认识真理有两条途径：经验和演绎. 但经验是不可靠的，往往使人受骗上当，而演绎推理是绝不可能产生谬误的，所以“只有算术和几何完完全全是理性演绎而得到的结论”. 理性演绎法主要是应用逻辑规则，但逻辑只能用于说明已知事物，不能用来求知事物. 理性演绎的前提是直觉. 在直觉、演绎及其关系上，他认为，直觉和演绎是人们认识事物不犯错误的两种悟性，是“获得真知的最确实可靠的途径”. 他所说的直觉是指“心灵的构想”. 他说：“我用直观一词，指的不是感觉的易变表象，也不是进行虚假组合的想象所产生的错误判断，而是纯净而专注的心灵的构想，这种构想容易而且独特，使我们不致对我们所领悟的事物产生任何怀疑；……”“演绎的方法，我们指的是从某些已经确知的事物中必定推演出的一切. ”直觉与演绎的区别在于，演绎中的前后相继关系与直觉中的明显可见性. 作为推理前提的起始原理是通过直觉得知的，而推论是通过演绎而获得的. 为什么直觉所获得的起始原理是可靠的呢？笛卡儿认为，存在三种观念：天赋的、外来的和虚构. 天赋观念是与生俱来的，是可靠的. 人具有直觉领会真理的能力，这种能力是人的本性，“因为我们所有的一切都从上帝而来”. 这是笛卡儿天赋观念在数学哲学中的表现.

莱布尼茨的数学哲学(Leibniz philosophy of mathematics)　近代欧洲的一种数学哲学观. 它主张数学知识是先验的，是一种依据矛盾原则而演绎出来的必然真理的唯理论数学哲学思想. 莱布尼茨(Leibniz，G. W.)是德国数学家、哲学家、客观唯心主义和唯理论者，数理逻辑的创始人、微积分的创立者. 他著有：《神正论》、《人类理智新论》、《单子论》、《自然与神恩的原则》等.

数学在莱布尼茨建立客观唯心主义哲学中起着重要作用. 他说，当他由《圣经》、神学和法律的研究转向数学之后，“仿佛为峭壁上海妖的诱人余音所吸引”，并且充满了希望，“倘若我们能找到一些字或符号适宜于表述我们的全部思想，像算术表明数字或几何学的分析表明线那样明确和正确的话，我们就能在一切科目中，在它们符合推理的范围内，完成像在算术和几何学中所完成的东西”. 另一方面，他通过批判洛克(Locke，J.)的唯物主义经验论来建立唯理论，同时阐述他的数学观.

1. 数学知识的先验性. 莱布尼茨首先从他的天赋观念出发，否定知识来源于感性经验. 他认为，感觉对于人们的一切现实认识虽然是必要的，但是不足以向人们提供全部知识，因为感觉永远只能给人们提供一些例子，也就是特殊的或个别的真理. 然而印证一个一般真理的全部例子，不管数目怎样多，也不足以建立这个真理的普遍必然性，因为不能提出结论说过去发生过的事情，将来也永远会同样发生. 接着，他说明数学知识是天赋的. 他说，全部算术和全部几何学都是天赋的和以潜在的方式存在人们心中的……而无须乎利用任何凭经验或凭旁人的传统学到的真理.

2. 数学知识是必然真理. 莱布尼茨认为：“有两种真理：推理的真理和事实的真理. ”与此相应的有两种推理原则：矛盾原则和充足理由原则. 数学的推理原则是矛盾原则，因此，它所获得的真理就是必然真理. 他说：“数学的伟大基础是矛盾原则或同一原则. ……只要这一条原则，就足够证明全部算术和全部几何学，即全部数学原理了. ”数学家用分析的方法把推理的根据归结为少数的原始的定义、公理和公设，而它们的真理性是由上帝保证的. “必然真理是天赋的，并且是靠内在的东西来证明的，而不能是像我们建立事实真理那样靠经验来建立的”.

康德的数学哲学(Kant philosophy of mathematics)　近代欧洲的一种数学哲学观. 它主张数学是先天综合判断，因而数学知识具有可靠性和客观实在性的数学哲学思想. 康德(Kant，I.)是德国哲学家、数学哲学家，德国古典哲学的奠基人，是近代西方哲学史上的二元论、先验论和不可知论的代表. 他

著有:《纯粹理性批判》、《实践理性批判》、《判断力批判》、《未来形而上学导论》、《道德形而上学探本》、《自然通史和天体论》(中译本名为《宇宙发展史概论》)等.

康德认为,唯理论者把先天综合判断误认为是分析判断,经验论者则把一些先天综合判断视为单纯来自经验的综合判断.因此,他一方面肯定认识是从感觉经验开始的,但他又不赞成洛克(Locke,J.)的白板说;另一方面他认为,唯理论只看到数学应用矛盾律,没有看到它们还需要另一些推理原则.康德把这两种观点调和起来,提出先验论哲学,这种观点在数学哲学中的反映就是"数学知识是先天综合判断".

1.数学是综合判断.康德把判断分为"解释性的"、没有增加知识内容的分析判断与"扩展性的"、增加已有知识的综合判断.它们所遵循的原理也有别:"一切分析判断的共同原理是矛盾律",而"综合判断除了矛盾律外,还要求另外一种原理".所以,"数学判断全都是综合判断",因为一个综合判断固然要根据矛盾律才能理解,但是必须有另外一个综合命题作为前提,由那个命题才能推出这个命题来,而永远不能只通过这个定律本身来理解.但唯理论者看到数学家的推论都是按照矛盾律进行的,就以为数学的基本原理也是通过矛盾律来认识的,这是非常错误的.

2.数学判断是先天的判断.在综合判断里,康德区分了"来自经验的"后天的综合判断和"来自纯粹理智和纯粹理性的"先天的综合判断.为了与经验论者划清界线,他指出,"真正的数学命题永远不是经验的判断,而是先天的判断,因为带有必然性,这种必然性不是从经验中所得到的"."数学判断是先天的"这一命题涉及康德的"纯粹直观".他认为,认识经历三个阶段:感性、知性和理性.感性是人接受对象表象的能力,对象通过感性而产生直观,直观经过知性(悟性)的思维而产生概念,理性则是最高一级的综合能力.经验的直观只涉及现象的质料,而现象是杂多的,因此必然存在一个杂多现象的"整理者"或"现象之方式".它先于现象而存在于心中,是感性直观的的纯粹方式,此即纯粹的直观或先天的直观.因此,纯粹直观是先天的知识原理,是现象的整理者,又是接受现象的先天框架或模式.接着,康德对先天直观的感性形成做了具体解释.他说:"这样的直观就是空间和时间",即空间和时间是先天直观的两种形式,所以"纯粹直观"是数学知识如何可能的"第一的、最高的条件".

3.数学知识的可靠性和客观实在性.康德认为,"纯直观,作为先天直观,在一切经验或个别知觉之先就已经同概念不可分割地结合在一起了",所以数学作为"先天综合判断是可靠的".数学具有客观实在性是,因为"纯粹数学,特别是纯粹几何学,只有在涉及感官对象的条件下才有其客观实在性.……因此几何学命题不是纯粹由我们幻想出来的一种产物的什么规定,因而不能可靠地涉及实在的对象.纯粹数学对于空间必然有效,从而对于空间里所有的东西也都是必然有效的命题".

弗雷格的数学哲学(Frege philosophy of mathematics) 近现代欧洲的一种数学哲学观.它主张整个数学是一个通过逻辑推理而获得的真命题理论系统的逻辑主义哲学思想.弗雷格(Frege,(F.L.)G.)是德国哲学家、数学家、数理逻辑学家、数学哲学家.按照一般数学史的分期,他所处的时代是现代数学时代.但是,从数学哲学发展来看,他是处于数学哲学从哲学分化出来的前夜,弗雷格是近代数学哲学与现代数学哲学的承上启下的重要人物.

弗雷格主要致力于逻辑理论、数学基础和数学哲学研究.主要著作有:《概念文字》(1879)、《算术基础》(1884)、《算术的基本规律》(卷Ⅰ,1893年;卷Ⅱ,1903年).他在后两部著作中从逻辑出发定义了数和自然数,进而从逻辑规律推导出一系列算术原理.认为算术命题是分析命题,被认为是逻辑主义的创造人.

1.算术是分析命题.数学分析算术化的结果之一是佩亚诺(Peano,G.)于1889年用一组公理建立整数理论.弗雷格作为一个哲学家看到数学已经算术化了,可以把算术进一步归结为逻辑.为此,他首先通过批判康德(Kant,I.)关于算术是先验综合的观点,说明算术定律是分析的,而不是先天综合的.接着,他通过解决关系概念是属于纯逻辑的;把一一对应关系化归为纯逻辑;数学归纳法是逻辑的规律这三个问题,具体说明"算术定律是分析判断,因而是先验的".

2.数学是一个真命题系统.弗雷格起初接受康德的几何观点,但随着几何的公理化,特别是罗素(Russell,B.A.W.)和怀特海(Whitehead,A.N.)《数学原理》一书的发表,他在1914年发表《数学中的逻辑》一文中认为,整个数学都是一个真命题系统.他说:"数学比其他科学与逻辑的联系更为密切.因为数学家的全部活动几乎都是进行推理."当我们追溯定理的前提时,就会遇到公理(或公设)或定义,它们是一些原始真命题."整个数学包含在这些原始真命题中,如同包含在一个胚胎中一样.在这种情况下,重要的仅在于数学要从这个胚胎中发展起来.数学的本质必然由这种胚胎决定……如果人们假定终于发现了那些真命题,并且数学由之发展起来,那么数学就表现为一个通过逻辑推理而相互联结的真命题系统".

3. 数学不是现实的，而是客观的. 弗雷格认为，数不是现实的. 他说："有穷数不是感官可感觉的和空间的，分数、负数、无理数和复数也不是；而且，如果人们把对感官起作用的或者至少对感官知觉有影响从而产生或远或近结果的叫作现实的，那么这些数当然都不是现实的"，尽管数不是现实的，但它并不是主观的. 他说："数既不像密尔(Mill，J. S.)的小石子堆和姜汁糕点那样是空间的和物理的，也不像表象那样是主观的，而是不可感觉的和客观的."数的客观性也就决定了数学定理的客观性."实际上，一条定理的真确实不能依赖于我们的行为，它完全独立于我们而存在".

逻辑主义学派的数学哲学(logicism in philosophy of mathematics)　现代西方的一种数学哲学观. 它是一种力图把数学归结为逻辑演算，从而排除数学中的悖论的一种数学哲学思想. 逻辑主义学派的主要代表人物是罗素(Russell，B. A. W.). 逻辑主义在数学与逻辑学的关系上认为，数学是逻辑学的延伸. 用罗素的话说：数学和逻辑确实是一门学科，"它们的不同就像儿童与成人的不同，逻辑是数学的少年时代，数学是逻辑的成人时代"."逻辑主义的论题是，数学可以还原为逻辑学". 或者说，数学概念可以通过显定义而从逻辑概念推导出来；数学定理可以通过纯粹的逻辑演绎而从逻辑公理推导出来. 这样，只要不出现逻辑矛盾，就可以保证数学的可靠性和真理性.

罗素为了实现其逻辑主义纲领，他与怀特海(Whitehead，A. N.)合著3卷本《数学原理》(1910—1913)，以便向人们表明，数学确实可以从逻辑推导出来. 但是，事实表明，逻辑主义并没有，也不可能真正从纯逻辑推导出数学. 因为它除了逻辑公理以外，还需要无穷公理和选择公理或乘法公理，同时，在罗素的类型论中涉及可化归性公理问题. 罗素最后不得不承认逻辑主义失败了. 但《数学原理》一书代表了自莱布尼茨(Leibniz，G. W.)以来，逻辑和数学基础理论研究中的一个高峰，成了20世纪逻辑学发展的一个起点.

在数学本体论问题上，逻辑主义学派经历了由实在论观点向唯名论或概念论观点的转变. 早期的逻辑主义者弗雷格(Frege，(F. L.)G.)持有数学柏拉图主义的实在论观点. 罗素则转向唯名论观点. 他认为集合、类、数等都不是真实的存在，而只是一种为了说话方便而引进的概念，是一种逻辑的虚构. 罗素致力于把数学归结为逻辑，其目的之一就是要消除不必要的关于数学对象存在性的假设. 维特根斯坦(Wittgenstein，L. J. J.)在其学术生涯后期进一步发挥了罗素的观点，认为数学对象并非不依赖于思维的独立存在，而只是数学家创造性思维的产物. 数学中词语的意义只在于其用法，这种用法主要指数学中的证明和计算. 由于数学对象的构造即指相应词语在特定环境中的用法，因而数学概念是可变的，不确定的. 他用这一点来解释数学发展中逻辑上的某些不协调现象，同时作为否定数学对象客观性的根据. 罗素和维特根斯坦等人的观点实际上否定了讨论数学本体论问题的必要性，而这种观点在逻辑主义学派自己的数理逻辑研究中就受到挫折. 由于把数学归结为逻辑的过程中不得不借助无穷公理，而无穷公理包含本体论的承诺，因而罗素等人的主张无法贯彻到底.

在数学认识论问题，逻辑主义学派认为数学真理和逻辑真理都具有先验性，数学命题与经验事实无关，它不表示任何思想，本身不描写世界. 数学命题是必然真的，人们在选择它时就不容许它有假的可能性. 逻辑主义学派的这种观点产生的思想根源，是由于只注重经过严格逻辑整理后的数学成果，而忽视了数学认识活动的过程.

罗素的数学哲学(Russell philosophy of mathematies)　见"逻辑主义学派的数学哲学".

直觉主义学派的数学哲学(Intuitionism in philosophy of mathematics)　现代西方的一种数学哲学观. 它是一种主张哲学的本原只与心智的构造有关的数学哲学思想. 直觉主义的代表人物是荷兰数学家、数学哲学家布劳威尔(Brouwer，L. E. J.). 他从1907年的博士论文《数学基础》起，陆续发表文章《逻辑原则的不可靠性》(1908年)、《几何学的性质》(1909年)、《直觉主义和形式主义》(1912年)等一系列论文阐述直觉主义观点.

布劳威尔反对康德(Kant，I.)关于欧氏几何是先天综合判断的观点，而肯定康德关于算术是建立在对时间的先天直觉形式基础上的观点. 他认为，数学是根据对时间直觉的构造，它不依赖于经验. 他说："数学完全独立于物质世界是对的，而数学的存在意味着直觉的构造."基于这一观点，直觉主义反对非构造性的存在证明，这就导致他们反对使用反证法和排中律. 因为排中律是从有限集合抽象出来的，人们把它应用到无穷集合，所以才受到悖论的惩罚，因为在无穷的情况下存在着不可判定问题.

直觉主义重新构造的数学，因为排除了古典数学的大部分内容而遭到数学界的反对，同时它所构造的数学也并非可靠. 1932年，哥德尔(Gödel，K.)发现古典数论在直觉主义数论中的解释. 这一事实说明，如果古典数论出现矛盾的定理，那么它在直觉主义数论中的解释也将是矛盾的. 直觉主义强调数学的可构造性，对数学的限制太大，它否定了相当一部分古典数学，不利于数学的发展. 但它对能行性问题的重视，其结果是开辟了数理逻辑的一个新领域

——能行性问题研究,促进了构造性数学的发展,同时,对于计算机科学的发展也具有重要意义.

在数学本体论问题上,直觉主义者否认超验的数学对象的存在,认为数学是一种智力的自然功能,是一种自由的、生气勃勃的思维活动.数学的“存在”同“可构造性”密切相关,数学构造是最基本的思维运算.直觉主义的观点基本上是一种概念论,即承认存在抽象的数学实体,但这仅就这些实体由人类思维活动所创造而言.数学对象不具备不依赖于认识主体的客观性,直觉主义不把数学对象看成逻辑构造或词语规则关系,而是把逻辑归结为数学,认为数学语言只是数学思想交流的不完善的工具.直觉主义强调数学直觉只起到沟通认识主体同被构造出来的数学对象之间联系的作用,与客观世界无关.

在数学认识论问题上,直觉主义完全否定数学真理的客观性,认为“数学思维的特点并不是传达外部世界的真理,它只与心智的构造有关,数学只是研究人类心智的某些机能”.直觉主义过于强调数学思维活动的纯粹主体性,所以很难说明数学真理的普遍性和必然性.因为找不到什么根据,能使个人的纯粹心智构造,通过不完善的语言交流,获得一种普遍的必然的数学成果.这是直觉主义哲学观难以逾越的理论障碍.

布劳威尔的数学哲学(Brouwer in philosophy of mathematics) 见“直觉主义学派的数学哲学”.

希尔伯特的数学哲学(Hilbert philosophy of mathematics) 现代西方的一种数学哲学观.它是一种主张数学思维的对象就是数学符号本身,其蕴含的直观含义不属于数学,但数学同其他直观科学的联系却关系到数学的生命的数学哲学思想.希尔伯特(Hilbert,D.)是德国数学家与数学哲学家.他是20世纪最伟大的数学家之一,是许多数学领域的开拓者和带头人.

在数学哲学领域,希尔伯特反对直觉主义否定排中律、否定非构造性方法、抛弃大部分古典数学和康托尔超穷数理论的做法.他针对直觉主义否定排中律说:“禁止数学家使用排中律,就像禁止天文学家使用望远镜和拳击家使用拳头一样.”他认为,分析数学是一首“无穷的交响乐”,所以不能否定实无穷.他根据1900年自己关于证明算术公理的相容性思想,力图通过形式化方法把具有直觉内容的公理系统变成没有内容的形式系统,然后应用有穷方法直接研究形式系统的相容性,从而保证它的模型——原先的数学理论的相容性.这就是著名的希尔伯特计划.

希尔伯特计划证明了命题演算、一阶谓词演算和只含加法的算术的无矛盾性.但是,1931年,哥德尔(Gödel,K.)证明了著名的哥德尔不完全性定理,宣告希尔伯特计划无法实现最终目标.但他所建立起来的证明论或元数学,后来发展成为数理逻辑的一个重要分支.他关于数学形式化的思想,也被鲁宾孙(Robinson,A.)和科恩(Cohen,P.J.)等人发展为数学哲学的一个派别——形式主义.

希尔伯特曾被一些人认为是形式主义学派的代表人物.实际上他的观点同形式主义学派有一些重要区别.形式主义学派的研究方向是由希尔伯特开拓的,但希尔伯特着重从形式主义角度对数理逻辑和数学基础问题进行研究,而在数学认识论和方法论上并不完全持形式主义观点.他认为数学思维的对象就是数学符号本身,符号就是本质,它们并不代表理想的物理对象.公式可能蕴涵着直观上有意义的叙述,但是这些含义不属于数学.在这个意义上,希尔伯特同逻辑主义、直觉主义学派一样拒斥“形而上学”,即回避数学本体论问题.但是,希尔伯特强调数学形式符号同其思想内容的联系,坚决反对把形式化成果看作绝主观的产物.他多次批评片面的形式主义倾向,他针对那种认为形式化仅仅是搞公式游戏的观点反驳说:“这种公式游戏是根据某些确定的、反映我们的思维技术的法则进行的.这些法则形成一个能够被发现并加以确切陈述的封闭系统.”从数学发展的整体上看,希尔伯特十分强调理论与实践、思维与经验的相互作用,认为几何学和数学物理关系到数学的生命,这种观点贯穿于他对变分法、积分方程和物理学问题的研究之中.在数学方法上,希尔伯特注重数学问题在数学发展中的作用,注重纯粹数学与应用数学的联系,强调数学科学是一个不可分割的有机整体,它的生命力正是在于各个部分之间的联系.他讨论了一般化与特殊化、证明的严格化与简单化、推理与直觉、几何与算术思维的一致性、数学中的逆向思维等方面问题,其中充满对数学中的辩证思维的深刻理解.

形式主义学派的数学哲学(formalism in philosophy of mathematics) 现代西方的一种数学哲学观.它是一种主张数学是关于形式系统的科学,数学的存在即无矛盾的数学哲学思想.在数学哲学研究中,自称形式主义的有克里(Curry,H.)、鲁宾孙(Robinson,A.)等.他们把数学定义为关于形式系统的科学.

在数学本体论问题上,形式主义学派认为数学对象是一堆毫无实际内容的形式符号体系.不管从什么假设出发,只要这些假设能以符号形式明显地表示,用形式的演绎来推理,就成为数学.形式主义学派完全否定了讨论数学本体论问题的必要性,更不承认数学对象有任何客观意义.

在数学认识论问题上,形式主义学派认为数学体系无真理性可言,只能考虑其可接受性问题.形式

主义学派把数学认识活动完全限于认识主体自身范围内，认为数学发展的主要动力是内在的原因，也就是对于要解决的问题本身的深入思考，而问题的来源如何关系不大. 形式主义学派并不赞成毫无根据的抽象和形式化公理化，而是要求解决问题，富有成果，但其所指问题绝大部分是数学自身问题. 因此，形式主义学派对数学发展中经验和应用的启示不屑一顾. 有的形式主义者甚至主张在数学教育中也无须引入直觉、经验和应用因素，只要把形式化的数学结构体系直接灌输给学生就可以了.

现代数学柏拉图主义(modorn Platoism in mathematics) 现代西方数学哲学观之一. 现代数学家中接受并发展了柏拉图学说若干基本原则的思想派别，其代表人物主要为美籍奥地利数学家哥德尔(Gödel, K.)、伯奈斯(Bernays, P. I.)、汤姆(Thom, R.)等人. 现代数学柏拉图主义认为，数学对象是一些理想化的结构，这些结构独立于思考它们的人脑之外而存在. 这种存在是客观实在的一个方面. 人们能够不断发现新的数学对象，但不能随意发明它们. 数学真理也具有客观性，人们对数学真理的认识总是不完全的. 任何数学命题都应有客观的真假标准. 虽然连续统假设和选择公理已被证明对于 *ZF* 系统具有独立性，它们仍然应有真假之分. 现代数学柏拉图主义反对用各种人为标准取代数学真理的客观标准.

数学经验主义(empiricism in mathematics) 现代西方数学哲学观之一，它是以强调经验因素在数学发展中的作用为特征的一个数学哲学派别. 数学经验主义在古代就有思想萌芽，亚里士多德(Aristotle)及其门徒认为，数学的抽象概念来自具体事物的属性. 数学概念虽然不是感性经验的直接对象，但也不应与感性经验和常识相矛盾. 亚里士多德从常识和经验的角度，否定实无限和不可分量的存在，主张无限数量关系只是潜在地存在着. 在近代数学中，很多数学家主要不是从感性直观和常识角度来理解“经验”，而是把实际应用的成功看作最主要的经验证明. 在近代数学发展末期，一些数学家和物理学家把实用的或应用的几何学看作是一门经验科学，实质上以经验归纳为依据，只能用经验来检验.

现代的比较系统的数学经验主义是 20 世纪 30 年代后，才充分发展起来的. 其代表人物主要有英国的拉卡托斯(Lakatos, I.)、卡尔马(Kalmár, L.)、莱曼(Lehman, H.)和美国的赫什(Hersh, R.)等人. 现代的数学经验主义认为，数学对象是根据经验创造出来的，一旦产生就具有完全确定的客观性质. 数学实在必须通过经验的途径加以认识. 这里所说的“经验”，既包括自然科学的实验，又包括数学认识活动中的经验. 两者都是人类的实践活动. “经验”应同“感觉”加以区分. 现代数学中很多成果是同直观感觉相矛盾的. 但这些成果只要在数学其他领域和自然科学中得到成功应用，仍可认为是得到了经验证实.

在经验与理论的关系上，现代的数学经验主义只相信经验事实的可靠性，而把理论看成是用来协调经验的合理的假设，认为数学并不是绝对严格、精确和可靠的，人们只能满足于现有的经验证实和应用的成果，无法相信关于它的真实性的任何保证会不出问题. 现代数学经验主义提出了新的数学理论演化模式，这就是通过批判和反驳不断修改作为理论体系出发点的合理假设，即基本概念和公理，用这种方法增加假设的真实程度. 批判和反驳的根据是经验事实，即观察和实验结果. 通过检验和反驳的渠道可以把真值传递给演绎出发点，以克服原有假设的错误和片面性. 这种理论演化模式能较好地说明数学历史发展中的大部分事实，但由于过分强调数学知识的猜测性、易谬性和相对性，否定绝对真理的存在，也表现出一定程度的相对主义倾向.

拉卡托斯的数学哲学思想(Lakatos philosophy of mathematics) 现代欧洲数学哲学观点之一. 它主张数学本性兼有经验因素与理性因素，是拟经验的数学哲学思想. 拉卡托斯(Lakatos, I.)是英国科学哲学家与数学哲学家. 他在回答“数学的本质是经验的还是先验的”这个问题时，采取了不同于以往的数学哲学家观点的机智的态度. 提出了“数学是拟经验的”这一崭新的数学哲学观点. 这种观点认为，一方面数学来源于生活经验，一些基本数学观念导源于实物形态与实物数量，算术与几何概念起源于现实生活中的计算、分类与测量等活动，另一方面数学有较强的演绎性、抽象性与先验性. 因此，数学的本性既不是纯理性的，也不是纯经验的，而是兼有经验因素与理性因素，是“拟经验的”.

19 世纪以前，经验主义数学哲学观点十分盛行，这种观点认为，数学的真理性是被说明的，而这种说明又是通过“归纳法”建筑在“经验”的基础上. 19 世纪非欧几何等纯数学的发展使数学越来越远离经验主义的轨道. 20 世纪初，逻辑主义、形式主义和直觉主义这三大数学哲学流派实际上也都否定了数学的经验基础. 在这一背景下，拉卡托斯认为：“作为一个整体，按欧几里得方式重组数学也许是不可能的；至少最有意义的数学理论像自然科学理论一样是拟经验的. 欧几里得主义在它的真正堡垒中遭到失败了. ”他的《无限回归和数学基础》、《经验主义在最近数学哲学中的复兴》以及《证明与反驳》等论文和著作紧紧围绕这一观点进行论证.

拟经验主义的数学理论，其特点在于它的猜测

性和可证伪性. 笛卡儿(Descartes, R.)和欧拉(Euler, L.)关于多面体的猜想,希尔伯特(Hilbert, D.)的"元数学"理论是一种大胆的猜测,企图证实数学理论真理性努力的失败导致了数学上"可证伪性"解释.

数学是作为最后手段的一种自然科学,数学的概念和方法都是扎根于经验之中,不考虑数学起源于自然科学而试图建立数学基础是注定要失败的. 那么把数学还原为逻辑学,以为这样就可以使数学建立在某种新的牢固的基础上,也是不可能的,数学没有绝对可靠性而只有猜测性. 这种拟经验系统不可能通过逻辑重组成为欧几里得系统. 这种系统里,某个定理真,甚至整个基本语句集真,并不能反过来保证公理集真;但是一个定理假,则可以肯定公理集也有假,因此在这种系统中是谬误从基本语句向公理集再传递. 他认为拟经验系统的理论是不能被"证明"而只能被"说明"的. 它的发展模式是:起源于经验的一种猜想,经过理论证明,然后再经过反思,即经过证伪,达到接近真理的结果. 数学真理永远也不可能是绝对真理. 拉卡托斯与莱曼(Lehman, H.)和卡尔马(Kalmár, L.)这些正宗的经验主义者不同,他是一个"准"经验主义者,他想在逻辑主义和形式主义所要建立的"数学是必然真理"大厦的废墟旁,盖一座"拟经验主义"的大厦.

数学发展的历史已经充分地证明了它所叙述的"真理"所具有的"相对性"意义. 在公理化集合论上展开的已知数学理论研究成果、在一定范围内用构造性数学代替非构造性数学、借助超穷归纳法证明形式化算术系统的无矛盾性,哥德尔(Gödel, K.)提出的应把启发式证伪者的范围从有限的数字方程扩大到具有量词的语句,并且把确定它们真理性的证明范围从"有限的"证明扩大到一类更广泛的方法,这些都说明了过去理论的"相对真理性"已为现在所证明的"相对真理"所代替. 总之,拉卡托斯的数学哲学思想是整个数学思想史上一个极重要的里程碑,它至今还影响着数学和数学思想的发展.

数学约定主义(conventionalism in mathematics) 现代欧洲数学哲学观之一. 它是以强调数学知识的约定性质为特征的一个数学哲学派别. 代表人物是法国数学家、哲学家庞加莱(Poincaré, (J.-)H.). 约定主义主要体现在对几何公理的认识上. 庞加莱认为,几何公理实质上是一种人为的"约定",这些约定并不能说明哪一种几何为最真实,而是使人们知道哪一种为最便利. 几何对象和公理是发明创造的产物,但它们不是随意发明的,而是要受经验的引导和限制. 几何公理的自由约定的性质,并不意味着"任意性". 约定主义不考虑几何对象是否客观存在,只要求它的定义本身与先前认可的命题都不发生矛盾.

庞加莱的数学哲学思想(Poincaré philosophy of mathematics) 现代欧洲数学哲学观之一. 它主张数学的本质是人类有益的、方便的、公约的数学哲学思想. 庞加莱(Poincaré, (J.-)H.)是法国数学家、法国科学院院士,他的研究涉及到数论、代数学、几何学、拓扑学等许多领域. 1883 年,庞加莱提出了一般的单值化定理,进而研究了一般解析论、整函数的亏格、多复变函数论、组合拓扑学等. 他的主要著作有《天体力学的新方法》、《有理数域上的代数几何学》、《科学与假设》、《科学的价值》、《科学与方法》等,还有论文 500 余篇.

庞加莱的数学哲学思想受康德(Kant, I.)影响较大,他是约定主义的代表人物. 他认为基本的科学程序是对独立于我们和我们认识的宇宙普遍秩序的信念,这种信念把科学与数学区分开来. 数学能够完成某种预定的人类操作,而科学的目的是发现尽可能多的宇宙秩序,这就是约定主义的基本思想. 科学中所说的发现就是把观察到的事实加以推广而进行的归纳法. 科学家常常受到关于宇宙是什么这一无偏见的好奇心的驱动,使他们选择那些具有最大复现机遇的事实. 根据概率论,少数几个构成要素一起出现的机遇要比许多要素一起出现的机遇多些;或者说,熟悉的事实看起来好像更可能比不熟悉的事实简单.

庞加莱经常把物理学和纯数学加以比较,并说它们的发现方法是类似的. 庞加莱认为,在科学中,人们在实验数学推理、约定和假设之间做出区分. 而在物理学中,人们常常把约定的元素错认为在实验上可以是被检验的结果. 尽管牛顿定律有其坚定的实验基础,但实验却不能在普遍的意义上使它们无效. 在这种意义上,它们被看作是定义的或约定的更为合理. 人们知道:每一个命题都可以用无限多的方式加以推广. 而人们承认牛顿定理的真理性是因为它们最简单、最普遍、最为人熟悉,或者可以看作概率系数最大. 人们的目的是把复杂的事物分解为基元的事物,因为可观察的现象可以用这种方法来分析,并可以看作是大量相互类似的基元的结果,所以可以用微分方程来精确地描述它们,这就是为什么科学能借助数学的帮助而迅速地发展的原因. 但是,庞加莱并不是把全部的科学都看成是约定的,牛顿定律可以看成是约定的,但经验定律却不是约定的,例如"$PV=R$"对理想气体是严格地成立,对实际气体却是近似地成立.

庞加莱通过数学思考,特别是几何学的思考,得出了关于科学定律和理论的本性的结论,他认为,几何学的公理既非先验综合的判断,也非经验的事实,而是一些有利于人类的公约. 换句话说,几何学的公

理，不是真实的，而是有益的、方便的，是经过伪装的定义. 欧几里得第五公设不能从他的公理中推出，就是因为过分依赖公理的失败，罗巴切夫斯基(Лобачевский，Н. И.)和黎曼(Riemann，(G. F.)B.)的工作开创了新局面，他们从否定平行公设出发去发展一种首尾一贯的几何学系统，这可以看作是人们对构造没有公设的几何学可能性发生了怀疑. 假使人们提出思考按照某种非欧几何整理的感觉，那么人们就有理由说，几何学是物理空间的真实描述. 人们的思想把几何学强加于了这个世界.

数学实用主义(pragmaticiism in mathematics) 现代欧洲数学哲学观之一. 它的代表人物是美国科学哲学家奎因(Quine，W. V. O.). 数学实用主义是逻辑实用主义在数学领域的具体表现. 数学实用主义认为科学知识是一个整体，数学和逻辑处于这个整体的中心. 经验的冲击造成科学知识整体的内部调整，包括数学在内的任何陈述都不能免于修改. 因而，判断一条陈述的真假，只有采用实用的标准. 这种观点实际上取消了数学真理的客观性. 按照数学实用主义的观点，关于数学本体论的讨论是没有意义的，尽管奎因也曾有条件地承认"类"和"谓词"的实在性. 还有一些西方数学家受实用主义观点影响，主张用实用标准看待数学理论的可接受性，在思想体系上也属于数学实用主义范围.

数学实在论(realism in mathematics) 现代西方数学哲学观之一. 它的代表人物是美国数学哲学家普特南(Putnam，H.). 数学实在论认为，数学的实在性在于它的客观性，在于它以抽象的研究方式揭示出自然界的普遍规律，在于它的应用和实践取得成功. 数学的实在性并不等同于数学对象的存在性. 本体论意义上的抽象的数学客体是不存在的. 数学的实在也不仅仅取决于客观的物质实体. 对数学实在的研究，在本质上就是研究什么样的表现物质客体的形式结构是可能的，什么样的形式结构是不可能的，即在特定情况下的抽象的可能性. 这种存在性与可能性之间的双重性或统一性，构成了数学的特殊的客观性.

数学实在论有两个支柱：数学的经验和物理的经验. 数学的经验表明，数学在某种解释下是真的；物理的经验则表明，这种解释是实在论的. 数学做出的客观地真或假的论断，不是取决于内在的头脑、语言和感觉，而是取决于外在的东西. 对物理的客观真理性的肯定也就包含了对于数学真理客观性的肯定. 数学真理的必然性并不等于"不可修正性". 应用的成功只表明数学理论向真理的接近，而不是真理的完成. 人们应从数学的应用或实践中，去探索数学的成功和真理性的最终证实. 不能把一系列特定公理看作是描述了逻辑上可能的各种结构，并将这些结构给出的数学图景看作数学真理的惟一可接受性标准. 应该承认，数学较之物理学具有特定的先验性，但这种先验性是相对的、具体的和可修正的. 在数学中同样存在假设和准经验的检验. 只有在证实与证明的结合上去适用和发展"准经验的数学推理"，才是数学得以完美和发现真理的途径.

关于数学对象的实在性的承认，应该有所限制，其标准就看其对于科学的必要性. 对科学发展必不可少的概念就代表了真实的存在. 当然，"对于科学的必要性"是一个不断发展的概念，关于数学对象的实在性的承认，也应是不断发展的.

阿达马的数学哲学观点(Hadamard views of philosophy of mathematics) 现代西方数学哲学观之一. 指法国数学家阿达马(Hadamard，J. (-S.))关于数学中创造性思维方法的基本观点. 其代表作为《数学领域中的发明心理学》(中译本由江苏教育出版社 1989 年出版). 阿达马认为在数学的发明创造过程中，往往存在创造灵感或"顿悟"，它是经历了一种无意识思维过程的结果. 在数学领域或其他领域中，发现或发明都是以新思想组合的方式进行的. 发明就是要进行千千万万的组合，再从中选出有用的组合. 由于无意识思维不受理智的固定模式的束缚，而只服从于人的直觉中的和谐和美感，因而比有意识的思维过程更为深刻和奏效. 数学发明创造的过程可分为四个阶段：一是准备阶段，此时要进行有意识的工作，通过这种努力以开启无意识思维活动；二是酝酿阶段，即暂时休息或干其他事情，而无意识思维已开动起来；三是顿悟阶段，此时问题的答案或证明途径出乎意料地突然出现；四是整理阶段，即对顿悟的结果严格加以证明，使其过程精确化.

阿达马还认为，在思想交流阶段，思想的载体必须是语言，但在创造阶段，科学家的思想载体往往是各式各样、因人而异的符号、图表或其他形象，此时起作用的是形象思维和直觉思维，而很少是逻辑思维. 直觉型思维的无意识程度在深度和广度上都超过逻辑型思维的无意识程度，因而更适于创新.

波利亚的数学哲学观点(Polya views of philosophy of mathematics) 现代西方数学哲学观之一. 指美籍匈牙利数学家波利亚(Polya，G.)关于数学方法论的基本观点. 波利亚认为数学发现是一种技巧，发现的能力可以通过灵活的教学加以培养，从而使学生们自己领会发现的原则并付诸实践. 他提倡"用朴素而现代化的形式来复兴探索法"(或称"启发法"，heuristic). 他指出："用欧几里得方式提出来的数学看来像是一门系统的演绎科学，但在创造过程中的数学看来却像是一门实验性的归纳科学. 这两个侧面都像数学本身一样古老. 但从某一点说来，第二个侧面则是新的，因为以前从来就没有'照本宣

科’地把处于发现过程中的数学照原样提供给学生、或教师自己、或公众.”（《怎样解题》，科学出版社1982年版，第Ⅵ页）根据这一思想，波利亚对数学解题活动的各个细节进行了具体分析，探讨了数学发现过程的一些基本模式、策略、方法、经验和大量生动实例.他认为虽然不存在能解决一切数学问题的万能方法，但通过适当的启发和引导，可以使学生自己思索出解题思路，找到正确方向，并逐渐形成数学发现的能力.他的《怎样解题》、《数学的发现》、《数学与猜想》等著作，都是按照探索法的精神来讲授探索法的.

在《怎样解题》一书中，波利亚提出了有关“怎样解题”的总的方案，包括弄清问题、拟定计划、实现计划和回顾四个阶段.在《数学的发现》中，讨论了从事探索性思维的心理准备、知识准备和技巧准备.在《数学与猜想》中，讨论了数学中的归纳和类比，以及合情推理模式.所谓“合情推理”，指的是通过归纳、类比等途径，不断修改数学猜想，以达到整体上可以理解和信任的推理方式.尽管合情推理并不完全可靠，但有助于获得数学发现，因而在数学研究和数学教育中具有十分重要的意义.

皮亚杰的数学哲学观点（Piaget views of philosphy of mathematics） 现代西方数学哲学观之一.指瑞士心理学家皮亚杰（Piaget,J.）关于数学认识论的基本观点.皮亚杰认为，逻辑数学结构不能看成是由客体的物理结构或因果结构派生出来的，“它们的接触点必须在有生命的机体本身的内部去找……逻辑数学体系正是通过我们的行为在这个根源之内加工制成，其形式是一系列不断的反身抽象和一系列连续更新的自我调节的建构”.所谓“反身抽象”，指不是从客体里抽象出来的，而是从人们对于客体所加上的动作，并且主要是从这些动作的最普遍的协调作用之中抽象出来的.所谓“建构”，指结构的建造，它是数学认识主体与客体相互作用的过程.数学的建构是数学思维活动中的抽象、协调和平衡，通过建立新的结构以整合以前的，具有一定局限性的结构.数学之所以奠基于极少数概念和公理之上却富有成效，正是由于数学思维的建构特征.建构的数学之所以具有必然性且保持恒常的严格性，是由于结构的组合和转换法则所决定的.具有完全演绎性质的数学之所以同经验或物理现实相一致，是由于数学本身依存于主体活动或运演特征，而不是依存于客体特性（不过，几何学也是从经验和物质的抽象产生的）.

因此，皮亚杰认为数学结构既不形成于物理实在的客体之中，也不是先验地形成于主体自身之中，更不是形成于在柏拉图意义上的可能性的理念世界之中.逻辑数学结构是在主客体相互作用中产生的，不存在与认识主体无关的数学知识.由于数学知识的建构特征，在数学中也同在其他领域中一样，可能性的王国不是一劳永逸地达到的.

数学对象（mathematical objects） 数学哲学的基本概念.在数学史上，数学对象的含义有过多次变化.在古典数学时期，人们认为数学对象就是现实的空间形式和数量关系.16世纪代数学发展起来之后，数学对象包含了事物的一般类型的形式.17世纪微积分理论的创立，使无限、连续、微分等作为思想事物的高度理想化的数学概念成为数学的对象性事物.18世纪和19世纪的数学发展，提供了大量根据数学自身的逻辑发展的需要而确定的纯形式的数学对象，它们可能类似某些现实的空间形式和数量关系，或者在长时间内找不到任何现实类似物.因此，人们把“量”的内涵和外延尽量拓广，使之足以包容数学发展不断提供的新的数学对象，并把数学对象在总体上规定为“广义的量”.也有些数学家认为数学对象包括现实的和逻辑上可能的量的形式、结构、关系，或者认为数学对象实质上是纯形式和关系的模式，而对这些纯形式和关系的现实意义的解释并不属于数学.

现代数学的发展，使数学对象变得日益符号化、抽象化、形式化、公理化.但数学对象并不是没有内容的，更不是与现实世界无关的.数学对象从本原上来自现实世界，那些表现为纯粹思想事物的数学形式和关系，是人类对现实世界的数学性质和规律的创造性的反映.不能把数学对象的内容和现实意义等同于找到某种直观解释或实际应用.数学对象是人类文化进化的产物.它们可能以极度抽象的形式和关系的形态存在着，并通过各种复杂的反映方式，揭示现实世界的客观规律，推动科学数学化的进程（参见“科学的数学化”）.

数学存在（mathematical existence） 数学哲学的基本概念.现实世界的空间形式和数量关系，存在于各种具体物质运动形态之中.作为思想事物的纯粹的量的形式和关系，存在于人脑之中，以及作为人脑功能的延长的电子计算机或其他数学机械装置之中.以知识形态存在的数学对象及其关系，存在于数学书籍或其他印刷品之中.数学对象不可能完全脱离物质运动形态而独立存在.数学对象作为一种客观存在，是客观物质世界在一个方面的特殊表现.数学的存在是分层次的.在“现实的空间形式和数量关系”这个层次与“作为思想事物的纯粹的量的形式和关系”层次之间，是否还存在中间层次，是有待理论界进一步研究的课题.哥德尔（Gödel,K.）曾指出：“它们（指支配数学的“所与”的东西）也可能表示客观实在的一个方面，但是与感觉相反，它们在我们内部的出现可能是由于我们自身与实在之间的另一种

关系."这段论述对于深入研究数学存在的性质有重要启发意义.

数学模型(mathematical model)　数学哲学的基本概念.针对或参照某种事物系统的特征或数量相依关系,采用形式化数学语言,概括地或近似地表述出来的一种数学结构.这种数学结构应是借助于数学概念和符号刻画出来的某种系统的纯关系结构,即扬弃了一切非本质联系和属性的关系结构.广义的数学模型包括数学中各种基本概念,如实数、向量、集合、群、环、域、线性空间等,因为它们都是以各自相应的现实原型(实体)作为背景而抽象出来的.狭义的数学模型指反映特定问题或特定的具体事物系统的数学关系结构.数学模型大体上可分为三类:

1.确定性数学模型.这类模型所相应的实体对象具有确定性或固定性,对象间具有必然的关系.这类模型的表示形式可以是各种方程式、逻辑关系式、网络图等.

2.随机性数学模型.这类模型的实体对象具有或然性或随机性,其表示形式是概率论、过程论、数理统计等.

3.模糊性数学模型.这类模型的实体对象具有模糊性,其基本表示工具为模糊集合论及模糊逻辑等.

数学实验(mathematical experiment)　数学哲学的基本概念.指一种由计算机科学的发展而产生的新的数学研究方式.一般数学实验包括:

1.建立数学模型;

2.拟订分析模型的数值方法;

3.用计算机语言编制实现分析方法的程序;

4.用电子计算机执行程序.

数学实验是与数学模型相联系的.现象的数学模型和传统的边界条件,把说明被研究客体性质的一切量的值都联系起来了.这种联系揭示了动态模型所描述的理想客体的行为.人们把这种揭示联系的过程称为求解微分方程、线性方程或进行数学模型分析等.这种保证研究成功的分析方法,实质上是依靠各类确定模型的特殊性质.随着实践所提出来的任务越来越复杂,相应的数学模型也越来越复杂,以至人们被迫不断地简化模型,或者删去模型中某些因素来达到可计算结果的目的.这种简化是有害的,但又迫不得已,有时等于对被研究现象的性质做出了某种假设.由于电子计算机的高速发展,为分析这类复杂任务开辟了全新的可能.数值方法不是以公式化的、明显的、最终的方式来揭示联系的方法,而是一种连续不断的近似方法,是最迅速地逼近于描述这种被研究的联系.循着这种逻辑认识,问题的解决可以根据模型的数量特征确定运算顺序,在多次重复迭代地运算中给出某些近似值.人们可以预先用计算机语言编制程序,规定计算机进行什么样的运算,应该按什么样的顺序来完成这些运算.

对于一个高度复杂的数学模型,在计算机上所进行的计算,使人们能"观察到"客体的进化轨迹.这种工作和实验很相近.只是这种无论是物理的、化学的、生物的实验装置被根据给定程序来工作的电子计算机所代替了.人们把描述公式对物理现象所做的计算称为数学实验.它与思想实验不同之处在于思想实验实质上是一种以逻辑的演绎推断手断来想象规律的纯态表现;数学模型所要求的前提是:对表征现实客体理想方式的理想联系的考察,被提高到了相当复杂的新水平,并且是以分析数学模型的理论资料为依据的.这种资料允许从组成模型的原始关系出发,导出使人们感到兴趣的、更明显地表现客体性质的新联系,例如,扩散、热传导、磁化的过程,就可以用形式上相同的一些方程来描述.

如果说20世纪前半叶的数学哲学主要是由集合论悖论引起的数学基础问题所支配,那么20世纪70年代以后的数学哲学则主要是由计算机引起的哲学问题所支配.四色定理的机器证明和分形几何的产生表明,计算机由数值计算扩大到数学定理的试探和证明,改变了数学研究方式,冲击着传统的数学观念,由此引起数学研究是否存在着实验等问题的争论.

过去数学家总是以推理论证的形式发表论文的,没有也不可能写出他在证明之前所做的大量试探、试验工作.因此造成一种假象,所谓数学就是一种推理论证,即证明,并且以此来衡量一篇论文或一种理论是不是数学,但是一些严肃认真地反思数学的认识过程的数学家已经认识到数学研究存在着两个阶段:实验和证明(当然,数学中的实验是一种抽象的思想实验,它不同于自然科学中实物实验;数学实验只是提出猜想和假说的一种方法,它还必须经过逻辑证明,才能使猜想或假说变成定理).例如,英国数学家、菲尔兹奖获得者阿蒂亚(Atiyah,M.F.)认为:"与其他自然科学的情况一样,数学中的一些发现也要经几个阶段才能实现,而形式证明只是最后一步.最初阶段在于鉴别出一些重要的事实,将它们排列成有具体含义的模式,并由此提炼出看起来很有道理的定律或公式,接着人们用新的经验事实来检验这定律或公式.只是到了此时,数学家们才开始考虑证明问题."麦克莱恩(Maclane,S.)更概括地说:"认识数学的顺序也许是这样的:直觉、试验、错误、推测、猜想、证明.这步骤的结合和顺序在不同的领域内会有很大的不同,但是有一种共识,就是最终的产品是严格的证明."爱泼斯坦(Epstein,B.)和列维(Levy,S.)正是根据数学研究存在着实验这一事实,于1991年创办了《实验数学》季刊,并且得到

数学界的好评.

数学抽象(mathematical abstraction) 数学哲学的基本概念.指抽取出同类数学对象的共同的、本质的属性或特征,舍弃其他非本质的属性或特征的思维过程.数学抽象基本上可划分为四种类型:

1.弱抽象.即从原型中选取某一特征(侧面)加以抽象,使原型内涵减少,结构变弱,外延扩张,获得比原结构更广的结构,使原结构成为后者的特例.弱抽象的关键在于从数学对象的众多属性或特征中辨认出本质属性或特征,从貌似不同的同类数学对象中找出共同的东西.这种抽象思维的法则可称为:“特征分离概括化法则”.

2.强抽象.即通过在原型中引入新特征,使原型内涵增加,结构变强,外延收缩,获得比原结构内容更丰富的结构,使后者成为前者的特例.强抽象的关键是把一些表面上看来互不相关的数学概念联系起来,引进某种新的关系结构,并把新出现的性质作为特征规定下来.这种抽象思维的法则可称为:“关系定性特征化法则”.

3.构象化抽象.即根据数学发展的逻辑上的需要,构想出不能由现实原型直接抽取的、完全理想化的数学对象,作为一种新元素添加到某种数学结构系统中去,使之具有完备性,即运算在此结构系统中畅行无阻.如在实变函数论中,勒贝格可积函数与平方可积函数概念的引入,就使 L_1 与 L_2 均成为完备空间.这种抽象思维的法则可称为:“新元添加完备化法则”.

4.公理化抽象.即根据数学发展的需要,构想出完全理想化的新的公理(或基本法则),以排除数学悖论,使整个数学理论体系恢复和谐统一.非欧几何学平行公理、非阿基米德公理等都是公理化抽象的产物.这种抽象思维的法则可称为:“公理更新和谐化法则”.

数学经验(mathematical experience) 数学哲学的基本概念.数学经验可划分为三种类型:

1.直接来自现实问题的经验,即在数学理论出现之前和应用于现实之后,人们对其现实原型的性质进行分析探索,从研究现实的量的关系中积累的经验.

2.间接来自现实问题的经验,即在对数学自身问题的认识过程中积累起来的,具有一定抽象性质的,从研究作为思想事物的量的关系中获得的经验.有些数学家称之为“拟经验”或“理性经验”.

3.在学习数学过程中积累起来的经验.获得这种经验的过程,实质上重演了前人研究数学时积累经验的过程.当然,学习中的经验更精练、更系统、更易于接受.但在启发性方面,往往不如历史上的经验那样深刻.

当一种数学理论不够成熟,尚未奠定严格逻辑基础,但实践中已取得很大成功时,数学经验起到支持理论由不成熟发展到成熟的作用;当一种数学理论在逻辑中通行无阻,但尚未找到实际应用时,数学经验起到支持理论继续发展,逐步找到实际应用的作用.当一种数学理论已有了严格逻辑体系并得到充分应用时,数学经验起到推动理论不断发展和变革的作用.如果把数学经验固定化静止化,也会在数学发展中产生消极作用,即用旧经验判断和排斥新观念,影响人们对新的数学成果的理解、接受和应用.

数学真理(mathematical truth) 数学哲学的基本概念.数学真理可作狭义和广义两种理解.狭义的理解仅局限于数学理论体系内部,指人们的认识正确反映了作为思想事物的纯粹的量的形式和关系及其规律;广义的理解还包括数学理论的实际应用,指人们建立的数学模型正确反映了客观物质形态的量的形式和关系及其规律.

检验数学认识是否具有真理性的惟一的标准,是数学实践.狭义的数学真理要用纯粹数学研究中的实践来检验;广义的数学真理要用数学应用中的实践来检验.这两类实践检验不能相混淆.如果用数学应用中的实践来取代纯粹数学研究中的实践,把应用中的成功或现实模型的建立等同于对数学理论体系自身的实践检验,把数学真理性等同于获得某种现实解释,那就会使数学的发展受实用范围的束缚,使数学的相对独立性受到限制,从而破坏纯粹数学与应用数学的平衡发展和相互关系.

在现代数学中,由于高度的抽象化、形式化和公理化,人们常常认为逻辑相容性(无矛盾性)是检验数学真理的惟一标准,这是不正确的.逻辑相容性只是检验数学真理的间接的标准,只能在局部环节上起作用.逻辑相容性的要求可以保证传递真值,但不能确定数学理论体系的原始真值.因为逻辑相容性的要求不能起到保证数学认识符合数学对象的客观性质及其规律的作用.只有在数学实践中,人们的认识才能不断同客观的数学规律接近,不断认识数学对象的深刻本质,从中确定数学真理.哥德尔不完全性定理的出现,已经从理论上表明,逻辑相容性的要求不可能成为检验数学真理的惟一标准.

同其他学科领域的真理一样,数学真理的发展也要经历由相对真理向绝对真理不断接近的过程.在数学史上,人们曾长时间以为数学真理是绝对真理,而每一数学分支领域的真理都具有惟一性和绝对不变性.19世纪以后的数学发展表明,即使在同一数学分支内,也可能存在几种并行不悖的数学真理,它们各有不同的适用范围.非欧几里得几何、非交换和非结合的代数、非康托尔集合论等成果的出

现，都表明了数学真理的适用范围的存在，表明了人们对数学真理认识的相对性.

数学真理和数学公理是既有联系又有区别的.按照现代公理学的观点，数学公理只是数学理论体系的初始概念之间一些符合逻辑要求的基本关系，是形式系统中作为出发点的基本公式. 数学公理包含数学真理的成分，但它不是完全的、绝对的数学真理. 数学公理需要在实践中不断完善和发展，不可能成为数学发展的一劳永逸的逻辑基础.

数学直觉(mathematical intuition)　数学哲学的基本概念. 这是一种不包含普通逻辑推理过程(但可能包含"合情推理"形式)的直接悟性，属于非形式逻辑的思维活动范畴. 数学直觉思维具有非逻辑性，数学直觉的产生无法用普通形式逻辑的推演解释清楚. 它还具有自发性，它的产生往往是下意识的. 数学直觉的产生前后，富于情感的作用，包括获得直觉的激情和对直觉激情的强烈信念.

数学直觉可划分为辨识直觉、关联直觉和审美直觉三种类型. 辨识直觉解决的是一个新想法是否有价值，是否值得去展开的问题；关联直觉解决的是不同知识领域之间，包括已知和未知领域之间内在联系的问题；审美直觉解决的是新想法是否符合数学美的要求的问题.

数学直觉本身是分层次的，这一点是由数学认识主体和客体两方面决定的. 从主体方面看，由于数学直觉产生于已有的经验和知识素材，而经验有深度和广度上的差别，所以对于同一数学对象，不同认识主体可获得不同的直觉；从客体方面看，由于数学对象本身有抽象度的层次之分，对不同抽象层次的认识可获得不同层次的数学直觉.

数学直觉的产生，要以较长时间的自觉的逻辑思维为前提，要使思想达到饱和状态，达到获得关键性观念的边缘，然后借助外界的某种刺激或启示，实现思想上的飞跃，获得创造性的认识成果. 获得数学直觉不存在经验的或机械的方法，但遵循以下几个指导性原则，可以更快更好地获得或选择数学直觉.

1. 简单性原则，即相信数学的简单性常常和真实性联系在一起. 爱因斯坦自称是"到数学的简单性中去寻找真理的惟一可靠源泉的人". 冯·诺伊曼(von Neumann, J.)等人也有类似论述.

2. 统一性原则，即相信数学各部分内容之间存在着有机联系和内在统一. 希尔伯特(Hilbert, D.)特别看重这种有机联系，认为这是数学生命力之所在. 数学的统一性表现为各种数学结构之间调和一致，各种数学方法融会贯通，各个数学分支之间相互渗透.

3. 对称性原则，即相信在一定条件下已有数学成果可以系统地、同构地拓广到其对称领域中去. 这里所说的对称不仅指几何图形的对称，也包括各种数学概念、定理以至分支学科的对称.

4. 奇异性原则，即相信数学对象的不能用任何现成理论解释的特殊性质的发现，不仅是数学发展中所必需的，而且可能导致重大的理论突破. 在数学史上，只有不断发现数学对象的奇异性，才能深入到已有理论框架无法接触的未知世界. 另一方面，只有不断把发现了的数学对象的奇异性统一起来，考察其种种对称现象，数学理论才会形成完整的体系.

数学直觉在确定数学研究方向上有启示作用，在选择有价值的数学事实和观念上有指导作用，在丰富数学相象能力方面有激发作用. 数学直觉提供数学认识活动的生动素材，供逻辑思维加工，形成思想成果. 数学直觉在数学的发现和发明中占有优势地位，始终引导着创造性的数学思维过程.

数学美(mathematical beauty)　数学哲学的基本概念. 人们对数学理论体系内部的有机联系的精致的直觉，能够引起对数学成果的形式的美感. 数学理论体系内部存在的简单性、统一性、对称性、奇异性等基本性质，在一定的思想文化背景下，能够激发数学的美感. 一般说来，能够被称为"数学美"的对象和方法，应该是具有在极度复杂的事物中揭示出的极度的简单性；在极度离散的事物中概括出的极度的统一性(或和谐性)；在极度无序的事物中发现的极度的对称性；在极度平凡的事物中认识到的极度的奇异性. 具有简单性、统一性、对称性、奇异性的数学对象与其背景反差越大，则显得越美，越有吸引力. 比如，欧几里得几何学同以前的经验性几何学知识相比，是很美的，克莱因(Klein, (C.)F.)用群的变换思想统一各几何学分支的"埃尔朗根纲领"比欧氏几何学更美，而希尔伯特(Hilbert, D.)的公理化理论比"埃尔朗根纲领"更美. 因为在所涉及知识领域越来越扩大的情况下，它们一个比一个更简单，更具有统一性、对称性和新奇之处. 这样来追求数学美，才会促进数学的发展，促进人们认识的深化.

数学美同数学的真与善，即数学观念的正确性和重要性，是密切相关的. 运用数学美的标准来鉴别和选择数学直觉，评价数学的真与善，在很多时候能获得成功，所以数学家们往往对美的数学观念赋予较多的信任. 外尔(Weyl, (C. H.)H.)、冯·诺伊曼(von Neumann, J.)、庞加莱(Poincaré, (J.-)H.)和狄喇克(Dirac, P. A. M.)等人，都对数学美的标准给予高度评价. 由于数学美在整体上反映了数学理论体系内部的有机联系，要比局部的单纯的分析更接近于现实世界的本来面目. 数学美的标准中凝结着数学家们以往实践活动中积累的大量经验和直觉材料，具有一定的客观意义. 正因为数学美不是孤立存在的，它是数学的真与善经过高度思维加工之后

的曲折反映，所以数学美的标准对数学发展有重要指导意义. 当然，也不应忽视数学美的标准中还有主观感情色彩. 片面强调美的标准，也会导致错误的选择. 数学美的标准只是选择和评价数学成果的必要条件而非充分条件.

数学美的鉴赏能力，不仅与数学家们的认识和实践活动有关，还与他们个人的思想文化修养和艺术鉴赏能力有关. 强调数学美的人往往是同时有多方面爱好和才能，特别是在哲学和艺术上有较高造诣的大数学家. 在数学教育中培养数学美的鉴赏能力，对于数学教学质量的提高和学生能力的全面发展，具有十分重要的意义.

数学中的经验性方法(empirical methods in mathematics) 数学方法之一. 它是指通过感官直接考察数学对象的外部联系以获得经验性认识的方法. 数学中的经验性方法主要包括观察、实验和经验归纳法.

数学中的观察是在自然的条件下，通过感官考察数学对象的外部特征，如数学及其关系的特征、数值分布的特征、几何图形的特征、抽象数学结构的特征等. 观察是数学抽象思维的基础. 人们在数学研究和应用过程中观察到一些反复出现的，预示着某种规律性的数学表象，引起了注意并深入探讨，才能进行自觉的抽象思维活动. 观察是数学发现的先导，并对数学解题思路的形成有重要启示作用.

数学中的实验是在人为的条件下对数学对象进行变革，在变革过程中直接考察数学对象的外部特征，如进行数字运算、图形变换、数据处理，以验证某种假设或猜测. 数学中的实验可以用于提出和证实各种数学猜想，提供解题思路. 很多时候，数学知识的正确性先通过实验得到证实，然后人们才去寻找其严格的逻辑证明. 运用电子计算机进行数学中的实验，还可以成为数学证明的手段(参见《数学辞海》第五卷“机器证明”).

数学中的经验归纳法是对数学中部分经验事实材料加以归纳整理，以提出有关它们的一般性质和规律的方法. 由于这是一种由部分的有限实例获得一般性结论的方法. 这在逻辑上是不够严密的，所以它可能成为寻找和发现数学真理的有效方法，也有可能带来谬误. 因此凡是通过经验归纳法获得的结论，必须通过严格的逻辑证明，才能加以肯定.

数学中的逻辑方法(logical methods in mathematics) 数学方法之一. 它是指运用逻辑思维考察数学对象以了解其本质和规律性的方法. 数学中的逻辑方法主要包括抽象、概括、形式化、公理化、化归、分析、综合、演绎和数学归纳法等. 有必要指出，数学中的逻辑方法不仅指形式逻辑的方法，也包括数理逻辑的一些方法.

数学中的抽象方法是抽取出同类数学对象的共同的、本质的属性或特征，舍弃其他非本质的属性或特征的思维方法. 数学中的抽象方法有一些不同于其他学科领域抽象方法的特征(参见“数学抽象”).

数学中的概括方法是把数学对象的一般的本质的属性推广到同类事物中去的方法.

数学中的形式化方法是用一套表意的数学符号体系，去表达数学对象的结构和规律，从而把对具体数学对象的研究转变为对符号的研究的方法. 形式化方法有助于数学理论体系的简单化、严格化和系统化，为数学内部的和谐统一提供思想基础. 已有数学知识的形式结构，可以为探索和确定未知的数学形式结构提供类比的基础，或给予借鉴和启发.

数学中的公理化方法是用严格的逻辑思维整理数学理论体系的一种方法，它要求在数学理论体系中选出若干基本概念作为初始概念，以导出其余概念；选出若干基本命题作为公理，以导出其余命题. 从公理推演出的命题称为定理，这个推演过程称为证明. 由初始概念、导出概念、公理和定理组成的演绎体系称为公理系统，公理化方法就是将数学理论体系加工整理成为公理系统的方法. 公理化方法赋予数学内在的统一性，有助于人们了解数学各分支、各部分的本质联系，使逻辑思维在数学中的作用得以充分发挥，实现高度的思维经济. 公理化方法在科学方法论上有示范作用，对现代理论力学及各门自然科学理论的表述方法起到了积极的借鉴作用.

数学中的化归方法是把有待解决的问题，通过某种转化过程，归结到一类比较容易解决或已经解决的问题中去，最终获得原来问题答案的方法. 化归方法是由数学理论体系的演绎性质所决定的. 它是数学发现和数学应用中具有普遍意义的方法.

数学中的分析、综合、演绎等方法，是逻辑思维方法在数学认识活动中的具体应用. 它们既是数学证明的方法，又对发现数学真理和寻找解题思路有重要启示作用.

数学归纳法是数学证明的一种方法，它在逻辑上是严格的，故应看作是数学中的一种逻辑方法.

数学中的创造性思维方法(creative methods of thinking in mathematics) 数学方法之一. 它是指通过创造性思维活动考察数学对象，以了解其本质和规律性的方法. 数学中的创造性思维方法主要包括猜测、想象和直觉方法.

数学中的猜测是一种探索性的思维方法，主要用于发现数学规律和寻找解题思路. 猜测可以通过类比、经验归纳、减弱或强化定理条件、想象、直觉、逆向思维等途径提出，并不断通过反驳来加以修正.

数学中的想象方法是形象思维在数学认识活动中的具体应用. 数学中的形象思维大体上可分为几

何思维、类几何思维(如有关高维空间、泛函空间的思维)、数觉(对各种数量关系的形象化的感觉)、数学观念的直觉(对各种数学观念的性质、相互联系以及重新组合过程的形象化感觉)等层次.数学想象大部分是视觉类型的想象,也有触觉类型的想象.运用数学中的想象方法,要有必要的知识基础,较强的形象思维能力,合适的心理状态,自由想象的思维习惯.数学想象的结果,需要不断评估,以便及时放弃无用的想象.

数学中的直觉方法是通过数学直觉来发现数学对象的本质和规律性的方法(参见"数学直觉").

数学中的猜测、想象和直觉方法,都具有形象性、非逻辑性,以及难以用符号语言完全明确地表达的特性.

科学的数学化(mathematicization of science) 数学哲学的基本概念.指数学逐渐渗透到各门科学的理论体系结构中去,成为科学规律表达式中不可缺少的组成部分的过程.科学的数学化是由科学与数学之间的本质联系所决定的.数学和科学是对现实世界从不同方面的反映.人们的思维不断把现实数量关系分割为科学与数学的不同研究对象,而这种分割又势必在数学的应用中时时弥合起来.数学最引人注目的特点是它的确定性、抽象性、精密性和应用的广泛性.数学的这些特点使它能提供事物和现象的合理结构,成为各门科学的思维工具和表现形式.科学的数学化为科学研究提供了简洁精确的形式化语言,提供了数量分析和计算的方法,也提供了抽象能力和推理方式.

在科学发展的不同历史时期,科学的数学化具有不同的形式和特点.在科学的萌芽时期,科学与数学是密不可分的.具有经验性质的数学法则本身就是原始的经验科学的组成部分.毕达哥拉斯学派提出了"万物皆数"的学说,认为数是万物的本原.他们主张数量之间的一定比例关系是宇宙间一切事物和谐的基础,从而第一次提出了万物都有规律性,并可用数学把握的思想.古代的物理学研究应用了数学方法,杠杆原理、浮力定律都是用数学关系式表达的.但总的来说,人们并未意识到物理学规律的表示离不开数学原理.

在近代科学发展中,哥白尼(Kopernik,M.)和开普勒(Kepler,J.)强调太阳中心说在数学上的和谐与简单性,认为这是太阳中心说之所以是真理的最好证据.伽利略(Galilei,G.)开创了对物理学的数学解释.他坚信自然界这本"大书"是用数学语言写出的,自然界按照完美而不变的数学规律活动着.因此,物理概念和规律必须从数学原理上加以说明,并不存在什么玄妙的质.这是对亚里士多德学派只相信定性分析的思维方式的直接冲击.亚里士多德学派认为事物的定性的质是基本的,科学的任务就在于找出事物定性的质.伽利略指出,这种观点在力学研究中是行不通的.伽利略给物理学中数学公式规定的任务是"只描述,不解释".牛顿(Newton,I.)继承和发展了这一思想,他在《自然哲学的数学原理》初版序言中强调舍弃实体形状和隐蔽的性质,而致力于用数学规律来说明自然现象,探讨有关的科学问题.这正是其巨著命名的意旨所在.

在认识论上,近代唯理论哲学家对科学数学化问题进行了深入思索.他们追求知识的确定性及其证明,认为只有数学才具有这一特点.因此各门科学要达到确定性的目标,就必须数学化.笛卡儿(Descartes,R.)明确主张,科学的本质是数学.他不承认也不希望物理学中的任何原理不同于几何学和抽象数学中的原理,因为后者能解释一切自然现象并能对其中一些现象给出证明.莱布尼茨(Leibniz,G. W.)认为,关于事实的真理应由理性真理来证明,而数学则为这种证明提供了完美的样板.在唯理论思潮的影响下,数学成为各种科学研究争相模仿的对象.

近代科学的数学化在科学发展中产生了重要影响.力学数学化的辉煌成就对热学、电学、化学、生物学、天文学研究的数学化有很大启示作用,但同时也带来一些消极影响,即用力学原理解释一切自然现象,把事物的质的一切差异和变化都归结为量的差异和变化.近代科学的数学化使人们认识到定性思维存在的两个弱点:其一,定性思维总是以有限经验事实为根据进行理论概括,这样获得的规律性认识没有明晰的适用范围;其二,定性思维总是从感性直观的事实材料出发的,因而难以深入到那些为人的直观认识所达不到的,或一时达不到的领域.科学的数学化恰恰能弥补这两个弱点.科学的数学化要求定性思维和定量思维相互补充,相互促进.

在现代科学发展中,科学的数学化出现了新的特点.现代科学的数学化在程度和范围上远远超出近代科学的传统领域.不仅物理学、化学、天文学等领域的数学化程度大大增强了,而且生物学、地学、人类学、经济学、语言学、逻辑学等领域也出现了数学化趋势.在现代科学数学化的过程中,数学发展远远走在科学发展的前面,以一种出人意料的方式提供了现代科学必需的数量关系模式.现在得到应用的许多成果最初都是数学自身逻辑发展的产物.现代科学的数学化使得"质"和"量"的传统划分越来越失去其意义.按照传统的理解,"质"是定性思维的产物,质中不包含量.微观世界和大尺度空间中的客体往往只能从量的角度加以区别,而它们的定性的质却越来越难以把握.现代科学中出现了大量高度数学化的专门术语.对这些术语及相关规律的任何定

性描述，往往是费力不讨好的，因为这样做总会或多或少降低科学规律自身的严密性、准确性. 这就使数学成为现代科学不可须臾离开的语言、工具和表现形式. 现代科学的数学化表明，“质”和“量”这两个范畴是相互渗透的. 定量的质，或者说具备质的特征的量，是数学化的科学领域中区分不同事物的基本依据.

数学文化(mathematical culture)　数学哲学的基本概念. 由于数学的内在力量与外部力量共同作用而不断发展的文化系统称为数学文化. 关于数学文化的探讨，包括数学对人类文化的影响，人类文化对数学发展的作用，数学自身作为一种文化的历史进程和发展机制等方面课题.

纵观数学发展与文化发展，不难发现，数学一直是人类文明中的主要文化力量，是人类文化中的“子文化”，与人类文化休戚相关. 正是由于古希腊强调严密推理，追求理想与美的数学高度发达，才使得古希腊具有极端理性化的哲学、优美的文学、理想化的建筑与雕刻. 当然，古希腊良好的文化氛围也影响了古希腊数学的内容与精神. 文艺复兴以绘画作为文化解放的先声，而绘画艺术的新风格则与射影几何紧密联系在一起. 人文思潮的兴起也与数学思想密切相关. 实际上，不少学者在文艺复兴时期认为“上帝”就是最伟大的数学家.

中国是数学发祥地之一. 中国数学代表了数学中很重要的两种倾向之一——归纳算法倾向. 中国古代数学曾对中华文化发展起到一定作用. 李约瑟(Joseth,N.)在其名著《中国科学与文明》中，曾恰当评价了中国古代数学对中华文化的影响：“我们在评价中国人在各门科学技术中的贡献时，首先从数学入手应该是恰当的.”

在欧洲文化的近现代发展中，数学还在很大程度上影响了哲学思想的发展方向. 从经验论、唯理论、机械决定论到逻辑实证主义，都可以证明这一点. 数学为经济学、社会保险等领域的发展提供了可靠立论依据. 古希腊人一直认为音乐(和声学)是数学的一个分支，而傅里叶级数理论的建立使人们对音乐特征有了更准确的把握. 数学还曾对文学创作的风格产生过一些影响，17—18 世纪欧洲的散文大师曾着力体会数学的简洁和明快，荷兰哲学家斯宾诺莎(Spinoza,B.)等人还曾尝试用几何证明的风格进行创作.

数学对人类文化影响的最主要的体现，是在自然科学和技术方面(参见“科学的数学化”)，数学化不仅成为自然科学和技术的方向，而且成为社会科学成熟与否的重要标志之一. 数学还为文化学研究本身提供了方法、手段. 这方面最有代表性的成果是所谓“文化数学”，它利用数学方法，借助电子计算机，使描述、解释和比较文化现象的过程更加精确，它构成了现代文化学研究中定量分析的重要内容.

关于人类文化对数学发展作用的研究，也称“数学社会学”，它研究社会组织形式对数学概念、方法的起源与发展的影响. 数学社会学对于了解数学在不同文化中心的历史发展过程有不可或缺的作用.

数学发展的社会条件，是数学社会学研究的重要方面. 数学在本质上是无国别的. 但历史上数学中心在不同国家和地区之间的转移，是有目共睹的事实. 如果要分析这种变迁的原因，必须将数学放到更为广阔的政治、社会、文化的背景上去. 数学国别史研究也提出同样问题. 各国数学发展各有其特色，揭示其形成原因只能求助于文化背景的分析.

数学社会学还要讨论数学史上各学派和学术团体的作用. 毕达哥拉斯学派、彼得堡学派、格丁根学派、波兰学派、布尔巴基学派等，都在不同时期对数学发展做出了杰出贡献. 分析各学派产生的文化背景，揭示各学派形成和演变过程及其影响，对于理解数学文化是必不可少的. 数学社会学还要研究数学家的成长和培养，数学成果交流和普及，数学研究的职业化、体制化，数学成果奖励，数学研究基金等方面问题.

数学本身又是自成一体的文化系统，是一种自足的，能自我调节发展的，有着丰富内涵的文化. 独特的语言系统是一门独立文化的最重要特征. 数学在长期演化过程中形成独一无二，并且世界通用的语言系统. 在人类文化中，只有音乐等极少数文化形态具有这一特征. 数学语言系统是数学长期发展中经过不断选择而确立的.

数学在人类文化中还具有独特的价值取向和价值标准. 数学的本质在于数学思想的充分自由发展，任何急功近利的、时尚的或独断的标准，都不适合数学的价值判断. 在充分满足逻辑要求和自由创造的前提下，数学的价值判断可以诉诸于美——即艺术的标准. 数学美学正日益引起人们的关注，数学创造的动机和过程越来越艺术化.

数学文化的发展有其独特的模式. 这是数学文化区别于其他人类文化形态的重要方面之一. 数学文化的发展模式有这样几个特点：数学家有可能彼此独立地，甚至同时地获得同一数学成果；当一个重要数学定理被证明后，经常会接着出现一系列简化证明，许多关节点“豁然开朗”.

一个新的数学概念或理论的生命力，往往取决于它使用的符号和应用的效果. 如果符号含混不清而理论富有成果，那么迟早会出现易于为人们理解和掌握的符号. 当为了数学的合理发展而需要引入表面上看来荒谬的概念时，这种概念将在后来的发展中逐渐变得合理和易于解释. 数学研究中的重大

突破，往往是在数学界审视一段时间后才会被接受.

数学中的革命可能在数学本体论和数学方法论中发生，可能引起数学认知方式的重大变化. 但数学中一些已被严格证明的基本内容，或者说数学的核心，如欧几里得几何、线性代数等，不会出现这种情况. 每隔一定时期，数学家们就会宣称这门学科已“功德圆满”，剩下的工作是将细微末节完善化. 但每一代数学家都发现，必须证明（或否定）前一代数学家未经证实就接受的结论的合理性.

从古希腊以来，数学文化一直为不少学者关注. 罗素（Russell，B. A. W.）、怀特海（Whitehead，A. N.）在早期数学哲学研究中，使人们确信数学已在方法和价值标准方面成为一门独立的文化. 怀特海在他的两次著名演讲（1925 年的《作为思想史要素之一的数学》和 1939 年的《数学与美》）中，阐述了这样的观点：“如果文明继续发展，那么在今后两千年，人类思想中压倒一切的新特点就是数学悟性要占统治地位.”希尔伯特（Hilbert，D.）、外尔（Weyl，(C. H.)H.）、冯·诺伊曼（von Neumann，J.）等人也都阐述过对数学在整个人类文化中所占地位的看法. 由于他们结合自己的数学创造过程，对数学有着独特的感受，因而他们的观点对这一领域的研究起到了积极作用.

数学社会学的研究从 20 世纪 30 年代以来方兴未艾，其中比较引人注目的有美国科学史家李约瑟（Joseth，N.）关于东西方（特别是中国和西方）数学传统差异、所处社会环境及科学范式的比较，以及斯特罗伊克（Struik，D. J.）等人对 19 世纪数学社会史的研究. 1979 年 7 月，在德国柏林还召开了“19 世纪数学社会史”学术讨论会.

美国现代数学家、数学史家和数学教育家克莱因（Kline，M.）对数学文化进行了多年研究，并写出现代数学文化研究的奠基性著作《西方文化中的数学》. 他认为讨论数学在人类文化中的作用，在一定程度上能增强人们对人类文明的信心. 通过研究人类最伟大、最富有魅力的艺术——数学，使人们坚信：人类的力量足以解决自身的问题.

怀尔德（Wilder，R. L.）是数学文化研究的另一重要代表人物. 他的著作《数学概念的演化》（1968）和《作为一种文化体系的数学》（1981），采用人类学、哲学、科学社会学的方法进行这方面研究，提出了数学发展的各种力量. 它们是环境的力量（包括社会物质和社会文化）、遗传的力量（数学知识和数学传统）、文化传播、符号化、抽象化、一般化、一体化、多样化、文化阻碍、选择等. 怀尔德的研究方法导致了一些新的趋势，如重评神秘主义对数学发展的影响，探讨不同文化圈内数学的特点等. 近年来数学界的数学教育界日益重视数学文化研究，在 1988 年 7 月召开的第六届国际数学教育会议（ICME）上，与会者专门讨论了“数学·教育·文化·社会”这一课题. 随着世界各国对数学教育的重视，数学文化研究将会有更大的发展.

中国古代数学哲学（the ancient philosophy of mathematics in China） 数学哲学史名词. 指数学哲学在中国古代的历史发展. 它贯穿于中国传统数学研究和应用活动之中，主要涉及数学的性质、对象、来源、作用、数学真理等方面问题. 中国古代数学哲学受中国古代数学、哲学和社会发展的影响，带有中国传统文化的某些特征.

在数学本体论问题上，中国古代数学家大都认为数学对象是客观世界的空间形式和数量关系，数学知识来源于客观实际. 刘徽《九章算术注序》说：“至于以法相传，亦犹规矩度量可得而共.”规、矩是中国古代画圆、方的工具，这里借指空间形式；度量即度、量、衡，这里代表数量关系. 数学是“规矩”和“度量”的统一，反映了中国古代数学中代数与几何紧密结合的特点. 李冶继承和发展了刘徽的思想，其《测圆海镜序》说：“彼冥冥之中，固有昭昭者存. 夫昭昭者，自然之数也. 非自然之数，其自然之理也.”他认为数学“一出于自然”，是“自然之数”、“自然之理”的反映. 刘、李都肯定了数学是对客观世界的空间形式和数量关系进行抽象思维的结果，不能独立于客观事物而单独存在. 中国古代的数学著作，在内容上基本都遵循这种精神.

然而，中国古代数学家在对数学的性质和作用的认识上，又大都带有一些神秘成分. 这是由于未能把数学与术数很好地区分开来的缘故.《汉书·律历志》：“数者，一、十、百、千、万也，所以算数万物，顺性命之理也.”反映了中国古代知识界对数学的一般看法. 今天所谓的数学，中国古代一般称为算术、算学、算法，即“算数之术”. 术数是用种种方术来观察自然界可注意的现象，来推测人和国家的气数和命运. 术数要用到算术，同时给予各种数学符号以神秘主义的解释. 术数可以追溯到《周易》.《周易》对数学的影响，是值得深入探讨的问题. 刘徽《九章算术注序》、莫若《四元玉鉴序》等均以《周易》为数学张本. 13 世纪秦九韶深受其影响，在《数书九章序》中提出河图洛书阐发数学之奥秘的观点，对后世影响甚大. 明、清许多算书，将河图洛书载于卷首. 秦九韶还进而得出“数与道非二本”的结论. 这是中国古代数学所特有的“万物皆数”观点. 中国古代数学哲学的神秘成分对数学实践影响不大.《九章算术》以来的各代数学家皆致力于经世务、类万物方面. 刘徽说数学“虽曰九数，其能穷纤入微，探测无方”，认为数学具有处理问题的精确性，和从纷繁复杂的世界中探求规律的效用，这是很高明的见解. 秦九韶也认为“数术之

传，以实为体"，其《数书九章》的问题绝大部分都切合实际.

在数学认识论问题上，中国古代数学家主张数学应密切联系实际，在解决实际问题的过程中不断获得发展. 数学真理是可以认识的，刘徽说数学"非特难为也". 他还以庖丁解牛来比喻解决数学问题. 他说："数，犹刃也. 易简用之则动中庖丁之理."刘徽相信人们对数学的认识是不断发展的，因此他敢于批评前人的错误，对自己未能解决的问题表示"以俟能言者"，相信后人一定能够解决. 李冶批评数学上的不可知论，指出"谓数为难穷，斯可；谓数为不可穷，斯不可". 因为"数一出于自然"、"苟能推自然之理，以明自然之数"，就能够认识数学规律.

在数学方法论问题上，中国古代数学并不像许多人认为的那样没有理论，没有推理，没有证明.《周髀算经》载陈子答荣方问中指出，数学原理"言约而用博"，学习数学必须"通类"，做到"类以合类"、"同术相学，同事相观"、"问一类而万事达". 这是中国古代研究、学习数学乃至编纂数学著作的指导思想. 人们从大量的实际问题中，通过类比、归纳，以严格或不严格的推理论证，抽象出大量计算公式，概括出许多方法和计算程序，提出一些基本原理，又对这些公式、方法和原理进行比较归纳，而分成九类，遂成为中国古代数学的规范《九章算术》.《九章算术》有的先列出例题，再给出一条或几条抽象的术文，这是以类求故，因故成理的归纳过程的痕迹；有的先给出抽象的术文，再列出若干例题，术文应用于解题，这实际上是明故求理，以理知类的演绎过程.《孙子算经》、《夏侯阳算经》、《测圆海镜》等都把一些常用公式列于卷首，显然也是演绎过程.

应该说，中国古代不太重视对命题本身的证明，刘徽、赵爽是两个例外. 刘徽在证明理论上有重大贡献. 他不使用未加证明的公式，并明确认识到归纳论证在数学中的不可靠性. 他在证明中主要使用演绎推理，其中包括三段论、关系推理和若干其他推理形式. 他的证明大都十分严谨，没有循环论证，合乎现代数学和逻辑学对证明的要求.

中国古代数学长于计算，以术文统率应用问题，形成了自己独特的体系. 它以算法为中心，密切联系实际，融几何与代数于一体，具有程序化的思想.《九章算术》为这个体系构筑了框架，而刘徽为之作注，奠定了理论基础. 刘徽把数学比作一棵大树. 他说："事类相推，各有攸归，故枝条虽分而同本于知，发其一端而已."他从"规矩度量可得而共"出发，引出面积、体积、率、正负数等定义，运用出入相补原理、齐同原理、无穷小分割等数学方法，以演绎逻辑为主要证明方法，以率为纲纪，统率其全部数学知识，建立了自己的数学理论体系. 这个体系具有与古希腊以欧几里得(Euclid)《几何原本》为代表的公理化体系迥然不同的风格.

与古希腊哲学家都精通数学，数学家的哲学造诣都比较深的情况不同，中国古代数学活动与传统哲学活动关系并不十分密切. 这与中国传统哲学中自然哲学不够发达，而伦理哲学和社会哲学相当发达的状况有关. 这就造成了中国古代数学在理论概括和证明推理方面的薄弱，同时亦使它较少受到哲学思辨的干扰，讲求直观，没有悖论，不断在与生产生活的实际相结合的过程中得到发展. 毕达哥拉斯学派发现 $\sqrt{2}$ 和 1 没有公度而导致第一次数学危机，从此古希腊数学往往避开数量关系而专注于空间形式的研究，几何学特别发达. 与此相反，中国数学家没有这种矛盾的困惑，加之有当时世界最先进的十进位置制记数法和算筹进行运算，因而长于计算，代数学特别发达.

《九章算术》开方术提出："若开之不尽者为不可开"，这已具有无理数概念的萌芽. 正如在直观上圆与其内接多边形序列没有不可逾越的鸿沟一样，如果用 1 表示正方形一边，那么也一定可以用一个数精确地表示其对角线. 于是刘徽提出："少者多之始，一者数之母"，把任何数都看成与 1 有公度，进而创立开方不尽，继续开方求微数的方法，用十进分数表示无理数的近似值，开宋、金十进小数之先河. 使中国成为最早使用十进小数的国家，为他自己创造的圆周率计算方法和后来祖冲之求圆周率精确到八位有效数字提供了计算上的基础，这个意义是十分重大的. 但另一方面，又使得可以自由求无理数的近似值到实际所需的程度而不必考虑哲学上的困难，从而彻底堵塞了通向无理数的道路.

《九章算术》中的"方程章"，在世界数学史上最早使用了负数，并提出了正负数的加减法则"正负术". 在欧洲，16 世纪至 19 世纪都有人对负数的合理性表示怀疑. 如 19 世纪的德·摩根(De Morgan, A.)就说"$0-a$ 和 $\sqrt{-a}$ 同样是不可思议的". 可是在中国，负数应解决线性方程组的需要而产生，至刘徽给正负数的定义："今两算得失相反，要令正负以名之"，并指出孰正孰负，全依需要而定. 这样，他把负数上升到理性的高度，又不脱离实际需要. 于是负数的应用一直没有遇到麻烦.

中国现代数学哲学(the modern philosophy of mathematics in China)　数学哲学史名词. 指 20 世纪中国数学哲学的发展史. 中国真正开始现代数学研究是 1930 年以后的事情. 但此后从事现代数学研究的人员仍屈指可数，研究成果也少. 对当时的数学界影响还不大. 中华人民共和国的建立，变革了中国的社会制度和经济基础，要求上层建筑与之相适应，

要求科学技术为国家建设服务.数学家开始学习马克思主义哲学,考察和介绍苏联数学家理论联系实际所取得的成果,讨论理论与实践的关系,批判数学中的唯心主义和形而上学.数学界认识到数学理论联系实际的重要性和必要性.但也出现过"打倒欧家店"、"打倒柯家店"的"左"的口号.

1956年,全国制订《自然辩证法(数学的自然科学中的哲学问题)十二年(1956—1967)研究规划草案》提出了数学哲学研究纲要的雏形.为了落实规划,当时还决定在中国科学院哲学所成立自然辩证法组和创办《自然辩证法研究通讯》杂志.因此,1956年标志着中国数学哲学研究从政治学习进入了有计划的学术研讨阶段.

此后,一些数学家在数学对象、数学理论与实践的关系、批判数学中的唯心主义和形而上学等方面,发表过一些有影响的论文.关肇直的论文《论数学的对象》,从现代数学研究对象的扩大及其特点,把"空间形式和数量关系"改为"量的关系".他在《十年来中国数学界的学术思想》和对中国数学发展的一些看法论文中,批判了数学理论脱离实际的思想,阐述了两者的辩证关系,提出发展中国数学的一些看法.胡世华的长篇论文《数理逻辑的基本特征与科学意义》,全面而系统地论述了数理逻辑的科学性质、科学和哲学意义,为数理逻辑的发展扫清了思想障碍.

"文化大革命"一开始,数学哲学研究与其他社会科学研究一样被终止.1978年以后,数学哲学逐渐呈现出繁荣景象.研究领域从原来的理论与实践的关系,扩大到数学哲学的认识论、本体论、方法论、数学社会学等方面.研究成果是前四分之三世纪无法比拟的.据不完全统计,这一时期出版著作60多部,论文几百篇,译著10多部.主要讨论了下述问题:

1.理论上的拨乱反正.

鉴于"代替论"造成的思想混乱,首先需要理论上的拨乱反正.林夏水的论文《马克思的微分思想及其意义》,针对极"左"思潮对极限理论和非标准分析的否定,在数学界引起的思想混乱,根据微积分发展史和马克思在不同场合对微分思想的阐述,较完整地阐述了马克思的微分思想;说明马克思的哲学概括为微积分学的正确性提供了一种哲学依据,而不是为它奠定理论基础.黄顺基、张尚水、张家龙联名的论文《论公理方法》,针对极"左"思潮对公理方法的否定,阐明公理方法的科学意义.

2.本体论问题.

主要是研究现代数学的研究对象是什么,以及数学对象是具有客观性.关于现代数学的研究对象,胡世华的论文《质和量的对立统一与数学》,从质与量的对立统一出发,说明"现代数学是研究纯粹的量的科学";批判数理逻辑学家伯奈斯(Bernays,P.I.)用"质与结构的对立"代替"质与量的对立"的观点.胡国定的论文《论数学对象——兼论形式逻辑的本质》,则从化归的角度论述,"数学所直接研究的……是对实际对象经过理想化加工后的理想对象——纯粹的量",说明现代数学的研究对象是"纯粹的量".丁石孙的论文《谈谈数学的研究对象问题》认为:"数学的研究对象是客观世界的和逻辑可能的数量关系和结构关系."徐利治、郑毓信的论文《数学模式观的数学哲学》阐述数学本体论的观点:"数学对象是数学世界中的独立存在";"数学世界是抽象思维的产物;数学对象是借助于明确的定义逻辑地得到'构造'的",所以"数学对象就具有确定的'客观内容',并构成了数学研究的直接对象".

3.认识论问题.

徐利治和郑毓信根据其模式观的数学本体论,提出数学认识论的观点,即"数学思维——思维内容——新的数学思维——新的思维内容——……"由此可见,传统的认识公式就是一个过分简化了的模式:实践——认识——再实践——再认识——……"关于数学理论的真理性问题,提出了用"测度""作为数学真理性程度的标准或评估标准".

4.方法论问题.

这时期发表了方法论著作20多部,其中徐利治的《数学方法论选讲》及其主编的《数学方法论丛书》;解恩泽、徐本顺主编的《世界数学家思想方法》等,有较大影响.林夏水则从哲学方法论的高度,概括出"计算机实验"概念,并论述它是不同于传统的实物实验的一种新的科学实验形式.

5.学科前沿的哲学问题.

主要围绕分形几何及与之相关的混沌理论、概率论展开的.王梓坤的论文《论混沌与随机》,林夏水、董光璧、梁芳的《分形的哲学漫步》等,从自然观、时空观、认识论、方法论等方面,对混沌和分形几何的哲学问题作了较系统论述.

6.数学与科学技术、社会等方面的关系问题.

在这方面已出版了10多部著作,其中丁石孙教授主编的《数学·我们·数学》丛书,就数学与教育、军事、思维、哲学、经济、社会、语言、创造、文化的关系,组织专家、学者进行了深入浅出的论述.

此外,在数学思想史、数学哲学史等方面也开展了深入研究.

撰 稿 王 前 卢翼翔 吴学谋 邹大海 张祖贵 林夏水 徐炎章 郭小林 郭刘龙 梁 芳 冀建中

审 阅 邓宗琦 林夏水 解恩泽

数学名题与猜想

数学名题与猜想(famous problem and conjecture in mathematics)　数学专题栏目．德国数学家希尔伯特(Hilbert,D.)在1900年巴黎国际数学家大会上精辟地指出："只要一门科学分支能提出大量的问题，它就充满着生命力，而问题缺乏则预示着独立发展的衰亡或终止．正如人类的每项事业都追求着确定的目标一样，数学研究也需要自己的问题．正是通过这些问题的解决，研究者锻炼其钢铁般的意志和力量，发现新方法和新观点，达到更为广阔和自由的境界．"数学史就是数学问题解决的历史．古代的数学，例如，埃及的纸草书、巴比伦的泥板文书以及后来的中国的古算经、印度与阿拉伯的数学书就是以问题的形式存在的．以后形成的经典数学理论，其实就是解决数学问题的结果的逻辑整理．当代美国数学家哈尔莫斯(Halmos,P. R.)说过："问题是数学的心脏．"没有问题就没有数学，没有问题也就没有数学的发展．本栏目收集的条目(数学名题与猜想)，在选择的标准上有以下特点：

1．在数学发展史中，特别是在相应数学分支的创立过程中，有过深刻影响，至少是有一定作用的问题．例如，费马大定理、莫德尔猜想、柯克曼女生问题、希尔伯特的数学问题等．

2．对今后数学的研究与发展具有一定价值的问题．例如，庞加莱猜想、黎曼猜想、连续统假设等．

3．流传在数学界的一些热门课题．例如，$3x+1$问题．匈牙利数学家爱尔特希(Erdös,P.)针对这个问题说过："数学还没有发展到足以解决这样的问题．"有人甚至提议将$3x+1$问题作为下一个费马(大定理)问题．

撰写词条释文时尽量做到只用高等数学的基础知识，甚至只用初等数学知识就可以理解，尽量避免使用过分专门化的知识，叙述尽可能初等化．在词条的编排上以时间为序，这样有利于了解名题与猜想产生的时代特点，也可以了解不同时代的数学家研究工作的一些兴趣与特色．

一般地，每个词条尽可能详尽地提供有关名题与猜想的历史资料，以及当前的研究现状，以便于有兴趣的读者作为研究起点和文献参考．

勾股定理(pythagorean theorem)　人类最早认识的几何经典命题之一．该定理断言：在直角三角形中斜边的平方等于两条直角边的平方和．这个命题在中国被称为勾股定理或商高定理，在西方称为毕达哥拉斯定理或"百牛定理"，有人认为是古希腊数学家毕达哥拉斯(Pythagoras)发现的，或者至少是他最先证明的．据说发现者们杀了100头牛以示庆祝．据史料考证，巴比伦人最早发现了勾股定理．大约在公元前1700年的汉穆拉比时代的泥板上，已有需用勾股定理计算的题目．

勾股定理在中国有着悠久历史，"勾三，股四，弦五"的特殊形式，可以上溯到大禹治水时代(大约公元前21世纪)或者周公时代(公元前11世纪)．勾股定理的一般形式，最晚到公元前6—7世纪已经明确，并得到广泛应用．大约成书于公元前1世纪的《周髀算经》卷上之二是这样表述的："勾股各自乘，并而开方除之，得邪至日"，而《九章算术》(公元1世纪)更清楚地表述为："勾股各自乘，并而开方除之，即弦．"东汉末至三国时代的赵爽，利用弦图和出入相补原理巧妙地证明了勾股定理．

第一个完整而严格的证明，是古希腊数学家欧几里得(Euclid)在《几何原本》中给出的．勾股定理证法很多，可能是所有的数学定理中证法最多的．1968年，卢米斯(Loomis,E.)的《毕达哥拉斯命题》一书中，共收集了370种证法．

勾股定理是数学中最重要的基本定理之一，有着广泛的应用．20世纪80年代，科学界曾征集有史以来科学史上的10大发现，结果数学只有惟一的一条入选，就是勾股定理．

化圆为方问题(problem of quadrature of the circle)　古希腊三大几何作图问题之一．即仅用直尺与圆规是否可以作一正方形，使其面积等于已知圆面积．限定直尺只能过一点或两点画直线，圆规只能在已知圆心、半径时画圆．

化圆为方的最早研究者是古希腊哲学家安纳萨戈拉斯(Anaxagoras)，其后，还有一批希腊学者研究过这一问题．1882年，德国数学家林德曼(Lindemann,(C. L.)F. von)利用$e^{i\pi}=-1$推证出π是超越数(即π不是整系数多项式的根)，从而证明了尺规化圆为方是不可能的．

20世纪集合论出现后，化圆为方这个古老的问题，在现代数学中被推广为新的形式，不断地、深入地研究着，表明现代数学与初等数学没有不可逾越的鸿沟．

倍立方问题(problem of duplication of a cube)　古希腊三大几何作图问题之一．即仅用直尺与圆规是否可以作一立方体，使其体积是已知立方体的两倍．限定直尺只能过一点或两点画直线，圆规只能在

已知圆心、半径时画圆.

倍立方问题起源于古希腊神话传说. 在古希腊数学家埃拉托斯特尼(Eratosthenes)的《柏拉图》一书中,记述一个神话故事,后来为赛翁(Theon,(S))所引用:据说,当瘟疫袭击提洛岛(Delos,爱琴海南部一小岛)时,一个先知者称已得到神的谕示,必须将立方体的祭坛的体积加倍,瘟疫才可制止. 提洛岛人就去请教希腊哲学家柏拉图(Plato),于是产生了倍立方问题. 但按美国数学史家克莱因(Kline,M.)的说法是:希腊人用一正方形对角线为边作正方形,后者的面积是原正方形面积的两倍,由此引申出倍立方问题.

1837 年,法国数学家旺策尔(Wantzel,P.-L.)证明了:尺规倍立方是不可能的. 如果不限定尺规作图,则希腊人早已解决了倍立方问题. 古希腊毕达哥拉斯学派的希波克拉底(Hippocrates,(C))指出:设已知立方体的边长为 a,倍立方的边长为 x,则只要作出线段 a 与 $2a$ 间的两个比例中项即可. 具体地,只需作出 x,y 满足 $a:x=x:y=y:2a$. 不难证明:$x^3=2a^3$. 德国数学家比伯巴赫(Bieberbach,L.)证明了:如果使用直角尺和圆规,则可以完成倍立方作图.

三等分角问题(problem of trisection of an angle)　古希腊三大几何作图问题之一. 即仅用直尺与圆规是否可以三等分任意角. 限定直尺只能过一点或两点画直线,圆规只能在已知圆心、半径时画圆.

1837 年,法国数学家旺策尔(Wantzel,P.-L.)证明了可尺规作图的量必须满足一个 2^n 次的方程,进而推出:在一般情况下,尺规三等分任一角是不可能的. 这里的结论是有一定限制的,限定"一般情况下",因为存在无穷多个角是可以尺规三等分的. 例如,可以证明:当 m,n 是互素的正整数,且 n 不能被 3 整除时,角

$$\alpha=\frac{m}{n}\times 180^\circ \text{ 或 } \alpha=\frac{m\pi}{n}(\text{弧度})$$

是可以尺规三等分的. 显然,这样的 α 有无穷多.

尺规作图三等分任一角,只能得到近似值. 近似三等分任意角的尺规作图中,精度较高且作图简单的当属拉姆(Lamb,J.F.)在 1988 年给出的作图(见图 1). 设$\angle AOB$ 为已知角,以 O 为圆心画圆弧交两边于 A,B,BO 的延长线交圆于 D. 作$\angle AOB$ 的平分线 OC,取 OD 的中点 E,连结 EC,则

$$\angle CEB\approx\frac{1}{3}\angle AOB.$$

经计算,当$\angle AOB\leqslant 90^\circ$时,

$$0<\angle CEB-\frac{1}{3}\angle AOB<22'.$$

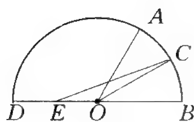


图1

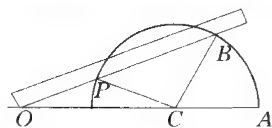


图2

如果不限定尺规作图,则最简单的三等分角的方法是古希腊数学家阿基米德(Archimedes)给出的,如图 2 所示. 在直尺边缘上添加一点 P,命尺端为 O. 设所要三等分的角是$\angle ACB$,以 C 为圆心,OP 为半径作半圆交角边于 A,B. 使点 O 在 AC 延长线上移动,使点 P 落在圆周上且使尺通过点 B,连结 OB. 由于 $OP=PC=CB$,则

$$\angle AOB=\frac{1}{3}\angle ACB.$$

德国数学家比伯巴赫(Bieberbach,L.)证明了:如果使用直角尺和圆规,则可以三等分任一角. 1982 年,邓肯(Dynkin,E.B.)和巴尼厄(Barnier,W.)证明了:在一般情况下,尺规作图 p 等分任意角是不可能的,其中 p 为奇素数.

欧几里得第五公设(Euclid fifth postulate)　创立非欧几何的经典命题. 古希腊数学家欧几里得(Euclid)的《几何原本》第一卷中列举了 23 个定义、5 条公设、5 条公理,由此推证出 48 个命题. 第五条公设的全文如下:"若两条直线被一直线截得的一组同侧内角之和小于二直角,则适当延长这两条直线,必在和小于二直角的一侧相交."此公设与其他 4 条公设、5 条公理相比,不但比较复杂而且也不显而易见. 欧几里得用第五公设证明命题也出现的较晚,直到命题 29 才第一次引用第五公设. 23 个定义中平行直线的定义也排在最后. 因此,人们认为欧几里得这样做,是一时证明不出第五公设,不得已而为之,并不认为第五公设是不可证明的.

《几何原本》问世后,试证第五公设的活动也即开始. 所谓证明第五公设,就是用前 4 个公设、5 个公理以及由它们推证出的命题来证明第五公设. 人们陆续给出各种证明,但都犯了同一种错误:在论证过程中不知不觉地引进了未加证明的新假设. 因此,这种"证明"并没有减少公理,只不过用第五公设等价的新公理代替第五公设而已. 例如,古希腊数学家普罗克洛斯(Proclus)的证明中引进了新假设:"两平行直线间的距离是有限的."

1795 年,英国数学家普莱费尔(Playfair,J.)在《几何原理》一书中使用等价命题:"两条相交直线不能平行于同一条直线",后来又发展成"在平面上,过直线外一点只能作一条直线与已知直线平行". 这就是目前中学课本中使用的平行公理,通常称为普莱费尔公理. 法国数学家克莱罗(Clairaut,A.-C.)引进的假设是"若四边形有 3 个角是直角,则第 4 个角

也是直角”(1741). 意大利数学家萨凯里(Saccheri, G.)在1733年出版的《免除所有污点的欧几里得几何》中,试图使用反证法证明第五公设:假定第五公设或其等价命题不成立,由此导出矛盾. 萨凯里考虑如下的四边形 $ABCD$:相邻的 $\angle A$ 与 $\angle B$ 都是直角,且 $AD=BC$. 不用第五公设可证出 $\angle C=\angle D$. 于是有3种可能:

1. $\angle C$ 和 $\angle D$ 都是直角(直角假设).
2. $\angle C$ 和 $\angle D$ 是相等的钝角(钝角假设).
3. $\angle C$ 和 $\angle D$ 是相等的锐角(锐角假设).

其中直角假设与第五公设等价. 萨凯里假定直角假设不成立,希望由此导出矛盾. 萨凯里很容易否定了钝角假设. 然后,假设 $\angle C$ 与 $\angle D$ 是锐角时,推出了一系列令人难以置信的结论. 例如,他证出:过一直线 a 外一点 M 的所有直线可分成两类,一类与 a 有公共点,另一类与 a 没有公共点,而这两类直线的分界直线是与 a 没有公共点且与 a 越来越逼近的渐近线. 诸如此类的结论是超出当时人的想象的. 虽然一直没有引出矛盾,但他认为这些结论与人的经验不相容,而断定锐角假设不成立,于是他认为证明了第五公设. 其实萨凯里在锐角假设下所推出的结论表明,在欧几里得《几何原本》中,可以用直角假设代替第五公设而得出欧几里得几何学,也可以用与第五公设相矛盾的锐角假设代替第五公设而得出与欧氏几何不同的新几何学. 萨凯里没有看出这一点,失去了发现新几何学的机会.

德国数学家朗伯(Lambert, J. H.)考虑有3个直角的四边形,对于第4个角,从逻辑上可作出直角、钝角、锐角三种假设. 他看到直角假设等价于第五公设,钝角假设虽然与欧氏几何矛盾,但是导出的结论却与球面几何学的定理相一致,而从锐角假设推证出的结论可用于虚半径球面上的图形. 他认为,只要一种假设不导致逻辑矛盾,就能提供一种几何学.

萨凯里、朗伯等人都因为试证第五公设而成为非欧几何的先驱者. 非欧几何也在试证第五公设的过程中逐渐成熟,最终由德国数学家高斯(Gauss, C. F.)、俄罗斯数学家罗巴切夫斯基(Лобачевский, Н. И.)、匈牙利数学家波尔约(Bolyai, J.)完成.

欧几里得素数定理(Euclidean prime number theorem) 数论中一个最基本的经典命题. 该定理断言:预先任意给定 n 个素数,则有比它们更多的素数. 这是希腊数学家欧几里得(Euclid)的《几何原本》第9卷中的命题20,称为欧几里得素数定理. 它提出素数的个数比任何预先指定的数都要多,因此素数个数有无穷多. 英国数学家哈代(Hardy, G. H.)誉之为数学中最高水平的定理.

欧几里得证明的关键在于,构造一个数 E 等于已知素数之积加上1,则 E 或者是素数,或者含有素数因子 p,而 p 不可能等于已知素数中的任一个. 他的证明是经典性的,开创了构造法证明的先例,对后世的数学研究及数学思想产生了很深刻的影响.

设 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是前 n 个素数,称

$$E_n = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$

为欧几里得数. 利用欧几里得数可以证明两个相邻素数的间隔可以任意大,即对于任意给定的自然数 k,存在 k 个连续合数. 这只要取

$$p_n > k, E_n = p_1 p_2 \cdots p_n + 1,$$

则 k 个数:$E_n+1, E_n+2, \cdots, E_n+k$ 即为连续 k 个合数. 正如欧几里得证明中所叙述的,E_n 可能是素数,也可能不是素数. 那么素数 E_n 有多少?直到1995年4月,人们在 $p_n<35000$ 范围内只发现了18个 p_n 使 E_n 为素数,它们是2,3,5,7,11,31,379,1019,1021, 2657, 3229, 4547, 4787, 11549, 13649,18523,23801,24029. 随着 p_n 的增大,对应的 E_n 都是很大的数. 例如,$p_n=24029$ 对应的

$$E_n = 2\times 3\times 5\times 7\times 11\times 13\times \cdots \times 24029+1$$

是一个10387位数,高速电子计算机花费了约4天时间才证明它是素数. 人们试图从理论上确定素数 E_n 是否有无穷多,这方面的工作目前尚未解决.

后人依照欧几里得的证法又给出如下的证明:设已知的素数中最大不超过 n,取 $E=n!+1$,则 E 本身可能是素数,或可能有素因数 p,都得出不同于已知素数的素数. 由此引发出:形如 $n!+1$ 的素数有多少? 在 $n<4580$ 范围内,人们仅发现17个 n 值使 $n!+1$ 为素数,它们是 $n=1,2,3,11,27,37,41,73,77,116,154,320,340,399,427,872,1477$. 形如 $n!+1$ 的素数是否有无穷多? 至今未获解决.

完全数问题(perfect number problem) 关于完全数的存在性与无穷性的一组数论难题. 若正整数 n 的所有正因数之和等于 $2n$,则称 n 为完全数. 可表达为 $\sigma(n)=2n$,式中 $\sigma(n)$ 是 n 的所有正因数之和. 人们问道:完全数是否有无穷多?

早在古希腊人们就知道了两个完全数:6,28. 数学家欧几里得(Euclid)的《几何原本》中曾给出过完全数的定义,并证明了完全数的一个重要性质:如果 2^p-1 是素数,则 $2^{p-1}(2^p-1)$ 是完全数. 这是构造偶完全数的一个充分条件. 18世纪,瑞士数学家欧拉(Euler, L.)又进一步证明了一个偶完全数必有 $2^{p-1}(2^p-1)$ 的形式,其中 2^p-1 是素数(此时,p 必然也是素数). 于是偶完全数与梅森素数 M_p 之间建立了一一对应关系:任一个偶完全数为 $2^{p-1}M_p$.

公元1世纪,古希腊毕达哥拉斯学派的晚期学者尼科马霍斯(Nicomachus, (G))给出了4个完全数:6,28,496,8128. 相当于 $p=2,3,5,7$ 时对应的

$2^{p-1}M_p$. 此后1000多年寻找完全数的工作毫无进展. 大约在1460年，一位无名氏找到了第5个完全数：33550336，该数是与$p=13$对应的. 1536年，雷吉阿斯(Hudalricus, R.)又重新发现了第5个完全数. 意大利数学家卡塔尔迪(Cataldi, P. A.)于1603年在他的著作中指出，他早在1588年就得到第5，6，7个完全数，其中第6，7两个完全数是$p=17$，19对应的. 此后，由于完全数的研究与梅森素数联系在一起，特别是20世纪50年代计算机成为寻求完全数的有力工具，直到1997年8月共发现了36个完全数.

到现在为止，人们所知道的完全数都是偶数，且都有$2^{p-1}M_p$的形式. 由于梅森素数是否有无限多尚不为人所知，因而偶完全数是有限还是无限也不得而知. 关于奇完全数一个也未曾发现，但是也未证明它不存在；仅知道形如$4n+3$的数不是完全数. 对于形如$4n+1$的数，只是给出了它成为完全数的一些必要条件. 例如，不能被3整除的奇完全数至少含有11个不同素数因子. 1991年，布伦特(Brent, R. P.)等3人证明了：如果奇完全数存在，则它必大于10^{300}. 人们倾向于奇完全数是不存在的. 奇完全数的存在性问题，是数学中年代最为久远的未获解决的著名问题之一.

完全数概念已推广到多完全数：当$\sigma(n)=kn$时，称n为k完全数. 到20世纪80年代，人们已经知道了6个三完全数：$2^3\cdot3\cdot5$，$2^5\cdot3\cdot7$，$2^8\cdot5\cdot7\cdot19\cdot37\cdot73$，$2^9\cdot3\cdot11\cdot31$，$2^{13}\cdot3\cdot11\cdot43\cdot127$，$2^{14}\cdot5\cdot7\cdot19\cdot31\cdot151$. 同样，人们没有发现奇数的三完全数. 1984年，基索尔(Kishore, M.)证明，如果奇数的三完全数存在的话，它应大于10^{50}. 1985年，他又证明奇数的三完全数必须有11个不同素数因子. 到1998年6月，已知的多完全数如下表所示.

k	3	4	5	6	7	8	9	10
个数	6	36	65	245	516	1101	1129	46

阿基米德公理(Archimedean axiom)　经典几何中的重要命题. 对于任意两条线段AB和CD，在线段AB上存在有限个点$A_1, A_2, \cdots, A_n$，使线段$AA_1, A_1A_2, \cdots, A_{n-1}A_n$都合同于线段$CD$，且点$B$在$A$与$A_n$之间. 即两给定线段中较短线段延长足够多倍，必可超过较长线段. 这条公理是古希腊数学家阿基米德(Archimedes)在他的杰作《论球与圆柱》中提出的第5条公理. 阿基米德明确地把它归功于古希腊数学家、天文学家欧多克索斯(Eudoxus, (C))，因此，此公理也称为欧多克索斯公理. 后来，德国数学家希尔伯特(Hilbert, D.)在他的数学名著《几何基础》(1899)中，将阿基米德公理列为他的几何公理系统中的连续公理之一.

一般地，阿基米德公理适用于很多的量：对于任意给定的两个正实数a, b，必存在自然数n，使得$na>b$. 它是算术和几何中的辗转相除法或辗转相截法的依据. 阿基米德公理的重要性，只是在19世纪发现了不适用这个公理的量，即所谓非阿基米德量之后，才充分显示出来.

1960年，美籍德国数理逻辑学家鲁宾孙(Robinson, A.)提出的非标准实数域R^*，则是一种非阿基米德实数域. 在R^*上可建立起微积分等各种现代数学学科，称为非标准分析、非标准数学. 可见古老的阿基米德公理的深刻性.

欧几里得几何学中，由希尔伯特公理系统中的关联、顺序、合同与平行等(与连续公理无关的)公理推导出的几何学命题全体，构成了非阿基米德几何学. 狭义地说，非阿基米德几何学是用来刻画非阿基米德直线(即，使得阿基米德公理不成立的直线)的几何性质. 在非阿基米德几何学中，存在等底等高的三角形，它们拼补相等，却非剖分相等. 拼补相等的多角形面积相同，而且面积相同的两个多角形总是拼补相等. 关于直角三角形的毕达哥拉斯定理在非阿基米德几何学中也成立.

非阿基米德几何学的重要意义在于，它在欧几里得空间希尔伯特公理系统的独立性和相容性研究中的作用；也在于澄清了欧几里得几何学以希尔伯特公理为基础的构造中，连续公理所起的作用；特别是，没有连续公理就不能证明欧几里得平行公理等价于三角形内角和定理.

阿基米德群牛问题(Archimedes' cattle problem)　一道著名的古希腊数论问题. 公元前3世纪，古希腊数学家阿基米德(Archimedes)以短诗形式写给希腊地理学家、数学家埃拉托斯特尼(Eratosthenes)的信中提出的问题. 大意是太阳神有一群牛放牧在西西里岛上，由白、黑、黄、花4色公牛与母牛组成. 在公牛中白牛数比黄牛数多了黑牛数的

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3};$$

黑牛数比黄牛数多了花牛数的

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5};$$

花牛数比黄牛数多了白牛数的

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{7}.$$

白母牛数是所有黑牛数的

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4};$$

黑母牛数是所有花牛数的

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5};$$

花母牛数是所有黄牛数的

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6};$$

黄母牛数是所有白牛数的

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{7};$$

并且全体黑公牛与白公牛构成正方形，而全体黄公牛与花公牛组成三角形. 求太阳神的牛群有多少头牛?

德国评论家、剧作家莱辛(Lessing, G. E.)在沃尔芬比特尔(Wolfenbüttel)图书馆发现了这个问题的 22 行诗文形式的手抄本，并在 1773 年发表出来. 设 W, X, Y, Z 分别表示白、黑、黄、花色的公牛数，w, x, y, z 分别表示白、黑、黄、花色的母牛数. 依题意有:

$$W=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)X+Y,$$

$$X=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)Z+Y,$$

$$Z=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)W+Y,$$

$$w=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)(X+x),$$

$$x=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)(Z+z),$$

$$z=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)(Y+y),$$

$$y=\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)(W+w).$$

$$W+X=\text{正方形},\quad Y+Z=\text{三角形}.$$

对于条件“$W+X=$正方形”有两种理解:

1. 将正方形解释成完全平方数，此时称为完全问题.

2. 牛布列成长方形，长与宽不等，故

$$W+X=m\cdot n\quad(m\neq n).$$

1830 年，沃姆(Wurm, J. F.)首先按此种解释求解群牛问题，因此称之为沃姆问题.

群牛问题是很难解决的问题. 1880 年，阿姆卓(Amthor, A.)是第一个按完全问题求解的，并得出 $W\approx 1.598\times 10^{206544}$，牛的总数 $T\approx 7.766\times 10^{206544}$. 1895 年，贝尔(Bell, A. H.)在《美国数学月刊》上发表文章，给出结果的前 32 位数，但只有前 30 位数是正确的. 1981 年，纳尔逊(Nelson, H. L.)使用 CRAY—1 计算机大约 10 分钟求得最小解. 1998 年，瓦迪(Vardi, I.)系统地给出群牛问题的求解. 首先，他求解前 7 个方程得出参数解

$$\begin{aligned}S&=(W,X,Y,Z,w,x,y,z)\\&=(10366482, 7460514, 4149387,\\&\quad 7358060, 7206360, 4893246,\\&\quad 5439213, 3515820)n.\end{aligned}$$

式中 n 为任意正整数，且括号内各分量要与 n 相乘；然后，利用中国剩余定理，求出沃姆问题的最小解是

$$\begin{aligned}S=(&1217263415886,\ 876035935422,\\&487233469701,\ 864005479380,\\&846192410280,\ 574579625058,\\&638688708099,\ 412838131860),\end{aligned}$$

群牛总数 $T=5916837175686$.

接着，利用佩尔方程、连分数理论和模算术理论得出完全问题的解公式是

$$S=\left\lceil\left(\frac{159}{5648},\frac{801}{39536},\frac{891}{79072},\frac{395}{19768},\frac{128685}{6575684},\frac{2446623}{184119152},\frac{5439213}{368238304},\frac{125565}{13151368}\right)\times\varepsilon^{4658n}\right\rceil;$$

牛的总数

$$T=\left\lceil\frac{25194541}{184119152}\times\varepsilon^{4658n}\right\rceil,$$

式中 $\lceil x\rceil$ 表示不小于 x 的最小整数，n 为任意正整数，$\varepsilon=109931986732829734979866232821433543901088049+50549485234315033074477819735540408986340\sqrt{4729494}$，而式子 $\lceil(a,b,\cdots,c)\times d\rceil=(\lceil ad\rceil,\lceil bd\rceil,\cdots,\lceil cd\rceil)$.

圆周率问题(problems of the ratio of the ciroumference of the circle to the diameter)　关于圆周长与直径之比的性质与计算问题. 该问题已有几千年的历史，至今尚有许多未解决的问题. 任一圆的周长与其直径之比为一恒定常数，称此常数为圆周率. 圆周率一般用希腊字母 π 来表示. 它源于英国数学家琼斯(Jones, W.). 1706 年，琼斯在他的《新数学引论》中首次使用 π 代表圆周率. π 是希腊文 περιφερεια(圆周)的第一个字母. 1736 年，在瑞士数学家欧拉(Euler, L.)的倡导下才通用起来，现在 π 已成为表示圆周率的专有符号.

中国古代最早的一部算书《周髀算经》中有“周三径一”之说，古代埃及、巴比伦、印度、日本以及《圣经》中都有圆周率为三的记载.

π 值的计算主要有三种方法:

第一种方法是古典的几何方法. 古希腊数学家阿基米德(Archimedes)在其著名的论文“圆的度量”中首创的方法：递归的计算圆外切与圆内接正多边形的周长及该圆直径之比. 阿基米德从正 6 边形起直算到正 96 边形得出

$$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}.$$

第一次在科学中用上、下界来确定 π 的近似值，从而提供了近似数误差的估计. 中国数学家刘徽独创了割圆术. 用圆内接正多边形单侧逼近圆周，得到一个不等式，用现代符号表示，即:

$$S_{2n}<S<S_n+2(S_{2n}-S_n),$$

其中 S 表示圆周长，S_n 为圆内接正 n 边形周长. 刘徽对割圆术有深刻的论述："割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体无所失矣."这里暗示着"无限过程完成"的思想萌芽. 从圆内接正 6 边形起算，边数递次加倍，直到正 96 边形，得到 $\pi\approx3.14$，通常称为徽率. 中国南北朝时期的数学家祖冲之又发展了刘徽的成果，得到

$$3.1415926<\pi<3.1415927.$$

这一记录在世界上保持了 900 多年. 祖冲之还引进了密率 355/113 以及约率 22/7. 密率在欧洲迟至 1573 年才由荷兰数学家奥托(Otho, V.)发现，比祖冲之晚了 1100 多年.

1596 年，德国数学家柯伦(Ceulen, L. van)利用圆的内接和外切正 15×2^{35} $(=515396075520)$ 边形，将 π 值计算到小数点后 20 位. 1615 年，奥地利籍波兰数学家鲁多尔夫(Rudolff, C.)用毕生精力，用维叶特方法算到 2^{62} 边形，求出 π 的 35 位小数，被称为鲁多尔夫数. 这是用古典的几何方法计算 π 值的最高记录.

第二种方法是分析的方法. 1593 年，法国数学家韦达(Viete, F.)发现了

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$

日本数学家关孝和等人利用此式计算 π 值到小数点后 50 位.

1671 年，苏格兰数学家格雷果里(Gregory, J.)得出

$$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots$$

1706 年，英国数学家梅钦(Machin, J.)利用上述的格雷果里级数建立了一个重要公式

$$\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239},$$

并由此公式算出 π 的小数点后 100 位. 此后，梅钦公式的变式不断出现. 例如，欧拉曾得出

$$\frac{\pi}{4}=5\arctan\frac{1}{7}+2\arctan\frac{3}{79}.$$

利用此式及有关的级数，欧拉曾在 1 小时内算出 π 的小数点后 20 位数.

1874 年，英国数学家威廉·尚克斯(Shanks, W.)利用梅钦公式计算到小数点后 707 位数. 1945 年，英国人弗格森(Ferguson, D. F.)发现小数点后第 528 位数是错的.

1949 年，美国人伦奇(Wrench, J. W. Jr)和史密斯(Smith, L. B.)计算到小数点后 1120 位. 这是人工计算 π 的最高记录.

1946 年，世界第一台电子计算机 ENIAC 制造成功，人类进入电脑时代. 1949 年，雷特威斯纳(Reitwiesner)等人使用梅钦公式在 ENIAC 上仅用 10 小时就计算到小数点后 2037 位. 1961 年 7 月，丹尼尔·尚克斯(Daniell-Shanks, D.)和伦奇利用梅钦公式的变式

$$\frac{\pi}{4}=6\arctan\frac{1}{8}+2\arctan\frac{1}{57}+\arctan\frac{1}{239},$$

在 IBM709 型计算机上算出 100265 位. 1973 年，吉尔拉德(Guillard)和布耶(Bouyer)使用梅钦公式的变式在一台 CDC7600 机上通过小数 1 百万位大关.

第三种方法是基于椭圆积分变换理论. 椭圆积分的变换理论与 π 的快速逼近之间存在着紧密联系. 印度数学家拉马努金(Ramanujan, S. A)在 1914 年的论文"模方程和 π 的逼近"中提出了这一思想. 他发现了一些新的收敛较快的无穷级数公式，例如

$$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!}{(n!)^4}\cdot\frac{1103+26390\cdot n}{396^{4n}}.$$

这个级数的每一项对计算结果都会增加 8 位准确数字. 1985 年，戈斯波(Gosper)利用该公式将 π 计算到小数 1700 万位，准确地说是 17526200 位. 1994 年，哥伦比亚大学的戴维·查德诺斯基(Chudnovsky, D.)与格雷戈里·查德诺斯基(Chudnovsky, G.)兄弟俩利用与拉马努金级数相类似的级数

$$\frac{1}{\pi}=12\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(6n)!}{(3n)!(n!)^3}\cdot\frac{13591409+545140134\,n}{640320^{3n+3/2}},$$

使 π 的计算突破小数 40 亿位大关. 此级数的每一项对计算结果增加 14 个准确数字.

1976 年，萨拉明(Salamin, E.)和布伦特(Brent, R. P.)各自独立地发现了 π 的新算法. 该算法基于德国数学家高斯(Gauss, C. F.)提出的算术-几何平均值迭代法. 萨拉明-布伦特算法如下：

设 $a_0=1, b_0=1/\sqrt{2}, s_0=1/2$. 对于 $n\geqslant1$，有

$$a_n=\frac{1}{2}(a_{n-1}+b_{n-1}),\quad b_n=\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}},$$

$$c_n=a_n^2-b_n^2,\quad s_n=s_{n-1}-2^nc_n,\quad p_n=\frac{2a_n^2}{s_n}.$$

而 p_n 平方收敛于 π，这个算法的每次迭代大致使正确位数加倍. 东京大学金田安政(Kanada)多次使用上述方法以及计算速度更快的 4 次方算法，在 1995 年应用日立超级计算机使 π 值突破 64 亿位大关，计算到 6442450938 位.

人们如此热衷于 π 值的计算，在 18 世纪中叶以前是考虑 π 是否是循环小数，即 π 是有理数还是无理数. 1761 年，德国数学家朗伯(Lambert, J. H.)运

用连分数理论证明了 π 是无理数. 他首先证明了

$$\tan x=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{\ddots}}}}$$

然后，利用无限递降法证明了：如果 x 是非零有理数，那么上式的右边就是无理数. 假设 $x=\pi/4$ 是有理数，代入上式，则右边应为无理数，也即 $\tan\pi/4$ 是无理数，但 $\tan\pi/4=1$，导致矛盾，故 $x=\pi/4$ 是无理数，进而 π 是无理数. 朗伯的证明使人们对 π 的数论性质的认识有了重大突破. 近现代计算 π 值，一方面可以检测计算机硬件与软件的完整性程度；另一方面可以促进计算技术的研究与发展；第三方面有利于 π 的数论性质的研究. 由于 π 是重要的普适常数，人们的研究引出了许多未解决的问题：

1. 是否存在一种计算模式，能单独计算 π 的十进制小数表示中的第 n 位数字，而无需计算它之前的所有数字？其中 n 为任意正整数.

2. π 的正则性猜想：π 是否是正则的？即在 π 的十进制小数表示中，任何一个数字(0,1,2,…,9)出现的极限频率是否是 0.1？而任何一个由 n 个数字组成的数字串出现的极限频率是否是 10^{-n}？这是一个涉及 π 的十进小数表示中数字出现的随机性问题. 例如，荷兰数学家布劳威尔(Brouwer, L. E. J.)为了逻辑上的目的，提出过这样一个问题：“在 π 的十进制表示式中，能否有 1000 个相邻的数字全是 0？”

1988 年，贝利(Bailey, D. H.)对 π 的 2936 万位的统计分析所得的结论是：没有发现 π 不是正则的. 表 1 是他对单个数字 0,1,2,…,9 出现频数的统计，其频率很接近 0.1.

表 1　**单个数字的频数统计**

数　字	频　数	频　率
0	2935072	0.0999
1	2936516	0.1000
2	2936843	0.1000
3	2935205	0.0999
4	2938787	0.1001
5	2936197	0.1000
6	2935504	0.0999
7	2934083	0.0999
8	2935698	0.0999
9	2936095	0.1000

表 2　**00—99 的频数统计**

00	293062	01	293970	02	293533	03	292893	04	294459
05	294189	06	292688	07	292707	08	294260	09	293311
10	294503	11	293409	12	293591	13	294285	14	294020
15	293158	16	293799	17	293020	18	293262	19	293469
20	293952	21	293226	22	293844	23	293382	24	293869
25	293721	26	293655	27	293969	28	293320	29	293905
30	293718	31	293542	32	293272	33	293422	34	293178
35	293490	36	293484	37	292694	38	294152	39	294253
40	294622	41	294793	42	293863	43	293041	44	293519
45	293998	46	294418	47	293616	48	293296	49	293621
50	292736	51	294272	52	293614	53	293215	54	293569
55	294194	56	293260	57	294152	58	293137	59	294048
60	293842	61	293105	62	294187	63	293809	64	293463
65	293544	66	293123	67	293307	68	293602	69	293522
70	292650	71	294304	72	293497	73	293761	74	293960
75	293199	76	293597	77	292745	78	293223	79	293147
80	292517	81	292986	82	293637	83	294475	84	294267
85	293600	86	293786	87	293971	88	293434	89	293025
90	293470	91	292908	92	293806	93	292922	94	294483
95	293104	96	293694	97	293902	98	294012	99	293794

表 3　**弗格森的统计**

数　字	频　数	频　率
0	60	0.099
1	62	0.102
2	67	0.110
3	68	0.112
4	64	0.105
5	56	0.092
6	62	0.102
7	44	0.072
8	58	0.095
9	67	0.110

表 2 是他对 2 个数字组成的数字串(从 00 直到 99)出现频数的统计，由此不难算出它的各项频率很

接近0.01.人们猜想 π 是正则的，但至今未获理论上的证明.虽然这一猜想并未获证，但弗格森对尚克斯所得的 707 位小数中的前 608 位数，各个单个数字(0—9)出现的频数与频率做了统计(见表 3)，发现有的数字出现的频率与 0,1 相差较大，因而，怀疑尚克斯的计算有误.经过一年的计算，弗格森终于发现尚克斯的 π 值的小数点后第 528 位数是错的.有人认为，π 的正则性猜想是一个完全超越了当代数学与计算技术的难题.

3.哈肯猜想.取 π 的十进小数表示式的前几个数字，按原顺序组成的多位数数列

$$3,31,314,3141,31415,\cdots$$

美国数学家哈肯(Haken,W.)曾在 1977 年他的论文“试解四色问题”里，提出这些数中不会有完全平方数.他认为这个猜想不成立的可能性只有 10 亿分之一.

4.π 与 e 的组合问题.1882 年，德国数学家林德曼(Lindemann,(C. L.)F. von)利用欧拉公式 $e^{\pi i}=-1$证明了 π 是超越数(即 π 不是整系数代数方程的根).使人们对 π 的数论性质的认识再度深化.那么$\pi+e,\pi/e$ 是否是超越数？现在连它们是否是无理数都不知道.

阿波罗尼奥斯问题(Apollonius problem)　几何作图中的一个著名的问题.即在平面上，作一个圆与三个已知圆相切.这是古希腊著名的几何学家阿波罗尼奥斯(Apollonius,(P))在他的著作《论接触》中提出的.上述的已知圆包括退化圆：点(半径为 0 的圆)或直线(半径为无穷大的圆).因此，这个问题共有 10 种可能情形：

1.作一个圆过三个已知点.

2.作一个圆过两个已知点且与一已知直线相切.

3.作一个圆过一个已知点且与二已知直线相切.

4.作一个圆与三条直线相切.

5.作一个圆过两个已知点且与一个已知圆相切.

6.作一个圆过一个已知点且与两个已知圆相切.

7.作一个圆与两条已知直线和一个已知圆相切.

8.作一个圆与一条已知直线和两个已知圆相切.

9.作一个圆过一个已知点且与一条已知直线和一个已知圆相切.

10.作一个圆与三个已知圆相切.

其中最著名的是情形 10.

1600 年，法国数学家韦达(Viete,F.)在一篇论著中应用了两个圆的相似中心的欧几里得解法，通过对每一情形的讨论，严格陈述了该问题的解.后来，英国科学家牛顿(Newton,I.)、法国数学家蒙日(Monge,G.)、德国数学家高斯(Gauss,C. F.)等许多数学家都对这一问题进行过研究，得到多种解决方法，其中以法国数学家热尔岗(Gergonne,J.-D.)大约在 1813 年给出的解法较有代表性.他先画出各已知圆的等幂心与相似轴，然后确定与已知圆有关的极点，最后得到所求圆与已知圆的切点.

孙子问题(Sun Zi problem)　一道著名古算题.中国古代约公元 3 世纪成书的《孙子算经》卷下第 26 题：“今有物不知其数，三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二，问物几何？答曰：二十三.”用同余式表示，就是求一次同余方程组

$$\begin{cases} x\equiv 2(\bmod 3), \\ x\equiv 3(\bmod 5), \\ x\equiv 2(\bmod 7), \end{cases}$$

其最小正整数解是 23.《孙子算经》中给出算法如下：“凡三三数之剩一，则置七十；五五数之剩一，则置二十一；七七数之剩一，则置十五.”意思是“三三数之剩一”就给出一个数 70.题中“剩二”就给出 70×2；“五五数之剩一”给出数 21，题中“剩三”就给出 21×3；“七七数之剩一”给出数 15，“剩二”则给出数 15×2.然后按下式计算

$$x=70\times 2+21\times 3+15\times 2-105\times 2=23.$$

明代数学家程大位在《算法统宗》(1592 年)中，把孙子算法编撰成歌谣：

“孙子歌曰：三人同行七十稀，
五树梅花廿一枝，
七子团圆正半月，
除百零五便得知.”

1247 年，宋代数学家秦九韶在《数书九章》中，将孙子算法推广，第一次详细地、完整地阐述了求解一次同余方程组的算法——大衍总数术.大衍总数术由三部分组成：第一部分是化非两两互素的模数为两两互素的模数的算法；后两部分用现代符号表示就是设 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 是 n 个两两互素的正整数，$M=m_1m_2\cdots m_n$，$M_i=M/m_i\,(i=1,2,\cdots,n)$，则一次同余方程组

$$\begin{cases} x\equiv b_1(\bmod\ m_1), \\ x\equiv b_2(\bmod\ m_2), \\ \quad\vdots \qquad \vdots \\ x\equiv b_n(\bmod\ m_n) \end{cases}$$

的解是

$$x\equiv M_1k_1b_1+M_2k_2b_2+\cdots+M_nk_nb_n\ (\bmod\ M),$$

式中 k_i，秦九韶称之为乘率，满足

$$M_ik_i\equiv 1(\bmod\ m_i)\ (i=1,2,\cdots,n).$$

秦九韶给出了求乘率 k_i 的一种机械化算法——大衍求一术.

在西方与《孙子算经》同类的算法，最早见于1202年意大利数学家斐波那契(Fibonacci, L.)的《算法之书》，同样没有证明. 而与秦九韶"大衍求一术"同类的算法，直到1801年才由德国数学家高斯(Gauss, C. F.)得到，比秦九韶晚554年. 1852年，英国传教士伟烈亚力(Wylie, A.)最早将"大衍求一术"介绍到西方，而为欧洲人所知，称之为中国剩余定理或孙子定理. 孙子问题的影响深远，它不仅在数论中有着重要应用，而且在数学的许多其他分支以及一些应用学科都要用到它. 近些年来，又在计算机方面获得应用.

丢番图问题(Diophantus problem)　关于一类特殊数组的著名难题. 它是公元3世纪，古希腊数学家丢番图(Diophantus)提出的问题：求4个有理数，使得其中任两个数之积加上1都是一个有理数的平方. 他找到的解是

$$\left\{\frac{1}{16}, \frac{33}{16}, \frac{17}{4}, \frac{105}{16}\right\}.$$

到了17世纪，法国数学家费马(Fermat, P. de)找到了一个正整数解 $\{1, 3, 8, 120\}$，并且提出问题：能否有第5个整数增加到这个数集中，使得这个新数集也满足丢番图条件？这个问题直到1969年才得到了否定的回答，达文波特(Davenport, H.)和贝克(Baker, A.)证明了120是惟一一个能加入 $\{1, 3, 8\}$ 而满足丢番图条件的整数. 瑞士数学家欧拉(Euler, L.)也研究过丢番图问题并得出下列结论：如果 $ab+1$ 是一个完全平方数，则4数组 $\{a, b, a+b+2\sqrt{ab+1}, 4(a+\sqrt{ab+1})(b+\sqrt{ab+1})\sqrt{ab+1}\}$ 是丢番图问题的解. 当 $a=1, b=3$ 时即得费马的解. 显然欧拉给出了无穷多个丢番图问题的解. 1977年，霍盖特(Hoggatt, V. E.)和伯格姆(Bergum, G. E.)证明了4数组

$$\{F_{2n}, F_{2n+2}, F_{2n+4}, 4F_{2n+1} \cdot F_{2n+2} \cdot F_{2n+3}\}$$

也是解，式中 F_n 是第 n 个斐波那契数($F_1 = F_2 = 1$). 实际上这已包含在欧拉的解中了. 使用递归理论和求解佩尔方程的经典方法，1976年，英国数学家琼斯(Jones, W.)找到了所有的无穷多个整系数多项式 $c(x)$ 与 $d(x)$ 使得4数组 $\{x, x+2, c(x), d(x)\}$ 是丢番图问题的解，即其中任两个多项式之积加1等于某个整系数多项式的平方.

现在尚未解决的问题有：

1. 是否存在能找到丢番图问题全部解的方法？

2. 是否存在满足丢番图条件的5数组？欧拉曾给出一组

$$\left\{1, 3, 8, 120, \frac{777480}{8288641}\right\}.$$

能否找到5个正整数或更多个正整数满足丢番图条件？

为了研究方便，人们限定丢番图问题只讨论正整数的情形，并做了各种推广：

1. 设 k 是任一个给定的整数，如果 n 个不同的正整数构成的集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 满足 $x_i x_j + k$ 恒为完全平方数，其中 $i \neq j$，则称此数集为 n 数组 D_k 集. 例如，$\{1, 2, 5\}$ 是3数组 D_{-1} 集，$\{1, 79, 98\}$ 是3数组 D_2 集，而 $\{51, 208, 465, 19732328\}$ 是4数组 D_1 集. 显然丢番图问题是研究4数组 D_1 集. 一个 D_k 集 S 称为可扩展的，如果存在一个正整数 $a \notin S$，使得 $S \cup \{a\}$ 仍是 D_k 集. 例如，20世纪80年代，陆续证明了 D_2 集 $\{1, 2, 7\}$，D_{-1} 集 $\{1, 5, 10\}$ 及 $\{1, 2, 5\}$ 都不能再扩展.

2. 1999年，琼斯证明了，对于任一个正整数 n，必存在4个非负有理系数多项式，使得其中任两个多项式之积加上 n^2 等于某个非负有理系数多项式的平方. 他构造的4个多项式是

$$\left\{x, x+2n, 4x+4n, \frac{16}{n^2}x^3 + \frac{48}{n}x^2 + 44x + 12n\right\}.$$

显然，对于 $n=1, 2, 4$ 所得的多项式都是非负整系数多项式. 特别地，当 x 取正整数时，

$$\{x, x+2, 4x+4, 16x^3 + 48x^2 + 44x + 12\}$$

是4数组 D_1 集，即为满足丢番图条件的正整数解.

百鸡问题(problem of a hundred chickens)　一道著名古算题. 中国古代约5世纪成书的《张丘建算经》中卷下第38题，也即最后一题："今有鸡翁一，直钱五；鸡母一，直钱三；鸡雏三，直钱一. 凡百钱买百鸡. 问鸡翁、母、雏各几何."史称百鸡问题. 设 x 表鸡翁数，y 表鸡母数，z 表鸡雏数，依题意得

$$\begin{cases} x + y + z = 100, \\ 5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100. \end{cases}$$

这是三元一次不定方程组. 原书正确的给出全部正整数解

$$\begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 18, \\ z_1 = 78; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 8, \\ y_2 = 11, \\ z_2 = 81; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 12, \\ y_3 = 4, \\ z_3 = 84. \end{cases}$$

但没有给出解法，只有"鸡翁每增四，鸡母每减七，鸡雏每益三，即得"的术文，给出了各组解之间的关系，没有说明"增四"、"减七"、"益三"的根据.

南宋数学家杨辉在《续古摘奇算法》(1275)中提到解此类问题的两种算法，但也没有说明理由. 到了清代，研究百鸡问题的人增多. 1815年，骆腾风在《艺海录》中，用大衍求一术解决了百鸡问题. 1851年，丁取忠在《数书拾遗》中用算术方法求解. 1861年，时曰醇撰写《百鸡术衍》更使百鸡问题和百鸡术广为人知.

百鸡问题对世界的影响很大.在印度、埃及、阿拉伯、意大利的著作中都出现过类似的问题.

祖暅原理(Zu geng principle)　亦名祖氏原理.一个涉及几何求积的著名命题.公元656年,唐代李淳风注《九章》时提到祖暅的开立圆术.祖暅在求球体积时,使用一个原理:"幂势既同,则积不容异"."幂"是截面积,"势"是立体的高.意思是两个同高的立体,如在等高处的截面积恒相等,则体积相等.更详细点说就是,界于两个平行平面之间的两个立体,被任一平行于这两个平面的平面所截,如果两个截面的面积恒相等,则这两个立体的体积相等.

上述原理在中国被称为祖暅原理,在西方被称为卡瓦列里原理.意大利数学家卡瓦列里(Cavalieri,(F.)B.)在1635年出版的名著《用新的方法推进连续体的不可分量的几何学》中提出这一原理,用这个原理他证明了圆锥体积是外接圆柱体积的1/3.后来,欧洲的许多数学家都使用类似的方法解决了一批面积、体积与重心的问题.

中国数学家祖暅大约生活在公元6世纪初,比卡瓦列里早1100年提出上述原理.

斐波那契兔子问题(Fibonacci rabbit problem)　一道著名数列难题.意大利数学家斐波那契(Fibonacci,L.)在他的名著《算法之书》中提出的一个问题:由一对兔子开始,一年后可以繁殖成多少对兔子?假定每对大兔每月能生产一对小兔,而每对小兔生长两个月就成为大兔.这个问题导致了著名的数列:1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,….它是一个线性递归数列,其前两项是$F_1=F_2=1$,而递归关系式是$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}(n\geqslant 3)$.这个数列一般称为斐波那契数列,它的每一项称为斐波那契数,其通项公式为

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

是法国数学家比内(Binet,J. P. M.)建立起来的,因而称之为比内公式.由比内公式可以推出:F_n是离

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

最近的整数.

斐波那契数具有许多重要性质:

1.关于比值F_n/F_{n+1}:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

而$(\sqrt{5}-1)/2$是黄金分割数,这个性质使斐波那契数与黄金分割联系起来,因而也与"优选法"相关.

2.加法公式

$$F_{m+n}=F_mF_{n+1}+F_{m-1}F_n,$$

由此可推出

$$F_{2n}=F_n(F_{n-1}+F_{n+1}),$$
$$F_{3n}=F_{n+1}^3+F_n^3-F_{n-1}^3.$$

3.卡西尼公式

$$F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)^n.$$

这是法国数学家卡西尼(Cassini,J. D.)获得的.

4.平方和公式

$$F_n^2+F_{n+1}^2=F_{2n+1}.$$

5.四个相邻项公式

$$F_nF_{n+3}=F_{n+2}^2-F_{n+1}^2.$$

6.乘法公式

$$F_{mn}=\sum_{k=1}^{m}C_m^kF_kF_n^kF_{n-1}^{m-k}.$$

7.最大公约数

$$(F_m,F_n)=F_{(m,n)},$$

式中,(m,n)表示m与n的最大公约数.

8.整除性

1)若p是$5t+1$型素数,则$p\mid F_{p-1}$.

2)若p是$5t+2$型素数,则$p\mid F_{p+1}$.

3)$F_{mn}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ F_m)$,即$F_m\mid F_{mn}$.

此外,斐波那契数在连分数理论中占有特殊的地位,在F_{n+1}/F_n的连分数展开式中,所有的部分商都等于1.有关斐波那契数的一个著名的未解决问题是:在斐波那契数中,素数是有限个还是无穷多?由于斐波那契数在数学中的广泛应用,1963年,美国创办了一种杂志《斐波那契季刊》来研究它,专门登载有关斐波那契数的最新发现,可见这种数的深远影响.

卡尔达诺公式(Cardano formula)　一个著名的求根公式.指实系数一元三次方程

$$x^3+px+q=0 \qquad (1)$$

的求根公式$x=\alpha+\beta$,式中

$$\alpha=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}},$$

$$\beta=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}},$$

且$\alpha\beta=-p/3$.此公式也可以应用于复系数三次方程中.

意大利数学家卡尔达诺(Cardano,G.)在1545年出版的《大术》一书中,首先发表了上述公式.此公式来自意大利数学家塔尔塔利亚(Tartaglia,N.),但卡尔达诺给出了该公式的几何证明.

当p,q为实数时,称

$$D=-27q^2-4p^3=-108\left(\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}\right),$$

为方程(1)的判别式.

当$D>0$时,方程(1)有三个两两不同的实根,

称为不可约情形；

当 $D=0$ 时，方程(1)有三个实根，当 p,q 均不为 0 时，有两个重根和一个单根；

当 $D<0$ 时，方程(1)有一个实根与两个共轭虚根.

卡尔达诺公式表明三次方程有根式解. 他的学生费拉里(Ferrari,L.)用降阶法获得一元四次方程的根式解法，从而引发了人们对五次以上代数方程的根式解的研究，推动了近世代数学的产生和发展. 此外，由于在不可约情形中出现了用虚数表示实根的情形，使人们再次遇到负数开平方，因此促进了对虚数合理性的认识. 1572 年，意大利数学家邦贝利(Bombelli,R.)在他的《代数》一书中，讨论过求解一元三次方程 $x^3=15x+4$，其三个根为 $4, -2\pm\sqrt{3}$. 但应用卡尔达诺公式却是

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}},$$

邦贝利研究后认为，应将负数的平方根像“普通数”那样运算. 后来，德国数学家莱布尼茨(Leibniz,G. W.)也研究过不可约情形，并且深信：用代数方法解此种情形不可能不用到虚数. 这使人们逐渐认识到负数开平方有一定的客观基础和合理性，加快了人们接受虚数的认识进程. 法国数学家韦达(Viete, F.)在《论方程的识别与订正》(完成于 1591 年，出版于 1615 年)中，利用三角恒等式给出了不可约情形的方程(1)的根为

$$2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\theta,$$

$$2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right),$$

式中 θ 满足

$$\cos 3\theta=-\frac{q}{2}\bigg/\sqrt{-\frac{p^3}{27}}.$$

韦达只给出其中一个根.

利用卡尔达诺公式还会出现用无理数表示有理根的情形. 例如，方程 $x^3-x-6=0$ 有一个根 2，但用卡尔达诺公式却为

$$\sqrt[3]{3+\frac{11\sqrt{6}}{9}}+\sqrt[3]{3-\frac{11\sqrt{6}}{9}},$$

因此，在实际求根时，卡尔达诺公式有一定的局限性.

代数基本定理(fundamental theorem of algebra)　古典代数中，关于代数方程根的基本命题. 复系数 n 次代数方程

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0,$$

在复数域内至少有一个根. 或等价地说成：复系数 n 次多项式 $f(x)$ 在复数域内至少有一个根. 由此可推出代数方程 $f(x)=0$ 在复数域内有且仅有 n 个根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$(重根按重数计算)，因而

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n).$$

法国数学家吉拉尔(Girard,A.)于 1629 年、笛卡儿(Descartes,R.)于 1637 年最早认识到了这个定理，其表达方式与现在的方式有所不同. 英国数学家马克劳林(Maclaurin,C.)，以及瑞士数学家欧拉(Euler,L.)使得定理的表述更为精确. 1746 年，法国数学家达朗贝尔(d'Alembert,J. le R.)首先给出该定理的一个不完全的证明. 在 18 世纪后半叶，欧拉、法国数学家拉普拉斯(Laplace,P.-S.)和拉格朗日(Lagrange,J.-L.)等人都给出了一些证明，所有这些证明都预先假设多项式的一些“理想的”根确实存在，然后去证明在这些根中至少有一个是复数. 1799 年，德国数学家高斯(Gauss,C. F.)接受了海尔姆斯台特(Helmstedt)大学的博士学位，博士论文的题目是“单变量有理整代数函数皆可分解为一次或二次式的定理的新证明”. 在此论文中给出了代数基本定理的他的第一个证明. 他将 $f(x)$ 分解成实部与虚部两部分：$f(x)=u+iv$. 如果两条曲线 $u=0$ 与 $v=0$ 相交，则表明 $f(x)=0$ 有一个根. 高斯就是从分别研究这两条曲线推证出基本定理的. 这个证明借助了直观，从现代的标准来看是不严格的. 但比早期的研究，特别是达朗贝尔的证明要好得多.

1815 年，高斯作出了基本定理的他的第二个证明. 这个证明使用了对称函数的代数性质以及判别式，涉及了现代的抽象方法. 1816 年，高斯又作出了第三个证明，使用了纯分析方法，通过一个隐含的方式使用了柯西积分定理. 1849 年，高斯作出了基本定理的第四个证明以庆祝他获博士学位 50 周年. 这个证明与第一个证明很类似. 但他这次充分地使用了复数，与前三个证明以及其他人的证明不同的是第四个证明允许方程的系数是复数. 高斯最先在不假设多项式的根实际存在的情况下，证明了代数基本定理. 他的证明实质上在于构造多项式的分裂域. 这个定理的所有证明都要涉及到实数和复数的某种形式的拓扑性质，而拓扑的作用最终导致到单一的假设：奇次的实系数多项式具有一个实根. 若证明此结论，用纯代数方法已无能为力了，需借助分析方法，代数与分析的这种本质联系，引导出近代数学一个重要的分支，整函数理论.

代数基本定理在代数中一直起着核心的作用. 20 世纪以后，随着代数学从古典到近代的发展，代数基本定理也被一些新的定理所代替：

1. 设 F 是任一域，$f(x)$ 是多项式环 $F[x]$ 中任一个不可约多项式，则必存在 F 的一个扩域 K，使

得 $f(x)$ 在 K 内有一根.

2. 如果 $f(x)$ 是 $F[x]$ 中的任一 n 次多项式,则存在 F 的一个代数扩域 E,使得 $f(x)$ 在 E 内可完全分解 $f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$.

3. F 上存在一个代数扩张 Ω,使得 $\Omega[x]$ 内每个次数不小于 1 的多项式在 Ω 内可完全分解.

最速降线问题(problem of curve of shortest descent) 一道著名的经典数学问题. 1630 年,意大利科学家伽利略(Galilei,G.)提出的一个著名问题:"一个质点在重力作用下,从一个给定点到不在它铅垂下方的另一点,如果不计摩擦力,问沿着什么曲线运动所需时间最短?"这就是最速降线问题. 伽利略误认为该曲线是圆弧.

瑞士数学家约翰第一·伯努利(Bernoulli,Johann Ⅰ)在 1696 年 6 月号的《教师学报》上重新提出最速降线问题,半年后仍未解决. 约翰第一·伯努利于 1697 年元旦发表公告,再次向全世界最能干的数学家挑战. 英国科学家牛顿(Newton,I.)获知后很快就解决了,并将结果写成短文匿名发表在《哲学汇刊》1697 年第 224 期上. 3 年后,又给出一个分析证明. 此外,德国数学家莱布尼茨(Leibniz,G. W.)和法国数学家洛必达(L'Hospital,G.-F.-A. de)也分别解决了最速降线问题. 他们的解法都发表在 1697 年 5 月号《教师学报》上. 最速降线是一条连结两个给定点的上凹旋轮线,也称为摆线或等时曲线. 约翰第一·伯努利与他的兄长雅各布第一·伯努利(Bernoulli,Jakob Ⅰ)也各自以不同的方法解决了最速降线问题. 约翰将这一问题借助于费马最小时间原理转化为光学问题,利用光的折射定律导出了旋轮线的微分方程. 而雅各布从另一角度给出了一个较为繁琐但更具一般性的解法. 1734 年,瑞士数学家欧拉(Euler,L.)推广了最速降线问题,并着手寻找这个问题的更一般的方法. 1744 年,欧拉出版《寻求具有某种极大或极小性质的曲线的方法》一书,书中系统地总结了欧拉在 18 世纪 30 年代和 40 年代初的一些研究成果,引出了一些基本方程,为变分法的产生奠定了理论基础. 该书的出版是变分学史上的里程碑. 18 世纪 50 年代中期,法国数学家拉格朗日(Lagrange,J.-L.)循着欧拉的思路,并根据欧拉得出的结果,从纯分析方法出发,创造了应用于变分演算的新算法和新符号,得出了更完善的结果.

费马大定理(Fermat last theorem) 数论中最有影响的世界难题之一. 设 $x^n+y^n=z^n$, $xyz\neq0$, $n>2$,则此不定方程没有整数解. 或等价地叙述成:设 $n>2$, x,y,z 是整数,如果 $x^n+y^n=z^n$,则 $xyz=0$. 此命题是法国数学家费马(Fermat,P. de)提出的. 约在 1637 年,费马在巴切(Bachet,C.)校订的古希腊数学家丢番图(Diophantus)的《算术》第 2 卷第 8 题"将一个已知的平方数分为两个平方数"(丢番图以 16 分为 $\frac{256}{25}$ 与 $\frac{144}{25}$ 为例加以说明)旁边写道:"将一个立方数分为两个立方数,一个四次幂分为两个四次幂,或者一般地将一个高于二次的幂分为两个同次的幂,这是不可能的. 关于此,我确信已发现一种美妙的证法,可惜这里空白的地方太小,写不下."费马在给法国数学家卡尔卡维(Carcavi,P. de)的信中说,他用他创立的无限递降法证明了 $n=4$ 的情形,但信中没有给出证明的细节. 估计他认为用无限递降法也能证出其他情形. 到了 19 世纪上半叶,费马提出的许多问题均已解决,只有这一命题未获证明,因此在西方称之为费马最后定理. 在中国为了与费马小定理相区别,而称之为费马大定理,也称为费马猜想.

对于特例证明的进展如下:1770 年,瑞士数学家欧拉(Euler,L.)在其最重要的数论著作《代数指南》中证明了 $n=3,4$ 的情形. 1825 年,法国数学家勒让德(Legendre,A.-M.)和德国数学家狄利克雷(Dirichlet,P. G. L.)各自独立地证明了 $n=5$ 的情形. 1832 年,狄利克雷又证明了 $n=14$ 的情形. 1839 年,法国数学家拉梅(Lamé,G.)证明了 $n=7$ 的情形. 很明显,如果命题对于 n 成立,那么对于 n 的任何倍数也成立. 由此可将命题简化为只证 $n=4$ 和 n 为任意奇素数 p 的情形. 可以假定 x,y,z 两两互素. 为了证明方便,将 $x^p+y^p=z^p$, p 是奇素数,分为两种情形:

1. 对于素数 p,不存在整数 x,y,z,使 p 不能整除 xyz,且 $x^p+y^p=z^p$.

2. 对于素数 p,不存在正整数 x,y,z,使 p 能整除 xyz,且 $x^p+y^p=z^p$.

19 世纪 20 年代,法国女数学家热尔曼(Germain,S.)证明了,如果 p 是奇素数且使 $2p+1$ 也是素数,则对于素指数 p 第一种情形成立. 按照热尔曼的思想,勒让德推广了热尔曼定理:如果 p 是素数,且使 $4p+1, 8p+1, 10p+1, 14p+1, 16p+1$ 之一是素数,则对于素指数 p 第一种情形成立. 后来,这个定理被推广到,如果 $2kp+1$(k 不能被 3 整除,且 $k\leqslant55$)中有一个素数,则第一种情形成立.

早期取得重大突破的是德国数学家库默尔(Kummer,E. E.). 1843 年,库默尔开始一系列的研究,引进了正规素数概念:设 $\alpha=\exp(2\pi i/p)$, h 是分圆域 $Q(\alpha)$ 的类数,当 p 不能整除 h 时,素数 p 称为正规素数. 库默尔证明了当 p 是正规素数时,费马大定理成立. 通过计算,对于小于 100 的奇素数中除了 $p=37,59,67$ 以外都是正规素数. 由此证明了,除了 $p=37,59,67$ 以外的奇素数 $p<100$,费马大定理的第一种情形都是正确的. 1857 年,库默尔进一

步证明 $p=59,67$ 也成立. 1892 年,米里曼诺夫(Mirimanoff,D.)证明对 $p=37$ 费马大定理成立. 此外,库默尔还引入理想数概念并建立有关理论. 由于库默尔的这项开创性工作,不但使费马大定理的证明取得较大的进展,而且他创立的理论对于类域论和抽象代数的发展也做出了巨大的贡献.

计算机的发展,使确定费马大定理成立的奇素数 p 的研究工作有了较大的进展. 1955 年,赛尔弗里奇(Selfridge,J. L.)、尼可(Nicol,C. A.)、范迪沃(Vandiver,H. S.)计算出对于 $p<4002$ 都成立. 以后使费马大定理成立的奇素数 p 的范围陆续扩大,1954 年,范迪沃得到一个可以有效地加以验证的判别法. 根据这个判别法,1977 年,瓦格斯塔夫(Wagstaff,S. S.)借助于大型计算机计算到 $p<125000$. 由此得出一个结论:若费马大定理有反例,则 $p\geqslant 125003$,且

$$z>x>y>(125003)^{375005}\approx 4.5\times 10^{1911370},$$

可见费马大定理成立的可能性是极大的. 到 1988 年,费马大定理对所有 $n<150000$ 都能成立,其第一种情形对直到 714591416091389 的所有素数都能成立.

此外,人们也对费马大定理有关性质做了深入研究. 1909 年,威弗瑞奇(Wieferich)证明了:若 $x^p+y^p=z^p$ 且 p 不能整除 xyz,则 $2^{p-1}\equiv 1(\bmod p^2)$. 经检验在$3\times 10^9$ 以内只有 $p=1093,3511$ 满足这个同余式,由此说明,对 3×10^9 以内的素数 p,费马大定理的第一种情形成立. 1912 年,福特温勒(Furtwangle,F. P. P.)推广成:如果 p 是奇素数,x,y,z 是互素的整数,使 $x^p+y^p+z^p=0$,r 是自然数,使 r 整除 x,p 不能整除 x,则 $r^{p-1}\equiv 1(\bmod p^2)$. 1953 年,英柯尔(Inkeri,K.)证明了,若 $x^p+y^p=z^p$,且 $x<y<z$,则

$$x>\frac{p^{3p-4}}{2}.$$

而在第一种情形则有

$$x>\left[\frac{(2p^3+p)}{\ln 3p}\right]^p.$$

1977 年,泰雅尼昂(Terjenian,G.)利用中国数学家柯召解决不定方程 $x^2-1=y^p$ 的想法,证明了,如果 $n=2p$(p 为奇素数)费马大定理成立,则 $2p$ 整除 x 或 y.

近代在试证费马大定理中取得重大突破的是:1983 年,德国青年数学家法尔廷斯(Faltings,G.)证明了莫德尔猜想:任一条亏格大于 1 的代数曲线在任一代数数域上只有有限个有理点. 由于在 $n\geqslant 4$ 时,方程 $u^n+v^n=1$ 的亏格不小于 2. 依莫德尔猜想可知,方程 $u^n+v^n=1$ 只有有限个有理数解

$$\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right),$$

即方程

$$\left(\frac{x}{z}\right)^n+\left(\frac{y}{z}\right)^n=1$$

或方程 $x^n+y^n=z^n$ 只有有限个互素的整数解. 进而,希思-布朗(Heath-Brown,D. R.)利用莫德尔猜想的成立,在 1985 年证明了:对几乎所有的素数 p,费马大定理都成立. 同年,希思-布朗与艾德利曼(Adleman,L. M.)利用解析数论方法证明了:有无穷多个素数 p 使第一种情形成立. 莫德尔猜想的获证,极大地推动了费马大定理的进展.

最后解决费马大定理的一系列研究始于 20 世纪 50 年代. 1955 年到 1964 年,两位日本数学家提出了一个猜想:Q 上的每条椭圆曲线都是模椭圆曲线. 此猜想称为谷山-志村猜想. 1985 年,证明费马大定理的工作出现了转机,德国数学家弗雷(Free,G.)认为谷山-志村猜想蕴含费马大定理,具体地说,如果方程 $x^p+y^p=z^p$ 有一组互素的整数解(a,b,c),则利用它可以得到一条半稳定的椭圆曲线. 弗雷试图证明这类椭圆曲线不可能是模曲线,而成为谷山-志村猜想的反例. 因此,如果能证明谷山-志村猜想是正确的,则由此可推出费马大定理. 但是,他给出的证明有许多漏洞. 法国数学家塞尔(Serre,J. P.)认为,利用伽罗瓦模表示关于水平约化的一个猜想,可以修补弗雷的漏洞. 弗雷与塞尔合作一起证明了:谷山-志村猜想和塞尔的水平约化猜想可以推出费马大定理. 一条证明费马大定理的思路由此确定下来:先证谷山-志村猜想与塞尔猜想,再证费马大定理.

1986 年,美国数学家里贝(Ribet,K.)在解决费马大定理的工作中做出了重要贡献,他证明了塞尔猜想. 在这一进展的激励下,英国数学家、美国普林斯顿(Princeton)大学的怀尔斯(Wiles,A.)开始研究谷山-志村猜想. 1993 年 6 月 23 日,怀尔斯在英国剑桥大学作了题为"椭圆函数,模形式和伽罗瓦表示"的讲演,宣布他证明了:半稳定的椭圆曲线一定是模椭圆曲线,即半稳定的谷山-志村猜想成立,从而推出费马大定理. 然而,在同年 12 月 4 日他又宣布证明有漏洞. 此后,怀尔斯花了大约两年的时间进行修正,与自己的学生泰勒(Taylor,B.)合作,提出论文"某些赫克(Hecke)代数环的性质",在此基础上,怀尔斯最终证明了费马大定理.

1995 年 5 月的世界权威学术刊物《数学年刊》(Annals of Mathematics)在其 141 卷第 3 期上,以整期的篇幅发表了怀尔斯的论文"模椭圆曲线与费马大定理"(Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem)以及他与泰勒合作的上述文章. 长

达350年的探索研究，凝结了十几代人的研究成果，费马大定理终于获证.

费马数问题(Fermat number problem)　一种特殊结构的数的著名难题. 形如

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

的数称为费马数. 法国数学家费马(Fermat, P. de)对 $n=0,1,2,3,4$ 的情形做了检验，发现此时 F_n 都是素数. 1640年，费马给法国数学家梅森(Mersenne, M.)写信时提到，他认为 F_n 都是素数，但是他不能给出证明，这就是费马数猜想. 1732年，瑞士数学家欧拉(Euler, L.)对费马数进行深入研究后，发现 F_5 有一个素数因子641，$F_5 = 641 \times 6700417$，从而推翻了费马所作的猜想. 借助于电子计算机到1995年1月，人们共发现了132个费马数是合数，其中最大的一个是 F_{23471}，却一直再没有发现过新的费马素数. 尚未确定素性的最小费马数是 F_{24}，即 $2^{2^{24}}+1$ 是素数还是合数尚不知晓.

关于费马数的研究工作有：

1. 寻求新的费马素数. 英国数学家哈代(Hardy, G. H.)猜测费马素数只有有限个，这是新产生的费马数猜想. 寻求费马素数的判定法有：

1) 普罗斯(Proth)素性检验. 设 n 是自然数，F_n 是素数的充分必要条件是 $3^{(F_n-1)/2} \equiv -1 (\mathrm{mod}\, F_n)$.

2) 1982年，麦金托什(McIntosh, R.)得出：F_n 为素数的充分必要条件是 F_n 不能整除 $T(F_n-2)$，其中 $T(m)$ 是正切数，由式子

$$\tan x = \sum_{m=0}^{\infty} T(m) \cdot \frac{x^m}{m!}$$

确定.

2. 费马数的素因数分解.

欧拉证明了费马数 F_n 的每一个素因数都具有 $k \cdot 2^{n+1}+1$ 的形式，法国数学家吕卡(Lucas, F.-É.-A.)又证明了其中的 k 必为偶数，即 F_n 的每个素因数必具有 $k \cdot 2^{n+2}+1$ 形式. 例如，F_5 有素因子 $5 \cdot 2^7+1$, $52347 \cdot 2^7+1$；F_6 有素因数 $3^2 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 2^8+1$, $5 \cdot 52562829149 \cdot 2^8+1$；$F_9$ 有素因数 $37 \cdot 2^5 \cdot 2^{11}+1$；$F_{11}$ 有素因数 $3 \cdot 13 \cdot 2^{13}+1$, $7 \cdot 17 \cdot 2^{13}+1$；$F_{12}$ 有素因数 $7 \cdot 2^{14}+1$, $397 \cdot 2^2 \cdot 2^{14}+1$, $7 \cdot 139 \cdot 2^2 \cdot 2^{14}+1$；$F_{18}$ 有素因数 $13 \cdot 2^{20}+1$；F_{23} 有素因数 $5 \cdot 2^{25}+1$；F_{36} 有素因数 $5 \cdot 2 \cdot 2^{38}+1$；F_{38} 有素因数 $3 \cdot 2 \cdot 2^{40}+1$；F_{73} 有素因数 $5 \cdot 2^{75}+1$ 等.

1801年，德国数学家高斯(Gauss, C. F.)在他的著作《算术研究》中证明了，当 n 是费马素数或不同费马素数之积时，则可尺规作图正 n 边形(或圆周 n 等分). 后来又有人将费马数与费马猜想联系起来，证明了"当 p 为费马素数时，方程 $x^p+y^p=z^p$ 没有正整数解". 近年来，费马数在数字信号处理中找到了应用.

2000年2月，卢卡(Luca, F.)在《美国数学月刊》上证明了，任一个费马数都不是完全数，也不能由它与别的整数构成亲和数.

梅森猜想(Mersenne conjecture)　关于一种特殊结构的素数的著名猜想. 法国数学家梅森(Mersenne, M.)于1644年提出：在不超过257的55个素数中，仅当 $p=2,3,5,7,13,17,19,31,67,127,257$ 这11个素数时，2^p-1 为素数，他本人验证了前7个数都是素数. 后4个数由于计算量太大而未能检验. 后人称形如 2^p-1 的数为梅森数，记为 M_p，其中 p 为素数. 而将上述断言称为梅森猜想.

1772年，继梅森之后，瑞士数学家欧拉(Euler, L.)证明了 M_{31} 是素数. 1877年，法国数学家吕卡(Lucas, F.-É.-A.)证明了 M_{67} 并不是素数. 1903年，美国数学家科尔(Cole, F. N.)把 M_{67} 分解成

$$193\,707\,721 \times 761\,836\,257\,287.$$

吕卡还证明了 M_{127} 是素数，这是人工手算所得的最大的梅森素数. 1886年、1911年和1914年又相继证明了 M_{61}, M_{89}, M_{107} 是梅森漏掉的3个梅森素数. 1922年，有人证明 M_{257} 并不是素数，它是一个69位数. 1984年，美国桑迪亚国立实验室，使用计算机耗时32小时12分将 M_{257} 分解成三个因数之积，这三个因数是

$$178\,230\,287\,214\,063\,289\,511,$$
$$61\,676\,882\,198\,695\,257\,501\,367,$$
$$1\,207\,039\,617\,824\,989\,303\,969\,681.$$

至此，人们共获得12个梅森素数，即 $p=2,3,5,7,13,17,19,31,61,89,107,127$ 时对应的 M_p.

为了判定梅森数 M_p 是否为素数. 人们发展了素性判定的理论. 1640年，法国数学家费马(Fermat, P. de)在给梅森的信中提出三个重要定理：

1. 若 p 是素数，则除了 $2kp+1$ 这种形式的数之外，2^p-1 不能被其他形式的素数整除；利用此定理可以判定较小的 p 的 M_p 的素性.

2. 对于较大的 p 更为有效的检验法是吕卡判别法. 为了判断 $M_p=2^p-1$(p 为奇素数)的素性，要利用 M_p 给出下列数：$L_0=4$，L_1 是 L_0^2-2 除以 M_p 的余数，L_2 是 L_1^2-2 除以 M_p 的余数，一般的，L_n 是 L_{n-1}^2-2 除以 M_p 的余数，直到得出 L_{p-2}，则 M_p 为素数的充分必要条件是 $L_{p-2}=0$.

到了20世纪50年代，由于计算机的发展. 寻求梅森素数的工作在停滞了30年后又活跃起来. 1952年，美国国家标准局首开计算机寻求梅森素数的先例，一举发现5个梅森素数，即 $p=521,607,1279,2203,2281$ 时的 M_p. 从1952年到1979年的20多年里，用计算机共发现了15个梅森素数，使已知的

梅森素数增加到27个.后来又陆续发现了一些梅森素数,直到1997年8月24日,英国英格兰汉普郡的斯彭士(Spence,G.)发现了当时最大的梅森素数$2^{2976221}-1$,它是895932位数.至此,人们共发现了36个梅森素数.除了上面已提到的前17个之外,还有 $p=3217,4253,4423,9689,9941,11213,19937,21701,23209,44497,86243,110503,132049,216091,756839,859433,1257787,1398269,2976221$.

是否有无穷多个梅森素数这是至今仍未解决的著名问题.此外,又提出一个新的梅森猜想:如果p是形如$2^k\pm1$或$4^k\pm3$的素数,则梅森数M_p与$(2^p+1)/3$都是素数或都是合数,即它们的素性相同.还有一个未解决的猜想是:M_p无平方因子.

梅森素数的不断发现,不但推进了完全数的研究,而且也开辟了发现孪生素数的新途径.20世纪80年代,德国汉堡大学计算中心的凯勒(Keller,W.)发现了许多形如$kM_p\pm1$, $kM_p^2\pm1$的孪生素数.人们正在着手寻求形如$kM_p^n\pm1(n>2)$的孪生素数.此外,梅森素数在诸如代数编码的一些应用学科中也有了用途.

合理分配赌注问题(problem of rational division of stakes) 对创立概率论有重大影响的著名问题.水平相同的两个赌徒A和B,在赌博中的某时刻,A还需a点获胜,B还需b点获胜,此时两赌徒中止赌博,应如何合理分配赌注?这个问题通常称为点数问题,是嗜好赌博的法国学者梅雷(Meray,H. C. R.)于1654年向法国数学家帕斯卡(Pascal,B.)提出的.为此帕斯卡和法国数学家费马(Fermat,P. de)于1654年7月到10月之间进行了一系列通信讨论.帕斯卡利用数学归纳法证明了:B与A应按

$$\sum_{r=0}^{a-1}C_{a+b-1}^r \text{ 与 } \sum_{r=a}^{a+b-1}C_{a+b-1}^r$$

之比来分赌注,式中C_m^r是m个元素中取r个元素的组合数.赌注分配问题成为概率论的起源.

当荷兰数学家惠更斯(Huygens,C.)到巴黎时,听说费马和帕斯卡在研究赌注问题,他也进行了研究,并在1657年撰写了《论赌博中的计算》一书,提出数学期望的概念,推动了概率论的发展.1713年,瑞士数学家雅各布第一·伯努利(Bernoulli,Jakob Ⅰ)的《猜度术》一书的面世,标志着概率论已成为数学的一个重要分支.

三体问题(problem of three bodies) 天体力学中的一个著名的经典问题.假设具有任意质量m_1,m_2,m_3的3个质点$P_1(x_1,y_1,z_1)$,$P_2(x_2,y_2,z_2)$,$P_3(x_3,y_3,z_3)$,按照牛顿运动定律运动,则研究其运动方程

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x_1},m_1\frac{d^2y_1}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y_1},m_1\frac{d^2z_1}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z_1};$$
$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x_2},m_2\frac{d^2y_2}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y_2},m_2\frac{d^2z_2}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z_2};$$
$$m_3\frac{d^2x_3}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x_3},m_3\frac{d^2y_3}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y_3},m_3\frac{d^2z_3}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z_3}.$$

式中

$$U=k^2\left(\frac{m_1m_2}{r_{12}}+\frac{m_2m_3}{r_{23}}+\frac{m_3m_1}{r_{31}}\right),$$

k^2是万有引力常数,r_{ij}表示两质点P_i与P_j之间的距离.上述问题称为三体问题,最常讨论的是太阳、地球和月球三体问题.17世纪,英国科学家牛顿(Newton,I.)对此做出开创性工作.三体问题至今不能精确解出.它大体上有两个研究方向:

1. 探索出可以阐明运动的定理.
2. 寻求方程的近似解.

1753年,瑞士数学家欧拉(Euler,L.)的《月球运动理论》出版,在此书中欧拉阐述了求三体问题近似解的新方法,亦称"欧拉第一月球理论".对当时的天文学和航海业产生了重要影响.1772年,法国数学家拉格朗日(Lagrange,J.-L.)发表"论三体问题",找到了特殊的周期解.1877年,美国数学家希尔(Hill,G. W.)又发现了三体问题新的周期解.后来,法国数学家庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)完善了希尔的研究工作,创立了微分方程的定性理论.法国数学家班勒卫(Painlevé,P.)曾证明:除去$\min r_{ij}=0$,即发生碰撞情况外,三体问题存在解析解.

等周问题(isoperimetric problem) 著名的古典极值问题.在给定长的若尔当曲线中,求所围面积为最大的曲线,这就是古典等周问题,也称黛多问题.传说是迦太基(Carthage)王后黛多(Dido)从古泰尔国(Tyria)来到北非的地中海沿岸,非洲的一位酋长答应给她一头牛的牛皮所能包围的一块土地.精明的黛多将牛皮剪成非常细小的条展成半圆,用北非海岸作为另一边界以包围尽可能大的面积.

瑞士数学家雅各布第一·伯努利(Bernoulli,Jakob Ⅰ)在1697年5月号的《教师学报》上,提出了等周问题.1700年,雅各布在《教师学报》上发表了"等周问题实解",正确地解答了等周问题的解是圆周.1718年,约翰第一·伯努利(Bernoulli,Johann Ⅰ)改进了雅各布的解法,给出了一个精美的解法,提出了变分法的一些概念,奠定了变分法的基础.除了变分法外,古典等周问题还有其他一些方法加以解决.瑞士数学家施泰纳(Steiner,J.)用纯几何方法解决了等周问题.在1838年撰写的论文"关于平面、球面和空间图形的极大和极小"中,他用纯几何的方法证明了:在所有周长都相等的平面图形中,圆的面积最大,其逆亦真.但他在证明中使用了一个

需要证明的假设：包围最大面积的曲线是存在的．这个存在性证明直到19世纪70年代才由德国数学家魏尔斯特拉斯（Weierstrass，K. T. W.）使用变分法得到解决．此外，等周问题也可以借助不等式加以解决．例如，若尔当曲线所围的面积 A 与它的周长 L，恒有

$$L^2-4\pi A\geqslant 0 \text{ 或 } \frac{4\pi A}{L^2}\leqslant 1.$$

不等式左端称为等周商，圆具有最大的等周商，即等号仅当曲线是圆时成立．这个不等式一般称为等周不等式．它还可以进一步精确化：

$$L^2-4\pi A\geqslant (L-2\pi r)^2,$$
$$L^2-4\pi A\geqslant (L-2\pi R)^2,$$
$$L^2-4\pi A\geqslant \pi^2(R-r)^2,$$

式中 r 表示位于若尔当曲线内的最大圆半径，R 表示位于若尔当曲线外的最小圆半径（r，R 在下文中意义相同）．上述结果是邦尼森（Bonnesen，T.）于1921年得到的．

等周问题有许多推广形式：

1．推广为变分法问题．设所求的曲线参数方程是 $x=x(t)$，$y=y(t)$，$t_1\leqslant t\leqslant t_2$，且 $x(t_1)=x(t_2)$，$y(t_1)=y(t_2)$，那么等周问题就是要确定 $x(t)$，$y(t)$ 使得积分

$$\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x')^2+(y')^2}\mathrm{d}t=\text{常数},$$

且面积积分

$$J=\int_{t_1}^{t_2}(xy'-x'y)\mathrm{d}t$$

取极大值．更一般地，在积分值

$$\int_c G(x,y,y')\mathrm{d}x=\text{常数}$$

的条件下，求使泛函

$$\int_c F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

为最大的曲线 $y=y(x)$．一般称为广义等周问题．

2．推广为非平面上的等周问题．1905年，数学家伯恩施坦（Bernstein. F.）将位于平面上的若尔当曲线推广到位于球面上的若尔当曲线，给出了球面上的等周不等式：

$$L^2-4\pi A-\frac{A^2}{a^2}\geqslant 8\pi a^2\sin\frac{(R-r)}{4a(1+2\pi)},$$

等号仅当若尔当曲线是圆周时成立．对于具有负曲率（$-a^{-2}$）的常曲率曲面上的若尔当曲线，则有等周不等式：

$$L^2-4\pi A-\frac{A^2}{a^2}$$
$$\geqslant\frac{1}{4}a^2\left(4\pi+\frac{A}{a^2}\right)^2\left(\operatorname{th}\frac{R}{2a}-\operatorname{th}\frac{r}{2a}\right)^2,$$

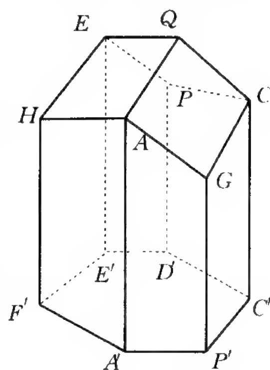
等号仅当若尔当曲线是圆周时成立．由此可见，在非平面上的若尔当曲线的等周问题的解仍是圆周．

3．推广为三维或多维空间的等周问题．给定表面积的闭曲面中有最大体积的曲面是球面．1884年，德国数学家施瓦尔茨（Schwartz，L.）证明了下述命题：设凸体的表面积为 S，内部的体积为 V，则有 $S^3-36\pi V^2\geqslant 0$，等号仅当凸体为球时成立．即，三维空间的等周问题的解是球面．1939年，德国数学家施密特（Schmidt，E.）得到了 n 维等周不等式：设欧几里得 n 维空间中某区域的体积为 V，构成该区域的边界的 $n-1$ 维超曲面面积 A，则有

$$A^n\geqslant\frac{2\pi^{n/2}n^{n-1}V^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

等号仅当该区域为 n 维球体时成立．

蜂房问题（problem of honeycomb）　著名的古典极值问题．蜂房的形状（如图所示）是正六棱柱形，图下端是正六边形的入口，图上端是蜂房的底部，它由三个全等的菱形腊板封闭．历史上有不少学者都注意到蜂房不寻常的结构．古希腊后期的亚历山大里亚数学家帕普斯（Pappus，(A)）的《数学汇编》第5卷的序言中就提到蜜蜂凭着本能选择了六边形，因而使用同样材料可以比三角形和正方形具有更大的面积．



天文学家马拉尔迪（Maraldi，G. F.）在《蜜蜂的观察》（1712）中指出蜂房底部菱形的相邻两个角分别是110°与70°，在后面又提到两个角应是109°28′与70°32′，但他没有说明这些数值是怎样得到的．法国科学家雷奥米尔（Réaumur，R. A. F. de）猜想用这样的角度构造蜂房，在相同的容积下最节省材料．为此他向瑞士数学家柯尼希（Koenig，J. S.）提出下列问题：试用三个全等的菱形作顶盖来封闭一个正六棱柱，使所得的立体有给定的容积，而其表面积最小．经过计算，柯尼希证实了雷奥米尔的猜想，但计算结果是109°26′和70°34′，与猜想的数值有两分之差．不过他的计算结果始终未发表，只是在《科学院论文集》（1739）上刊登了一个简介，至今不知他用的是什么方法．1743年，英国数学家马克劳林（Maclaurin，C.）在爱丁堡重新研究蜂房的形状，得到了更为惊人的结果．他在"关于存放蜂蜜的巢室的底部"一文中只使用初等几何方法，得到最省材料的菱形相邻两角分别是109°28′16″和70°31′44″，与猜想的数值完全一致．后来发现柯尼希的两分误差是

他所用的对数表印错了. 1850 年,印度数学家拉姆丘德拉(Ramchu - ndra)用初等代数方法重新解决了这个问题,刊印在他的著作《代数法求解极大与极小问题》中. 此外,人们还证明了构成蜂房的所有相邻面所成的二面角大小都是 120°.

算术-几何平均不等式(inequality of arithmetic and geometric mean)　著名经典不等式之一. 设 a_1, a_2, …, a_n 均为正数,则它们的算术平均值不小于它们的几何平均值,即

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}, \qquad (1)$$

等号仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时成立,不等式(1)称为算术-几何平均不等式,简称 AG 不等式.

AG 不等式已有悠久历史,欧几里得的《几何原本》第二卷命题 5:"如果把一条线段既分成相等的(两条)线段,再分成不相等的(两条)线段,则由二不相等的线段构成的矩形与两个分点之间一段上的正方形的和等于原来线段一半上的正方形."如图 1 所示,命题 5 可表述成:



图 1

$$AD\cdot DB+CD^2=AC^2=\left(\frac{AD+DB}{2}\right)^2.$$

已蕴涵了

$$\sqrt{AD\cdot DB}\leqslant\frac{AD+DB}{2}.$$

公元 4 世纪,希腊数学家帕普斯(Pappus,(A))在其著作《数学汇编》第 3 卷中,给出 $n=2$ 时,AG 不等式的第一个几何证明(见图 2),有

$$\frac{AD+DB}{2}=CE\geqslant DE=\sqrt{AD\cdot DB}.$$

18 世纪,英国数学家马克劳林(Maclaurin,C.)曾以几何语言叙述了较为一般的 AG 不等式:"如果将线段 AB 分成任意多个部分 AC,CD,DE,…,EB,则这些部分之积当它们彼此相等时取得最大."这就是说,如果将 AB 分成 n 段 AC,CD,DE,…,EB,则有

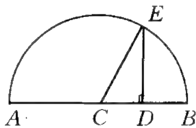


图 2

$$AC\cdot CD\cdot DE\cdot\cdots\cdot EB\leqslant\left(\frac{AB}{n}\right)^n.$$

显然,等价于

$$\sqrt[n]{AC\cdot CD\cdot\cdots\cdot EB}\leqslant\frac{AC+CD+\cdots+EB}{n}.$$

等号仅当"它们彼此相等时"成立. 1729 年,马克劳林致福克斯(Folkes,M.)的信中给出了一个不严格的证明.

1821 年,法国数学家柯西(Cauchy,A. - L.)在他的名著《分析教程》的注释 Ⅱ 中,对于 AG 不等式给出了一个精彩的证明,这个证明既严格又独特,后人称之为柯西推理. 根据柯西推理模式,后人又演变出倒推数学归纳法. 从 1839 年法国数学家刘维尔(Liouville,J.)最早给出 AG 不等式的数学归纳法证明以来,至今关于 AG 不等式已有上百个证明. 关于 AG 不等式有许多重要的性质:

1. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个正数,它们的算术平均值、几何平均值分别记为 A_n,G_n,而 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 的算术平均值、几何平均值分别为 A_{n-1},G_{n-1},则有

$$n(A_n-G_n)\geqslant(n-1)(A_{n-1}-G_{n-1}),$$

$$\left(\frac{A_n}{G_n}\right)^n\geqslant\left(\frac{A_{n-1}}{G_{n-1}}\right)^{n-1}.$$

前者称为拉多不等式,后者称为波波维奇不等式.

2. 设 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的任一排列,$A_{ik}=(b_{i+1}+\cdots+b_{i+k})/k$,$G_{ik}=(b_{i+1}\cdot\cdots\cdot b_{i+k})^{1/k}$(规定 $b_{n+i}=b_i$)k 为任意自然数,则余项 $\Delta_n=A_n-G_n\geqslant\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(A_{ik}-G_{ik})$,当且仅当 $G_{1k}=G_{2k}=\cdots=G_{nk}$ 时成立.

AG 不等式有多种推广形式. 有重要意义的是在 $m\times n$ 数表上的推广:设 $a_{ij}>0(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 组成 $m\times n$ 数表

$$\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & G_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & G_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & G_m \\ \hdashline A_1 & A_2 & \cdots & A_n & \end{array}$$

第 i 行的 n 个数的几何平均值为 $G_i=(a_{i1}a_{i2}\cdots a_{in})^{1/n}$,式中 $i=1,2,\cdots,m$. 第 j 列的 m 个数的算术平均值为 $A_j=(a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{mj})/m$,式中 $j=1,2,\cdots,n$. $G_1,G_2,\cdots,G_m$ 的算术平均值为 $A(G_1,G_2,\cdots,G_m)$,$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的几何平均值为 $G(A_1,A_2,\cdots,A_n)$,则有 $G(A_1,A_2,\cdots,A_n)\geqslant A(G_1,G_2,\cdots,G_m)$,当且仅当 $m\times n$ 数表中任何两行都对应成比例时,等号成立.

布丰投针问题(Buffon needle problem)　有关几何概率的开创性题目. 一根长度为 $2r$ 的针,随机地掷在画有间距为 $a(a>2r)$ 的平行线组的平面上,问掷下的针与平行线有交点的概率是多少?这个问题首先是由法国数学家布丰(Buffon,G. - L. L. de)于 1733 年提出,1777 年在他的《能辨是非的算术试验》一书中,重新提出并加以解决,他计算出的概率为

$$p=\int_0^{\frac{\pi}{2}}r\cos\theta\mathrm{d}\theta/\frac{a}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{4r}{a\pi}.$$

由此开创了几何概率的研究. 布丰也研究了其他类型的几何概率问题. 例如,掷针到由间距是 a 的一组平行线与间距是 b 的另一组平行线互相垂直交织成

网的平面上,求针与这些线相交的概率.但布丰的答案是错误的.1812 年,法国数学家拉普拉斯(Laplace,P.-S.)给出了正确答案

$$\frac{4r(a+b-r)}{\pi ab}.$$

布丰公式可以用来近似计算圆周率:$\pi=4r/ap$. 1850 年,沃尔夫(Wolf,D. von)用一根长 36*mm* 的针,间距为 45*mm* 的平行线,作实验 5000 次,得相交概率 $p=0.5064$,而算得 $\pi\approx3.1596$. 1855 年,英国人史密斯(Smith,A.)掷针 3200 次求得 $\pi\approx3.1553$. 1864 年,英国人福克斯掷针 1100 次,求得 $\pi\approx3.1419$. 一般地说,计算 π 值的这种方法效率是很低的. 1968 年,贝克曼(Beckmann,P.)在《应用概率入门》一书中指出:将一根针投掷 3 400 次使 π 值准确到小数点后第 5 位的概率只有 0.015.

19 世纪下半叶,法国数学家贝特朗(Bertrand,J. L. F.)发现,对于同一个几何概率问题,由于有关测度的不同要求会导致互相矛盾的解答. 后来,法国数学家庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)指出,只须要求所采用的测度在一定变换群下不变,矛盾就不会出现. 从此,几何概率同变换群相结合,促进了积分几何的发展.

哥尼斯堡七桥问题(Königsberg seven bridges problem) 涉及到组合拓扑学与图论的重要课题. 在东普鲁士的首府哥尼斯堡,横贯其中的普莱格尔河及其两支流上有 7 座桥,将河岸与河中的奈发夫岛相连结(如图 1 所示). 一个人怎样才能每座桥只走一次而走遍所有的 7 座桥? 这就是著名的哥尼斯堡七桥问题,也称欧拉七桥问题.

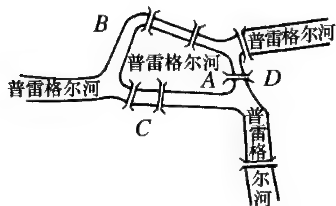


图 1

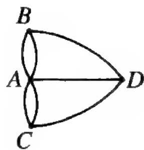


图 2

1736 年,瑞士数学家欧拉(Euler,L.)在论文"与位置几何有关的一个问题的解"中提出并解决了上述的七桥问题. 首先他简化了这个问题的表述形式. 用点表示陆地,用连结两点的线来表示桥,得到图 2. 于是,七桥问题简化成:对给定的图,是否存在一条路线,使得每条线只走一次而走遍所有的线? 即,能否一笔画出这个图? 因而,此问题也称一笔画问题. 欧拉正确地解决了七桥问题,证明这种走法是不存在的. 并由此得出一般结论:当且仅当图是连通的,且每个顶点的阶数都是偶数或者恰只有两个顶点的阶数为奇数时,这种走法是存在的. 这里顶点的阶数是指通过该顶点的线数. 欧拉的论文在圣彼得堡科学院报告,成为图论史上第一篇重要文献,从此,开始了组合拓扑学的发展.

欧拉常数问题(Euler constant problem) 一个重要的解析常数的探讨问题. 1735 年,瑞士数学家欧拉(Euler,L.)推证出

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\ln(n+1)+C,$$

式中 C 表示无穷多个有限算术和之和. 由于

$$C=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)$$

是单调递增且上有界,因而当 $n\to\infty$ 时 C 有极限值. 欧拉计算过 C 的值大约为 0.577218. 由于 $\ln(n+1)\sim\ln n$,因此,现代定义的欧拉常数为

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right).$$

欧拉常数在分析中,特别是在 Γ 函数与 ζ 函数的研究中起着重要作用. 但它的数论性质尚不清楚,甚至还不知道是有理数还是无理数,但猜想它是超越数.

苏联数学家辛钦(Хинчин,А. Я.)的著作《连分数》中,有一个定理:对于几乎所有的实数 x,它的正则连分数展开式中的部分商 a_k 的几何平均值 $G_n(x)=(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}$ 收敛于一个常数

$$c=2.685452001\cdots,$$

后人称此常数为辛钦常数. 1977 年,布伦特(Brent,R. P.)在他的论文"欧拉常数的正则连分数计算"中,计算出 $G_{20000}(\gamma)=2.6908$. 但是,对于有理数 x 来说,它的正则连分数的部分商最终会变成零,因而,只要 n 足够大,$G_n(x)=0$. 布伦特的计算结果使人更相信欧拉常数很可能是无理数. 1988 年,贝利(Bailey,D. H.)证明:如果欧拉常数是满足 8 次整系数代数方程的代数数,则其系数向量的欧几里得范数必超过 3.57×10^9. 人们认为这有利于认识欧拉常数的超越性.

有关欧拉常数的公式有

$$\gamma=-\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t,$$

$$\gamma=\int_0^1\frac{1-\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-1/t}}{t}\mathrm{d}t.$$

1998 年,桑道(Sondow,J.)证明了一个反对称公式

$$\gamma=\lim_{x\to1^+}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^x}-\frac{1}{x^n}\right).$$

欧拉常数的计算中,意大利数学家马斯凯罗尼(Mascheroni,L.)在 1790 年出版的《欧拉积分计算注释》中对欧拉常数进行了较为详细的推算,得出精确到 32 位小数的结果,被后人称为欧拉-马斯凯罗尼常数. 1878 年,英国天文学家、数学家亚当斯(Adams,J. C.)曾计算到 260 位小数. 用电子计算机曾计算到 1200 位小数. 1974 年,他进一步计算到

7000多位小数.到小数50位的数字是

$$\gamma = 0.577215664901532860606512\\090082402431042159335939992\cdots$$

哥德巴赫猜想(Goldbach conjecture) 数论中最著名的世界难题之一.被德国数学家希尔伯特(Hilbert,D.)列入他的著名的23个数学问题的第8个问题中.1742年,由德国数学家哥德巴赫(Goldbach,C.)提出并经瑞士数学家欧拉(Euler,L.)简化而得到的猜想,它的现代陈述是:

1. 每个大于4的偶数是两个奇素数之和.
2. 每个大于7的奇数是三个奇素数之和.

前者称为关于偶数的哥德巴赫猜想,后者称为关于奇数的哥德巴赫猜想.显然,前者可推出后者.

整个19世纪,哥德巴赫猜想的研究没有任何进展.20世纪中,哥德巴赫问题的研究方向有:

1. 弱型哥德巴赫问题.1912年,德国数学家兰道(Landau,E.G.H.)在国际数学会报告中提出一个较弱的命题:存在一个正整数m,使得任何大于4的正整数都能表示成不超过m个素数之和.1930年,苏联数学家施尼雷尔曼(Шнирельман,Л.Г.)取得了重要进展,证明了任何正整数都能表示成有限个素数之和.后来有人估计出,每个充分大的正整数可表为不超过80万个素数之和.1936年,兰道将m缩小到$m\leqslant 71$.1977年,旺格翰(Vaughan,R.C.)证出$m\leqslant 26$.1983年,中国学者张明尧改进为$m\leqslant 24$.

1937年,苏联数学家维诺格拉多夫(Виноградов,И.М.)运用他创立的三角和方法证明了"任何一个充分大(大于$3^{3^{15}}$)的奇数都能表示为三个素数之和",使哥德巴赫问题的研究推进了一大步,基本上解决了奇数哥德巴赫猜想.由此推出,对于充分大的偶数,$m\leqslant 4$.中国著名数学家陈景润又将下界$3^{3^{15}}$改进成$e^{e^{11.503}}$.

1938年,中国数学家华罗庚证明了,几乎所有偶数都能表成两个奇素数之和.到1941年,他又证明了,每一个充分大的奇数都可表为三个奇素数的n次幂之和,其中n为任意给定的正整数.当$n=1$时,即维诺格拉多夫的结果.

2. 殆素数问题.所谓殆素数就是指素因数个数很少.能否证明任一个偶数都可以表示成两个殆素数之和?若两个殆素数含素因数的最多个数分别为a,b,则简记为$(a+b)$.偶数的哥德巴赫猜想,即为$(1+1)$.

1920年,挪威数学家布伦(Brun,V.)创立了一种筛法,证明了每一个充分大的偶数都可以表示为两个各不超过9个素数积之和,即证明了(9+9).之后陆续出现许多改进工作.1948年,匈牙利数学家瑞尼(Renyi,A.)证出了$(1+c)$,其中c为常数.使殆素数问题的研究出现了新的转折.1962年,中国数学家潘承洞取得重大成果,证出(1+5).第二年,中国数学家王元与潘承洞证明了(1+4).意大利数学家邦别里(Bombieri,E.)在1965年发表论文"论大筛法",利用他创立的均值公式证明了(1+3).为此,他获得了1974年的菲尔兹奖.1966年,中国数学家陈景润在《科学通报》上宣布他证明了(1+2),即,每个充分大的偶数都可表示为一个素数和一个素因数个数不超过2的整数之和.但在论文中仅叙述了几个引理,没有给出详细证明,因而,没有获得国际数学界的承认.1973年,陈景润在《中国科学》发表了(1+2)的详细证明,并改进了1966年宣布的数值结果,立即在国际数学界引起了强烈反响,公认是对哥德巴赫猜想研究的重大贡献,是筛法理论的光辉顶点.他的结果被国际数学界称为陈氏定理,是目前世界上最好的结果.为纪念这一辉煌成果,1999年,中国将陈景润的形象及其关于哥德巴赫猜想的最佳结果制作了特种邮票.

3. 哥德巴赫猜想的数值研究.1988年,格兰维尔(Granville,A.)等人从数值上研究了形式为$2n=p+q$(p,q为素数且$p\leqslant q$)的哥德巴赫猜想.特别着重研究了使$2n=p+q$成立的最小的素数p.发现在$n\leqslant 10^{10}$范围内,除了$12703943222=2029+q$以外,其余不超过$2\cdot 10^{10}$的偶数$2n$都可表示成$2n=p+q$,式中素数$p<2029$,而q为素数,且$p\leqslant q$.

哥德巴赫猜想,特别是关于偶数的哥德巴赫猜想至今未获解决.2000年3月18日,英国的费伯出版社和美国的布鲁姆斯伯里出版社宣布,谁能证明哥德巴赫猜想将得到100万美元的奖金,悬赏截止日期是2002年3月15日.

欧拉多边形剖分问题(Euler problem of polygon dissected) 一个著名的组合数学难题.1751年,瑞士数学家欧拉(Euler,L.)向德国数学家哥德巴赫(Goldbach,C.)提出的问题:一个平面凸n边形,若用其不内交的对角线作三角形剖分,总共有多少种不同的剖分方法?这是一个著名的组合数学问题.所谓两条对角线不内交是指这两条对角线不相交或交点不在对角线的内部.设n边形有E_n种不同的剖分法,欧拉本人计算出$E_3=1,E_4=2,E_5=5,E_6=14,E_7=42,E_8=132,E_9=429$.欧拉将这些结果转告给匈牙利数学家谢格奈(von Segner,J.A.).1758年,谢格奈得到了递归关系式

$$E_n=E_2E_{n-1}+E_3E_{n-2}+\cdots+E_{n-1}E_2,$$

式中规定$E_2=1$.

1941年,乌尔班(Urban,H.)由

$$\frac{E_3}{E_2}=\frac{2}{2},\quad \frac{E_4}{E_3}=\frac{6}{3},\quad \frac{E_5}{E_4}=\frac{10}{4},$$

$$\frac{E_6}{E_5}=\frac{14}{5},\quad \frac{E_7}{E_6}=\frac{18}{6},$$

归纳出更为简单的递归关系式：

$$E_n=\frac{4n-10}{n-1}E_{n-1}.$$

然后借助于谢格奈递归关系式，并使用数学归纳法加以证明，进而推出

$$E_n=\frac{2\cdot 6\cdot 10\cdots(4n-10)}{(n-1)!}=\frac{(2n-4)!}{(n-1)!\ (n-2)!}.$$

双心多边形问题(problem of the bicentric poly - gon) 几何中的一个经典问题. 既有内切圆又有外接圆的多边形，称为双心多边形. 研究双心多边形的特性，是一个由来已久的几何问题. 设双心 n 边形的内切圆半径为 r，外接圆半径为 R，两个圆心间的距离为 d.

当 $n=3$ 时，任何三角形都是双心三角形. 1765 年，瑞士数学家欧拉(Euler，L.)对此进行研究并得出下列结果：$R^2-d^2=2Rr$. 由此可推出 $R\geqslant 2r$，称为欧拉不等式. 等号仅当等边三角形时成立.

当 $n=4$ 时，瑞士数学家富斯(Fuss，N.)于 1798 年证出

$$2r^2(R^2+d^2)=(R^2-d^2)^2,$$

或

$$\frac{1}{(R+d)^2}+\frac{1}{(R-d)^2}=\frac{1}{r^2}.$$

由此不难推出 $R\geqslant\sqrt{2}\,r$，等号仅当正方形时成立. 富斯还发现了 $n=5,6,7,8$ 时的相应公式. 富斯从 19 岁开始发表论文，主要解决欧拉提出的各种数学问题.

法国数学家彭赛列(Poncelet，J.-V.)证明了：从双心 n 边形的外接圆上任一点 A_1 出发，作内切圆的切线交外接圆于 A_2，再从 A_2 作内切圆的切线交外接圆于 A_3，如此继续下去，直到从 A_n 作内切圆的切线，恰好过 A_1，即从外接圆上任一点出发相继作内切圆的切线，最后闭合成 n 边形. 这种情形称为对该点 A_1 的彭赛列切线闭合，这个命题称为彭赛列闭合定理. 彭赛列证明此结论还适合于圆锥曲线. 一般情形是，如果对两条已知圆锥曲线中之一上的某一点是彭赛列切线闭合，则这两条已知圆锥曲线就闭合于任意位置的起点.

欧拉对费马猜想的猜想(Euler conjecture for Fermat conjecture) 关于不定方程正整数解的一个猜想. 是瑞士数学家欧拉(Euler，L.)提出的一个猜想：不定方程

$$x_1^n+x_2^n+\cdots+x_m^n=y^n,$$

式中 $n\geqslant 3$，$m>1$. 当 $m<n$ 时，没有正整数解；要使方程有正整数解必须 $m\geqslant n$. 1769 年，欧拉在研究费马猜想(即费马大定理)时提出，法国数学家费马(Fermat，P. de)所提出的猜想还可以推广："就像两个三次幂之和不是三次幂一样，肯定地，也找不到三个正整数的四次幂之和是一个整数的四次幂；而要组成一个整数的四次幂至少需要四个整数的四次幂，尽管现在还没有人找到这样的四个四次幂. 同样地，也不可能找到四个整数的五次幂之和是一个整数的五次幂. 可以类推到更高次幂."欧拉这一猜想一直未有进展. 直到 1911 年，诺里(Norrie，R.)才找到 5 个整数满足

$$30^4+120^4+272^4+315^4=353^4.$$

找到了欧拉"要组成一个整数的四次幂至少需要四个整数的四次幂"的实例. 直到 20 世纪 40 年代，有人证明了：当 $u\leqslant 10^4$ 时，方程

$$x^4+y^4+z^4=u^4 \tag{1}$$

确实没有正整数解，才使这一研究有了进展. 1967 年又证实了 $u\leqslant 220\,000$，欧拉猜想也是正确的. 1988 年，这一猜想发生了戏剧性变化. 在日本召开的不定方程国际会议上，美国哈佛大学的埃尔克斯(Elkies，N.)宣称，他利用椭圆曲线理论证明了方程(1)有无穷多组解，并用计算机找到一些解，其中最小的一组是

(2 682 440，15 365 639，18 796 760，20 615 673).

他的另一组较小的解大到 70 位数. 欧拉关于方程(1)无正整数解的猜想被推翻. 在埃尔克斯的建议下，弗赖伊(Frye，R.)利用计算机运算约 100 小时，得到方程(1)的最小正整数解

(95 800，217 519，414 560，422 481).

并发现这是 $u<10^6$ 的惟一解. 1966 年，人们找到了五个正整数满足

$$27^5+84^5+110^5+133^5=144^5.$$

华人吴子乾于 1970 年也独立地找到了这组解. 于是，对于 $n=5$ 的欧拉猜想也被推翻.

剩下来的 $n\geqslant 6$ 的欧拉猜想，尚无明确结论.

华林问题(Waring problem) 数论中的著名问题. 即对于给定的自然数 n，是否存在一个仅依赖于 n 的正整数 r，使得对任意正整数 N 一定可表示成 r 个正整数的 n 次幂之和. 这是英国数学家华林(Waring，E.)在 1770 年出版的《代数沉思录》中研究的一个问题. 他叙述道：每一个整数，或者是一个立方数或者是至多 9 个立方数之和；每一个整数，或者是一个 4 次方数或者是至多 19 个 4 次方数之和. 他猜测：一般地，每个正整数可以表成至多 r 个 n 次幂之和，其中 r 仅依赖于 n. 将 r 的最小值记为 $g(n)$，用不定方程表示就是方程 $x_1^n+x_2^n+\cdots+x_g^n=N$ 始终有非负整数解，其解数记为 $J_n(N)$. 当 $n=2$ 时，法国数学家拉格朗日(Lagrange，J.-L.)于 1770 年证明了任一正整数是 4 个整数的平方和，即 $g(2)=4$. 1909 年，德国数学家希尔伯特(Hilbert，D.)证

明了一般情形的 r 是存在的. 从此华林猜想成为华林定理. 对华林问题的研究现在集中于 $g(n)$,以及 $J_n(N)$ 的计算上. 华林猜测:

$$g(n)=2^n+[1.5^n]-2.$$

中国数学家华罗庚以及苏联数学家维诺格拉多夫(Виноградов, И. М.)对此都做出了较大贡献. 围绕着华林问题还衍生出许多其他问题与猜想:

1. 平方数之和的表示问题. 保罗·图兰(Turan,P.)提出问题:什么样的正整数 n 能表示成两两互素的 4 个正整数的平方和?并且证明了形如 $8k$ 的整数不能这样表示. 乔治·图兰(Turan,G.)证明了形如 $6k+5$ 的整数也不能这样表示. 现在已经知道能这样表示的数 n 必须满足:$n\equiv 3,4,7 \pmod 8$. 保罗·图兰猜测,任何一个正整数都可以表示成至多 5 个两两互素的正整数的平方和. 他问道,对于足够大的整数,能表示成恰好 5 个两两互素的平方数之和吗? 1979 年,博曼(Bohman,J.)等人证明了有 31 个整数不能表示成不同的正整数的平方和,并且大于 188 的整数都可以表示成最多 5 个不同的正整数的平方和. 20 世纪 80 年代,霍尔特-科克(Halter-Koch,F.)证明了每一个大于 412,且不能被 8 整除的整数都可以表示成 4 个不同的正整数的平方和,而每一个大于 157 的奇数也可以这样表示.

2. 立方数之和的表示问题. 有人提出每一个正整数能否表示成 4 个立方数之和?已经证明,除了形如 $9n\pm4$ 的数外,每一个整数都可以这样表示.

欧拉多项式问题(Euler polynomial problem) 由研究多项式可以连续取素数而引出的问题. 1772 年,瑞士数学家欧拉(Euler,L.)证明出,当 $p=2,3,5,11,17,41$ 时,多项式 x^2+x+p 可以连续取 $p-1$ 个素数值,这些素数值是在 $x=0,1,\cdots,p-2$ 时取得的. 这一多项式 x^2+x+p 称为欧拉多项式. 为了检验欧拉的这一结果,可使用如下的定理:如果区间 $[0,\sqrt{p/3}]$ 内的所有整数 x,使 $f(x)=x^2+x+p$ 均取素数,则对于一切整数 $x=0,1,\cdots,p-2$,$f(x)$ 都取素数值. 人们曾提出:除了这 6 个 p 值外,是否还有别的素数 p 也具有上述性质? 这一问题的研究曾一度陷入困境. 直到 1933 年,美国数学家莱默(Lehmer,D. H.)获得重大突破:若多项式 x^2+x+p,当素数 $p>41$ 时,对所有 $x=0,1,\cdots,p-2$ 给出素数值,则 p 必须比 $25\times10^7+1$ 还大. 1934 年有人证明,即使在大数范围内,这样的 p 最多有一个. 到 20 世纪 60 年代末,人们经过深入研究得出结论:没有这样的素数 $p>41$,使 x^2+x+p 对所有 $x=0,1,\cdots,p-2$ 取得素数值.

欧拉多项式的另一种形式是 x^2-x+p,它是多项式 x^2+x+p 中用 $x-1$ 代换 x 得到的. 由此可知,当且仅当 $p=2,3,5,11,17,41$ 时,x^2-x+p 可在 $x=1,2,\cdots,p-1$ 时连续取得素数值.

更一般的问题是,对于任意给定的自然数 N,能否找到素数 p,使得 $x=1,2,\cdots,N$ 时,$f(x)=x^2-x+p$ 连续取素数值?若这一问题能获得肯定的回答,则可有助于多个数论难题(例如,孪生素数猜想、三生素数猜想等)的解决,但它至今未获解决.

欧拉 36 军官问题(Euler 36 officers problem) 组合数学中的著名难题之一. 1779 年,瑞士数学家欧拉(Euler,L.)在双目失明的情况下,口授了一篇题为"一种新型幻方"的论文. 论文中写道:"一个很奇怪的问题,在一段时期里许多人作为一种智力训练,将我卷入下面的研究中,这似乎是个未解决的新的研究领域,特别是组合学的研究领域. 这是个讨论 36 名军官的排列问题:从 6 个不同军团各抽出 6 名不同军衔的军官,把他们排列成一个方阵,使得每一行、每一列都是来自不同军团、不同军衔的 6 名军官."这就是著名的 36 军官问题. 它的一般形式属于正交拉丁方问题.

由 n 个不同记号构成的集合 A,每个记号各取 n 次,共 n^2 个记号排列成 n 行 n 列的方阵,使得各行、各列上 A 的每个记号各出现一次,称此方阵为 A 上的 n 阶拉丁方. 例如,

$$L_1=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{vmatrix},\quad L_2=\begin{vmatrix}1&3&2\\2&1&3\\3&2&1\end{vmatrix},$$

都是 3 阶拉丁方. 将集合 A 上的两个 n 阶拉丁方 L_1 与 L_2 重叠成方阵,若 n^2 个位置上的 n^2 个不同的有序对全部出现,则称 L_1 与 L_2 是正交的. 重叠所得的方阵称为 A 上的正交表,后人称之为 n 阶欧拉方阵,简称欧拉方阵. 例如,将前述的两个 3 阶拉丁方 L_1 与 L_2 重叠得到

$$\begin{vmatrix}(1,1)&(2,3)&(3,2)\\(2,2)&(3,1)&(1,3)\\(3,3)&(1,2)&(2,1)\end{vmatrix},$$

在 9 个位置上出现了由 A 中的所有记号(1,2,3)构成的全部有序对(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),因而是 3 阶欧拉方阵. 36 军官问题就是求 6 阶欧拉方阵问题. 当 $n=2t+1$ 或 $n=4t$(t 为正整数)时,n 阶欧拉方阵是容易构造的. 经过大量反复试验,1782 年,欧拉确信当 $n=4t+2$(t 为正整数)时,n 阶正交表是不存在的. 这就是著名的欧拉方阵猜想.

由于构造欧拉方阵的困难,这一猜想的研究进展迟缓,直到 1900 年,加斯顿·塔里(Tarry,G.)在

他的兄弟赫伯特·塔里(Tarry,H.)的帮助下,列出了全部6阶拉丁方,验证了它们当中任何两个都不是正交的,从而证实了$n=6$时,欧拉猜想是正确的,即36军官问题是无解的.1959年4月,印度数学家玻色(Bose,R.C.)和斯里克汉德(Shrikhande,S.S.)构造了22阶正交拉丁方,从而构造出22阶欧拉方阵,否定了欧拉猜想.不久,他们证明出:除$n=2$,6,14,26外,n阶欧拉方阵都是存在的.接着,美国数学家帕克(Parker,E.T.)又构造出14阶与26阶的欧拉方阵,至此,欧拉方阵猜想只对$n=2$,6成立,其余都是错的.

既然,一般地,欧拉方阵是存在的,那么重要的问题是,欧拉方阵的计数,设s个n阶拉丁方是两两正交的,对于给定的n,s的最大值记为$N(n)$.对任意大于1的自然数n,有$N(n)\leqslant n-1$.前述欧拉方阵猜想的否定表明:当$n\neq 2$或6时,有$N(n)\geqslant 2$.如何计算$N(n)$,是至今未解决的问题,其中两个较为重要的是:

1.何时$N(n)=n-1$?何时$N(n)<n-1$?布鲁克(Bruck)和赖瑟(Ryser)证明:如果$n\equiv 1,2 \pmod 4$,且n不含平方因数的部分.至少含有一个$4t+3$型的素因数,则$N(n)<n-1$,人们猜想:当且仅当n为素数或某一素数幂时,$N(n)=n-1$.有人建议将此猜想作为下一个费马(大定理)问题.

2.威尔逊问题.是关于$N(n)$的渐近估计问题,即是否存在常数c,使得$N(n)\leqslant (n/c)$,对一切n或除去个别值的n都成立?威尔逊(Wilson,W.A.)证明了对充分大的n,有$N(n)\geqslant \sqrt[17]{n}-2$.这一结果有人又改进成,对充分大的$n$,有

$$N(n)\geqslant n^{10/143}-2.$$

拉丁方问题(problems of Latin square)　组合数学的著名难题之一.一个n阶方阵,它的每一行及每一列都是n元有限集S的所有元素的一个排列,称此方阵为集合S上的n阶拉丁方,简称S上的拉丁方.通常取$S=\{1,2,\cdots,n\}$.对于任何自然数n,n阶拉丁方总是存在的.例如,n阶方阵$A=(a_{ij})$,其中$i,j=1,2,\cdots,n$.取$a_{ij}\equiv i+j \pmod n$,就是一个n阶拉丁方,其中$1\leqslant a_{ij}\leqslant n$.

利用两个给定的拉丁方可以构造新的拉丁方.具体的构造方法是:设n阶拉丁方$A=(a_{kl})$及m阶拉丁方$B=(b_{rs})$,则可构造mn阶拉丁方$C=(c_{ij})$,其中$c_{ij}=b_{rs}+(a_{kl}-1)m$,式中$i=r+m(k-1)$,$j=s+m(l-1)$,且$r,s=1,2,\cdots,m$;$k,l=1,2,\cdots,n$.

关于n阶拉丁方的个数L_n有下列下界:

$$L_n\geqslant n!(n-1)!\cdots 2!$$

根据荷兰数学家范·德·瓦尔登(Van der Waerden,B.L.)的一个猜想,可推出

$$L_n\geqslant \frac{(n!)^{2n}}{n^{n^2}}.$$

一个拉丁方,如果它的第一行与第一列的元素都是按自然数顺序排序时,称之为标准型拉丁方,其个数用l_n表示,则有$L_n=n!(n-1)!l_n$.已知的l_n有

$l_1=l_2=l_3=1$, $l_4=4$, $l_5=56$, $l_6=9408$,

$l_7=16942080$, $l_8=535281401856$,

$l_9=377597570964258816$.

求l_n的界是未解决的问题.

在同一个集合S上的两个拉丁方认为是等价的,如果其中之一可由另一个经过行与列的交换得到.用k_n表示n阶拉丁方的等价类的个数.已知的k_n有$k_1=k_2=k_3=1$,$k_4=k_5=2$,$k_6=22$,$k_7=563$,$k_8=1676257$.一个在$S=\{1,2,\cdots,n\}$上的拉丁方称为完全的,如果对任何两个不同的自然数$\alpha,\beta\in S$,存在数i,j,k,l使得

$$(a_{ij},a_{i,j+1})=(\alpha,\beta)\text{ 和 }(a_{kl},a_{k+1\,l})=(\alpha,\beta).$$

即在某一行中会出现左右相邻的α,β,且在某一列中出现上下相邻的α,β.已经解决了偶数阶的完全拉丁方的构造问题;对于奇数阶的完全拉丁方只知道一些例子.

一个n阶方阵称为部分n阶拉丁方,如果它的一部分位置已填上一个n元集S的元素,且S的元素在每行和每列中都至多出现一次.存在着不能补充成一个拉丁方的部分拉丁方.例如,4阶方阵

$$\begin{matrix} * & * & * & * \\ * & 2 & 3 & 4 \\ 1 & * & * & * \\ * & * & * & * \end{matrix}$$

埃文斯(Evans)猜想:已填有$n-1$个元素的部分拉丁方皆可补充成一个n阶拉丁方.1981年,斯梅坦尼亚柯(Smetaniuk,B.)证明了这一猜想.

一个给定的n阶拉丁方,如果它的一个k阶子方阵是一个k阶拉丁方($k<n$),则称此k阶拉丁方为n阶拉丁方的拉丁子方.当$n\geqslant 2k$时,任何k阶拉丁方都可以是某一个n阶拉丁方的拉丁子方.

马斯凯罗尼圆规问题(Mascheroni's compasses problem)　一个著名的问题.即能否仅用圆规完成欧几里得几何作图?很早人们就注意了这类作图问题.例如,法国军事家拿破仑(Napoleon,B.)就曾向法国数学家们提出了这样一个问题:只用圆规将一个圆周4等分.

1672年,丹麦数学家莫尔(Mohr,G.)在他的著作《欧几里得作图》中指出,如果已知一直线上的两个点就认为这条直线是已知的话,那么凡能用直尺和圆规完成的几何作图也可以只用圆规来完成.但

是,他的工作一直不为人们所知.直到1928年一个偶然的机会,丹麦数学家杰姆斯莱夫(Hjelmslev, J.)才发现了莫尔的《欧几里得作图》.

1797年,意大利数学家马斯凯罗尼(Mascheroni,L.)又独立发现了莫尔的结论,并写在他的著作《圆规的几何学》中,后人称为马斯凯罗尼定理:仅用圆规可以完成所有的尺规作图,如果一条直线上有两个点已知就认为该直线为已知的话.为了证明上述定理.首先需要证明两个预备定理:

1.仅用圆规可作出两条已知线段的和与差.

2.仅用圆规可作出已知三条线段的第四比例项.

其次,根据以上两个预备定理进一步证明,仅用圆规可完成下列两个基本作图:

1.作两条已知直线的交点.

2.作一条直线与一个圆的交点.

再加上仅用圆规可作两个已知圆的交点.

最后,可证明出所有尺规作图均可仅用圆规作出.从本质上说,莫尔与马斯凯罗尼的结论表明:所有欧几里得几何作图(即尺规作图),除可能最后一步需直尺完成外,均可只用圆规完成.换句话说,在所有尺规作图中,最多只用一次直尺.

伪素数问题(pseudoprime problems) 关于一种特定结构的整数的素性及其个数的著名难题.17世纪,法国数学家费马(Fermat,P. de)在给法国数学家梅森(Mersenne,M.)的信中提到:2^p-2能被奇素数p整除.其等价命题是:如果奇数n不能整除2^n-2,则n必为合数.于是,人们提出问题:如果奇数$n>1$能整除2^n-2,那么n是否是素数?对于$1<n<300$的计算表明,能整除2^n-2的奇数n确实是素数.直到1819年才有人发现$n=341$虽然能整除$2^{341}-2$,但$n=341=11\times31$却不是素数.于是,人们将能整除2^n-2的合数n称为伪素数.围绕伪素数产生了许多问题:

1.怎样构造伪素数,伪素数有多少?早在1904年,施波拉(Cipolla,M.)就利用费马数$F_n=2^{2^n}+1$得到构造伪素数的方法:如果$k>1$,且$n_1<n_2<\cdots<n_k<2^{n_1}$,则$F_{n_1},F_{n_2},\cdots,F_{n_k}$都是伪素数.已经证明有无穷多个奇伪素数.例如,任取一个大于3的素数p,则$n=(4^p-1)/3$必是奇伪素数.由于这样的p有无穷多,故奇伪素数有无穷多.

2.除了奇伪素数,是否有偶伪素数?1950年,美国数学家莱默(Lehmer,D. H.)首先找到了第一个偶伪素数$161038=2\times73\times1103$,第二年,比格(Beeger,N. G. W. H.)证明偶伪素数也有无穷多.

3.伪素数含有多少个素数因子?1936年,莱默证明含有两个不同素数因子的伪素数有无穷多.1949年,数学家爱尔特希(Erdös,P.)证明:对于任给的正整数$n\geqslant2$,含有n个不同素数因子的伪素数有无穷多.

伪素数概念后来得到推广:能整除a^n-a的合数n(这里$n\geqslant2$,a与n互素)称为以a为底的伪素数.如果一个伪素数n的底a可为任何大于1且与n互素的正整数,则称这种极端的伪素数为绝对伪素数,也称卡迈克尔数.这是因为美国数学家卡迈克尔(Carmichael,R. D.)最早在1909年开始研究这种伪素数而得名.最小的卡迈克尔数是561.

早在1899年,科塞勒特(Korselt,A.)就给出了判定绝对伪素数的准则:整数n为卡迈克尔数的充分必要条件是

1.n没有平方因子.

2.n是奇数且至少含有3个不同的素数因子.

3.对于n的每一个素数因子p,$p-1$整除$n-1$.

1992年,奥尔福德(Alford,W. R.)、格兰维尔(Granville,A.)和波梅兰斯(Pomerance,C.)证明了下列事实:设小于x的卡迈克尔数的的个数是$C(x)$,则对充分大的x有$C(x)>x^\beta$,式中

$$\beta=\frac{5}{12}\left(1-\frac{1}{2\sqrt{e}}\right)>0.290306>\frac{2}{7}.$$

由此,他们证明了一个著名的猜想:卡迈克尔数有无穷多.不仅如此,他们还证明了一个更强的结论:设p是卡迈克尔数n的任一素因子,则使$(p^2-1)\mid(n-1)$的n也有无穷多.现在已经找到了许多这样的卡迈克尔数,其中最小的是

$$\begin{aligned}&443372888629441\\&=17\times31\times41\times43\times89\times97\times167\times331.\end{aligned}$$

它是平奇(Pinch,R.)于1993年获得的.

素数计数问题(compute problem of the number of prime) 关于不大于x的素数个数的计算问题.以$\pi(x)$表示不大于x的素数个数,它是表征素数分布的重要量数.研究它的性质和计算其值是数论中重要的研究课题.

1798年,法国数学家勒让德(Legendre,A.-M.)首先提出了素数分布定律的初始形式.1808年利用数值计算得到了一个经验公式:当x足够大时,

$$\pi(x)\approx\frac{x}{\ln x-1.08366}.$$

德国数学家高斯(Gauss,C. F.)根据德国数学家朗伯(Lambert,J. H.)的素数表以及他自制的素数表,研究了300万以内的素数情形,对素数分布提出了如下猜测:

$$\pi(x)\sim\int_2^x\frac{du}{\ln u},\ \pi(x)\sim\frac{x}{\ln x}.$$

但他认为后者不如前者. 这是有关素数分布的重要猜想，现在称之为素数定理. 1852 年，俄国数学家切比雪夫(Чебышев, П. Л.)在论文"论素数"中，证明了不等式

$$a \cdot \frac{x}{\ln x} < \pi(x) < b \cdot \frac{x}{\ln x},$$

式中 $a=0.92129\cdots$, $b=6a/5=1.10555\cdots$ 从本质上推进了素数分布问题的研究.

1892 年，英国数学家西尔维斯特(Sylvester, J. J.)改进了切比雪夫的方法而得到 $a=0.95695$, $b=1.04423$.

1859 年，德国数学家黎曼(Riemann, (G. F.) B.)发表著名论文"论给定数以内的素数个数"，将素数分布的问题归结为函数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

(式中 $s=x+yi$, i 为虚数单位)的有关问题，为解决高斯猜想开辟了新方向. 循着这个方向，1896 年，法国数学家阿达马(Hadamard, J. (-S.))和比利时数学家瓦莱·普桑(Vallée - Poussin, C. de la)各自独立地证明了高斯猜想——素数定理. 后来他们又得到了一个精巧的较短证明，但是仍旧涉及了复杂的解析方法与理论.

1949 年，挪威数学家赛尔伯格(Selberg, A.)和匈牙利数学家爱尔特希(Erdös, P.)给出了素数定理的初等证明，除了极限、$\ln x$ 和 e^x 的性质之外，没有用到其他的分析知识. 但证明过程十分复杂，他们的证明是基于赛尔伯格的著名恒等式：当 $x \geqslant 1$ 时，有

$$\theta(x)\ln x + \sum_{p \leqslant x} \theta\left(\frac{x}{p}\right) \ln p = 2x\ln x + O(x),$$

式中 $\theta(x) = \sum\limits_{p \leqslant x} \ln p$, $\sum\limits_{p \leqslant x}$ 表示对所有不超过 x 的素数求和.

有误差项的素数定理是指寻求误差 $\pi(x) - \mathrm{li}\, x$ 的最佳估计，这里

$$\mathrm{li}\, x = \lim_{\eta \to 0} \left(\int_0^{1-\eta} + \int_{1+\eta}^{x} \right) \frac{\mathrm{d}u}{\ln u}$$

它比 $x/\ln x$ 更接近于 $\pi(x)$.

1900 年，瓦莱·普桑首先证明了

$$\pi(x) - \mathrm{li}\, x = O(x\exp(-c\sqrt{\ln x})),$$

式中 c 是一个正常数.

1901 年，瑞典数学家科克(Koch, H. von)在黎曼猜想成立的前提下，证明了

$$\pi(x) - \mathrm{li}\, x = O(\sqrt{x}\ln x).$$

1958 年，苏联数学家维诺格拉多夫(Виноградов, И. М.)借助于他创立的三角和估计方法，得到

$$\pi(x) - \mathrm{li}x = O(x\exp(-c(\ln x)^{3/5-\varepsilon})),$$

式中 ε 为任意正数，c 是与 ε 有关的正常数.

$\pi(x)$ 的计算，在古希腊是用埃拉托斯特尼筛法. 法国数学家勒让德首先提出不用逐个确定小于 x 的所有素数的方法来计算 $\pi(x)$. 他应用容斥原理得到

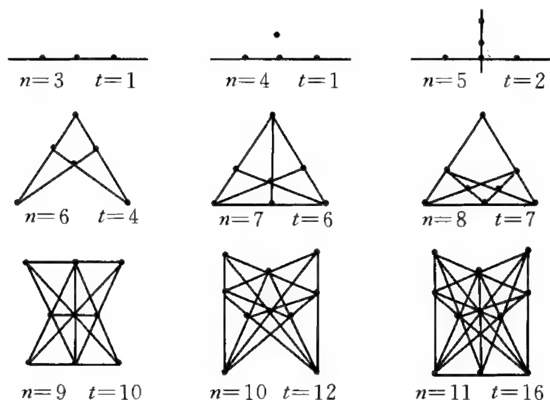
$$\pi(x) - \pi(\sqrt{x}) + 1 = [x] - \sum\left[\frac{x}{p_i}\right] + \sum\left[\frac{x}{p_i p_j}\right] - \sum\left[\frac{x}{p_i p_j p_k}\right] + \cdots$$

式中$[\alpha]$表示不超过 α 的最大整数，p_i 取所有不超过 $\sqrt{x}$ 的素数. 在第二、三项求和式子中，$p_i < p_j$, $p_i < p_j < p_k$，以此类推. 但这个公式在计算 $\pi(x)$时，并不是有效的，因为它要计算大约 $6(1-\ln 2)x/\pi$ 项，不用逐个确定小于 x 的所有素数来计算 $\pi(x)$的第一个有效的算法，在 19 世纪 80 年代由德国天文学家迈塞尔(Meissel, E. D. F.)提出来. 他的方法能减少上述"勒让德和"中的项数. 1871 年，他利用这个方法计算出 $\pi(10^8) = 5761455$. 随着计算机的发展，美国数学家莱默(Lehmer, D. H.)重新研究 $\pi(x)$的计算，他补充和改进了迈塞尔算法，于 1959 年在 IBM701 机上计算出 $\pi(10^{10}) = 455052512$(后来证明比正确值大 1). 20 世纪 80 年代，拉戈瑞阿斯(Lagarias, J. C.)等人进一步充实迈塞尔-莱默算法，在计算机上运转约 29 小时，计算出

$$\pi(4 \times 10^{16}) = 1075292778753150.$$

果园问题(orchard problem)　一个著名的代数几何难题. 设平面点集 S 有 n 个点，其中任四点不共线，则 S 确定的三点线(过 S 中三个不同点的直线)最多有多少条?达到最大值时的点集结构是什么样的?这是代数几何中至今尚未完全解决的难题.

这个问题起源于 1821 年的约翰·杰克逊(John Jackson)的《冬天夜晚的推理娱乐》，此书中提出这样一道命题：试将 9 棵树排成 10 行，使得每行只有 3 棵树. 由此引发了著名的果园问题：在一个果园里有 n 棵树，没有 4 棵树排在同一行，但使 3 棵树排在同一行的尽可能多. 如图所示，给出了当 $n=3,4,5,\cdots,11$ 时，具有最多三点线的结构图.



n 点集的三点线最多条数记为 $t(n)$，则已解决的有

$t(3)=t(4)=1$，$t(5)=2$，$t(6)=4$，$t(7)=6$，$t(8)=7$，$t(9)=10$，$t(10)=12$，$t(11)=16$，$t(12)=19$，$t(16)=37$.

此外，还知道

$22\leqslant t(13)\leqslant 24$，$26\leqslant t(14)\leqslant 27$，$31\leqslant t(15)\leqslant 32$，$40\leqslant t(17)\leqslant 42$，$46\leqslant t(18)\leqslant 48$，$52\leqslant t(19)\leqslant 54$，$57\leqslant t(20)\leqslant 60$，$64\leqslant t(21)\leqslant 67$，$70\leqslant t(22)\leqslant 73$，$77\leqslant t(23)\leqslant 81$，$85\leqslant t(24)\leqslant 88$，$92\leqslant t(25)\leqslant 96$，

尚不能明确这些 $t(n)$ 的准确值. 利用三次曲线及椭圆函数理论，可以获知 $t(n)$ 的一个下界

$$t(n)\geqslant\left[\frac{n(n-3)}{6}\right]+1,$$

式中 $[x]$ 表示 x 的整数部分，即不大于 x 的最大整数. 这是英国数学家西尔维斯特(Sylvester, J. J.)给出的 $t(n)$ 的下界的改进. 人们希望得到精确计算 $t(n)$ 的公式，这看来是很困难的工作. 伯尔(Burr, S.)等人猜想：除了 $n=7,11,16,19$ 外，

$$t(n)=\left[\frac{n(n-3)}{6}\right]+1,$$

但至今未获解决.

施泰纳直尺问题(Steiner straightedge problem)　一个著名的问题：能否仅用直尺完成欧几里得几何作图？阿拉伯数学家阿布·瓦法(Abul-Wefa)在他的著作《手艺人几何作图法》(完成于公元990年以后)中提出仅用直尺和开口固定(即两脚固定)的圆规作图问题. 后来，意大利数学家贝内代蒂(Benedetti, G. B.)22岁时发表了他的第一部著作，讨论用直尺和开口固定的圆规来完成所有的欧几里得几何作图问题. 一般的问题是由丹麦数学家莫尔(Mohr, G.)在他的《奇妙的欧氏纲要》(1673)一书中解决的.

能否不用圆规来完成欧氏作图呢？在1759年苏黎世出版的德国数学家朗伯(Lambert, J. H.)的著作中，只用直尺解决了一系列的几何作图题，他是直尺几何的鼻祖. 继朗伯之后，法国数学家彭赛列(Poncelet, J.-V.)、布里昂雄(Brianchon, C. J.)着手直尺几何的研究. 发现仅用直尺只能作出有理式的图形，而像 $\sqrt{ab}$ 的无理式是不可能仅用直尺完成的. 1822年，彭赛列在他的论著中证明：在平面内事先给定一个圆及其圆心，所有的欧氏几何作图都可以仅用直尺完成. 瑞士数学家施泰纳(Steiner, J.)曾在几何方面做出了杰出贡献，被誉为自古希腊阿波罗尼奥斯(Apollonius, (P))以来最伟大的几何学家. 在他1833年出版的《用直尺和一定圆进行的几何作图》一书中，他独立地重新证明了：如果已知圆的半径与圆心就认为这个圆是已知的话，那么所有尺规作图(圆弧除外)都可只用直尺和一个固定的已知圆(及其圆心)来完成. 后人称此为彭赛列-施泰纳定理. 为证明这一结论需证明5个预备定理，即借助于定圆，仅用直尺可完成下列5个作图：

1. 过一已知点可作已知直线的平行线.
2. 过一已知点可作已知直线的垂线.
3. 过一已知点向指定方向作已知长度的线段.
4. 作已知三条线段的第四比例项.
5. 作两条已知线段的比例中项.

然后，在上述基础上，进一步证明，借助于定圆，仅用直尺可完成下列基本作图：

1. 作直线与圆的交点.
2. 作两个圆的交点.

由此证出彭赛列-施泰纳定理.

从本质上说，彭赛列-施泰纳定理表明：所有欧几里得几何作图(即尺规作图)，除可能事先最多用一次圆规外，均可只用直尺完成. 换句话说，在所有尺规作图中，最多只用一次圆规. 1904年，意大利数学家塞维里(Severi, F.)又前进了一步. 他证明：全部尺规作图只需借助于一段任意小圆弧及其圆心，就能仅用直尺完成.

莱默斯问题(Lemhus problem)　一个著名的绝对几何学命题. 有两个角的平分线相等的三角形是否是等腰三角形？这个问题是德国柏林人莱默斯(Lemhus, C. L.)于1840年向当时著名的数学家施泰纳(Steiner, J.)提出的. 施泰纳证明了这样的三角形是等腰三角形. 1850年，莱默斯本人也给出了一个证明. 因此，后人称此命题为施泰纳-莱默斯定理. 1852年，英国著名数学家西尔维斯特(Sylvester, J. J.)又给出了另外的证明. 100多年来，该定理的各种证明层出不穷. 直到20世纪80年代，美国的《数学教师》杂志将此定理再次征解，结果收到来自美国等7个国家与地区的2000多封信，共提出80多种证法. 绝大部分的证明都是使用了由欧几里得第5公设或由它导出的命题，如平行四边形、相似三角形、圆周角定理等. 由欧几里得几何中除第5公设以外的公理及其推证出来的命题所形成的几何体系称为绝对几何学. 绝对几何学的命题不仅在欧几里得几何，而且在罗巴切夫斯基几何中也成立. 1961年，英国数学家考克斯特(Coxeter, H. S. M.)在他的《几何导论》中给出了一种绝对几何证明. 1983年，中国数学家张景中给出了另一个绝对几何证明. 他的证明分4部分：

1. 列举出欧几里得几何与罗巴切夫斯基几何都成立的下述几个命题.

1) 两直线至多交于一点.
2) 平角等于两直角的和.
3) 两点之间以直线段最短.

4）三角形中大边对大角.

5）两个三角形全等的判定定理.

2. 以上述命题为基础证明了下面两个定理.

1）同一直线的两条垂线必不相交.

2）三角形的内角和不超过 180°.

3. 在前两部分的命题基础上，证明了 5 个引理.

4. 在前三部分内容的基础上证明出施泰纳-莱默斯定理.

由此可知，施泰纳-莱默斯定理实际上是绝对几何学命题，既在欧几里得几何中成立，也在罗巴切夫斯基几何中成立.

莱默斯问题有两个孪生问题，其中一个是：如果一个三角形的两个角的外角平分线相等，那么这个三角形是否为等腰三角形？结论是，两外角平分线相等的三角形不一定是等腰三角形. 一个典型的例子是三内角分别是 12°，36°，132°的三角形. 虽然 12°与 132°的外角平分线相等，但此三角形并不是等腰三角形. 日本的井上仪夫证明出："两外角平分线相等且第三个内角是该三角形的最大或最小内角时，此三角形是等腰三角形."另一个问题是：如果一个三角形的一内角平分线与另一内角的外角平分线相等，那么这个三角形是否为等腰三角形？结论仍是不一定.

柯克曼女生问题(Kirkman girl students problem)　关于组合设计的一个著名难题. 1850 年，英国数学家柯克曼(Kirkman，T. P.)提出的组合数学问题：一个宿舍有 15 个女学生，每天 3 人一组、分成 5 组出外散步，一周 7 天，使每人和其他任一人恰有一次同组，问怎样分法？大约在 1860 年，美国数学家皮尔斯(Peirce，B.)发表论文"女学生难题的递推解法"，用此文中提出的方法可得出一个解：

{1,2,9}，{3,5,14}，{4,7,10}，{6,8,11}，{12,13,15}；
{2,3,10}，{4,6,15}，{1,5,11}，{7,8,12}，{9,13,14}；
{3,4,11}，{5,7,9}，{2,6,12}，{1,8,13}，{10,14,15}；
{4,5,12}，{1,6,10}，{3,7,13}，{2,8,14}，{9,11,15}；
{5,6,13}，{2,7,11}，{1,4,14}，{3,8,15}，{9,10,12}；
{6,7,14}，{1,3,12}，{2,5,15}，{4,8,9}，{10,11,13}；
{7,1,15}，{2,4,13}，{3,6,9}，{5,8,10}，{11,12,14}.

每个大括号表示同一组，第 i 行表示第 i 天的分组方法($i=1,2,3,4,5,6,7$).

1871 年，英国牧师弗罗斯特(Frost，A.)给出另一种方法，用其法可得解答：

{1,2,3}，{4,8,12}，{5,10,14}，{6,9,15}，{7,11,13}；
{1,4,5}，{2,9,11}，{3,13,15}，{6,8,14}，{7,10,12}；
{1,6,7}，{2,8,10}，{3,12,14}，{4,9,13}，{5,11,15}；
{1,8,9}，{2,5,7}，{3,13,14}，{4,10,15}，{6,11,12}；
{1,10,11}，{2,4,6}，{3,12,15}，{5,8,13}，{7,9,14}；
{1,12,13}，{2,5,6}，{3,9,10}，{4,11,14}，{7,8,15}；
{1,14,15}，{2,4,7}，{3,8,11}，{5,9,12}，{6,10,13}.

这个涉及组合设计范畴的问题，引起了许多数学家的深入研究，产生了区组设计理论. 所谓平衡不完全区组设计(Balanced Incomplete Block Design)，简称 BIB 设计的意思是：设 X 是 v 元集，它的一个 k 子集(k 个元素构成的子集)称为一个区组，r 与 λ 是两个给定的正整数，满足：

1. X 的每个元素都只出现于 r 个区组中.

2. X 的每两个元素都只出现于 λ 个区组中.

例如，柯克曼女生问题中，X 是 15 个元素的集，即 $v=15$，每一组为一个区组(3—子集)，X 中的每个元素都只出现在 7 个区组中，每两个元素都只出现在一个区组中，即 $k=3, r=7, \lambda=1$. 易证 BIB 设计中，独立的参数只有 3 个：v, k, λ，故简记为(v,k,λ)设计，也记为 $B[k,\lambda;v]$. 对于一般的(v,k,λ)设计必有：

$$\begin{aligned}\lambda(v-1) &\equiv 0(\bmod k-1),\\ \lambda v(v-1) &\equiv 0(\bmod k(k-1)).\end{aligned} \tag{1}$$

关于条件(1)是否为设计存在的充分条件的研究，经历了 100 多年的时间. $k=1,2$ 都是平凡情形，因此，主要研究 $k\geqslant 3$ 的情形. 1961 年，哈纳尼(Hanani，H.)证明了条件(1)是 $k=3,4$ 时设计存在的充分条件，因而，条件(1)是 $k=3,4$ 时(v,k,λ)设计存在的充分必要条件. 1975 年，威尔逊(Wilson，R. M.)证明了，对给定的正整数 $k\geqslant 5$ 除去有限对正整数(v,λ)外，条件(1)是设计存在的充分条件，进而有，条件(1)是(v,k,λ)设计存在的充分必要条件.

对于 BIB 设计，如果还满足所有区组可分成若干类，而每一类中所有区组两两不相交(即没有公共元素)，它们的并构成集合 X，则称这种设计为可分解的平衡不完全区组设计，简称 RBIB 设计，记为 $RB[k,\lambda;v]$. 例如，柯克曼女生问题的一个解中，35 个区组中每一行构成一类，共分成 7 类，其中每一类有 5 个区组，它们两两不相交且它们的并恰好构成 15 个女生的集合，因而构成 $RB[3,1;15]$. $RB[k,\lambda;v]$存在的必要条件是：

$$\begin{aligned}v &\equiv 0(\bmod k),\\ \lambda(v-1) &\equiv 0(\bmod k-1).\end{aligned} \tag{2}$$

1971 年，雷-乔得赫里(Ray - Chaudhuri，D. K.)及威尔逊证明了条件(2)也是 $k=3$ 时 $RB[k,1;v]$ 存在的充分必要条件. 1972 年，哈纳尼与这两位数学家合作证明了条件(2)也是 $k=4$ 时，$RB[k,1;v]$ 存在的充分必要条件. 1973 年，雷-乔得赫里和威尔逊证明了对给定的正整数 $k\geqslant 5$，除了有限个正整数 v 之外，条件(2)是$RB[k,1;v]$存在的充分必要条件.

人们希望获得对一般的 $RB[k,\lambda;v]$存在的充分必要条件. 中国数学家陆家羲在这方面做出了重要贡献，他在 1979 年 7 月获得，后发表在《数学学

报》1984年第4期上的论文证明了，对给定的正整数 k 和 λ，除了有限个正整数 v 外，条件(2)是 $RB[k,\lambda;v]$ 存在的充分必要条件.

在组合设计中，$B[3,1;v]$ 称为施泰纳三元系. 因为瑞士数学家施泰纳(Steiner,J.)在研究四次曲线的二重切线遇到了这种设计而得名. 对给定的 v，施泰纳三元系往往不止一个. 例如，前面列出的柯克曼女生问题的两个解. 用 $d(v)$ 表示两两不相交(即没有共同的区组)的施泰纳三元系的最大个数，易证 $d(v)\leqslant v-2$. 一般地，若 $d(v)=v-2$，则称这 $v-2$ 个施泰纳三元系为不相交的施泰纳三元系大集. 施泰纳三元系大集问题就是，是否对所有的 $v=1,3\ (\mathrm{mod}\ 6)$ 且 $v\geqslant 9$ 都有 $d(v)=v-2$？1981年9月至1983年4月，中国数学家陆家羲先后向国际权威学术刊物《组合论杂志》投寄以"论不相交施泰纳三元系大集"为总标题的6篇论文，证明了，若 $v\equiv 1,3\ (\mathrm{mod}\ 6)$，$v>7$，且 $v\neq 141,283,501,789,1501,2365$，则 $d(v)=v-2$. 从而，使历时130多年的施泰纳三元系大集问题基本得到解决，被誉为组合设计领域中20年来的重大成就之一.

格点问题(lattice point problem)　研究一些特殊区域，甚至一般区域内的格点计数问题. 格点又称整点，是指横坐标、纵坐标皆为整数的点. 格点问题是数论中的重要课题. 主要研究两个著名问题：

1. 圆内格点问题. 取以坐标原点为圆心、$\sqrt{x}$ $(x\geqslant 0)$ 为半径的圆，则此圆内的格点个数 $A(x)=\pi x+R(x)$，式中 $R(x)=O(\sqrt{x})$. 这是德国数学家高斯(Gauss,C.F.)于1863年得出的结果. 求余项估计 $R(x)=O(x^{\lambda})$ 成立的 λ 的下确界 α 的问题，称为圆内格点问题或高斯圆问题.

2. 狄利克雷除数问题. 设 $x>1$，$D(x)$ 表示区域：$1\leqslant u\leqslant x,1\leqslant v\leqslant x,uv\leqslant x$ 上的格点个数. 1849年，德国数学家狄利克雷(Dirichlet,P.G.L.)证明了 $D(x)=x\ln x+(2\gamma-1)x+\Delta(x)$，式中 $\Delta(x)=O(\sqrt{x})$，γ 是欧拉常数. 求余项估计 $\Delta(x)=O(x^{\lambda})$ 成立的 λ 的下确界 θ 的问题，称为狄利克雷除数问题.

关于第一个问题，1906年，波兰数学家谢尔品斯基(Sierpiński,W.)用初等方法证明了 $\alpha\leqslant 1/3$. 1919年，英国数学家哈代(Hardy,G.H.)证明了 $\alpha\geqslant 1/4$. 1922年至1937年，荷兰数学家范德科皮特(Van der Corput,J.G.)利用了艰深的分析方法证明了 $\alpha\leqslant 37/112$. 1934年，英国数学家蒂奇马什(Titchmarsh,E.Ch.)证明了 $\alpha\leqslant 15/46$. 1935年，中国数学家华罗庚证明了 $\alpha\leqslant 13/40$. 1963年，中国数学家陈景润、尹文霖证明了 $\alpha\leqslant 12/37$. 1985年，诺瓦克(Nowak,W.G.)证明了 $\alpha\leqslant 139/429$. 到1994年，最好的结果是赫克斯利(Huxley,M.N.)得到的 $\alpha\leqslant 23/73$. 人们猜测 $\alpha=1/4$，至今未获解决.

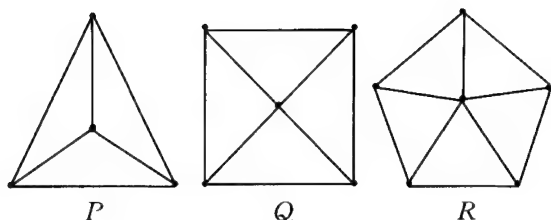
关于第二个问题，1903年，俄国数学家沃罗诺伊证明了 $\theta\leqslant 1/3$. 后来，范德科皮特改进到 $\theta\leqslant 27/82$. 1950年，迟宗陶利用中国数学家闵嗣鹤提出的方法证明了 $\theta\leqslant 15/46$. 1963年，尹文霖证明了 $\theta\leqslant 12/37$. 1985年，Г. А. 科列斯尼克证明了 $\theta\leqslant 139/429$. 早在1940年，英国数学家英厄姆(Ingham,A.E.)证明了 $\theta\geqslant 1/4$. 人们猜测 $\theta=1/4$. 至今未获解决.

四色定理(four color theorem)　图论中的一个著名定理. 该定理断言：在一张地图上每一个国家是一个连通域，海的连通部分当作一个国家；有公共边界的两个相邻国家必须用不同的颜色，则只用4种颜色就可将此地图正确染色.

1852年，格思里(Guthrie,F.)在染地图时发现了上述结论，这就是著名的四色猜想. 1878年6月13日，英国数学家凯莱(Cayley,A.)在伦敦数学会提出这一猜想，不久又向皇家地理学会送交一篇"关于地图染色"的短文. 该文论述了解决四色猜想的困难在于一张地图正确染色后，如果再增加一个国家，就可能需较大地改变原地图的染色. 英国数学家肯普(Kempe,A.B.)认真阅读了凯莱的"关于地图染色"论文，在凯莱论文的启发下，1879年在《美国数学杂志》第2期上发表论文，声称他证明了四色猜想. 1890年，英国数学家希伍德(Heawood,P.J.)在《纯粹数学和应用数学》季刊上发表题为"地图染色定理"的论文，正确地指出肯普证明中有错误，并利用肯普的证明技巧证明了五色定理：任何地图都可以用五种颜色正确染色. 但四色猜想一直未获证明. 一直到1968年，挪威数学家奥尔(Ore,O.)证明了：对于国家数不超过40的地图，四色猜想是正确的.

在平面地图上，用点表示国家，用连结两点的边 (u,v) 表示点 u,v 所代表的国家是相邻接的，于是得到与地图对应的平面图. 四色问题就等价于在任何平面图的顶点着色(相邻顶点不同色)问题. 四色猜想即为任何平面图的点色数不超过4.

一个平面图 G，若对 G 中任何两个不相邻的点 u,v 加进边 (u,v) 后就不是平面图，则 G 称为极大平面图. 一个平面图，若它的每个有界面的边界都是三角形，则称为构形. 例如，图中的 P,Q,R 都是构形. 一个构形 F，若具有下述性质，则称 F 为可约的：对任何极大平面图 G，若 G 中包含 F，则存在 G 的一个子图 G'，使 G 的色数等于 G' 的色数. 一个由有限个构形组成的集合 S，若具有下述性质，则称 S 为一个不可免完备集：任何点数大于4的极大平面图，至少包含 S 中的一个构形. 已经证明：图中的 $S=\{P,Q,R\}$ 是一个不可免完备集，且 P,Q 是可约的. 如果能



证明构形 R 也是可约的，那么利用数学归纳法就可证明四色猜想. 1879 年，肯普认为他已证明了四色猜想，其错误就在于，他证明 R 可约时出现了漏洞.

1913 年，美国数学家伯克霍夫(Birkhoff,G. D.)发现了一些新的可约构形. 20 世纪 30 年代，希施(Heesch,H.)试图用电子计算机在可约构形中找出一个不可免完备集. 他提出了检查给定的构形集合是否为不可免完备集的算法.

1976 年，美国伊利诺斯大学的阿佩尔(Appel, K. I.)和哈肯(Haken,W.)根据肯普的证明思路，寻找不可免完备集，最后找到了由 1936 个可约构形所组成的不可免完备集. 利用电子计算机，终于证明了四色猜想. 1976 年 9 月在《美国数学会通报》上，以"任一平面地图可四染色"为题宣布了这一消息，并在 1977 年 9 月将论文"任一地图是可四染色的"(Every map is four colorable)(长达约 140 页)发表在《伊利诺斯数学杂志》上.

阿佩尔等人的证明发表后，由于机器参与了数学难题的解决，而引起数学界的极大震惊和争论. 获得四色定理的非机器的演绎证明仍是许多数学家的追求目标.

克罗内克青春之梦(Kronecker dream of youth) 代数数论中分圆域理论的一个著名问题. 德国数学家希尔伯特(Hilbert,D.)第 12 问题是：能否对任意代数数域 K 明显地构造出 K 的全部阿贝尔扩张？或者说，能否明显地刻画出 K 的极大阿贝尔扩域？德国数学家克罗内克(Kronecker,L.)曾给出一个重要命题：有理数域的任一阿贝尔扩张一定是一个分圆域的子域. 这是他在 1853 年发表的论文"论代数可解方程"中提出来的，但他没有给出证明. 后人曾给出几种证明，其中最早的是德国数学家韦伯(Weber,H.)在 1886 年给出的. 因此，上述命题一般称为克罗内克-韦伯定理. 它给出了希尔伯特第 12 问题当 $K=Q$ 时的答案. 从克罗内克所得出的上述定理出发，1853 年，年仅 30 岁的克罗内克进一步提出了著名的猜想：每个虚二次域 K 的极大阿贝尔扩域是将 K 添加某种椭圆函数(这是双周期函数)在全部有理点处的取值而得到的域. 在 1880 年给德国数学家戴德金(Dedekind,(J. W.)R.)的一封信中，克罗内克称此猜想为"我最迷恋的青春之梦". 这一猜想直到 1900 年日本青年数学家高木贞治部分地加以解决，他证明了：当 K 为高斯域，即 $K=Q(\sqrt{-1})$ 时，克罗内克猜想成立. 1920 年，高木贞治拓展了希尔伯特提出的类域概念，创立了类域论，完全解决了克罗内克猜想，使得希尔伯特第 12 问题又推进了一步. 但对于其他代数数域，希尔伯特问题离完全解决还相差甚远.

克罗内克定理(Kronecker theorem) 关于代数方程可根式解的命题. 设 n 为奇素数，$f(x)$ 是有理数域上的 n 次不可约多项式，如果代数方程 $f(x)=0$ 有根式解，则此方程或仅有一个实根，或所有根皆为实数. 这是德国数学家克罗内克(Kronecker, L.)得到的一个定理. 由此，他得出了：高于 4 次的代数方程在一般情况下不可能有根式解的结论，即阿贝尔定理. 利用克罗内克定理可以方便地构造出许多不能根式解的高于 4 次的代数方程. 例如，使用下面一个定理：设方程

$$x^n+px^m+q=0, \tag{1}$$

式中，m,n 均为正奇数，$n>m$，p,q 为非零实数，且 $p<0$，

$$D=\left(\frac{q}{n-m}\right)^2-m^{\frac{2m}{n-m}}\left(\frac{|p|}{n}\right)^{\frac{2n}{n-m}},$$

则方程(1)的根的情形为：

1. $D>0$ 时，有一个实根，其余为虚根.

2. $D=0$ 时，有三个实根(其中有两个等根)，其余为虚根.

3. $D<0$ 时，有三个不同实根，其余为虚根.

根据上述定理可构造不能根式求解的五次方程 $x^5-ax-b=0$，其中正整数 a,b 能被某素数 p 整除，但 p^2 不能整除 b，且

$$\left(\frac{a}{5}\right)^5>\left(\frac{b}{4}\right)^4.$$

一般地，奇素数 $n(\geqslant 5)$ 次代数方程 $x^n-ax-b=0$，当正整数 a,b 能被某素数 p 整除，但 p^2 不能整除 b，且

$$\left(\frac{a}{n}\right)^n>\left(\frac{b}{n-1}\right)^{n-1}$$

时，不能根式求解.

孪生素数猜想(twin prime conjecture) 最著名的数论难题之一. 被德国数学家希尔伯特(Hilbert,D.)列入他的著名的 23 个数学问题的第 8 个问题中. 差是 2 的两个素数称为孪生素数. 孪生素数有无穷多，这是 19 世纪中叶提出的猜想，即孪生素数猜想. 1912 年，德国数学家兰道(Landau,E. G. H.)又重提这一猜想. 1919 年，挪威数学家布伦(Brun,V.)试图证明所有的孪生素数的倒数和

$$B=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)+\cdots$$

趋于无穷大来证明孪生素数猜想,然而布伦却证明它是有限数.到1995年,奈斯利(Nicely,T.R.)计算出布伦常数 $B=1.9021605803\pm1.3\times10^{-9}$.

关于孪生素数的分布情形,布伦特(Brent,R.P.)的计算结果,已列在表中,其中 $P(x)$ 表示孪生素数 $(p,p+2)$(其中 $p\leqslant x$)的个数.1922年,英国数学家哈代(Hardy,G.H.)和李特尔伍德(Littlewood,J.E.)提出孪生素数分布的一个猜想:

$$P(x)\sim\frac{cx}{(\ln x)^2},$$

式中

$$c=2\prod_{p>2}\left[1-\frac{1}{(p-1)^2}\right]=1.32032\cdots$$

孪生素数分布表

x	$P(x)$
10^3	35
10^4	205
10^5	1224
10^6	8169
10^7	58980
10^8	440312
10^9	3424506
10^{10}	27412679
10^{11}	224376048
10^{14}	135780321665

显然,若哈代-李特尔伍德猜想成立,则可推出孪生素数猜想的正确.孪生素数研究的最好结果是中国数学家陈景润在1966年获得的:有无穷多个素数 p,能使 $p+2$ 是不超过两个素数之积.设素数 $p\leqslant x$,且 $p+2$ 最多具有2个素数因子,这样的素数 p 的个数记为 $\pi_{1,2}(x)$.1986年,福里(Fouvry,E.)和格鲁波(Grupp,F.)证明了

$$\pi_{1,2}(x)\geqslant0.71\times\frac{2cx}{(\ln x)^2}.$$

1990年,中国学者将上式中的0.71改进成1.05.到1993年8月,人们所知道的最大的孪生素数是由杜伯纳(Dubner,H.)发现的:

$$2^{4025}\times3\times5^{4020}\times7\times11\times13\times79\times223\pm1.$$

用十进制表示它有4030位.2000年1月,苏朱基(Suzuki,M.)在《美国数学月刊》上提出并证明了孪生素数的两个定理:

1. 若对于每一个足够大的素数 $p\equiv1\pmod 6$ 都可写成 $p=36ab+6a-6b+1$(a,b 都是正整数),则孪生素数只有有限个.

2. 孪生素数有无穷多的充要条件是存在无穷多个正整数 n,不能写成形如 $n=6|ab|+a+b$ 的数,其中 a,b 是非零整数.等价地说,孪生素数只有有限个的充要条件是对每一个足够大的正整数 n,存在非零整数 a 与 b,使得 $n=6|ab|+a+b$.

黎曼猜想(Riemann conjecture) 解析数论中至关重要的基本假设.1859年,德国数学家黎曼(Riemann,(G.F.)B.)在德国科学院院刊上发表了著名的短论文"论给定数以内的素数个数",提出了当时尚未解决的6个猜想,其中两个猜想是:

1. $\zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ ($s=\sigma+\mathrm{i}t$,i 是虚数单位)在带状区域 $0\leqslant\sigma\leqslant1$ 中有无穷多个零点(第一个猜想).

2. $\zeta(s)$ 的全体非平凡零点都位于直线 $\sigma=1/2$ 上(第五个猜想).

后者,一般称为黎曼猜想,或称为黎曼假设,简记为RH.提出猜想后的30年里,许多数学家进行了深入研究,陆续解决了其中的5个猜想,但只有第五个猜想即RH进展缓慢.德国数学家希尔伯特(Hilbert,D.)一直非常重视这个猜想,将它列入他所提出的23个问题的第8个问题之中.

法国数学家阿达马(Hadamard,J.(-S.))等人提出的解决RH的基本思想是,估计非平凡零点所在的带状区域的范围,希望能将这个区域缩小到一条直线 $\sigma=1/2$ 上.1896年,阿达马证明了 $\sigma=1$ 时,$\zeta(s)\neq0$,并因此证明了素数定理.但距离RH的解决相差甚远.

1911年,英国数学家哈代(Hardy,G.H.)开始研究RH,并提出了另一种解决思路.设 $N(T)$ 是矩形区域:$0<t<T$,$0\leqslant\sigma<1$ 上的 $\zeta(s)$ 的零点个数,$N_0(T)$ 是线段:$0<t<T$,$\sigma=1/2$ 上的 $\zeta(s)$ 的零点个数.显然 $N_0(T)\leqslant N(T)$.如果能证明 $N_0(T)\geqslant N(T)$,即可证明 $N_0(T)=N(T)$,于是黎曼猜想就可获证.1914年哈代取得重大突破性进展,证明了当 $T\to\infty$ 时,$N_0(T)\to\infty$,即证明了 $\zeta(s)$ 有无穷多个零点位于直线 $\sigma=1/2$ 上.随后哈代与英国数学家李特尔伍德(Littlewood,J.E.)合作证得更精确的定理:存在常数 $c>0$,使得 $N_0(T)>cT$.受哈代方法的影响,1942年,挪威青年数学家赛尔伯格(Selberg,A.)在他的博士论文"论黎曼 ζ 函数的零点"中证明了 $N_0(T)\geqslant\alpha T\ln T$,式中 $\alpha>0$.注意到1905年曼格尔特(von Mangoldt,H.)曾证得

$$N(T)=\frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}+O(\ln T).$$

因此,赛尔伯格实际上证明了 $N_0(T)\geqslant cN(T)$,但正常数 c 只有0.01,远小于1,即证明了 $\zeta(s)$ 至少有1%的零点位于直线 $\sigma=1/2$ 上.1974年,美国麻省理工学院的数学家莱温松(Levinson,N.)成功地证明了:对于充分大的实数 T,有

$$N_0(T)\geqslant\frac{1}{3}N(T),$$

即至少有 1/3 的非平凡零点落在直线 $\sigma=1/2$ 上. 1980 年,中国学者楼世拓、姚琦改进了莱温松结果,证得 $N_0(T)\geqslant 0.35N(T)$. 1990 年,有人证明了有 40%的零点位于 $\sigma=1/2$ 上.

RH 至今未获解决,但大量的事实是支持黎曼猜想的. 1936 年,英国数学家蒂奇马什(Titchmarsh,E. Ch.)计算出,在 $0<t<1468$ 范围内,$\zeta(s)$ 有 1041 个零点都在直线 $\sigma=1/2$ 上. 1955 年,有人用计算机计算证实,$\zeta(s)$ 的 25000 个零点在 $\sigma=1/2$ 上. 1968 年,美国的三位数学家证实 350 万个零点在 $\sigma=1/2$ 上. 后来又有人证实 7000 万个零点满足 RH. 使用高速计算机现在已经对 15 亿个零点证实了 RH.

黎曼猜想对于解析数论、代数数论等都是至关重要的. 人们在 RH 成立的前提下推证了许多重要成果. 例如:

1. 在素数定理中估计余项 $\pi(x)-x/\ln x$ 是 20 世纪数论研究的重要课题. 在 RH 前提下,有

$$\pi(x)=\frac{x}{\ln x}+O(\sqrt{x}\ln x).$$

目前的最佳结果与此结论相差甚远.

2. 在殆素数问题的研究中,1957 年,中国数学家王元在 RH 下证明了"1+5"成立,即充分大的偶数可表为 1 个素数与另一个至多是 5 个素因数积之和.

3. 1950 年,苏联数学家林尼克(Линник,Ю. В.)证明了,存在这样的常数 c 使得等差数列中不超过 d^c 的那些项 $a+d, a+2d, \cdots, a+nd(\leqslant d^c)$ 中一定有素数,式中 a 与 d 是互素的正整数. 许多数学家为缩小 c 的值做出了重要贡献. 从 1957 年中国数学家潘承洞首次定出 $c\leqslant 5448$. 1979 年,中国数学家陈景润证出 $c\leqslant 17$. 到 20 世纪 90 年代初,希思-布朗(Heath-Brown,D. R.)得到 $c\leqslant 5.5$. 如果 RH 是正确的,可得 $c\leqslant 2+\varepsilon$,这里 ε 是一个任意小的正数.

4. 素数分布的一个重要问题是,对于小于 1 的正数 α,区间 $(x, x+x^\alpha]$ 中是否一定存在素数. 在 RH 成立下可证出,当 x 充分大时,区间 $(x, x+\sqrt{x}\ln x]$ 内必有素数. 这是这个问题的最好结果.

由此可见,RH 的研究必将极大地推动数论发展.

高斯类数问题(Gauss class number problem) 关于二次域理论中的著名难题. 设 $Q(\sqrt{D})$ 是二次域(其中整数 D 不含平方因子),R 是其中代数整数(满足首项系数为 1 的整系数多项式方程的根)所构成的环. R 中的理想按等价关系分类,等价类的个数 $h(D)$ 称为 $Q(\sqrt{D})$ 的类数. 德国数学家高斯(Gauss,C. F.)曾提出两个著名的猜想:

1. 类数为 1 的虚二次域 $Q(\sqrt{-m})$ 只有 9 个. 它们对应的 $m=1,2,3,7,11,19,43,67,163$.

2. 类数为 1 的实二次域有无穷多.

关于第一个猜想的进展一直缓慢. 1934 年,海尔布伦(Heilbronn,H. A.)与林福特(Linfoot)证明了最多只有 10 个类数为 1 的虚二次域. 然而,高斯只列出 9 个. 多年来,第 10 个域的存在与否一直是数学家的研究目标. 1952 年,一位中学教师希格纳(Heegner,K.)在论文"丢番图分析与模函数"中给出了第 10 个域不存在的证明,但他的证明有一些错误,故没有引起人们的重视. 斯塔尔克(Stark,H. M.)受希格纳方法的启发,设法避开模函数,终于在 1967 年证明了类数为 1 的第 10 个虚二次域不存在. 而贝克(Baker,A.)在超越数方面的工作,使他在 1967 年也完成了第 10 个域不存在的证明. 至此,高斯关于类数是 1 的虚二次域的猜想被证实.

1971 年,贝克与斯塔尔克利用对数线性无关的方法各自独立地证明了共有 18 个类数为 2 的虚二次域 $Q(\sqrt{-m})$,它们对应的 $m=5,6,10,13,15,22,35,37,51,58,91,115,123,187,235,267,403,427$. 对于类数更大的虚二次域问题是很难求解的. 而类数为 1 的实二次域是否有无穷多,尚无解决的希望. 日本数学会编的《岩波数学辞典》第二版(1968 年)列出了在 $1<m\leqslant 501$ 的范围里,共有 306 个无平方因子的 m,类数为 1 的实二次域 $Q(\sqrt{m})$ 就有 142 个. 类数大于 1 的实二次域,更是难以解决的问题.

圆周等分问题(problem of the division of the circle) 古典著名的几何作图问题之一. 用直尺和圆规可以将圆周几等分? 古希腊人已经掌握了尺规 3,4,5,6,8,10,12,15 等分圆周. 不难证明,如果 n 与 k 是互素的正整数,则必存在两个正整数 s 与 t,使得

$$\frac{1}{k}\cdot s-\frac{1}{n}\cdot t=\frac{1}{nk},$$

即圆周 k 等分与 n 等分可得出圆周的 nk 等分. 例如,

$$\frac{1}{5}\times 2-\frac{1}{3}\times 1=\frac{1}{15},$$

即两段 5 等分弧减去一段 3 等分弧得出 15 等分的一段弧. 由此可知,只须讨论圆周的任一素数幂等分即可.

1801 年,德国数学家高斯(Gauss,C. F.)在他的《算术研究》的最后一节,考察了分圆方程 $x^p-1=0$,这里 p 是素数,并且得出结论:分圆方程可分解成一系列方程 $f_1(x)=0, f_2(x)=0, \cdots$,其中每一个方程的系数是前面方程的根的有理函数且它们的

次数恰是$p-1$的素因子.因此,当$p-1$不含有奇素数因子时,则方程$f_i(x)=0$都是二次的,它的根可用平方根式表出,因而可尺规作图.此时,$p-1=2^m$,即素数$p=2^m+1$,不难证明形如2^m+1的数是素数时必有$m=2^n$.由此高斯得出结论:当p是形如$2^{2^n}+1$的素数,即为费马素数时,则可用尺规将圆周p等分.一般地有,当正整数$k=2^s$或$k=2^s p_1 p_2 \cdots p_t$,式中s是非负整数,$p_1,p_2,\cdots,p_t$(t为自然数)是不同的费马素数时,可用尺规将圆周k等分,或等价地说成,尺规可作正k边形.

对于圆周k等分来说,关于数k的上述条件也是必要的.必要性证明是法国数学家旺策尔(Wantzel,P.-L.)在1837年首次给出的.到目前为止,人们只知道5个费马素数:3,5,17,257,65537.因此,在高斯条件中所含的不同费马素数的个数$t\leqslant 5$.圆周3,5等分在古希腊时代已解决.圆周17等分是高斯在1796年3月29日获得的.圆周257等分为德国数学家里歇洛(Richelot,F.J.)所完成,作图过程长达80页.圆周65537等分,经赫姆斯(Hermes.P.)花了10年时间才完成.

连续统假设(continuum hypothesis) 简称CH.集合论中影响广泛、意义深远的著名猜想.德国数学家康托尔(Cantor,G.(F.P.))于1878年提出的关于连续统的势(即基数)的假设,是集合论中的一个著名猜想.通常称实数集为连续统,康托尔证明了连续统的势与自然数集之幂集的势是相等的,而自然数集的幂集的势大于自然数集的势.于是,产生了这样一个连续统问题:是否存在其势介于自然数集的势与实数集的势之间的集合?康托尔认为,这种集合是不存在的,就是说,实数集的所有无穷子集或者与自然数集等势,或者与连续统等势.这就是康托尔的连续统假设.按照连续统假设,实数集的子集能且只能是有穷子集、可数无穷子集、与实数集等势的子集之一.换句话说,连续统的势是第一个不可数的势,实数集的任何不可数集都与实数集是一一对应的.

1900年,在巴黎举行的国际数学家大会上,德国数学家希尔伯特(Hilbert,D.)提出了23个数学问题,将证明CH列为第一个问题,可见它的重要性.许多数学家都曾致力于这个问题的研究.但在很长时期里没有进展,因而人们认为这一问题在数学的现状下是无法解决的.但是CH在数学的许多研究领域中又是不可缺少的前提条件,由CH可得出许多重要结论.与CH等价的重要结论有许多,例如:

1.平面上所有点的集合可以分成两个集合,使得其中一个集合在所有与x轴平行的直线上至多是可数的,另一个集合在y轴的所有平行线上至多是可数的.

2.平面是可数条曲线的并.

3.存在着实函数的单叶函数序列$f_1,f_2,f_3,\cdots$,使得对于任意的不可数的实数集S,序列中除去有穷个函数外,所有的函数都映S为全体实数集.

4.全体实数集R是可数个递增的集合的并.

5.在希尔伯特空间中,存在一个不可数的点集,它的每个不可数子集不能同胚于欧几里得空间的一部分.

由CH也可以推出许多重要的结论,例如:

1.存在实数集R的一个不可数子集S,它和R的每一个无处稠密集合的交集至多是可数的.

2.存在实数集R的一个不可数集S,它的每个连续象的测度为零.

3.在R的一个不可数子集S上,存在一个连续函数f,使得它在S的任一不可数子集上不是一致连续的.

4.存在一些实数集,在它们上面存在0类、1类、2类的贝尔函数,但在每个集上不存在3类贝尔函数.

由上面列举的许多命题可以看出,承认CH可推出许多重要的数学定理.不仅如此,诸如上述的命题,对于证明CH也开辟了一条重要的途径:如果有一个等价命题成立,则CH成立;如果有一个CH的推论是错误的,则CH也是错误的.

1908年,希尔伯特又将CH加以推广:对于任一个集S,不存在集T,使得T的势高于S的势而低于S的幂集的势.此命题称为广义连续统假设,简记为GCH.

CH与GCH的真实性问题与欧几里得第5公设的真实性有些相似.1940年,奥地利数学家哥德尔(Gödel,K.)在“选择公理和广义连续统假设二者与集合论公理的相容性”论文中,证明了在集合论的策梅洛-弗伦克尔公理系统(简记为ZF系统)下,不能否定选择公理,在承认选择公理的前提下,推不出GCH的否定,因而也推不出CH的否定,即CH与ZF的公理是相容的.1963年,美国数学家、斯坦福大学的科恩(Cohen,P.J.)创立了一种新方法——力迫法(forcing),证明了从ZF系统下不能推出选择公理,在承认选择公理的ZF系统下不能推出CH,从而也不能推出GCH.因而,证明了CH与ZF的公理相独立.科恩因此获得1966年菲尔兹奖.综合哥德尔与科恩的结论可知,CH在ZF系统下是不可判定的,这是20世纪最大的数学成就之一.

上述的结果也表明ZF系统的不完备性,能否找到合适的公理,将它添加到ZF公理系统中就能导致要么CH是可以证明的,要么就是不可证明的.

这些问题尚在进一步研究中.

连续统假设对于集合,乃至对整个数学基础都是非常重要的.不仅如此,它对物理学基础也是重要的.早在1946年,世界著名的德国物理学家爱因斯坦(Einstein,A.)就论述过,用连续统假设来阐明物理学的基础.

硬币问题(coin problem) 一个至今尚未完全解决的著名组合问题.给定 $n(n\geqslant 2)$ 个正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,它们的最大公约数为1,且 $0<a_1<a_2<\cdots<a_n$.人们已经证明,对于足够大的正整数 N,方程

$$N=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n, \qquad (1)$$

必有非负整数解 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,其中 $x_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$.德国数学家弗罗贝尼乌斯(Frobenius,F. G.)提出,求使方程(1)没有非负整数解的最大整数 N.这就是著名的弗罗贝尼乌斯硬币问题.已经证明,使方程(1)没有非负整数解的最大整数值 N 是存在的,且只与方程(1)的系数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 有关,把它记为 $G(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

1884年,英国数学家西尔维斯特(Sylvester,J. J.)证明了

$$G(a_1,a_2)=(a_1-1)(a_2-1)-1$$
$$=a_1a_2-(a_1+a_2),$$

并且求出了使方程(1)没有非负整数解的正整数 N 的个数是 $(a_1-1)(a_2-1)/2$.解决了 $n=2$ 时的硬币问题.$n=3$ 的情形进展缓慢.1955年,中国数学家柯召首先获得下列结果:

$$G(a_1,a_2,a_3)\leqslant\frac{a_1a_2}{u}+a_3u-(a_1+a_2+a_3), \qquad (2)$$

式中 u 是 a_1 与 a_2 的最大公约数,且当

$$a_3>\frac{a_1a_2}{u^2}-\frac{a_1+a_2}{u}$$

时,(2)式中的等号成立.

1956年,罗伯茨(Roberts,J. B.)给出了下列结果:设 $a_1=a,a_2=a+1,a_3=a+d$,其中整数 $d>2$.如果 $a+1$ 能被 d 整除,且 $a\geqslant d^2-5d+3$,则

$$G(a_1,a_2,a_3)=\frac{a(a+1)}{d}+a(d-3)-1;$$

如果 $a+1$ 不能被 d 整除,且 $a\geqslant d^2-4d+2$ 则

$$G(a_1,a_2,a_3)=\left[\frac{a+1}{d}\right](a+d)+a(d-3)-1,$$

式中 $[x]$ 表示 x 的整数部分,即不大于 x 的最大整数(下同).

1978年,塞尔默(Selmer,E. S.)和拜尔(Beyer,Ö.)使用连分数算法解决了 $n=3$ 的情形.他们的算法后来又得到了简化.对于 $n\geqslant 4$,还没有一般的公式.对于一般情形的正整数 n.1956年,罗伯茨(Roberts,J. B.)解决了系数是等差数列的情形:设 $a_i=a+(i-1)d(i=1,2,\cdots,n)$,式中整数 $a\geqslant 2$,$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的最大公约数是1,则

$$G(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\left[\frac{a-2}{n-1}\right]\cdot a+(a-1)d.$$

1972年,匈牙利数学家爱尔特希(Erdös,P.)和格雷厄姆(Graham,R. L.)给出了一般情形的一个上界

$$G(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leqslant 2a_{n-1}\left[\frac{a_n}{n}\right]-a_n.$$

1973年,卢因(Lewin,M.)给出了另一个上界:当 $n\geqslant 3$ 时,

$$G(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leqslant\left[\frac{(a_{n-1}-1)(a_n-2)}{2}\right]-1.$$

设

$$g(n,t)=\max_{\{a_i\}}G(a_1,a_2,\cdots,a_n),$$

式中 n 是给定的正整数,t 为给定的正数,最大值取在 $\{a_i\}$ 上,整数 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 满足

$$0<a_1<a_2<\cdots<a_n\leqslant t,$$

且 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的最大公约数是1.爱尔特希与格雷厄姆证明了

$$g(n,t)<\frac{2t^2}{n}.$$

而卢因证明了

$$g(3,t)=\left[\frac{(t-2)^2}{2}\right]-1.$$

马尔可夫数问题(Markoff numbers problem) 一个著名的不定方程的解引出的著名的整数问题.不定方程

$$x^2+y^2+z^2=3xyz, \qquad (1)$$

已引起了广泛的研究.用 $x=y=1$ 代入,可求得方程(1)的两个整数解(1,1,1)和(1,1,2),一般称为方程(1)的奇异解.可以证明,除了这两个奇异解外,方程(1)的其他整数解 (x,y,z) 中的三个数没有相同者,而且都可以由这两个奇异解借助解二次方程得到.下面列出一些较小的解(其中 $x\leqslant y\leqslant z$,并按 z 值由小到大排列):

(1,1,1),(1,1,2),(1,2,5),(1,5,13),(2,5,29),(1,13,34),(1,34,89),(2,29,169),(5,13,194),…

方程(1)的正整数解中的 z 的取值由小到大是:1,2,5,13,29,34,89,169,194,233,433,610,985,…称为马尔可夫数.是俄国数学家马尔可夫(Марков,A. A.)大约在1879年研究过的方程(1)(称为马尔可夫方程)的整数解引出的数.关于马尔可夫方程与马尔可夫数之间有一个未解决的问题:每一个马尔可夫数 z 是否都能确定惟一一个马尔可夫方程(1)的整数解 (x,y,z)? 这里 $x\leqslant y\leqslant z$.如果 $M(N)$ 表示方程(1)具有 $x\leqslant y\leqslant z\leqslant N$ 的整数解的个数,则扎基厄(Zagier,D. B.)证明了

$$M(N)=C(\ln N)^2+O((\ln N)^{1+\epsilon}),$$

式中 ε 为任意小的正数,$C\approx0.180717105$,并且他猜测,第 n 个马尔可夫数

$$M_n=\left(\frac{1}{3}+O(n^{-1/4+\varepsilon})\right)\cdot A^{\sqrt{n}},$$

式中 $A=e^{1/\sqrt{C}}\approx10.5101504$.

比马尔可夫方程更一般的是赫尔维茨方程

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=ax_1x_2\cdots x_n. \qquad (2)$$

这是德国数学家赫尔维茨(Hurwitz,A.)大约在1907年提出的.可以证明,对于 $a>n$,方程(2)没有正整数解;对于 $a=n$,方程(2)的正整数解都可以由生成元(1,1,…,1)产生;对于 a:$1\leqslant a\leqslant n$,方程(2)必有有限个解(称为生成元)可以产生所有其他正整数解.1993年,巴拉戈(Baragar,A.)已经证明:对于任意给定的正整数 g,必有无穷多对 (a,n),使得要获得方程(2)的全部解至少需要 g 个生成元.对于给定的正整数 N,赫尔维茨方程

$$x_1^2+x_1^2+\cdots+x_n^2=nx_1x_2\cdots x_n,$$

满足 $x_i\leqslant N(i=1,2,\cdots,n)$ 的正整数解的个数记为 $M(n,N)$.巴拉戈证明了,对于任给的 $\varepsilon>0$,$M(n,N)$ 的增大与 $C(\ln N)^{\alpha(n)+\varepsilon}$ 同步.关于式中的 $\alpha(n)$,扎基厄证明了 $\alpha(3)=2$,而 $\alpha(4)$ 介于2.33与2.64之间,后来又改进成:$2.43<\alpha(4)<2.47$.一般地,有

$$\log_2 n\leqslant\alpha(n)\leqslant1.5\log_2 n.$$

西尔维斯特问题(Sylvester's problem) 涉及构造直线的组合几何的难题.英国数学家西尔维斯特(Sylvester,J. J.)晚年研究过这样一个问题:在平面内找出不共线的 n 个点构成的点集 S,使其中任意两点的连线必过 S 中的不同于这两点的第三点.经过反复研究,他觉察到这是不可能的,但他不能给予证明.于是,他在1893年的《教育时代》杂志中提出下面的猜想征求解答:设 S 是平面有限点集,且过其中任意两点的直线必过 S 中的其他一点,证明 S 的点共线.

这个问题提出后很长时间未获得解决.40年后,1933年,伽莱(Gallai,T.)发表了一个相当复杂的证明.证明了西尔维斯特猜想是正确的.1943年,匈牙利数学家爱尔特希(Erdös,P.)在《美国数学月刊》上重提西尔维斯特问题.第二年,多伦多大学的罗伯特·斯坦伯格给出了一个简单的初等证明,1948年,凯利(Kelly,L. M.)发表了一个更精巧的证明,比斯坦伯格的还要简捷,以至于美国的《科学新闻》在1979年重提西尔维斯特问题时,称之为"可简捷解答的难题".这两个人的证明还有一个重要的差别:斯坦伯格的证明虽然长了一些,但不必使用距离概念,只涉及顺序,因而在理论上更有意义.

西尔维斯特猜想的证实,等价于下面命题的正确性:设 S 是平面有限点集,且这些点不共线,则必有只经过其中两点的直线.这直线一般称为点集 S 的平凡直线.由 n 个不共线的点构成的点集 S 中,所有的平凡直线的条数记为 $S(n)$.围绕着 $S(n)$ 尚未解决的问题有:

1. $S(n)$ 的最小值问题,即不共线 n 点集最少有多少条平凡直线?已知的结果是

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$S(n)$最小值	3	3	4	3	3	4	6	5	6	6	6	7

$n\geqslant15$ 的 $S(n)$ 尚不知晓.

2. 莫茨金-迪拉克猜想.1951年,莫茨金(Motzkin,T.)和迪拉克(Dulac,H.)各自独立地做出下列猜想:对任何不共线的 n 点集,都有

$$S(n)\geqslant\left[\frac{n}{2}\right],$$

式中 $[n/2]$ 表示不大于 $n/2$ 的最大整数.

1958年,凯利与莫泽(Moser,W. O.)合作证明了

$$S(n)\geqslant\frac{3n}{7}.$$

1981年,汉森(Hansen,S.)证明了,除 $n=7,13$ 外,都有

$$S(n)\geqslant\frac{n}{2}.$$

这是一个长达96页的证明,用了27个引理、41个辅助图.

伯恩赛德问题(Burnside problems) 涉及有限单群分类的重要课题.英国数学家伯恩赛德(Burnside,W.)提出的群论问题.其中之一是:是否存在奇数阶不可解有限群?换言之,是否所有非阿贝尔单群都是偶数阶群?这个问题是在1897年提出的.他在《有限阶群论》(1897年)中,证明了所有阶数为 p^aq^b 的群皆为可解群,其中 p,q 是素数,且 $a,b\geqslant0$.这是有限单群分类问题早期最重要的工作,它说明非交换有限单群的阶至少有3个不同的素因数.1964年,美国数学家费特(Feit,W.)和汤普森(Thompson,J. G.)在《太平洋数学杂志》上发表了题为"奇数阶群都是可解的"长达255页的论文,证明了奇数阶群都是可解群,因而伯恩赛德问题最终获得解决.不仅如此,这个结论也是单群分类中最重要的一个定理,它标志着有限单群分类的重大突破.汤普森也因此在1970年荣获菲尔茨奖.

希尔伯特数学问题(Hilbert mathematical problems) 关于20世纪着重研究且有深远意义的著名数学难题集.1900年8月,德国数学家希尔伯特(Hilbert,D.)在巴黎召开的第二届国际数学家大会上,作了题为《数学问题》的著名讲演,提出了23个数学问题,目的在于激励新世纪的数学研究.

1. 证明连续统假设. 1878 年,德国数学家康托尔(Cantor,G.(F.P.))提出实数集 R 中任何不可数子集的势都与 R 的势相同,称此命题为连续统假设,简记 CH. 1940 年,奥地利数学家哥德尔(Gödel,K.)证明了 CH 与 ZF 公理系统无矛盾. 1963 年,美国数学家科恩(Cohen,P.J.)证明了 CH 与 ZF 系统的公理彼此独立,因此,CH 在 ZF 系统中是不可判定的. 从本质上说,CH 仍未彻底解决.

2. 算术公理系统的相容性. 希尔伯特将欧氏几何公理的相容性最终归结为算术公理的相容性,并提出用形式主义证明论方法加以解决. 1931 年,哥德尔证明了算术公理的不完备性,否定了希尔伯特的设想. 数学的相容性问题至今未解决.

3. 两个等底等高的四面体的体积相等,只根据合同公理是不能证明的. 1900 年,由希尔伯特的学生、德国数学家德恩(Dehn,M.W.)利用不变量加以解决:两个立体,如果能切割成全等的部分的话,那么它们的德恩不变量一定相同,而等体积的立方体与正四面体的德恩不变量并不相等,因而它们不能切割全等.

4. 两点间的直线段是这两点间最短距离的几何结构的研究. 1973 年,苏联数学家解决了对称情形,一般情形尚未解决.

5. 拓扑群成为李群的条件. 1953 年,被格利森(Gleason, A.M.)同时也被蒙哥马利(Montgomery,D.)与齐平(Zippin,L.)解决,证明了任何有限维局部连通的局部紧群是李群.

6. 物理学的公理化. 希尔伯特建议用数学的公理化方法推演出全部物理学. 在量子力学、热力学等科学,公理化已获很大成功,但是物理学能否全部公理化,尚不能确定.

7. 某些数的无理性与超越性证明. 1934 年,苏联数学家盖尔范德(Гельфанд,И.М.)、1935 年德国数学家施奈德(Schneider,T.)各自独立地证明了对于任意代数数 $\alpha(\alpha\neq 0,1)$ 和任意代数无理数 $\beta(\beta\neq 0)$, α^{β} 是超越数.

8. 素数问题. 包括黎曼猜想、哥德巴赫猜想及孪生素数猜想. 一般情形下的黎曼猜想未获解决,而后两个猜想的最好结果都是中国数学家陈景润给出的(1966 年),但猜想均还未解决.

9. 任意数域中的最一般的互反律的证明. 已由日本数学家高木贞治于 1921 年、奥地利数学家阿廷(Artin,E.)于 1927 年解决.

10. 丢番图方程的可解性判别. 即是否能用有限步构成的一般算法,判断一个丢番图方程有无整数解. 1968 年对含有两个未知数的方程已得到肯定解决. 1970 年,苏联数学家马季亚谢维奇(Матиясевич,Ю.В.)在美国数学家工作基础上,证明了一般算法不能实现,这个否定结果是通过加深递归集与丢番图集的了解而得到的.

11. 系数为任意代数数的二次型. 德国数学家哈塞(Hasse,H.)于 1929 年,德国数学家西格尔(Siegel,C.L.)分别于 1936 年、1951 年在该问题上取得重要结果.

12. 类域的构成问题. 即阿贝尔域上的克罗内克定理推广到任意代数有理域上. 这个问题只有零星的结果,而距离问题的解决还相差甚远.

13. 仅用二元函数解一般的 7 次方程的不可能性. 7 次方程 $x^7+ax^3+bx^2+cx+1=0$ 的根依赖于 a,b,c 即 $x=X(a,b,c)$,能否用只含有两个变量的函数表示出来? 1957 年,苏联数学家阿诺尔德(Арнольд,В.И.)解决了连续情形;1964 年,维图什金(Витушкин,А.Г.)又推广到连续可微函数情形;解析函数情形尚未解决.

14. 证明某类完全函数系的有限性. 1958 年,日本数学家永田雅宜证明了存在这样的群,其不变式所构成的环不具有有限个整基,给出了否定解答. 1978 年数学家汉弗莱斯证明了对任意代数群在一定条件下该问题有肯定解答.

15. 舒伯特计数演算的严格基础. 德国数学家舒伯特(Schubert,H.C.H.)对代数簇交点的研究. 例如,在三维空间中有 4 条直线,问有几条直线与这 4 条直线都相交? 舒伯特在《枚举几何计算》(1879)中提出"数的守恒原理",但他本人未能对此加以严格论证. 现在舒伯特演算基础的纯代数化处理已有可能,但其合理性仍待解决.

16. 代数曲线和代数曲面的拓扑研究. 这个问题分两部分. 前一部分涉及代数曲线含有封闭分支曲线的最大个数,已取得了一些成果;后一部分涉及微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{Y}{X}$$

的极限环的最大数目和相对位置,式中 X,Y 是 x,y 的 n 次多项式. 对于 $n=2$ 的情形苏联数学家彼得罗夫斯基(Петровский,И.Г.)断言极限环个数不超过 3. 中国学者史松龄、陈兰荪和王明淑 1979 年构造出至少有 4 个极限环的反例,加以否定.

17. 正定形式的平方和表示. 正定形式总可以表示为某些形式的平方和吗? 这一直是实代数几何中的重要问题. 1927 年,由奥地利数学家阿廷解决. 他证明了,设 X 为 R 或 Q 上的不可约代数簇,f 为 X 上的有理函数. 如果 f 在 X 所有实点上的值(如有定义的话)都是正的,则 f 在 X 的函数域中可以写成平方和(若 X 定义在 Q 上,则函数的系数也可取在 Q 中). 1970 年又证明出:设 X 为 R 上的 d 维不可约代数簇,若 f 在 X 的函数域中为正的,则 f 可

以写成最多 2^d 个平方之和. 这个问题正在引起实代数几何的新的发展.

18. 用全等多面体构造空间. 这个问题分 3 个部分:

1) 在 n 维欧氏空间中仅有有限多种位移群,其基本域为紧集. 1910 年,比伯巴赫(Bieberbach,L.)证明了这一结果. 对这些群加以分类是结晶学中一个重要问题,并且它能推广为关于李群的格的问题.

2) 是否存在不是运动群的基本区域,但经适当毗连可充满全空间的多面体? 已由德国数学家赖因哈特于 1928 年做出部分解决.

3) 球堆积问题. 在任意维数的空间中,应怎样堆放相同半径的球,才能使堆积的密度达到最大? 1935 年,黑尔斯(Hales)取得了一些进展. 对中心位于一个网格上的球来说,这个问题直到 8 维都解决了.

19. 正则变分问题的解是否一定解析? 俄国数学家伯恩斯坦(Бернштейн,С. Н.)于 1904 年证明了二元解析的、非线性椭圆型方程,其解必定是解析的.

20. 一般边值问题. 包括非正则系数线性椭圆方程组的研究与非线性椭圆方程的研究、大范围几何学中的正则性问题、力学弹性问题、液晶研究等,这些方面正在蓬勃发展中.

21. 具有给定单值群的线性微分方程存在性的证明,已在 1905 年希尔伯特以及 1957 年德国数学家勒尔(Lull,R.)的工作中解决.

22. 用自守函数将解析关系单值化. 一个变数的情形已由德国数学家克贝(Koebe,P.)等人在 1907 年解决,最近的进展主要是向高维推广.

23. 变分法的进一步发展. 推广变分法的研究取得了极大的进展,一个例子是巴瑞(Bahri)关于三体问题存在周期解的研究.

希尔伯特第16问题(Hilbert 16th problem) 德国数学家希尔伯特(Hilbert,D.)于 1900 年提出的 23 个数学问题之一. 它包含两部分,其中后半部分涉及一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{Y}{X} \tag{1}$$

的极限环的最大数目与位置的问题,式中 X 和 Y 都是关于 x 和 y 的 n 次有理整函数,即形如

$$\sum_{i+j=0}^{n} a_{ij}x^i y^j$$

的整函数. 这个问题被美国数学家斯梅尔(Smale,S.)继续列入 21 世纪的数学问题中.

1923 年,杜拉克(Dulac,M. H.)猜测方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=X(x,y),\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Y(x,y),\end{cases} \tag{2}$$

有有限个孤立的极限环. 为了确定极限环的个数,引进希尔伯特数 $H(n)$(n 为非负整数)概念:方程组(2)的孤立环个数的上确界称为希尔伯特数 $H(n)$. 因而,对于一个给定的 n,$H(n)$有限就意味着存在多项式 X 和 Y,使得对应的方程组(2)恰有 $H(n)$个孤立环,可以证明

$$H(n-1)\leqslant H(n),$$
$$H(n)\geqslant\left[\frac{n-1}{2}\right],$$

式中$[(n-1)/2]$表示不大于$(n-1)/2$ 的最大整数.

可以确定$H(0)=H(1)=0$,其次是确定$H(2)$. 1939 年,鲍廷(Bautin,N. N.)证明了 $H(2)\geqslant 3$. 苏联数学家彼得罗夫斯基(Петровский,И. Г.)和兰狄斯(Landis,E. M.)于 1955 年证明了 $H(2)=3$. 但 1967 年,诺威柯夫(Novikov,S. P)发现他们的证明有错误. 1979 年,中国学者史松龄、陈兰荪和王明淑利用秦元勋、董金柱和叶彦谦的结果及技巧,构造了至少有 4 个孤立环的二次系统.

陈兰荪与王明淑的反例

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\delta_2 x-y-3x^2+(1-\delta_1)xy+y^2,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+\dfrac{2}{9}x^2-3xy,\end{cases}$$

式中 δ_1 和 δ_2 是充分小的正数.

史松龄的反例

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\lambda x-y-10x^2+(5+\delta)xy+y^2,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x+x^2+(-25+8\varepsilon-9\delta)xy,\end{cases}$$

式中 $\lambda=-10^{-260}$,$\delta=-10^{-13}$,$\varepsilon=-10^{-52}$.

这两个系统的 4 个孤立环的位置是相同的,3 个环围绕着奇点(0,0),第 4 个环围绕着奇点(0,1). 由此可知,$H(2)\geqslant 4$,但 $H(2)$的确切值仍未求得. 对于 $n>2$ 的情况,1979 年,史松龄证明了$H(3)\geqslant 5$. 当 $n\geqslant 6$ 时,奥特罗柯夫(Otrokov,N. F.)给出了它的下界

$$H(n)\geqslant\begin{cases}\dfrac{1}{2}(n^2+5n-14)\ (n\text{ 为偶数});\\ \dfrac{1}{2}(n^2+5n-26)\ (n\text{ 为奇数}).\end{cases}$$

1992 年,艾凯利(Ecalle)证明了杜拉克猜测. 至此,人们知道 $H(n)$是个有限数,但却不知道 $H(n)$的准确值和 $H(n)$较为精确的界限.

罗素悖论(Russell paradox) 在集合论中,对数学基础有深刻影响的悖理性命题. 将集合分成两类:凡不以自身作为元素的集合称为第一类集合. 例如,自然数集、实数集等. 在数学中所讨论的集合绝大多数是第一类集合. 凡以自身作为元素的集合称为第二类集合. 显然,每一个集合或为第一类集合,

或为第二类集合. 设 S 是所有第一类集合构成的集合,那么集合 S 是第一类集合还是第二类集合?若 S 是第一类集合,根据第一类集合的定义知,S 不是 S 的元素,但既然 S 是第一类集合,故 S 应属于第一类集合的元素,即 S 是所有第一类集合构成的集合(S)的元素,这是矛盾的. 若 S 是第二类集合,根据第二类集合的定义知,S 是 S 的元素,即 S 是所有第一类集合(S)的元素,与 S 是第二类集合又是矛盾的. 这个悖论称为罗素悖论.

一般认为上述悖论是英国著名哲学家、数理逻辑学家罗素(Russell,B. A. W.)提出的. 从 1901 年开始,罗素与英国数学家怀特海(Whitehead,A. N.)合作,历经 10 年,写成了三大卷的《数学原理》(1910—1913),这部巨著对数理逻辑的发展做出了杰出的贡献. 在写这部书的过程中,1902 年左右,罗素发现康托尔集合论有矛盾,由此提出这一著名的悖论. 后来(1959 年)在他的"我的哲学的发展"中,回忆了悖论的发现过程,开始似乎觉得"所有类这个类是一个类",后来受到康托尔证明问题的启发,"使我考虑不是自己的项的那些类. 好像这些类一定成一类. 我问自己,这一个类是不是它自己的一项. 如果它是自己的一项,它一定具有这个类的分明的特性,这个特性就不是这个类的一项. 如果这个类不是它自己的一项,它就一定不具有这个类的分明的特性,所以就一定是它自己的一项. 这样说来,二者之中无论哪一个,都走到它相反的方面,于是就有了矛盾". 因为在这个悖论中所使用的论证方法是很简单的,并且也是数学中经常使用的,所以它在集合论中是很有名的. 一年后,罗素将上述结果告诉了德国数学家弗雷格(Frege,(F. L.)G.),弗雷格获知后,惊讶不已. 由于这个悖论,他的《算术原理》中的第五公理便是错的,必须剔除,于是,他认为算术的基础动摇了. 德国数学家戴德金(Dedekind,(J. W.)R.)因为罗素悖论而推迟了他的《什么是数的本质和作用》的再版. 罗素悖论的提出引起了数学界与逻辑学界的极大震动,由此,引发了数学的第三次危机.

为了消除悖论,罗素首先在《数学原理》的附录 B 中提出了类型论. 为了进一步寻找解决悖论的方法,1906 年,罗素在论文"关于超穷数和超穷序型理论中的一些困难"中又提出了三种理论:曲折论、限量论和无类论. 1908 年在论文"以类型论为基础的数理逻辑"中进一步提出了分支类型论. 这个理论后来在《数学原理》第 1 卷中也有详述. 在分支类型论中,罗素从命题函项出发,对其进行分层处理,将其分属不同的阶. 类似地,罗素对命题也进行了分层处理,将其分成不同的阶,而且进一步将命题的真值也分属不同的阶,由此消除悖论.

罗素悖论以及其他一些悖论的出现表明,对于集合的定义方法必须加以限制,从而导致公理集合论的产生. 策梅洛-弗伦克尔形式公理系统是一个最有用的公理理论,它对经典集合论内容中"无悖论"的部分给出了最合适的刻画.

罗素悖论的一个变种是"理发师悖论":有一个乡村的理发师,宣称他给且只给村上那些不是自己刮脸的村民刮脸,那么理发师本人要不要给自己刮脸呢?用罗素悖论同样的推理可得出:理发师既要自己刮脸又不给自己刮脸.

罗素并不是发现该悖论的第一个人. 德国著名数学家策梅洛(Zermelo,E. F. F.)比罗素早两年发现了这个悖论,并同哲学家胡塞尔(Husserl,E.)讨论过它. 他指出:含有它的所有子集合所组合的集合作为元素的集合(例如所有集合所组合的集合),这本身就是一个矛盾.

庞加莱猜想(Poincaré conjecture)　拓扑学中的重要猜想之一. 1904 年,代数拓扑学的奠基人、法国数学家庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)猜测:单连通的三维闭流形必与三维球面同胚. 后人将此猜想推广:当维数 $n \geqslant 4$ 时,单连通的闭流形如果与 n 维球面有相同的同调群,则必与 n 维球面同胚. 这就是 n 维的庞加莱猜想,也称广义庞加莱猜想.

1960 年至 1962 年,维数 $n \geqslant 5$ 的庞加莱猜想先后被美国数学家斯梅尔(Smale,S.)、斯托林(Stallings,J. R.)和齐曼(Zeeman,E. C.)各自独立地加以证明. 1965 年,斯梅尔因此获美国维布伦奖,1966 年获菲尔兹奖. 1981 年,弗里德曼(Freedman,M.(H.))证明了 $n=4$ 的庞加莱猜想. 他因此获 1986 年的菲尔兹奖,而庞加莱最初提出的三维猜想仍未解决.

庞加莱猜想的研究极大地推动了拓扑学的发展,并拓宽了人们对空间的认识. 四维庞加莱猜想的证明就导致一个十分重要的发现:四维的欧氏空间不同于其他维的欧氏空间,除了通常的微分结构以外,还有别的不寻常的微分结构.

选择公理(axiom of choice)　公理集合论中的一条重要公理. 它可表述为:如果 S 是由非空集组成的簇,则存在一个函数 f,使得对于 S 中的每一集合 x,都有 $f(x) \in x$(f 称为 S 上的选择函数). 通俗地说,当 S 是一些非空集组成的一个集簇,问是否存在一种选择方法(即函数 f),使得按照这一选择方法,在 S 的每一集合 x 中都能挑选出一个元素. 当人们肯定这一事实时,就称为选择公理. 如果 S 是有限集簇,选择公理可以从集合论(如在 ZF 系统中)的其他公理推出.

1900 年,德国数学家希尔伯特(Hilbert,D.)在第二次国际数学家大会上提出的第一个数学问题就是德国数学家康托尔(Cantor,G.(F. P.))提出的连

续统假设与良序问题. 4 年后,即 1904 年 9 月,德国数学家策梅洛(Zermelo,E. F. F.)证明了:每一集合都是可以良序的. 为了证明良序定理,他引用了一条重要原则,并称之为选择公理. 事实上,19 世纪人们在数学论证中经常使用选择公理. 例如,1890 年,意大利数学家佩亚诺(Peano,G.)在证明常微分方程解的存在性定理时,曾用过该公理的不够清晰的陈述,并对其真实性表示怀疑. 德国数学家康托尔在关于集合势的 三分法原则中使用了选择公理,后来(1915 年)有人证明了集合势三分法原则与选择公理等价. 只有策梅洛(1904 年)给出了清晰、严谨且符合现代术语的选择公理陈述. 1908 年,策梅洛在他给出的第一个集合论公理系统中是这样陈述选择公理的:如果 S 是非空集合的不交集合,那么存在 S 的并的一个子集合 T,它与 S 的每一元素都恰好有一个公共元素.

由于策梅洛利用选择公理解决了良序问题,显示了选择公理在集合论中的重大价值. 由此一方面引起了人们对选择公理的重视,另一方面也引起了一大批著名数学家就是否接受选择公理展开了激烈争论. 许多数学家反对选择公理,其原因首先是由于它不同于集合论的其他公理的纯存在特性,其次是由它可得出一些不可接受的、与直觉相矛盾的结论. 例如,由选择公理可推出,实数的勒贝格不可测集的存在. 1924 年,波兰数学家巴拿赫(Banach,S.)等人利用选择公理证明了:球的三分体的存在,即存在一个球的三种有限分割的方式,第一种方式将球分成 n 块,第二种方式将球分成 m 块,第三种方式将球分成 $n+m$ 块,使得第三种方式中的 n 块分别与第一种方式的 n 块对应全等,而第三种方式中剩下的 m 块分别与第二种方式的 m 块对应全等. 于是,一个球可以分割成有限块,在空间中移动可重新组合成与原球有相同大小的两个球. 这些结论是很难令人接受的. 但是在研究过程中也发现了成百个选择公理的等价形式. 例如,良序定理、极大原理、佐恩引理等,并且在数学的许多分支中有着广泛的应用. 例如,它可用于以下定理:

1. 自由群的每个子群都是自由的.

2. 代数域的代数闭包存在且在同构意义下是惟一的.

3. 每个向量空间都有一个基.

4. 一个函数在一点处连续的两个定义(ε-δ 定义与序列极限定义)的等价性.

5. 勒贝格测度的可数可加性.

已经证明,如果策梅洛-弗伦克尔(ZF)公理系统不矛盾,则定理 1~5 不可能由 ZF 系统中推出. 这些事实表明:选择公理是现代数学的一个基本原则和基本方法,没有它及其等价形式,数学的许多分支将寸步难行. 选择公理与集合论的其他公理并不矛盾,选择公理也不可能由集合论的其他公理导出. 选择公理在经典数学中已被广泛地使用,并被人们所接受.

林德勒夫猜想(Lindelöf conjecture) 关于黎曼 ζ 函数性态的猜想. 1905 年,瑞典数学家林德勒夫(Lindelöf,E. L.)提出,对任意 $\varepsilon>0$,有

$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\right|}{t^{\varepsilon}}=0,$$

式中 i 是虚数单位.

林德勒夫猜想等价于下述命题:对固定的 $\sigma\in(1/2,1)$,$\zeta(s)$在区域 $\mathrm{Re}s>\sigma, T<\mathrm{Im}s<T+1$ 内的零点个数为 $o(\ln T)$. 因此,林德勒夫猜想是关于$\zeta(s)$零点的黎曼猜想的一个推论. 到 1982 年,已知

$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)\right|}{t^{c}}=0,$$

式中常数 c 满足 $0<c<6/37$.

海伦三角形问题(Heron triangle problem) 有关解不定方程的数论难题. 美国数学家、数学史家迪克森(Dickson,L. E.)在 1923 年出版的著作《数论史》中记载了由德国数学家舒伯特(Schubert,H. C. H.)于 1905 年提出的一个当时尚未解决的猜想:“不存在海伦三角形有两条或三条中线具有有理数长度.”所谓海伦三角形是指三边长及面积都是整数的三角形. 这是由于大约生活在公元 1 世纪的希腊数学家海伦(Heron,(A.))在他的《度量论》一书中给出过三边长分别为 13,14,15 其面积为 84 的三角形而得名.

1997 年,巴克霍尔兹(Buchholz,R. H.)和拉思本(Rathbun,R. L.)进一步研究了具有两条有理中线长的海伦三角形. 他们利用舒伯特使用的参数法以及椭圆曲线,先后得到了 6 个这样的海伦三角形. 它们的三边长 a,b,c,面积$\triangle$,以及两条中线长 k,l 顺次为

$a=52$, $b=102$, $c=146$,
$\triangle=1680$, $k=35$, $l=97$;
$a=582$, $b=1252$, $c=1750$,
$\triangle=221760$, $k=433$, $l=1144$;
$a=2482$, $b=7346$, $c=8736$,
$\triangle=8168160$, $k=3314$, $l=7975$;
$a=22514$, $b=28768$, $c=29582$,
$\triangle=302793120$, $k=22002$, $l=21177$;
$a=27632$, $b=30310$, $c=57558$,
$\triangle=95726400$, $k=3589$, $l=43874$;
$a=3647350$, $b=371258$, $c=3860912$,
$\triangle=569336866560$, $k=2048523$, $l=3751059$.

并得到了这样三角形存在的判定定理. 由此推出有无穷多个海伦三角形具有两条中线长为有理数，部分地推翻了舒伯特猜想.

1981年，著名学者盖伊(Guy,R.K.)再次提出：是否存在三条中线都是整数的海伦三角形？并把它列入数论中的未解决问题. 设海伦三角形的三边长、三条中线长与面积分别为 $a,b,c,x,y,z,\triangle$，则利用余弦定理或阿波罗尼奥斯定理可推出

$$\begin{cases} a^2+4x^2=2b^2+2c^2, \\ b^2+4y^2=2c^2+2a^2, \\ c^2+4z^2=2a^2+2b^2, \\ a^4+b^4+c^4+16\triangle^2=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2. \end{cases}$$

这样一来，盖伊重提的问题相当于上述方程组是否存在正整数解 $(a,b,c,x,y,z,\triangle)$？

三条中线具有有理数长度的舒伯特猜想至今未解决. 如果不要求面积是有理数，则欧拉(Euler,L.)曾给出5次的参数解：$a=6t^4+20t^2-18$，$b,c=t^5\pm t^4-6t^3\pm 26t^2+9t\pm 9$，它们构成的三角形中线长分别为 $-2t^5+20t^3+54t$，$\pm t^5+3t^4\pm 26t^3-18t^2\pm 9t+27$. 由此证明，这样的三角形有无穷多.

卢津猜想(Luzin conjecture)　傅里叶级数理论中的一个著名问题. 1915年，俄国数学家卢津(Лузин,Н.Н.)在他的学位论文中，提出了如下的猜想：设 $f(x)$ 是在区间 $[0,2\pi]$ 上定义的勒贝格可测函数，且积分

$$\int_0^{2\pi}|f(x)|^2\mathrm{d}x$$

有穷，则它的傅里叶级数

$$a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (1)$$

在 $[0,2\pi]$ 上几乎处处收敛.

傅里叶级数理论是早在19世纪初，由关于热传导的研究中产生的. 其中心问题是，怎样的函数可用它的傅里叶级数来表示?随着勒贝格测度、勒贝格积分理论的创立，傅里叶级数的几乎处处收敛问题逐渐为人们所重视. 1906年，法国数学家法图(Fatou,P.J.L.)首先证明：如果 $W(n)=n$，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)W(n)<+\infty,$$

则傅里叶级数(1)在 $[0,2\pi]$ 上几乎处处收敛. 1909年，德国数学家外尔(Weyl,(C.H.)H.)指出：当 $W(n)=\sqrt[3]{n}$ 时，结论仍成立. 1913年，英国数学家霍布森(Hobson,E.W.)再次削弱为 $W(n)=n^{\varepsilon}$，ε 是任意小的正数. 同年，瑞士数学家普朗谢雷尔(Plancherel,M.)和英国数学家哈代(Hardy,G.H.)又削弱到 $W(n)=\ln^2 n$. 在上述研究工作的基础上，1915年，卢津认为 $W(n)=1$，即傅里叶级数(1)是平方可积的，则(1)几乎处处收敛. 卢津猜想提出后，引起了世界上许多大数学家的重视. 1925年，苏联数学家柯尔莫哥洛夫(Колмогоров,А.Н.)等又把 $W(n)$ 降为 $\ln n$. 1966年，瑞典数学家卡尔森(Carleson,L.)利用哈代-李特尔伍德极大函数，十分精巧的证明了卢津猜想.

比伯巴赫猜想(Bieberbach conjecture)　复变函数论中的一个著名猜想：在单位圆内，形如

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$$

的单叶解析函数，对于所有的 n 都有 $|a_n|\leqslant n$. 等号仅限于克贝函数

$$K(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=z+\sum_{n=2}^{\infty}nz^n$$

及其旋转 $\bar{\lambda}K(\lambda z)$，$|\lambda|=1$.

上述结论是德国数学家比伯巴赫(Bieberbach,L.)，根据各种畸变定理中的极值函数常是克贝极值函数

$$\frac{z}{(1-\varepsilon z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}n\varepsilon^{n-1}z^n \quad (|\varepsilon|=1)$$

这一事实，1916年提出的猜想，并证明了 $|a_2|\leqslant 2$. 由于表述简单但意义重大，比伯巴赫猜想引起许多数学家的关注.

1923年，德国数学家勒夫纳(Loewner,C.)创立参数表示法证明了 $|a_3|\leqslant 3$. 1955年，美国数学家加拉贝迪安(Garabedian,P.R.)和席费尔(Schiffer,M.M.)应用变分法与参数法证明 $n=4$ 时成立. 1968年，佩德森(Pederson,R.N.)借助于格伦斯基(Grunsky)不等式证明了 $n=6$ 的情形. 1972年，佩德森与席费尔利用变分法证明了 $n=5$ 时成立. 对于一般情形，1925年，英国数学家李特尔伍德(Littlewood,J.E.)将系数估计归结为对模的积分的估计，证明了 $|a_n|<en$. 1965年，苏联数学家米林(Милин,И.М.)用幂函数方法证明了

$$|a_n|<1.243n \ (n\geqslant 2).$$

1972年，美国加州大学的菲茨杰拉尔德(FitzGerald,C.H.)证明了

$$|a_n|<\sqrt{\frac{7}{6}}n<1.081n \ (n\geqslant 2).$$

1976年，霍罗威茨(Horowitz,D.)得到

$$|a_n|<1.069\ 1n \ (n\geqslant 2).$$

由比伯巴赫猜想产生了一些相关的猜想，其中最重要的是1971年由苏联数学家列别杰夫(Лебедев,Н.А.)和米林提出的猜想：对于 $n\geqslant 2$，有

$$\Omega_n(0)=\sum_{k=1}^{n-1}\left(k|b_n|^2-\frac{1}{k}\right)(n-k)\leqslant 0,$$

式中数 b_n 是 $f(z)$ 的对数系数. 由下式定义

$$\frac{1}{2}\ln\frac{f(z)}{z}=\sum_{k=1}^{\infty}b_kz^k,$$

可以证明由列别杰夫-米林猜想可推出比伯巴赫猜想.

1984年,美国数学家布朗基(Branges,L. de)巧妙运用勒夫纳偏微分方程以及阿斯基(Askey,R.)和加斯珀(Gasper,G.)的关于超几何函数的一个复杂的结果,证明了列别杰夫-米林猜想,从而也证明了比伯巴赫猜想. 同时布朗基及菲茨杰拉尔德和波默伦科(Pommerenke,C.)都对等号的情形做了研究. 近70年来对比伯巴赫猜想的研究,形成了几何函数论这一数学领域,该猜想的证明是数学上的一项杰出成就.

莫德尔猜想(Mordell conjecture) 关于亏格 $g>1$ 的代数曲线上有理点集的有限性猜想. 英国数学家莫德尔(Mordell,L. J.)研究不定方程 $y^2=x^3+k$ 时,在1918年证明了此类方程只有有限组整数解. 这导致莫德尔对一般曲线上的有理点的研究. 1922年,莫德尔猜测:任一个不可约的有理系数二元多项式 $f(x,y)$,当它的亏格不小于2时,最多只有有限个有理数解. 随着抽象代数几何的出现,以及对该猜想研究工作的深入,人们将这个猜想扩充到任意数域上,而表述成:亏格 $g>1$ 的不可约代数曲线上的有理点集是有限的. 亏格数可如下计算:如果曲线没有奇点,则其亏格数

$$g=\frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

式中 n 是 $f(x,y)$ 的次数,否则要从 $(n-1)(n-2)/2$ 减去由奇点给出的校正项.

由于莫德尔猜想的重要性,吸引了许多优秀的数学家进行研究. 1926年,德国数学家西格尔(Siegel,C. L.)证明了超椭圆的平面仿射曲线只有有限个整点. 随后,法国数学家韦伊(Weil,A.)于1928年创立了阿贝尔簇理论,将群论与代数几何结合起来,推进了椭圆积分理论的发展. 20世纪60年代,关于莫德尔猜想的第一次突破性进展,是苏联数学家马宁(Манин,Ю. И.)于1963年和另一位数学家格劳尔特(Grauert,H.)于1965年各自独立地证明了莫德尔猜想在函数域上的类似命题. 1970年,帕辛(Parshin,A. N.)证明了:如果沙法列维奇(Шафаревич,И. Р.)猜想成立,则莫德尔猜想也成立. 1983年,德国青年数学家法尔廷斯(Faltings,G.)证明了莫德尔猜想. 这是20世纪数论中最杰出的工作之一,为此他荣获1986年国际数学家大会颁发的菲尔兹奖. 法尔廷斯证明的思路大体是:

1. 推广了费马无限递降法中有关高的概念,证明了有界高原理:高 $\leqslant C$ 的主极化半稳定阿贝尔簇同构类的有限性.

2. 受塔特(Tate,J. T.)与扎黑(Zarhin,J. G.)关于塔特猜想的工作的启发,证明了关于数域上阿贝尔簇的自同态的塔特猜想.

3. 证明了在有限集 S 外具有良约化的阿贝尔簇的同构类的有限性.

4. 证明了对阿贝尔簇的沙法列维奇猜想:S 外具有良约化、次数 d 极化的阿贝尔簇的同构类的有限性.

5. 证明了对曲线的沙法列维奇猜想:在 S 外具有良约化亏格 g 的曲线等价类的有限性.

6. 按照帕辛思想,由沙法列维奇猜想成立,推证出莫德尔猜想.

莫德尔猜想的证明,使得证明费马大定理的工作取得了突破性进展:$x^n+y^n=z^n(n>3)$ 只有有限个正整数解. 由于莫德尔猜想的有关证明都是非构造性的,因此很难计算有理点的个数,甚至连整点个数都很难估计. 此外,还没有一般算法来决定曲线上是否存在有理点. 法尔廷斯的工作不但解决了莫德尔猜想,更为数论及代数几何的进一步发展开辟了道路.

哈代-李特尔伍德问题(Hardy-Littlewood pro-blem) 有关特殊类型不定方程的解数的难题,具体地,就是寻求方程 $p+x^2+y^2=n$ 的解数 $W(n)$ 的渐近公式的问题,式中 p 是素数,x 和 y 是整数,n 是自然数. 这一问题由英国数学家哈代(Hardy,G. H.)和李特尔伍德(Littlewood,J. E.)于1923年提出:把任何大于1的整数表示为一个素数与两个平方数之和. 1958年,苏联数学家林尼克(Линник,Ю. В.)利用他创立的离差法,证得

$$W(n)=\frac{\alpha n}{\ln n}+O\left(\frac{n}{(\ln n)^{1.028}}\right),$$

式中 $\alpha=\alpha(n)\geqslant c>0$,$c$ 是绝对常数.

由此推出:当 n 足够大时,$W(n)\geqslant 1$,即对充分大的数 n,解决了哈代-李特尔伍德问题.

亲和数猜想(amicable number conjectures) 有关亲和数的个数及其分布的一组著名猜想. 两个正整数 m,n 称为亲和数,当且仅当 $\sigma(m)=\sigma(n)=m+n$,这里 $\sigma(x)$ 表示正整数 x 的所有正因数(包括1与 x)之和. 早在毕达哥拉斯时代,人们就知道最小的一对亲和数(220,284). 过了两千多年,1636年,法国数学家费马(Fermat,P. de)才发现了另一对亲和数(17296,18416). 法国数学家笛卡儿(Descartes,R.)发现了当时所知道的第3对亲和数(9363548,9437056). 后来,瑞士数学家欧拉(Euler,L.)深入研究亲和数,列出了61对亲和数. 到1913年证明了最小的5对亲和数是(220,284),(1184,1210),(2620,2924),(5020,5564),(6232,6368),其中后3对是欧拉发现的,第2对亲和数是在1866年被一位年仅16岁的意大利少年所发现. 计算机的出现加快了寻找亲和数的工作,1986年,

经提里尔(te Riele,H. J. J.)用有效的计算机算法发现了 816 对亲和数,使已知的亲和数增加到 1427 对.

匈牙利数学家爱尔特希(Erdös,P.)猜想:亲和数有无穷多.他还提出了亲和数分布的猜想有:

1. $A(x)\geqslant cx^{1-\varepsilon}$,式中 ε 为任意小的正数;

2. 对任何数 k,$A(x)=o(x/(\ln x)^k)$,式中 $A(x)$ 表示满足 $m<n<x$ 的亲和数(m,n)的对数.

1986 年,提里尔根据已有的 1427 对亲和数的分布做了分析,如表所示,由此他得出猜想:$A(x)$与 $\sqrt{x}/(\ln x)^3$ 成比例.

$A(x)$与 $\sqrt{x}/(\ln x)^3$ 的比值表

x	$A(x)$	$A(x)(\ln x)^3/\sqrt{x}$
1×10^9	586	164.9
2×10^9	762	167.4
3×10^9	898	170.4
4×10^9	1009	172.4
5×10^9	1100	173.3
6×10^9	1185	174.6
7×10^9	1256	174.9
8×10^9	1317	174.6
9×10^9	1377	174.8
10^{10}	1427	174.2

早在公元 9 世纪,阿拉伯学者就提出一个构造亲和数的法则:如果 3 个数

$$p=3\times2^{n-1}-1,$$
$$q=3\times2^{n}-1,$$
$$r=9\times2^{2n-1}-1,$$

都是素数,且 $p,q>2$,则$(2^npq,2^nr)$就是一对亲和数.对已有亲和数的观察,欧拉发现亲和数(m,n)中的 m,n 奇偶性都相同,且 m,n 都有大于 1 的公约数.于是,提出下列有关亲和数的问题:

1. 是否存在 m 与 n 的奇偶性相反的亲和数(m,n)?

2. 是否存在 m 与 n 互素的亲和数(m,n)?

200 多年来,这些问题还没得到解决.沃尔(Wall,C.)曾提出一个猜想:一对奇亲和数中的两个奇数,对模 4 不同余.他说,如果这个猜想成立,则可推出重要的结论:奇完全数不存在.

素数R_n问题(problem of prime R_n) 一类特殊结构的整数素性判定难题.皆由数字 1 组成的十进制数 1,11,111,…中,是否有无穷多个素数?这个问题是美国数学家阿波斯托尔(Apostol,T. M.)提出的 12 个有关素数分布的问题之一.它的一般项是 $R_n=(10^n-1)/9$;它的重要性质有:

1. 如果 R_n 是素数,则 n 必为素数.

2. 当 $n>1$ 时,R_n 不是完全平方数.

3. 当 $n>1$ 时,R_n 也不是完全立方数.

早在 20 世纪 20 年代,已经知道 R_2,R_{19},R_{23}都是素数.此后,很长时间毫无进展,直到 1978 年又发现了 R_{317}是素数,1986 年证明 R_{1031}是素数,而且证明了:在 $n\leqslant10000$ 时,仅有上述 5 个 R_n 是素数.素数 R_n 究竟是有限个,还是无限多个,尚不得知.1979 年,引出了更一般的数

$$W_n=\frac{(a^n-1)}{(a-1)},$$

式中 a 为大于 1 的正整数.当 $a=2$ 时,即为梅森数,当 $a=10$ 时,即为 R_n.

确定大 W_n 数是否为素数是相当困难的工作.经过深入研究,已确定 W_n 为素数的,在 $n\leqslant1000$ 范围内,有

$a=3$ 时,$n=3,7,13,71,103,541$.

$a=5$ 时,$n=3,7,11,13,47,127,149,181,619,929$.

$a=6$ 时,$n=2,3,7,29,71,127,271,509$.

$a=7$ 时,$n=5,13,131,149$.

$a=11$ 时,$n=17,19,73,139,907$.

$a=12$ 时,$n=2,3,5,19,97,109,317,353$.

爱尔特希多边形问题(Erdös polygon problems) 关于构造凸多边形的组合几何难题.匈牙利数学家爱尔特希(Erdös,P.)提出的问题:对于给定的正整数 $n\geqslant3$,永远可以从中取出 n 个点组成凸 n 边形的平面点集至少有多少个点,其中任意三点不共线.例如,要始终能取出 4 个点构成凸四边形的平面点集至少要有 5 个点,其中任意三点不共线.爱尔特希证明了,必存在正整数 m,使得平面内的 m 个点,不论放在什么位置上,只要每三点不共线,就总能从中取出 n 个点,使之成为凸 n 边形的 n 个顶点.总能构成凸 n 边形的最少点数记为 $M(n)$.显然 $M(3)=3$,克莱因(Klein,E.)证明了 $M(4)=5$,1970 年,卡布弗莱什(Kalbfleisch,J. D.)等人证明了 $M(5)=9$,有人猜测 $M(6)=17$.1935 年,爱尔特希与塞克尔斯(Szekeres,G.)合作证明了

$$M(n)\leqslant\frac{(2n-4)!}{(n-2)!(n-2)!}+1.$$

1960 年,他们又证明了 $M(n)\geqslant2^{n-2}+1$,并猜测$M(n)=2^{n-2}+1$,但至今未获解决.爱尔特希又提出空多边形问题,设 $n\geqslant3$,在平面内给出 m 点集 S,只要任三点不共线,存在其中的 n 个点构成凸 n 边形,使其内部不含有点集 S 中的点,称这样的凸多边形为空多边形.恒存在空 n 边形的最小点集的点数记为 $G(n)$.显然 $G(3)=3$.不难证明 $G(4)=5$.

1978 年，哈伯斯(Harborth，H.)证明了 $G(5)=10$. 1983 年，霍顿(Horton，J. D.)证明了：不论整数 m 有多大，总能使平面上的 m 个点布列成这样的位置，虽然任三点不共线，但找不到其中的 7 个点构成空 7 边形. 这就是说，他证明了 $G(7)$不存在. 由此推知，对一切 $n\geqslant 7$，$G(n)$都不存在. 故只剩下一个问题：$G(6)$是否存在？若存在，有多少个？此外，对于给定的 m 点集，能确定多少个凸 n 边形和空 n 边形，也是人们正在研究解决的难题.

爱尔特希点集问题(Erdös problem of point set)　一道组合几何名题. 匈牙利数学家爱尔特希(Erdös，P.)提出：在平面内有 n 个点，其中任意三点都能构成等腰三角形. 这样的 n 点集称为等腰 n 点形，人们也称之为爱尔特希点集. 探讨这种点集的存在与结构就是爱尔特希点集问题.

平面内任意等腰三角形的三个顶点，即构成等腰三点形. 等腰四点形有且仅有三种构形：

1. 任意等腰三角形三个顶点及其外心.
2. 任意菱形的四个顶点.
3. 任意正五边形中的四个顶点.

等腰五点形有且仅有三种构形：

1. 任意正方形的四个顶点及其中心.
2. 任意正五边形四个顶点及其中心.
3. 任意正五边形五个顶点.

等腰六点形只有一种构形：任意正五边形的五个顶点及其中心. 当 $n\geqslant 7$ 时不存在等腰 n 点形.

人们又提出了空间等腰 n 点形概念，即空间 n 个点中任三点都构成等腰三角形. 空间四点形有三种构形：

1. 任一等腰三角形三顶点 B,C,D，以及过 $\triangle BCD$ 外心且垂直于平面 BCD 的直线上任一点 A.
2. A,B,C,D 满足 $AB=AC=BD=CD$.
3. A,B,C,D 满足 $AB=AC=CD$，$BC=BD=AD$.

1963 年，克罗夫特(Croft，H. T.)证明了空间等腰九点形是不存在的，自然就不存在 $n>9$ 的空间等腰 n 点形，但构造出了空间等腰八点形：平面任意正五边形的 5 个顶点及其中心，另两个点是位于过中心且垂直于五边形所在平面的垂线上，它们到中心的距离等于正五边形的外接圆半径. 由此可知 $n=7,6,5,4$时，空间等腰 n 点形都是存在的，只要在等腰八点形中任取 n 个点即可.

此外，人们还在深入研究一个相关问题：在 n 个点构成的平面点集或空间点集中，用其中的点为顶点能构造出多少个等腰三角形？1976 年，爱尔特希与他的合作者证明了：平面 n 个点最多可构造 $n(n-1)$个等腰三角形. 但一些实例表明，这个上界还可以减小. 例如，当 $n=6m$ 或 $6m+2$ 时，最多可以构造$(n-2)(n-4)$个或$(n-1)(n-2)$个等腰三角形.

有关欧拉函数的问题(problems on Euler totient function)　关于欧拉函数 $\varphi(n)$的尚未解决的一组问题. 所谓欧拉函数 $\varphi(n)$指的是，在 $0,1,\cdots,n-1$中与 n 互素的整数的个数. 例如，

$$\varphi(1)=\varphi(2)=1,$$
$$\varphi(3)=\varphi(4)=\varphi(6)=2,$$
$$\varphi(5)=\varphi(8)=\varphi(10)=\varphi(12)=4,$$
$$\varphi(7)=\varphi(9)=6.$$

一般地，若 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_m^{\alpha_m}$，式中 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,m)$是正整数，$p_i(i=1,2,\cdots,m)$是 n 的不同的素因数，则

$$\varphi(n)=(p_1^{\alpha_1}-p_1^{\alpha_1-1})(p_2^{\alpha_2}-p_2^{\alpha_2-1})\cdots(p_m^{\alpha_m}-p_m^{\alpha_m-1}).$$

特别地，若 p 为素数，α 为正整数，则有

$$\varphi(p^\alpha)=p^\alpha-p^{\alpha-1},\ \varphi(p)=p-1.$$

被视为欧拉函数珍奇的是：

$$\varphi(5186)=\varphi(5187)=\varphi(5188)=2^5\cdot 3^4;$$
$$\varphi(25\,930)=\varphi(25\,935)=\varphi(25\,940)=\varphi(25\,942)=2^7\cdot 3^4;$$
$$\varphi(404\,471)=\varphi(404\,473)=\varphi(404\,477)=2^8\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7.$$

有关欧拉函数取值的问题有：

1. 莱默猜想. 对于欧拉函数，显然有$\varphi(n)\leqslant n-1$. 1932 年，美国数学家莱默(Lehmer，D. H.)提出猜想：没有合数 n 使得 $\varphi(n)$整除 $n-1$. 并且证明了：使 $\varphi(n)$整除 $n-1$ 的合数 n(以下简称莱默数)必须至少含有 7 个不同的素因数，用 $w(n)$表示 n 的不同素因数的个数，则莱默的结论就是 $w(n)\geqslant 7$. 1977 年，基绍(Kishore，M.)证明了：对任何莱默数 n 都有$w(n)\geqslant 13$. 1980 年，科恩(Cohen，P. J.)和哈吉斯(Hagis，P.)改进到 $w(n)\geqslant 14$. 1970 年，利温斯(Lieuwens，E.)证明了：如果 n 是 3 的倍数，则莱默数 n 必大于 5.5×10^{571}，且 $w(n)\geqslant 212$. 到 20 世纪 80 年代，普拉萨德(Prasad，S. R.)和兰戈玛(Rangamma，M.)将利温斯的结果改进成$w(n)\geqslant 1850$. 哈吉斯进一步改进成 $w(n)\geqslant 298848$. 显然，这些事实是支持莱默猜想的. 格雷厄姆(Graham，R. L.)提出了更为一般的猜想：对于任何非负整数 k，有无穷多个正整数 n，使得$\varphi(n)$整除 $n-k$. 他说，对于 $k=0$，$k=2^a(a\geqslant 0)$，$k=2^a\cdot 3^b(a>0,b>0)$上述猜想是正确的.

2. 辛泽尔猜想. 1956 年，波兰数学家谢尔品斯基(Sierpiński，W.)证明了：对于每一个正整数 k，方程

$$\varphi(n+k)=\varphi(n) \tag{1}$$

至少有一个正整数解 n. 1959 年，辛泽尔(Schinzel，A.)和韦库里兹(Wakulicz，A.)证明了：对于每一个正整数 $k<2\times 10^{58}$，方程(1)至少有两个正整数解 n.

20 世纪 50 年代末，辛泽尔提出了下面的猜想：对于每一个偶数 k，方程(1)存在无穷多个正整数解 n. 但对于奇数 k，上述结论很难成立. 例如对于 $k=1$，方程

$$\varphi(n+1)=\varphi(n) \tag{2}$$

的较小的解有 $n=1,3,15,104,164,194,255,495,584,975$ 等. 贝利(Baillie,R.)在小于 10^8 范围内只找到方程(2)的 306 个解，在 10^8 与 2×10^8 之间找到 85 个解. 有人提出问题，是否有无穷多个正整数 n 使方程(2)成立？看来，这是一个很困难的问题. 直到现在，连下面的更弱的命题都没有确切结论：对于任给的 $\varepsilon>0$，是否有无穷多个 n 满足

$$|\varphi(n+1)-\varphi(n)|<n^{\varepsilon},$$

对于 $k=3$ 的情形. 在小于 10^4 的范围内，只找到两个数 $n=3$ 和 $n=5$，能使 $\varphi(n+3)=\varphi(n)$. 莱默扩大到 $n<10^6$ 也只发现这两个解.

3. 卡迈克尔猜想. 1907 年，美国数学家卡迈克尔(Carmichael,R. D.)提出一个猜想：对于每一个给定的正整数 n，都存在不等于 n 的正整数 m，使得 $\varphi(m)=\varphi(n)$. 克利(Klee,V. L.)对小于 10^{400} 的 $\varphi(n)$ 验证了卡迈克尔猜想. 1982 年，马塞(Masai,P.)和瓦莱梯(Valette,A.)则将验证的范围扩大到 10^{10000}. 此后，斯拉弗莱(Schlafly,A.)和瓦冈(Wagon,S.)提高到 $10^{1360000}$，并继续扩展到 $10^{10000000}$，也没有发现反例.

4. 谢尔品斯基猜想. 设 m 为一给定的正整数，它可以作为 $\varphi(n)$ 值出现的次数，即满足 $\varphi(n)=m$ 的不同的正整数 n 的个数，称为整数 m 的重数. 例如，6 的重数是 4，这是因为当且仅当 $n=7,9,14,18$ 时，$\varphi(n)=6$ 成立. 由于对于 $n>2$，$\varphi(n)$ 均为偶数，故对于所有大于 1 的奇数 m，它们的重数都是 0. 重数为 0 的偶数有 $m=14,26,34,38,50,62,68,74,76,86,90,94,98$ 等. 它们都是使方程 $\varphi(x)=m$ 没有整数解 x 的 m. 在小于 9×10^4 范围内，这样的偶数有 26663 个.

如果卡迈克尔猜想成立，那么重数是 1 的整数 m 是不存在的. 波兰数学家谢尔品斯基猜测：整数的重数可取大于 1 的任何整数. 斯拉弗莱与瓦冈已找到重数取 2 到 65 的所有值的例子. 匈牙利数学家爱尔特希(Erdös,P.)已证明，如果对某个 m，方程 $\varphi(x)=m$ 恰有 s 个解，即 m 的重数为 s，则必有无穷多个其他的 m 也具有重数 s，即如果一个重数出现一次，则它必出现无穷多次. 爱尔特希还证明了，此时有相当多的 m 满足 $s>m^c$，设 C 是这些 c 的最小上界，则伍尔德里奇(Wooldridge,K. R.)证明了

$$C\geqslant 3-2\sqrt{2}>0.17157.$$

波梅兰斯(Pomerance,C.)改进成

$$C\geqslant 1-\frac{625}{512e}>0.55092.$$

而艾温尼克(Iwaniec,H.)更得到 $C>0.55655$. 爱尔特希猜测 $C=1$.

5. 关于 $\varphi(m)=\sigma(n)$ 问题. 方程

$$\varphi(m)=\sigma(n) \tag{3}$$

能否有无穷多组正整数解 (m,n)？式中 $\sigma(n)$ 表示 n 的所有正约数之和. 当 p 为素数时，有 $\varphi(p)=p-1$，$\sigma(p)=p+1$. 如果 p 与 $p+2$ 是孪生素数，则

$$\varphi(p+2)=\sigma(p)=p+1.$$

这就是说，有一对孪生素数 $(p,p+2)$ 就可以构造方程(3)的一组解：$m=p+2$，$n=p$. 因此，如果孪生素数猜想成立，则上述问题得到肯定回答. 对于梅森素数 $M_p=2^p-1$，有 $\varphi(2^{p+1})=\sigma(M_p)=2^p$. 这就是说，有一个梅森素数 $M_p=2^p-1$ 就可以构造方程(3)的一组解：$m=2^{p+1}$，$n=M_p$. 因此，如果梅森素数有无穷多，则上述问题也可以得到肯定回答. 除了利用孪生素数与梅森素数构造方程(3)的解之外，还有别的解. 例如，$\varphi(780)=\sigma(105)=192$.

邮票问题(postage stamp problem)　一个尚未完全解决的著名组合问题. 1937 年，罗尔巴克(Rohrbach,H.)提出了一个有关邮票设计的课题：邮票有 k 种不同整数币值 $a_1,a_2,\cdots,a_k$，组成一个集合 $A_k=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，其中 a_i 为正整数($i=1,2,\cdots,k$)，且满足 $1=a_1<a_2<\cdots<a_k$. 但信封上最多可贴 h 张邮票，于是一个信封上的总邮资

$$N=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_kx_k,$$

式中 $x_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为非负整数，且满足 $x_1+x_2+\cdots+x_k\leqslant h$，那么不满足上述要求的最小正整数 N 是多少？这个最小正整数记为 $N(h,A_k)$. 由此知，信封总邮资从 1 开始可连续取到的种数是

$$n(h,A_k)=N(h,A_k)-1,$$

称之为 A_k 的 h 值域(h range)，而 A_k 称为 h 阶加性基，简称 h 基. 由此产生了两类不同的邮票问题：

1. 局部问题. 给定 h 和一个基 A_k，求 $n(h,A_k)$？对于 $k=2$，已求得 $n(h,A_2)=(h+3-a_2)a_2-2$，式中 $h\geqslant a_2-2$，$a_2>a_1=1$. 对于 $k=3$，罗德塞斯(Rödseth,Ö)找到了基于连分数算法的一般方法. 塞尔默(Selmer,E. S.)据此导出了一些确定的公式，解决了对于几乎所有的 A_3 的 $n(h,A_3)$ 计算. 对于 $k>3$ 的局部问题，尚在研究中.

2. 总体问题. 给定 h 和 k，求 $\max n(h,A_k)$，其中最大值取在一切可能的基 A_k 上，这个最大值简记为 $n(h,k)$.

1) 给定 h 值. 主要成果是 $h=2$ 的情形. 在 1937 年，罗尔巴克证明了

$$c_1\left(\frac{k}{2}\right)^2+O(k)\leqslant n(2,k)\leqslant c_2\left(\frac{k}{2}\right)^2+O(k),$$

式中 $c_1=1, c_2=1.9968$. 他曾经猜测

$$\frac{n(2,k)}{k^2}\to\frac{1}{4}(\text{当 } k\to\infty \text{ 时}).$$

1976 年，哈默厄(Hämmerer, N.)和霍夫梅斯特(Hofmeister, G.)证明了这个猜想是错误的. 现在最好的结果是 $c_1=8/7$(姆罗斯(Mrose, A.))和 $c_2=1.9208$(克洛茨(Klotz, W.)). 对于 $h=3$，温德克(Windecker, R.)证明了

$$n(3,k)\geqslant\frac{4}{3}\left(\frac{k}{3}\right)^3+\frac{16}{3}\left(\frac{k}{3}\right)^2+O(k).$$

2) 给定 k 值. 对于 $k=2$，1955 年，斯托尔(Stöhr, A.)利用 $n(h,A_2)$ 的公式推证出

$$n(h,2)=\left[\frac{h^2+6h+1}{4}\right].$$

对于 $k=3$，20 世纪 70 年代，霍夫梅斯特证明了对于 $h\geqslant 34$，有

$$\frac{4}{81}h^3+\frac{2}{3}h^2+\frac{66}{27}h\leqslant n(h,3)\leqslant\frac{4}{81}h^3+\frac{2}{3}h^2+\frac{71}{27}h-\frac{1}{81}.$$

后来他证明了对于 $h\geqslant 20$，有

$$n(h,3)=\frac{4}{3}\left(\frac{h}{3}\right)^3+6\left(\frac{h}{3}\right)^2+Ah+B,$$

式中 A 和 B 依赖于 h 对模 9 的剩余. 对于 $k=4$，1987 年，莫塞切(Mossige, S.)证明了

$$n(h,4)\geqslant 2.008\left(\frac{h}{4}\right)^4+O(h^3).$$

对于 $k=5$，科尔斯道夫(Kolsdorf)证明了

$$n(h,5)\geqslant 3.06\left(\frac{h}{5}\right)^5+O(h^4).$$

基费尔(Kirfel, C.)证明了极限

$$\alpha_k=\lim_{h\to\infty}\frac{n(h,k)}{(h/k)^k},$$

对于所有的正整数 $k\geqslant 1$ 都存在. 由前述结果不难得出：$\alpha_2=1$，$\alpha_3=4/3$，$\alpha_4\geqslant 2.008$，$\alpha_5\geqslant 3.06$.

无论是局部问题还是总体问题，尚有许多问题未获解决.

二次函数的素数值问题(problems of prime values of quadratic functions)　关于二次函数取素数值情形的一组难题与猜想.

1. 二次函数 $f(x)=x^2+1$. 简单的二次函数 $f(x)=x^2+1$，当 x 取整数时，能否产生无穷多个素数?这个问题直到现在也未解决. 现在最好的结果是艾温尼克(Iwaniec, H.)得到的. 1978 年，他证明了：存在无穷多个 x 使得 x^2+1 最多是 2 个素数之积. 将小于 x 的这样素数的个数记为 $P(x)$，初步计算结果是 $P(10^4)=842$，$P(10^5)=6656$，$P(1.8\times10^5)=11223$. 英国数学家哈代(Hardy, G. H.)与李特尔伍德(Littlewood, J. E.)认为

$$P(x)\sim\frac{c\sqrt{x}}{\ln x}$$

或

$$\frac{P(x)}{\sqrt{x}/\ln x}\to c\ (x\to\infty),$$

式中常数 c 为

$$c=\prod\left\{1-\frac{(-1)^{(p-1)/2}}{p-1}\right\}\approx 1.3727.$$

作乘积时取遍所有的奇素数 p. 于是

$$P(x)\approx\frac{1.3727\sqrt{x}}{\ln x}.$$

显然，如果哈代-李特尔伍德猜想成立，则形如 x^2+1 的素数个数有无穷多.

2. 其他的二次函数. 瑞士数学家欧拉(Euler, L.)给出的 $E(x)=x^2+x+41$，当 $0\leqslant x\leqslant 39$ 时，连续得出 40 个素数值. 20 世纪 90 年代，冯(Fung, G. W.)给出了 $F(x)=47x^2-1701x+10181$，当 $0\leqslant x\leqslant 42$ 时，连续得出 43 个素数值. 鲁比(Ruby, R.)给出 $R(x)=36x^2-810x+2753$，当 $0\leqslant x\leqslant 44$ 时，连续得出 45 个素数值. 当 x 取前 1000 个非负整数值时，欧拉给出的 $E(x)$ 取得 581 个素数，而卡斯特(Karst, E.)给出的 $K(x)=2x^2-199$ 取得 598 个素数. 威廉斯(Williams, S.)给出的 $W(x)=2x^2-1000x-2609$，取得 602 个素数. 当 x 取前 10000 个非负整数值时，则 $E(x)$，$K(x)$，$W(x)$ 取得素数值的个数依次是 4148，4373，4151.

3. 二次函数取素数的计数假设. 人们认为哈代与李特尔伍德对 x^2+1 产生素数的计数估算，同样适用于其他的二次函数. 设 $P(x)$ 表示小于 x 时任一个二次函数所产生的素数个数，则依然有

$$P(x)\sim\frac{c\sqrt{x}}{\ln x}.$$

不过对于不同的二次函数，对应的常数 c 不同而已. 所要做的工作就是使得 c 值尽可能大. 尚克斯(Shanks, W.)对于欧拉多项式 $E(x)$ 算得的 $c=3.3197732$；对于比格(Beeger, N. G. W. H.)多项式 $B(x)=x^2+x+27941$ 算得 $c=3.6319998$. 冯与威廉斯对于 $f(x)=x^2+x+132874279528931$ 算得的 $c=5.0870883$.

4. 一般的二次函数. 设整系数二次函数

$$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0).$$

可以证明，若 $f(x)$ 能取得无穷多个素数值，则 a,b,c 必须满足下列三个条件：

1) a,b,c 的最大公约数为 1.

2) $a+b$ 与 c 不能同时为偶数.

3) b^2-4ac 不是完全平方数.

人们猜测，只要 $a>0$ 且 a,b,c 满足上述三个条件，则 $f(x)=ax^2+bx+c$ 能取得无穷多个素数值.

哈代认为，解决这个猜想是相当困难的.

整数集划分问题(partition problems for integer set)　将一个整数集 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 划分成 r 个子集(或类)的有关性质与数量估算的著名难题. 所谓将集合 S 划分为 r 个子集就是

$$S=S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_r,$$

其中 $S_i\cap S_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,r)$.

1. 范・德・瓦尔登数问题. 1927 年，荷兰数学家范・德・瓦尔登(Van der Waerden, B. L.)证明了一个著名的定理：对于任给的正整数 r 和 k，必存在一个正整数 $n=n(r,k)$，将整数集 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 划分成 r 个子集，则至少有一个子集含有 $k+1$ 项的等差数列(也称算术数列). 对于给定的 r 与 k，$n(r,k)$ 的最小值记为 $W(r,k)$，称为范・德・瓦尔登数. 更一般的范・德・瓦尔登定理：对于给定的正整数 r 和 $k_1,k_2,\cdots,k_r$，必存在正整数 $n=n(r;k_1,k_2,\cdots,k_r)$，将整数集 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 划分成 r 个子集，使得在每个子集 $S_i(i=1,2,\cdots,r)$ 中含有 k_i+1 项等差数列. 这样的最小的 n 值记为 $W(r;k_1,k_2,\cdots,k_r)$，也称为范・德・瓦尔登数. 计算范・德・瓦尔登数或估计其界限是一项重要课题.

1970 年，瓦泰尔(Chvatal, V.)计算出：$W(2;2,2)=9$，$W(2;2,3)=18$，$W(2;2,4)=22$，$W(2;2,5)=32$，$W(2;2,6)=46$.

1979 年，比利(Beeler, M. D.)和奥尼尔(O'Neil, P. E.)计算出：$W(2;2,7)=58$，$W(2;2,8)=77$，$W(2;2,9)=97$.

此外，还有

$W(2;3,3)=35$，$W(2;3,4)=55$(瓦泰尔).

$W(2;3,5)=73$(比利和奥尼尔).

$W(2;4,4)=178$(斯蒂文斯(Stevens, R. S.)和香塔厄姆(Shantaram, R.)).

$W(3;2,2,2)=27$(瓦泰尔).

$W(3;2,2,3)=51$(布朗(Brown, T. C.)).

$W(4;2,2,2,2)=76$(比利和奥尼尔).

匈牙利数学家爱尔特希(Erdös, P.)与拉多(Radó, R.)证明了 $W(r,k)>(2kr^k)^{1/2}$. 此后，莫泽(Moser, L.)、施密特(Schmidt, W. M.)、伯利肯姆波(Berlekamp, E. R.)将上述结果相继改进成

$$W(r,k)>kr^{c\ln r}\text{ 和 }W(r,k)>r^{k+1-c\sqrt{(k+1)\ln(k+1)}}.$$

埃弗茨(Everts, F.)已证明

$$W(r,k)>\frac{kr^k}{4(k+1)^2}.$$

1990 年，对于 $r=2$，萨博(Szabo, Z. I.)给出

$$W(2,k)>\frac{2^k}{k^\varepsilon(\varepsilon>0)}.$$

2. 舒尔问题. 犹太人数学家舒尔(Schur, I.)曾证明了一个著名定理：对于给定的正整数 r，以任意方式将整数集 $S=\{1,2,\cdots,[r!e]\}$ 划分成 r 个子集，则必有某一个子集的数使方程 $x+y=z$ 有解，式中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数. 1973 年，欧文(Irving, R. W.)将舒尔的上界减少到

$$\left[r!\left(e-\frac{1}{24}\right)\right].$$

对于给定的正整数 r，将满足下列条件的最大整数记为 $n=n(r)$：存在对整数集 $S=\{1,2,\cdots,n(r)\}$ 的一个划分，使得在任一个子集 $S_i(i=1,2,\cdots,r)$ 中都没有 $x+y=z$ 的解，将这种划分所得的子集称为无和子集(sumfree subset). 1961 年，鲍默特(Baumert, L. D.)计算出 $n(4)=44$. 例如将 $S=\{1,2,\cdots,44\}$ 可划分成下列 4 个无和子集：

$\{1,3,5,15,17,19,26,28,40,42,44\}$;

$\{2,7,8,18,21,24,27,33,37,38,43\}$;

$\{4,6,13,20,22,23,25,30,32,39,41\}$;

$\{9,10,11,12,14,16,29,31,34,35,36\}$.

1975 年，弗雷德里克森(Fredricksen, H.)证明了 $n(5)\geqslant 157$. 对于 $n(r)$ 的下界估计有(舒尔证得)

$$n(r)\geqslant\frac{(3^r+1)}{2},$$

对于 $r=1,2,3$ 很精确，但对较大的 r，下界估计的太小. 1966 年，艾博特(Abbott, H. L.)和莫泽(Moser, L.)得出结论：存在常数 c 和充分大 r 有 $n(r)>89^{r/4-c\ln r}$. 1972 年，艾博特和汉森(Hanson, D.)将上述结果改进成 $n(r)>c\cdot 89^{r/4}$.

3. 拉多问题. 数学家拉多(Radó, R.)研究了一些广义范・德・瓦尔登问题与广义舒尔问题. 他证明了，对任何正整数 a,b,c，一定存在一个整数 n，无论怎样将 $S=\{1,2,\cdots,n\}$ 划分成两个子集，至少在一个子集中使方程 $ax+by=cz$ 有解. 他给出了一个确定 n 值的方法，但不是最好的. 例如，对于方程 $2x+y=5z$，拉多定理给出的 $n=20$，实际上只要 $n=15$ 就够了，即不论如何将 $S=\{1,2,\cdots,15\}$ 划分成两个子集，必在一个子集中使方程 $2x+y=5z$ 有解 (x,y,z).

设 r 是给定的正整数，如果存在一个最小的整数 $n(r)$，无论怎样划分 $S=\{1,2,\cdots,n(r)\}$ 成 r 个子集，总存在一个子集含有方程 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots=0$ 的解，其中 $a_i(i=1,2,\cdots)$ 是非零整数，则称此方程是 r 叶正则(r—fold regular)，简称 r 正则. 上述的拉多定理表明，方程 $ax+by=cz$ 是 2 叶正则的.

自然数都可表示成 $5^\alpha\cdot\beta$ 形式，其中 $\alpha=0,1,2,\cdots$ 而 5 不能整除整数 β，则按 α 取偶数或奇数，$\beta\equiv\pm1$ 或 $\pm2(\bmod 5)$，可将自然数集分成 4 个子集：

$\{5^\alpha\beta\mid\alpha$ 是偶数，$\beta\equiv\pm1(\bmod 5)\}$;

$\{5^\alpha\beta\mid\alpha$ 是偶数，$\beta\equiv\pm2(\bmod 5)\}$;

$\{5^\alpha\beta\mid\alpha$ 是奇数，$\beta\equiv\pm1(\bmod 5)\}$;

$\{5^{\alpha}\beta \mid \alpha$ 是奇数,$\beta \equiv \pm 2 \pmod 5\}$.

可以证明,方程 $2x+y=5z$,在上述任一子集中都无解,因而,此方程不是 4 叶正则的. 拉多提出了一个至今尚未解决的问题:对于每一个正整数 r,是否存在这样的方程,它是 r 叶正则的,但不是$(r+1)$叶正则的?

韦伊猜想(Weil conjecture)　代数几何中的一个重要问题. 1934 年,德国数学家哈塞(Hasse,H.)证明了椭圆曲线上的黎曼猜想. 到了 20 世纪 40 年代,法国数学家韦伊(Weil,A.)证明了关于代数域上的黎曼猜想,并由此提出了一般簇的黎曼猜想,即著名的韦伊猜想:设 k 是具有 q 个元素的有限域,V 为在 k 上定义的 n 维非奇完备代数簇,设 k 的 m 次扩张为 k_m 及坐标取自 k_m 中的 V 的点的个数为 N_m,则由

$$\frac{d}{du}\ln Z(u,V) = \sum_{m=1}^{\infty} N_m u^{m-1}$$

及初始条件 $Z(0,V)=1$ 所定义的 u 的函数 $Z(u,V)$,称为有限域 k 上的代数簇 V 的同余 ζ 函数,则:

1. $Z(u,V)$是 u 的有理函数.

2. $Z(u,V)$满足一个函数方程,它与黎曼 ζ 函数所满足的函数方程相类似.

3. $Z(u,V)$的零点的绝对值是 $q^{-\frac{1}{2}}$的奇数次幂,极点的绝对值是 $q^{-\frac{1}{2}}$的偶数次幂.

4. 设 $V^{(0)}$是在某个有限次代数数域 K 上定义的非奇的完备代数簇,且 $V^{(0)}$模约化为 V,如果$V^{(0)}$(作为 $2n$ 维的实解析代数簇)的 h 维贝蒂(Betti)数为$B_h^{(0)}$,则有$B_h^{(0)}=B_h(h=0,1,\cdots,2n)$.

1949 年,韦伊猜想一提出,就吸引了许多著名数学家. 到了 20 世纪 60 年代,这一猜想成为代数几何学的中心问题,人们为解决猜想引进了许多新工具,发展了一些新的理论. 韦伊本人证明了上述猜想的一些重要特殊情形. 1960 年,德沃克(Dwork,B.)证明了猜想 1;法国数学家格罗腾迪克(Grothendieck,A.)为了证明韦伊猜想而拟订了一个庞大的代数几何研究计划,他证明了猜想 1 和 2;比利时数学家德利涅(Deligne,P.)受他的老师格罗腾迪克的影响,基本上按照他制定的研究方向加以延伸和发展,并以其广博的知识、敏锐的思想,于 1973 年证明了全部猜想. 由此发展出一系列重要结果,是 20 世纪 70 年代纯数学领域中取得的最辉煌成就之一,1974 年,德利涅获比利时皇家科学院颁发的法郎士·德儒茨奖,1978 年荣获菲尔兹奖.

素数等差数列问题(problems of arithmetic progression of primes)　有关皆由素数组成的等差数列(简称素数等差数列)的一组问题. 关于素数等差数列的研究工作直到 20 世纪才有较重大的进展,特别是高速电子计算机出现以后.

下表列出了现在已知的最小的素数等差数列.

具有最小末项的素数等差数列

项数 m	素数等差数列 ($k=0,1,2,\cdots,m-1$)	末　项
2	2,3	3
3	3,5,7	7
4	5,11,17,23	23
5	5,11,17,23,29	29
6	$7+30k$	157
7	$7+150k$	907
8	$199+210k$	1669
9	$199+210k$	1879
10	$199+210k$	2089
11	$110437+13860k$	249037
12	$110437+13860k$	262897
13	$4943+60060k$	725663
14	$31385539+420420k$	36850999
15	$115453391+4144140k$	173471351
16	$53297929+9699690k$	198793279
17	$3430751869+87297210k$	4827507229
18	$4808316343+717777060k$	17010526363
19	$8297644387+4180566390k$	83547839407
20	$214861583621+18846497670k$	572945039351
21	$142072321123+1419763024680k$	28537332814723

人们猜测:素数等差数列可以任意长,并且含有相同项数的素数等差数列有无穷多. 1944 年,乔瓦(Cholwa,S.)证明了:含有 3 项的素数等差数列有无穷多. 1981 年,希思-布朗(Heath-Brown,D.R.)证明了:含有 3 个素数和 1 个殆素数(最多含有两个素因数的正整数)的 4 项等差数列有无穷多. 1980 年,格罗斯沃尔德(Grosswald,E.)证明了:有任意长的皆由殆素数组成的等差数列. 具体地说,存在无穷多个含有 m 项的等差数列,它的每一项最多是 r 个素因数之积,这里 m 为任意正整数,r 满足

$$r \leqslant m\ln m + 0.892m + 1.$$

早在 1770 年,英国数学家华林(Waring,E.)发现下列具体事实:如果 3 个素数(第一项不是 3)组成等差数列(最小的一组是 5,11,17),则它的公差能被 6(=2×3)整除;而 5 个素数(第一项不是 5)组成等差数列时,公差必能被 30(=2×3×5)整除;7 个素数(第一项不是 7)组成等差数列时,公差能被 210(=2×3×5×7)整除. 由此华林归纳出:由 p 个素数(这里 p 是素数)组成首项不是 p 的等差数列,其公差必能被 $t=2\times3\times\cdots\times p$ 整除,这里 t 是不超过 p 的所有素数之积. 90 年后,法国数学家马蒂厄(Mathieu,É.L.)证明了华林猜想.

对于首项是素数 p 的 p 项素数等差数列,已知的情况是

3,5,7;$p=3,d=2$.

5,11,17,23,29;$p=5,d=6=2\times3$.

7,157,307,457,607,757,907;$p=7,d=150=2\times3\times5^2$.

$a_n=11+nd$, $n=0,1,2,\cdots,10$; $p=11$, $d=1536160080=2\times3\times5\times7\times7315048$.

$a_n=13+nd$, $n=0,1,2,\cdots,12$; $p=13$,

$d=9918821194590=2\times3\times5\times7\times11\times4293861989$.

对于其他的奇素数 p,是否都存在以 p 为首项的 p 项素数等差数列,尚未解决.

素数等差数列问题的更深化的要求是数列的项是相邻素数.例如,3,5,7 是三个相邻素数构成的等差数列,而 251,257,263,269 以及 1741,1747,1753,1759 都是 4 项相邻素数等差数列.1967 年,琼斯(Jones,M.F.)发现了 5 项相邻素数等差数列:

$$10^{10}+24493+30n \ (n=0,1,2,3,4).$$

同年,兰德(Lander,L.J.)和帕金(Parkin,T.R.)找到了 6 项相邻素数等差数列:

$$121174811+30n \ (n=0,1,2,3,4,5).$$

他们还证明了最小的 5 项相邻素数等差数列是

$$9843019+30n \ (n=0,1,2,3,4).$$

人们猜测有任意项的相邻素数等差数列,但远未获得解决.

素数间隔问题(problem of prime gap) 关于相邻两个素数的间隔 $d_n=p_{n+1}-p_n$ 的有关问题,其中 p_n 是素数数列中第 n 个素数.容易证明:$d_1=1$,一般地,$d_n\geqslant2$ 且 d_n 为偶数.只要 n 取适当的足够大的自然数,d_n 可以取任意大的值.

从 20 世纪 50 年代开始,人们开始寻找大素数间隔.美国数学家莱默(Lehmer,D.H.)研究了小于 3.7×10^7 的全部素数,发现最大间隔是相邻素数 20831323 与 20831533 的间隔 210.到了 20 世纪 60 年代,兰德(Lander,L.J.)和帕金(Parkin,T.R.)先后发现了间隔是 220,222,234,282,292,382 的相邻素数.进入 20 世纪 70 年代,布伦特(Brent,R.P.)陆续发现了间隔是 464,534,602,652 的相邻素数.1981 年,温特劳伯(Weintraub,Sol)在 1.1×10^{16} 附近发现了间隔是 654 的相邻素数.由此不难看出,虽然素数急剧增大,但相邻素数间隔增长缓慢.尚克斯(Shanks,Daniel)曾提出猜想:如果 $p(d)$ 表示间隔为 d 的前一个素数,则 $\ln p(d)\sim\sqrt{d}$.兰金(Rankin,R.A.)已经证明:对于无穷多个 n,有

$$d_n>\frac{c\ln n\ln\ln n\ln\ln\ln\ln n}{(\ln\ln\ln n)^2}.$$

匈牙利数学家爱尔特希(Erdös,P.)悬赏 5 千美元来证明(或推翻)猜想:上式中的常数 c 可取任意大的数.兰金的最好值是 $c=e^{\gamma}$,式中 γ 是欧拉常数.20 世纪 60 年代,邦别里(Bombieri,E.)和达文波特(Davenport,H.)证明了

$$\liminf\frac{d_n}{\ln n}<\frac{2+\sqrt{3}}{8}\approx0.46650.$$

20 世纪 80 年代,梅尔(Maier,H.)将上式右边改进到 0.248.20 世纪 70 年代,赫克斯利(Huxley,M.N.)证明出

$$d_n<p_n^{7/12+\varepsilon}.$$

1979 年,希思-布朗(Heath-Brown,D.R.)和艾温尼克(Iwaniec,H.)将指数改进为 11/20.而莫泽契(Mozzochi,C.J.)改进到 0.548.根据黎曼猜想应有

$$d_n<p_n^{1/2+\varepsilon}.$$

d_n 的估计与函数 $N(\alpha,T)$ 有关,$N(\alpha,T)$ 表示 $\zeta(s)$ 函数($s=\sigma+\mathrm{i}t$,i 为虚数单位)在矩形:$1/2\leqslant\alpha\leqslant\sigma\leqslant1,-T\leqslant t\leqslant T$ 中的零点个数.从关于 $\zeta(s)$ 的黎曼猜想可推出林德勒夫猜想:

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}t\right)=O(|t|^{\varepsilon}).$$

从林德勒夫猜想可推出密度猜想:

$$N(\alpha,T)=O(T^{2(1-\alpha)+\varepsilon}).$$

从密度猜想可推出

$$d_n=O(n^{1/2+\varepsilon}).$$

早在 20 世纪 30 年代,克拉默(Cramér,H.)使用黎曼猜想证明了

$$\sum_{n<x}d_n^2<cx(\ln x)^4.$$

爱尔特希猜测上式右边是 $cx(\ln x)^2$,但他认为眼前没有希望可以证明.

埃及分数问题(problems on Egyptian fractions) 具有悠久历史、借助于单位分数进行组合与分解的著名问题集.现收藏于英国不列颠博物馆的莱因德(Rhind)纸草书,是目前所知道的最古老的数学著作,产生于公元前 1700 年左右的古埃及.在莱因德纸草书上有很长的篇幅记载了 $2/n$ 型的分数分解成单分数(分子为 1 的分数也称单位分数)之和.例如

$$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28},$$
$$\frac{2}{97}=\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776},$$
$$\frac{2}{29}=\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}.$$

于是,引发了有理数分解为单分数之和的一系列数学问题,称为埃及(单)分数问题.具体地,给定互素的正整数 m 与 n,求使

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_k} \tag{1}$$

成立的正整数 x_i $(i=1,2,\cdots,k)$.

1. $k=2$ 的情形. 将一个有理数 m/n 分解成两个不同单分数之和,有下列判定和解决方法:设 d 是 n^2 的小于 n 的正约数(包括正整数 1),当且仅当 $n+d$ 与 $n+n^2/d$ 都能被 m 整除时,存在两个不同的正整数 $x=(n+d)/m, y=n(n+d)/md$,使得

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \tag{2}$$

成立. 对于给定的正整数 m 和 N,使方程(2)没有正整数解的 $n(n\leqslant N)$ 的个数,记为 $F_m(N)$. 霍夫梅斯特(Hofmeister,G.)和斯托尔(Stoll,P.)证明了,对于足够大的 N,存在一个常数 c,使得

$$\left|\frac{F_m(N)}{N}\right|<c(\ln N)^{-1/\varphi(m)},$$

式中 $\varphi(m)$ 是欧拉函数. 由此推出

$$\frac{F_m(N)}{N}\to 0 \ (\text{当 } N\to\infty \text{ 时}),$$

也就是说,当 N 充分大时,对于预先给定的正整数 m,几乎所有的正整数 $n: 1\leqslant n\leqslant N$,都使方程(2)有正整数解 (x,y).

2. $k=3$ 的情形. 20 世纪 50—60 年代,就有许多人研究了 $m=4$ 的情形. 匈牙利数学家爱尔特希(Erdös,P.)和斯特劳斯(Straus,E. G.)猜测:方程

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z},$$

对于所有大于 1 的整数 n 都有正整数解 (x,y,z). 人们对 $n<10^8$ 验证了这个猜想. 1969 年,英国数学家莫德尔(Mordell,L. J.)证明了该猜想,但满足

$$n\equiv 1^2,11^2,13^2,17^2,19^2,23^2 \pmod{840}$$

的整数 n 有可能是例外. 波兰数学家谢尔品斯基(Sierpiński,W.)对方程

$$\frac{5}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z},$$

也做出了类似的猜想. 帕拉玛(Palama,G.)在 20 世纪 50 年代,对不大于 922 321 的所有整数 n 验证了这个猜想,而斯图尔特(Stewart,B. M.)则将验证的范围扩大到不大于 1 057 438 801,但不是形如 $278\,460t+1$(t 为整数)的整数 n.

1998 年,盖伊(Guy,R. K.)撰文提出哈丁(Hardin,R.)等人的猜测:对于任何与 3 互素的奇数 n,都有

$$\frac{3}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z},$$

其中 x,y,z 都是正奇数,且互不相同. 2000 年 1 月,哈格多恩(Hagedorn,T. R.)在《美国数学月刊》上发表论文证明了哈丁猜想.

辛泽尔(Schinzel,A.)猜测,一般方程

$$\frac{m}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}, \tag{3}$$

对于 $n>n_m$ 都有正整数解 (x,y,z),并且已证明对于充分大的 m,猜想是正确的.

对于给定的正整数 m 和 N,使方程(3)没有正整数解的数 $n(n\leqslant N)$ 的个数,记为 $E_m(N)$. 沃恩(Vaughan,R. C.)证明了,对于充分大的 N,存在常数 K,使得

$$\left|\frac{E_m(N)}{N}\right|<K\exp\{-c(\ln N)^{2/3}\},$$

式中常数 c 只依赖于 m.

3. 一般 k 的情形. 1202 年,意大利数学家斐波那契(Fibonacci,L.)在他的名著《算法之书》中,介绍了一种算法,将真分数 m/n 化为不多于 m 个不同的单分数之和. 但没有对他的算法有效性进行理论证明. 直到 1880 年才由英国数学家西尔维斯特(Sylvester,J. J.)给出了证明. 1962 年,美国的格龙勃(Golomb,S. W.)又给出了一种化有理数为单分数之和的方法,也证明了任一真分数 m/n 可化为不超过 m 个不同单分数之和. 但至今还有一个与算法有关的未解决的问题:设 n 为奇数,为了将 m/n 展开成(1)式,依次选择尽可能小的奇数 x_i,使每一次的余项都是非负值,那么这样得到的 $\Sigma 1/x_i$ 始终是有限项和吗?

4. $\dfrac{m}{n}=1$ 的情形. 设

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_k}=1, \tag{4}$$

式中 x_i 是正整数,且 $x_1<x_2<\cdots<x_k$.

格雷厄姆(Graham,R. L.)已经证明,对于大于 77 的任一整数 a,总可以将它分拆成 k 个不同整数: $a=x_1+x_2+\cdots+x_k$,使得(4)式成立. 内格尔(Nagell,T.)证明了等差整数列(算术数列)的倒数和,永远不等于整数,故(4)式的解不是等差整数列. 将满足(4)式的所有 x_k 的最小值记为 $m(k)$. 例如,$m(3)=6, m(4)=12, m(12)=120$. 爱尔特希提出下列问题:

1. 是否存在常数 c,使得 $m(k)<ck$?

2. 当 k 是变化时,最大分母 x_k 能取到多大的值?

对于问题 2,爱尔特希引进下面的整数数列:$m_1=2, m_2=m_1+1=3, m_3=m_1m_2+1=7, m_4=m_1m_2m_3+1=43,\cdots$,一般地

$$m_t=m_1m_2\cdots m_{t-1}+1 \ (t=2,3,4,\cdots),$$

易证

$$1=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\cdots+\frac{1}{m_{k-1}}+\frac{1}{m_1m_2\cdots m_{k-1}}. \tag{5}$$

爱尔特希猜测,(5)式是一切分解式

$$1=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_k},$$

式中 $1<x_1<x_2<\cdots<x_k$,使 x_k 取最大值的分解式,

即 $x_k \leqslant m_1m_2\cdots m_{k-1}$ 或 $x_k \leqslant m_k - 1$.

1987 年,中国数学家冯克勤等人证明了爱尔特希这一猜想的正确性.

用 $N(k)$ 表示方程(4)的所有正整数解(不计大小顺序)的个数,用 $M(k)$ 表示方程(4)的满足 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots \leqslant x_k$ 的所有正整数解的个数. 1972 年,辛马斯特(Singmaster,D.)计算出:

k	1	2	3	4	5	6
$M(k)$	1	1	3	14	147	3462
$N(k)$	1	1	10	215	12231	2025462

爱尔特希提出,希望得到 $M(k)$ 与 $N(k)$ 的渐近公式.

林尼克常数问题(Linnik constant problem) 涉及等差数列中必出现素数的一个重要常数难题. 在等差数列(也称算术数列)

$$a, a+d, a+2d, \cdots, a+nd, \cdots \quad (1)$$

中,当 a 与 d 为互素的正整数时,必有无穷多个素数. 这就是著名的狄利克雷定理,是德国数学家狄利克雷(Dirichlet,P. G. L.)于 1837 年发表的重要结果. 进而,人们又研究上述等差数列中第一个素数出现的位置,即最小素数问题:当 x 取多大时,数列(1)中不超过 x 的那些项中至少有一个素数? 苏联数学家林尼克(Линник,Ю. В.)于 1950 年证明了最小素数估计定理:对于足够大的整数 $d \geqslant 2$,存在这样的常数 c,使得数列(1)中不超过 λd^c 的那些项中一定有素数,其中 c 称为林尼克常数(λ 为某一正常数). 计算这个常数 c 是数论中一项很重要的工作.

1957 年,中国数学家潘承洞首先确定出 $c \leqslant 5448$. 1965 年,中国数学家陈景润得到 $c \leqslant 777$. 1977 年,芬兰数学家改进为 $c \leqslant 36$. 在 1979 年,美国数学家又证明了 $c \leqslant 20$. 同年,陈景润证明出 $c \leqslant 17$. 到了 20 世纪 90 年代初,希思-布朗(Heath - Brown,D. R.)证明出 $c \leqslant 5.5$,这是目前最好的结果.

由黎曼猜想可以推出 $c \leqslant 2+\varepsilon$,式中 ε 是一个任意小的正数. 更有人猜测:$c \leqslant 1+\varepsilon$.

$3x+1$ 问题($3x+1$ problem) 关于函数迭代的问题. 指当 x 是奇数时,取 $3x+1$,当 x 是偶数时,取 $\frac{x}{2}$,即

$$T(x) = \begin{cases} 3x+1 & (x \text{ 为奇数}), \\ \frac{x}{2} & (x \text{ 为偶数}). \end{cases}$$

$3x+1$ 猜想断言:从任意正整数 x 开始,反复迭代该函数得到数列:

$$T^{(0)}(x),\ T^{(1)}(x),\ T^{(2)}(x), \cdots,$$

这里

$$T^{(0)}(x) = x,$$

$$T^{(n+1)}(x) = T(T^{(n)}(x)) \ (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

最终得到函数值 1,即存在正整数 i,使得

$$T^{(i)}(x) = 1.$$

$3x+1$ 问题在 20 世纪 50 年代传播开来,据说柯拉茨(Collatz,L.)在 1950 年召开的一次国际数学家大会上谈起过,因而许多人称之为柯拉茨问题. 1952 年,又由英国数学家施威茨(Thwaites,B.)重新发现. 日本东京大学的米田信夫(Yoneda,N.)已对 $2^{40} \approx 1.1 \times 10^{12}$ 以下的正整数作了检验. 1992 年,利温斯(Leavens,G. T.)和弗穆兰(Vermeulen,M.)已对小于 5.6×10^{13} 的正整数进行了验证,均未发现反例. $3x+1$ 问题的主要困难是在迭代过程中所表现出的复杂性与不规则性. 50 年来,一直未有突破性进展. 匈牙利数学家爱尔特希(Erdös,P.)认为:"数学还没有发展到足以解决这样的问题."有人提议将 $3x+1$ 问题列为下一个费马(大定理)问题.

人们将 $T(x)$ 的允许范围扩张到全体整数. 迭代的结果发现:当 x 为正整数时,迭代最终出现循环(4,2,1);当 $x=0$ 时,出现循环(0);当 $x=-1$ 时,出现循环(−1,−2);当 $x=-5$ 时出现循环(−5,−14,−7,−20,−10);当 $x=-17$ 时,出现循环(−17,−50,−25,−74,−37,−110,−55,−164,−82,−41,−122,−61,−182,−91,−272,−136,−68,−34). 于是,在 1978 年,有人提出有限圈猜想:"函数 $T(x)$ 在整数集上迭代只有有限个不同的循环,且只有上述 5 个循环."对 $|x| < 10^8$ 的负整数 x 进行验证均为正确,但一般情形并未获得证明.

$3x+1$ 问题有各种推广,最著名的是 1978 年克兰多尔(Crandall,R. E.)提出的 $ax+b$ 问题. 一般地,设 a 与 b 是正整数,$a>1$,且 b 为奇数. 定义

$$C(x) = \frac{(ax+b)}{2^{e(x)}},$$

式中 $e(x)$ 是 $ax+b$ 所含的素因数 2 的个数.

所谓 $ax+b$ 问题就是对于任一个正奇数 x,经过有限次的迭代最终是否可以得到 1? 显然 $a=3, b=1$,即为 $3x+1$ 问题. 经过研究克兰多尔提出下列猜想:除了 $a=3, b=1$(即 $3x+1$ 问题)外,对于其他的正整数 a, b($a>1$,b 为奇数)都可以找到一个正奇数 r,使得 $T^{(i)}(r)$ 恒不为 1. 克兰多尔证明了 $b>1$ 时猜想是正确的,对于 $ax+1$ 的情形,只证明了 $a=5$,181,1093 时猜想正确.

1995 年,弗兰柯(Franco,Z.)和波梅兰斯(Pom - erance,Carl)证明了:在渐近密度的意义下,对于几乎所有的正奇数 $a>3$,关于 $ax+1$ 问题的克兰多尔猜想是正确的. 但是无论是 $3x+1$ 猜想、有限圈猜想,还是 $ax+1$ 问题的克兰多尔猜想,都没有得

到最终解决.

循环不等式猜想(conjecture of cyclic inequality) 关于一个经典不等式的难题. 1954 年,夏皮罗(Shapiro, H. S.)在《美国数学月刊》上提出了一个猜想:设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是非负数,且 $x_1+x_2, x_2+x_3, \cdots, x_{n-1}+x_n, x_n+x_1$ 均为正数,则有

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2}\geqslant\frac{n}{2}, \quad (1)$$

一般称为循环不等式,这里 $n>2$. 与循环不等式有关的两个重要性质是:

1. 设

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\cdots+\frac{x_n}{x_1+x_2},$$

则有

$$f_{n+2}(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},x_n,x_{n-1},x_n)=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)+1.$$

利用上述恒等式可知,若不等式(1)对 n 不成立,可推出不等式(1)对于 $n+2$ 也不成立.

2. 设 $\mu(n)=\inf\limits_{x_i\geqslant 0} f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,

则有

$$\mu(2m)\leqslant\mu(2m-1)+\frac{1}{2}.$$

利用上述不等式可知,若不等式(1)对于 $n=2m$ 成立,可推出(1)式对于 $n-1$ 也成立.

循环不等式最简单的 $n=3$ 的情形,早在 1903 年就由内斯比特(Nesbitt, A. M.)提出. 夏皮罗与费尔普斯(Phelps, C. R.)分别给出了 $n=3,4$ 和 $n=5$ 的证明. 1958 年英国著名数学家莫德尔(Mordell, L. J.)证明了 $n=3,4,5,6$ 时,(1)式是成立的,并提出猜想:对非对称的 x_i 可能会发现,在 $n\geqslant 7$ 时,有使(1)式不成立的反例. 朱洛夫(Zulauf, A.)在莫德尔的这篇论文之后加了一篇短的注记,给出了一个反例,证明了(1)式对于 $n=14$ 不成立. 1963 年,多柯威克(Dokovic, D. Z.)证明了 $n=8$ 时,(1)式成立. 1968 年,诺沃赛德(Nowosad, P.)证明了 $n=10$ 时,(1)式成立. 1976 年,戈杜诺瓦(Godunova, E. K.)和莱文(Levin, V. I.)证明了 $n=12$ 时,(1)式成立. 由前述性质(2)可知,由 $n=8,10,12$ 时,(1)式成立可推出 $n=7,9,11$ 时,(1)式也成立. 1985 年,特罗斯(Troesch, B. A.)证明了 $n=13$ 时,(1)式是成立的. 至此,对于 $n\leqslant 13$,(1)式均成立.

1960 年,赫松(Herschorn, M.)和佩克(Peck, J. E. L.)继朱洛夫之后,又给出了 $n=14$ 的另一个反例. 这些反例的结构如下:设 $n=2m$,取 $x_{2k}=a_k\varepsilon$, $x_{2k-1}=1+b_k\cdot\varepsilon$,式中 $k=1,2,\cdots,m$. ε 是充分小的正数,则

$$f_{2m}(x_1,x_2,\cdots,x_{2m})=m+q\varepsilon^2+O(\varepsilon^3),$$

式中 q 是关于 a_k 和 b_k 的二次型.

利用上述结构,如果能找到适当的 a_k 和 b_k 使 $q<0$,就可以构造出不等式(1)的反例. 例如,$m=7$ 时,在朱洛夫的反例中,取

$$(a_1,a_2,\cdots,a_7)=(7,6,5,2,0,1,4),$$
$$(b_1,b_2,\cdots,b_7)=(7,4,1,0,1,4,6),$$

则有 $q=-2<0$.

根据性质(1),由 $n=14$ 时,(1)式不成立可推出所有不小于 14 的偶数 n,(1)式都不成立. 早在 1956 年,莱特希尔(Lighthill, M. J.)就构造出反例证明了 $n=20$ 时,(1)式不成立. 1963 年,戴安南达(Diananda, P. H.)证明了 $n=27$ 时,(1)式不成立. 由性质(1)知,对于所有不小于 27 的奇数 n,(1)式都不成立. 1971 年,戴金(Daykin, D. E.)与马尔科姆(Malcolm, M. A.)分别独立地证明了 $n=25$ 时,(1)式不成立,到 1985 年尚未确定真伪的 n 值只剩下下列 5 个:15,17,19,21,23. 1989 年 10 月,特罗斯一举证明了上述 5 个 n 值,对(1)式成立. 至此,使夏皮罗循环不等式猜想成立的 n 值有且仅有下列 16 个:

3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,15,17,19,21,23.

照明问题(illumination problem) 确定照亮一个凸体的整个边界所需要的最少的不同方向的平行光束数的问题. 设 K 是 n 维线性空间 R^n 中的一个凸体,并假定 K 的边界非空. 边界上的任一点 A 被称为沿着给定的方向 l 从外部照亮是指在凸体内有一点 B,使得向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 l 平行且同向. 设空间 R^n 中将整个边界照亮的最少的方向数为 $c(K)$.

照明问题的解决与组合几何中的哈德威哥问题有关. 1957 年,哈德威哥(Hadwiger, H.)提出用一种特殊形式的图形覆盖凸体的问题. 设 K 是 n 维欧几里得空间 R^n 中的凸体,并设 $b(K)$ 是以 k $(0<k<1)$ 为相似系数,与 K 位似的且足以覆盖 K 的立体的最少个数. 1978 年,有人证明:对于 R^n 中有界凸体来说,$c(K)=b(K)$;对于无界凸体有 $c(K)\leqslant b(K)$,且存在凸体满足 $c(K)<b(K)$,或者 $c(K)=b(K)=\infty$.

关于 $b(K)$,哈德威哥猜测:任何有界的集合 $K\subseteq R^n$ 满足 $n+1\leqslant b(K)\leqslant 2^n$,这里等式 $b(K)=2^n$ 表明 K 是平行多面体. 在 $n\leqslant 2$ 时,猜测已得到证明;对于 $n\geqslant 3$ 仅有部分结果. 例如,1984 年,拉塞克(Lassak, M.)证明:对于有界的中心对称的立体 $K\subseteq R^3$,猜测成立. 对于无界集 $K\subseteq R^n$,数 $b(K)$ 或者等于 ∞ 或者等于 $b(K')$,这里 K' 是维数较低的有界凸体. 特别地,对 $K\subseteq R^3$,数 $b(K)$ 只能取 1,2,3,4,∞ 这些值之一.

帕克问题(Park problems) 关于非线性分析领域的一个课题. 设 (X,d) 是一度量空间,$f: X\to X$ 是映射,$x,y\in X$,记 $O(x)=\{f^n x: n\geqslant 0\}$,

$O(x,y)=O(x)\cup O(y)$，$m(x,y)=\max\{d(x,y),d(x,fx),d(y,fy),d(x,fy),d(y,fx)\}$，$\delta(x,y)=\sup\{d(a,b):a,b\in O(x,y)\}$，$\delta(x)=\delta(x,x)$. 对 $A\subseteq X$，$\overline{A}$ 表示 A 的闭包. 如果 $\delta(x)<+\infty$，则称 x 是 f 的正则点.

(A)对任意 $x,y\in X$，$x\neq y$，

$(Ad)\quad d(fx,fy)<d(x,y)$，

$(Am)\quad d(fx,fy)<m(x,y)$，

$(A\delta)\quad d(fx,fy)<\delta(x,y)$，其中 x,y 是 f 的正则点.

(B)对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 满足对任意的 $x,y\in X$，

$(Bd)\quad \varepsilon\leqslant d(x,y)<\varepsilon+\delta\Rightarrow d(fx,fy)<\varepsilon$，

$(Bm)\quad \varepsilon\leqslant m(x,y)<\varepsilon+\delta\Rightarrow d(fx,fy)<\varepsilon$，

$(B\delta)\quad \varepsilon\leqslant\delta(x,y)<\varepsilon+\delta\Rightarrow d(fx,fy)<\varepsilon$.

(C)对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\varepsilon_0<\varepsilon$ 和 $\delta_0>0$ 满足对任取的 $x,y\in X$，

$(Cd)\quad \varepsilon\leqslant d(x,y)<\varepsilon+\delta_0\Rightarrow d(fx,fy)\leqslant\varepsilon_0$，

$(Cm)\quad \varepsilon\leqslant m(x,y)<\varepsilon+\delta_0\Rightarrow d(fx,fy)\leqslant\varepsilon_0$，

$(C\delta)\quad \varepsilon\leqslant\delta(x,y)<\varepsilon+\delta_0\Rightarrow d(fx,fy)\leqslant\varepsilon_0$.

(D)存在非减右连续函数 $\varphi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$满足 $\varphi(t)>0$，对于任意的 $t>0$ 并且任意的$x,y\in X$，

$(Dd)\quad d(fx,fy)\leqslant\varphi(d(x,y))$，

$(Dm)\quad d(fx,fy)\leqslant\varphi(m(x,y))$，

$(D\delta)\quad d(fx,fy)\leqslant\varphi(\delta(x,y))$，其中 x 与 y 是 f 的正则点.

(E)存在 $r\in[0,1)$满足对任意的 $x,y\in X$，

$(Ed)\quad d(fx,fy)\leqslant rd(x,y)$，

$(Em)\quad d(fx,fy)\leqslant rm(x,y)$，

$(E\delta)\quad d(fx,fy)\leqslant r\delta(x,y)$，其中 x 与 y 是 f 的正则点.

1980 年，帕克(Park，S.)在论文“关于广义压缩型条件”中证明了两个定理：

1. 设 f 是度量空间(X,d)上的自映射，并且 X 中的任意点都是 f 的正则点，则

$$\begin{array}{ccccccccc}
(Ad) & \Leftarrow & (Bd) & \Leftarrow & (Cd) & \Leftarrow & (Dd) & \Leftarrow & (Ed)\\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow\\
(Am) & \Leftarrow & (Bm) & \Leftarrow & (Cm) & \Leftarrow & (Dm) & \Leftarrow & (Em)\\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow\\
(A\delta) & \Leftarrow & (B\delta) & \Leftarrow & (C\delta) & \Leftarrow & (D\delta) & \Leftarrow & (E\delta)
\end{array}$$

$$(C\delta)\nRightarrow(D\delta)\nRightarrow(E\delta)\nRightarrow(Em)\nRightarrow(Ed),$$

$$(Bd)\nRightarrow(Cd),\ (Dd)\nRightarrow(Ed).$$

2. 设 f 是度量空间(X,d)上的自映射，并且 $u\in X$是 f 的正则点满足：

1) 在 $O(u)$中存在 f 的一个正则聚点 v；

2) 条件$(C\delta)$在 $O(u,v)$上成立；

则 f 在 $\overline{O}(u)$中存在惟一不动点 v，并且 $f^n u\to v$，$n\to\infty$.

帕克在该文中提出了两个未解决的问题：

1. 在(Ed)类映射族～$(A\delta)$类映射族之间是否存在其他蕴涵性的反例？

2. 定理 2 可否推广到(Bm)和$(B\delta)$类映射族？

1999 年，中国的刘泽庆构造了 10 个反例完全解决了上述两个问题，同时还在帕克的定理 1 的条件下证明了

$$\begin{array}{ccccccccc}
(Ad) & \underset{\nRightarrow}{\Leftarrow} & (Bd) & \underset{\nRightarrow}{\Leftarrow} & (Cd) & \underset{\nRightarrow}{\Leftarrow} & (Dd) & \underset{\nRightarrow}{\Leftarrow} & (Ed)\\
\Downarrow\not\Uparrow & & \Downarrow\not\Uparrow & & \Downarrow\not\Uparrow & & \Downarrow\not\Uparrow & & \Downarrow\not\Uparrow\\
(Am) & \underset{\nRightarrow}{\Leftarrow} & (Bm) & \underset{\nRightarrow}{\Leftarrow} & (Cm) & \underset{\nRightarrow}{\Leftarrow} & (Dm) & \underset{\nRightarrow}{\Leftarrow} & (Em)\\
\Downarrow\not\Uparrow & & \Downarrow\not\Uparrow & & \Downarrow\not\Uparrow & & \Downarrow\not\Uparrow & & \Downarrow\not\Uparrow\\
(A\delta) & \underset{\nRightarrow}{\Leftarrow} & (B\delta) & \underset{\nRightarrow}{\Leftarrow} & (C\delta) & \underset{\nRightarrow}{\Leftarrow} & (D\delta) & \underset{\nRightarrow}{\Leftarrow} & (E\delta)
\end{array}$$

撰　稿　马建峰　王　瑾　伊　晓　刘　莉　刘广智
江建国　纪　红　杨春宏　张黎丽　陈雪梅
赵秀元　侯在惠　贺贤孝　贺金梅　蒋海风
景　敏
审　阅　朱学志　杜瑞芝

珠　　算

珠算(bead calculation)　一种传统算法.指以算盘为工具进行数值计算的一种方法.珠算之名,最早见于东汉徐岳撰、北周甄鸾注的《数术记遗》:"珠算,控带四时,经纬三才."并注:"刻板为三分,其上下二分以停游珠,中间一分以定算位.位各五珠,上一珠与下四珠色别.其上别色之珠当五,其下四珠,珠各当一.至下四珠所领,故云控带四时.其珠游于三方之中,故云经纬三才也."

古代珠算多运用口诀.加法和减法在明代称为上法和退法,其口诀为珠算所特有,最早见于吴敬《九章算法比类大全》(1450年).乘法用九九口诀,起源很早,春秋战国时已在筹算中应用.除法用归除口诀,起初用于筹算,后来用于珠算.北宋沈括在《梦溪笔谈》卷十八介绍增成法时说:"其术都不用乘除,但补亏就盈而已.假如用九除者增一便是,八除者增二便是,但一位一因之."这就是九归的前身.南宋杨辉《乘除通变算宝》在流传古括32句的基础上,总结为四句归法新括,把九归推广到多位数除法上去.朱世杰《算学启蒙》卷上有九归口诀36句,均与后来通行的口诀大致相同.朱世杰、丁巨、何平子和贾亨还提出撞归和起一口诀,归除口诀至此才告完备.

在历史上影响最大的是明代程大位的《算法统宗》(1592年).中国发明的珠算,先后传到日本、朝鲜与东南亚各国.珠算方法简便,好学易懂,数百年来深受广大群众欢迎,至今仍在经济领域和人们日常生活中盛行不衰.

算　　盘

算珠(bead)　一种算具.指算盘的基本元件.由于空间位置不同而可以有不同赋值的珠子.运用小石子计算是远古的计算方式之一.西周陶丸是迄今发现的最早的专用算珠.古籍中常常提到算珠.

算盘(abacus)　一种简便适用的传统算具.指以算珠为基本元件构成的计算工具.宋代《谢察微算经》载有:"中:算盘之中.上:脊梁之上,又位之左.下:脊梁之下,又位之右.脊:盘中横梁隔木."该书已提到算盘及其结构.明代程大位《算法统宗》"算经源流"记有宋元丰、绍兴、淳熙以来所刻算书,其中《盘珠集》和《走盘集》均为讲述算盘之书.北宋张择端的《清明上河图》和河北巨鹿县故城遗址出土的算盘珠可作为文物旁证.元代有关算盘的证据有:

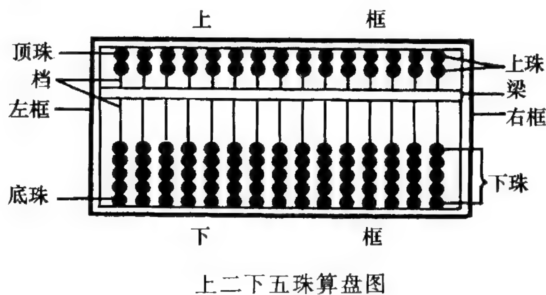
1. 刘因《静修先生文集》卷十一的《算盘》诗:"不作瓮商舞,休停饼氏歌,执筹仍蔽簏,辛苦欲如何."

2.《元曲选》"庞居士误放来生债"杂剧中有"闲着手,去那算盘里拨了我的岁数".

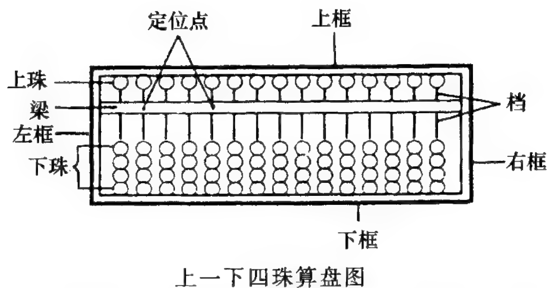
3. 元代画家王振鹏《乾坤一担图》(1310年)中,在货郎担上有一把算盘,横梁和穿珠极为清晰.

4. 元末陶宗仪《辍耕录》(1366年)卷二十九"井珠"条:"……稍久,曰算盘珠,言拨之则动."

明洪武四年(1371年)新刻的《魁本对相四言杂字》有"算盘"二字及图,其算盘形状与现今算盘相同.15世纪《鲁班木经》载有制造算盘的规格:"算盘式:一尺二寸长,四寸二分大.框六分厚,九分大.起碗底线,上二子,一寸一分;下五子,三寸一分.长短大小,看子而做."柯尚迁《数学通轨》(1578年)有一个十三档、梁上二珠、梁下五珠的算盘图,称为初定算盘图式.



上二下五珠算盘图



上一下四珠算盘图

算盘是由框、梁、档、珠四部分组成,其形状为长方形,如上图.目前,中国常用的算盘有三种:一种是七珠(上二下五)大算盘;一种是五珠(上一下四)中算盘;一种是六珠(上一下五)或五珠(上一下四)小算盘.

五珠算盘(five bead abacus)　常用算盘之一.梁上一珠,梁下四珠,称为五珠算盘.一般有15～27档,珠剖面为菱形,珠径为1.4～1.5厘米.

六珠算盘(six bead abacus)　常用算盘之一.梁上一珠,梁下五珠,称为六珠算盘.中国东北地区大部分使用这种小算盘.

七珠算盘(seven bead abacus)　常用算盘之一.指梁上二珠,梁下五珠的七珠算盘,它是中国传统的算盘模式.可分为九档、十一档、十三档、十五档、十七档、十九档等多种(常用的是十三档).

盲人算盘(blind men's abacus)　常用算盘之一.指供盲人使用的一种特殊算盘.算珠较大,珠不易移动,便于手摸记数.例如美国新近所创的:档数十三,每档五个圆珠,一个在梁上,四个在梁下,珠径0.0048米,档距0.0095米.在档与算盘底之间挤着一块泡沫橡胶垫,使算珠受到阻力,不致随便滑动.在算盘下边的框上,每档末端有一个点,为操作者确定数字位置之用.每隔三档中间有一条固定的垂直线,用作十进位小数点或作数字的分节点.中国也曾制出多种盲人算盘,如1964年,沈晓初曾设计的翻动算块的"牌算盘".

毛算盘(feathery abacus)　常用算盘之一.指用于珠算教学的一种特殊算盘.其档杆上安有棕毛,使用时,将算盘挂起来,把算珠随意拨到需要的位置上,珠子不能下滑.这是学校教学用的教具算盘.

弹簧算盘(spring abacus)　常用算盘之一.指用于珠算教学的一种特殊算盘.算珠内装有弹簧,使用时,将算盘挂起来,依赖弹簧的作用,阻止算珠自动下滑,从而停留在需要的位置上.

折叠算盘(fold abacus)　亦称合页算盘.常用算盘之一.指可以折叠的一种便携式算盘.这种算盘档数多,窄而长;为了便于携带,可折合为二、三叠,将合页左右连结,使用时展开成一个长条大算盘.

合页算盘(hinge abacus)　即"折叠算盘".

磁铁大算盘(magnet big abacus)　常用算盘之一.指用于珠算教学的一种特殊算盘.算珠内孔面贴有一层磁铁,档是铁的,依赖磁铁作用可把算珠拨放在档的任何一点上.教学时,可挂起来使用.

改良算盘(improve abacus)　当代最适用的一种算盘.是根据七珠算盘和五珠算盘等改良而成的算盘.这种算盘的体积、形状和算珠大小介于上述两种算盘之间.上一珠,下四珠,珠圆而较窄,扁而不鼓,可以用三指拨珠,是近几年来出现的一种算盘.

定位算盘(fixing-place abacus)　常用算盘之

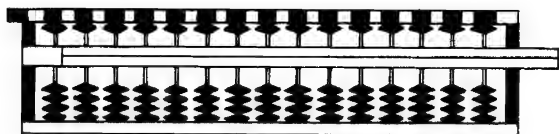


图1　定位算盘(定位尺在梁上)

一.指盘上设有位数标志的算盘.安装定位标或定位游标(也称定位尺或定位带),用以确定个、十、百、千、万等位.在加减运算时,用固定位标;在乘除运算时,用游标确定积和商的位数.如图1—图3.

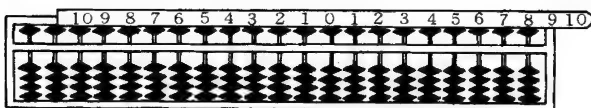


图2　定位算盘(定位尺在框上)

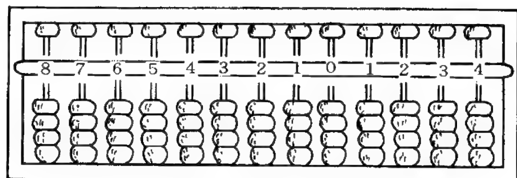


图3　定位算盘(定位尺在梁上)

框(frame)　亦称边.算盘的构件之一.指算盘四周的架子.分上、下、左、右四框.

边(side)　即"框".

梁(beam)　算盘的构件之一.指算盘中间的横梁.它把算盘的算珠分为两部分:梁上的算珠称为上珠,一颗当五;梁下的算珠称为下珠,一颗当一.改良算盘的梁上设有分节点.

标位星(place-mark star)　亦称定位点.算盘的构件之一.改良算盘的梁上每隔三档嵌入一个星标,称为标位星.如果将星标嵌在两档之间,则与笔算分节号一致.

定位点(place-mark point)　即"标位星".

档(place-showing sticks)　算盘的构件之一.指算盘中用以串珠的直杆.杆一般用竹、木或金属制成.档表示数位,体现出位值制计数原则,故有独到优点.最左面第一档称为首档,向右依次称为第二档、第三档……表示某数首位的档也可称为首档.

清盘器(abacus cleaner)　算盘的特殊构件之一.指运算完后清除靠梁算珠使其靠框的一种装置.一般在算盘的上左方装有按钮,按动该钮,全部算珠即离梁靠框.

珠算基本概念

上珠(upper bead)　一种算珠.在算盘中,梁上的算珠称为上珠.算盘梁上有两个或一个算珠,每颗上珠都表示该位上的数为5.

下珠(lower bead)　一种算珠.在算盘中,梁下的算珠称为下珠.算盘梁下有五个或四个算珠,每颗下珠都表示该位上的数为1.

顶珠(top bead)　一种算珠.指有两个上珠的算盘中,挨上框的算珠.

底珠(bottom bead)　一种算珠.有五个或四个下珠的算盘中,挨下框的算珠称为底珠.

内珠(inner bead)　亦称梁珠.一种算珠.指靠梁的算珠.

梁珠(beam bead)　即"内珠".

外珠(exterior bead)　亦称框珠.一种算珠.指算盘中靠框一边的算珠.

框珠(frame bead)　即"外珠".

漂珠(float bead)　亦称漂子.在运算过程中,没有将算珠拨到位而浮漂在档中间,分不清是靠梁,还是靠框的算珠.漂珠易使计算出错,应注意防止.

漂子(floater bead)　即"漂珠".

悬珠(suspended bead)　一种处于特定位置的算珠.在运算过程中,有意把算珠拨成既不靠框,又不靠梁的状态的算珠称为悬珠.悬珠可用以表示特定的数,如 10 或－1.

档位(grade place)　亦称档次.珠算术语.指赋予了计算单位的档.

档次(grade place)　即"档位".

定位(fixing place)　珠算术语.指确定算盘的档位.可以任选一档作为某个数位,其他档对应的数位也就定了.因此,在拨珠计算之前或之后,确定计算结果的首位或个位应在的档位即可.定位使用的方法称为定位法.珠算的定位法很多(参见"定位法").

铜档(copper pole)　算盘的特殊构件之一.在传统的十三档算盘上,第四档和倒数第四档是用铜或铁制的,通称为铜档.它的作用是:

1. 加固算盘.

2. 便于定位.

本档(self place)　亦称本位.凡在那一档进行拨珠运算,那个档即称为本档.

本位(self place)　即"本档".

挨档(next place)　亦称挨位或挨身.珠算术语.指本档的前档或后档.

挨位(next place)　即"挨档".

挨身(next self)　即"挨档".

前档(front place)　亦称前位或上位.珠算术语.指本档的前一档.如在个位上运算,十位档便称前档.

前位(front place)　即"前档".

上位(above place)　即"前档".

后档(back place)　亦称后位或下位.珠算术语.指本档的后一档.

后位(back place)　即"后档".

下位(below place)　即"后档".

隔档(place after next)　亦称隔位.珠算术语.指本档的前第二档或后第二档.

隔位(place after next)　即"隔档".

进档(advancing place)　亦称进位.珠算术语.指在本档的前档拨入一珠,表示本位满十向前位进一.

进位(advancing place)　即"进档".

退档(retiring place)　亦称退位.珠算术语.指在前档退一珠,作为本档的十计数.

退位(retiring place)　即"退档".

空档(empty place)　珠算术语.指某档的上珠和下珠全部靠框.空档表示该档的数为 0.

错档(error place)　亦称串档或错位.珠算术语.指在运算中把应在本档拨去或拨入的算珠,误拨在其他档上.

串档(error place)　即"错档".

错位(error place)　即"错档".

空盘(empty plate)　珠算术语.算盘上所有档上的算珠完全靠框,即都是空档的时候称为空盘.空盘表示 0.

改盘(correefing plate)　珠算术语.计算后算盘上的原数不拨去,而改作需要的数字,称为改盘.改盘可以节省清盘时间,加快计算速度.

复盘(check plate)　亦称还原.珠算术语.在算盘上,对计算的结果再计算一次,或用逆运算恢复原状,以验算得数是否正确,称为复盘.例如 $6\div3=2$,复盘 $2\times3=6$.

还原(return to the original number)　即"复盘".

清盘(cleaning an abacus)　珠算术语.把算盘各档靠梁的算珠全部拨靠框,形成空盘,称为清盘.

握笔(hold pen)　珠算术语.指打算盘将拨珠和持笔书写配合起来的拿笔方式.常见的握笔方法有三种:

1. 将笔夹在无名指和小指中间,依靠小指的力量把笔扣住(如图 1).

2. 将笔放在拇指上方和另四指下方(如图 2).

3. 将笔一头放在虎口上,另一头放在无名指下方、小指上方(如图 3).

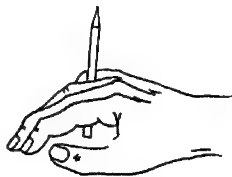


图 1

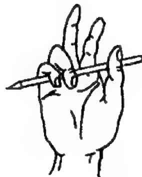


图 2



图 3

握笔与拨珠有机配合,可以提高计算效率.

拨珠法(the way of driving beads)　珠算术语.指各手指分工拨动算珠的方法.按算盘的类型,可分"二指法"和"三指法".正确掌握拨珠法,可避免错误,提高计算效率.

指法(fingering)　即"拨珠法".

拨珠一次(one time of driving beads)　珠算术

语.指用手指拨动算珠移动一段距离.

拨珠量(times of driving beads)　珠算术语.在一道珠算题的计算过程中,需要拨动算珠次数的总计,称为该题计算的拨珠量.

二指法(two fingering)　基本指法之一.用食、拇二指分工协同拨算盘中算珠进行计算的方法称为二指法.菱珠小算盘的算珠小,珠距近,可用二指法.食指管上珠和下珠的离梁及上珠的靠梁;拇指管下珠的靠梁,有时也兼管下珠离梁,其具体运指方法:

1.夹法(包括直夹、斜夹).例如空盘加6,以食、拇二指用直夹法;空盘加15、加25、加35、加45,以食、拇二指用斜夹法.

2.挤法(包括直挤、斜挤).例如7－6,以食、拇二指用直挤法;38－15,以食、拇二指用斜挤法.

3.拧法(包括顺拧、逆拧).例如4＋7,以食、拇二指用顺拧法;23－9,以食、拇二指用逆拧法.

4.双上法(包括直双上法、斜双上法).例如7－4,以食、拇二指用直双上法;6＋5,以食、拇二指用斜双上法.

5.双下法(包括直双下法、斜双下法).例如2＋4,以食、拇二指用直双下法;13－5,以食、拇二指用斜双下法.

三指法(three fingering)　基本指法之一.用拇指、食指、中指三指分工协同拨珠进行计算的方法称为三指法.适用于传统的七珠大算盘,也适用中型珠算盘.

拇指:专管拨下珠向上靠梁.

食指:专管拨下珠向下离梁.

中指:管上珠向上或向下拨.

具体地,有单指拨珠、两指联拨、三指联拨三种.

单指拨珠:

1.上托.用拇指拨下珠靠梁,例如12＋32.

2.下拨.用食指拨下珠离梁或用中指拨上珠靠梁,例如4－1,1＋5.

3.上挑.用中指拨上珠离梁,例如6－5.

两指联拨:

1.拇指与中指联拨.

1)直合.用拇指拨下珠,用中指拨上珠,同时靠梁,例如1＋6.

2)直上.用拇指拨下珠,用中指拨上珠,同时向上,例如5－3.

3)斜合.用拇指拨前档下珠,用中指拨本档上珠,同时靠梁,例如1＋15.

4)斜上.用拇指拨前档下珠,用中指拨本档上珠,同时向上,例如5＋5.

2.中指与食指联拨.

1)直分.用中指拨上珠,用食指拨下珠,同时离梁,例如6－6.

2)直下.用中指拨上珠,用食指拨下珠,同时向下,例如2＋3.

3)斜分.用中指拨本档上珠,用食指拨前档下珠,同时离梁,例如25－25.

3.拇指与食指联拨.

1)扭进.拇指拨前档下珠向上,同时食指拨本档下珠向下,例如1＋9.

2)斜下.用中指拨本档上珠,用食指拨前下珠,同时向下,例如30－25.

三指联拨:

中指、食指拨上、下珠离梁后,拇指很快在前档拨下珠靠梁,或者食指拨下珠离梁后,中指和拇指很快在后一档拨上、下珠靠梁,例如26＋4,30－3.

双手拨珠(driving beads with own both hands)　一种常用的拨珠手法.近代为了提高拨珠计算速度,采用双手同时拨珠的方法称为双手拨珠.左手指法与右手指法相同,采用二指法时,则双手四指同时拨珠;采用三指法时,则双手六指同时拨珠.计算时,从高位起由左向右双手置于相邻两档上依次移动拨珠,如左手拨千位,右手拨百位;左手拨十位,右手拨个位;……

拨入(driving in)　亦称拨进.在用算盘计算时,拨珠靠梁叫拨入.

拨进(driving carry)　即"拨入".

拨去(driving out)　亦称拨退.在用算盘计算时,拨珠离梁.叫拨去.

拨退(driving go)　即"拨去".

唱拨(read out move the beads on an abacus)　亦称念拨.珠算术语.在开始练习珠算时,把运算的思维过程或拨珠动作,按一定的顺序,边唱边拨珠称为唱拨.加减法的唱拨方法,是先把第一个加数(或被减数)在算盘上布好,然后唱出第二个加数(或减数),接着唱出思维过程和拨珠动作(边拨珠),最后唱出算式的结果.例如7＋2,唱"加2,拨入2,7加2等于9".又如8－4,唱"减4,5比4多1,拨入1,拨去5,8减4等于4".唱拨时,要培养思维能力,不要把它作为口诀让学生死记硬背.当学生已能掌握拨珠动作时不再唱拨,应改为练拨.

念拨(read out move the beads on an abacus)　即"唱拨".

练拨(practise move the beads on an abacus)　珠算术语.进行计算时,只作拨珠练习,而不唱出思维过程和拨珠动作,称为练拨.练拨时,可让学生做些珠算游戏(如打百子),以激发兴趣.

带珠(carry the beads of an abacus)　亦称带子.珠算术语.拨珠时,把不需要拨入的算珠带入,或者把不需要拨去的算珠带去,称为带珠.带珠会造成计算错误,必须避免.

带子(carry the beads of an abacus)　即"带珠".

零位(zero place)　一种特殊的数位.在纯小数中,小数点后面的第一位数字是非零数码,则称这个数的数位是零位(或 0 位).例如 0.304,0.58,0.96,0.472等数,都是零位数.

首位(first place)　亦称最高位.一种特殊的数位.一个数目最前面(左边)第一个非零数码所在位置称为首位.例如 2468 中的 2, 0.0123 中的 1.

最高位(highest place)　即"首位".

布数(put number)　亦称置数.珠算术语.作加法时,把第一加数拨在算盘上;作减法时,把被减数拨在算盘上;作乘除时,把被乘数和乘数或被除数和除数都拨在算盘上,上述过程统称布数.

置数(set aside number)　即"布数".

实数(actual amount or number)　中国古代筹算、珠算的传统名词.古代称被乘数、被除数为"实",乘数、除数为"法".《说文・宀部》:"实,富也,从宀从贯.贯、货、贝也."这就是说"实"是钱财货物之总称,泛指一切实物."法"与法律有关.古代把度量衡制度作为国家的一项重要法令来颁布,因此度量衡单位就是"法"."实如法而一",就是以"法"去量"实",如果"实"中有等于"法"的量,所得是一."实"中有几个"法",就得"几".物的数量就是物(实)与单位(法)的比值.这正是被除数和除数的意义.至于把被乘数和乘数亦分别称"实"和"法",那是由于被乘数、乘数和被除数、除数相对应而引申出来的.

实(actual)　即"实数".

法数(denominator)　中国古代筹算、珠算的传统名词.古代称乘数、除数为"法"(参见"实数").

法(rule)　即"法数".

实头(real head)　珠算术语.指被乘数首位或被除数首位.

法头(rule head)　亦称乘头,又称除头.珠算术语.指乘数首位或除数首位.

乘次(multiplication order)　珠算术语.指乘数的第二位.

除次(division order)　珠算术语.指除数的第二位.

首数(characteristic)　珠算术语.指一个数目中的最高位上的数码.

尾数(mantissa)　珠算术语.指一个数目中末位的数码.

齐头(uniform head)　亦称同头.珠算术语.在珠算除法中,被除数的首数和除数的首数相同,称为齐头.例如 6438÷668,称 6 和 6 为齐头.

同头(uniform head)　即"齐头".

凑五数(gather together to 5)　亦称凑数.珠算术语.运算中取特定数值的数,即两个数的和是 5,这两个数互称凑五数,或凑数.例如 1 和 4,2 和 3 互称凑五数或凑数.

凑数(make up the number or amount)　即"凑五数".

替数(replace number)　珠算术语.在 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 这一组数码中,凡相差 5 的两个数码互称替数.例如 0 与 5,1 与 6,2 与 7,3 与 8,4 与 9 都互称替数.

小五数(small pentanumber)　珠算术语.指"小于 5 的数".

超五数(transcendental pentanumber)　珠算术语.指不小于 5 的数(5,6,7,8,9).

变形数(number of)　珠算术语.指由正、负数混合组成的多位数.在珠算计算中,为了简化运算,常将某位(档)的超五数转化为小五数,仿照对数中负首数的记数法,将负号置于数字上面表示该位为负(减),例如 $19=20-1$ 记为 $2\bar{1}$,$478=500-\bar{2}\,\bar{2}$ 记为 $5\bar{2}\,\bar{2}$,$989=1000-11$ 记为 $10\bar{1}\,\bar{1}$……这种数在珠算中常使用.

补数(arithmetical complement)　珠算术语.两个正的整数、小数之和是 10^n(n 为整数),这两个数互称补数.例如 7 的补数是 3,82 的补数是 18,769 的补数是 231.看一个数的补数的方法:将此数前位各数字凑成 9,末位数字凑成 10,简称"前位凑九,末位凑十".例如

原数:532　94　3519　0.2　0.0167　……

补数:468　06　6481　0.8　0.0833　……

为了保证一个数的补数的惟一性,特规定:某数是几位数,补数的位数不超过它的位数.例如按上述补数定义,0.6 的补数可以是 0.4,9.4,99.4,999.4……但只取 0.4.

原数(primitive number)　珠算术语.求一个数的补数时,把这个数称为原数或本数.

齐数(unison number)　珠算术语.一个数和它的补数的和,称为这个数的齐数.显然,

$$原数 + 补数 = 齐数.$$

齐数是 10 的整数次幂.

强数(strong number)　珠算术语.将一个多位数的首位数加 1,把其后的各位数字换成零,所得到的一个多位数称为强数.例如 683,652,607,660 等数的强数为 700;如果首位数字是 9,则它的强数就是它的齐数,例如 934,920,903 等数的强数是 1000.

剩数(surplus number)　珠算术语.一个多位数去掉首位数后所剩下的部分,称为这个数的剩数.例如 3685 的剩数为 685.

填数(fill in the number)　珠算术语.一个多位

数的剩数的补数,称为这个多位数的填数.例如3685的填数为315.

提(put forward) 亦称双上,珠算术语.指用拇指托下珠靠梁的同时用中指(菱形算盘用食指)提上珠离梁.例如5－1＝4,用拇指托上4的同时,用中指提上珠5离梁.适用于凑五减法,或称破五减法.

双上(lower-up and upper-up) 即"提".

拧(twist) 亦称扭.珠算术语.指拨本档下珠离梁,在左一档下珠靠梁.例如2＋8,1＋9等,用食指将本档下珠离梁的同时,用拇指将左一档的下珠靠梁进一,称为顺拧(亦称扭进).反之,如13－9,12－8等,用食指将左一档的一个下珠离梁,同时用拇指将本档应还的珠靠梁,称为逆拧(亦称扭退).

扭(twist round) 即"拧".

顺拧(clockwise twist) 见"拧".

逆拧(reverse twist) 见"拧".

扭进(twist in) 即"顺拧",见"拧".

扭退(twist retreat) 即"逆拧",见"拧".

冲(thoroughfare) 亦称挤.珠算术语.指在算盘运算中,用食、拇两指同时将上下算珠挤离梁.如:

17 － 6 用直冲(挤),亦称双分.

28 － 15 用斜冲(挤),亦称斜分.

挤(squeeze) 即"冲".

合(join) 亦称双合.珠算术语.指用中指(小算盘用食指)、拇指同时夹拢上下珠靠梁.例如＋6,＋7,＋8等.

双合(lower-up and upper-down) 即"合".

托(entrust) 珠算术语.指在珠算运算中,用拇指托下珠靠梁.例如＋1,＋2,＋3等.

进(advance) 珠算术语.用拇指托前位一颗下珠靠梁的动作称为进.

还(return) 归除法退商使用的专有名词.例如四归,无除借一下还四,实际是商大不够减时,从商中减一,余中加四.规律是无除起一下还法."无除"是说不够除时,"起一"指初商中减一,"下还"指下位(即余数)加上一个除数.

借(borrow) 珠算减法运算中的专有名词.指在运算时,本档不够减,从上位退一作十.

改作(change) 亦称添作.珠算归除口诀中的专有名词.即指将本档原数改为新数.如归除口诀中的"四二改作五",意即20÷4＝5,拨珠动作是把原数2(被除一位数)改成商数5(一位数)."改作"原为"添作",共有四句:"二一添作五"、"四二添作五"、"六三添作五"、"八四添作五".为了易学好懂,后来人们改"添作"为"改作".总的求商规律,可只用一句,即"见半五作商",或"法半商作五".

添作(put in) 即"改作".

认数(recognition number) 珠算术语.在运算之前要看准写在账簿或表单上的数字,然后依此人盘计算,称为认数.认数是个关键,要准确.例如123不能看成133,字码书写要清楚;要清晰的认出6与8,6与0等的区别;还有小数点的位次,都要看清写对.

拨珠记数法(method of driving beads with record the number) 珠算术语.拨动算珠靠梁表示数的方法,称为拨珠记数法.在记数时,一般从左而右(即从高位向低位)逐档按记数要求拨珠靠梁.作为记数制度来说,拨珠记数属于"五升十进制",即一至四各数,分别拨下珠向上靠梁表示;数满五时拨同档上的一个上珠向下靠梁表示五,这就是"五升".上下珠靠梁表示六至九各数;0不拨珠,表示空档;满十时,向前一位拨一颗下珠,即"满十进一",这就是"十进".表示数字10,即在十位上拨1,在个位上是空档,这和笔算的"十进"完全一致.

数据(data) 在运算中,所依据的数值.

盘式(tray style) 亦称珠盘式.珠算术语.指用算盘图说明运算的步骤和拨珠变化的方式.

珠盘式(tray style of beads) 即"盘式".

实盘(real tray) 珠算术语.指运算前在算盘上布置好实数和法数的盘式.

起算(reckon from) 珠算术语.指珠算起始的方式.起算有两种:从数的首位开始运算的称为高位起算;从数的末位开始运算的称为低位起算.在珠算中可分三种情况:

1. 在加减法运算中,一般是高位起算;特殊情况下,也有高位起算和低位起算并用,叫往复式、交替式、钟摆式、穿梭式.

2. 在乘法运算中,古代筹算的左乘是从高位起算;珠算有左乘、右乘之分.如空盘前乘法,从高位起算;空盘尾乘法,从低位起算.

3. 除法运算中,从古到今全是从高位起算的.

珠算技术(technique of bead calculation) 珠算术语.指珠算软件和操作的技能技巧.它包括珠算上的操作方法、计算方法、计算技巧、快与准的熟练程度等.

珠算速算法(algorithm of bead culculation) 珠算快速运算方法的统称.指在珠算计算时,应用珠算特点、运算性质或利用数字之间的特殊关系等进行较快运算的各种方法.

珠算简捷算法(simple and direct algorithm of bead calculation) 珠算各种简便算法的统称.指珠算运算时,在某种条件下,能减少拨珠量的简单便捷方法.

口诀(mnemonic rhyme) 珠算术语.在珠算中,为便于记忆法则和指导拨珠而编成的精练语句,

称为口诀.如加法口诀、减法口诀、乘法口诀、除法口诀等.

珠算加减法

珠算加法(abacus addition)　珠算的基本运算法则之一.指以算盘为工具,应用加法法则,求若干数和的运算方法.珠算加法可分为珠算基本加法和珠算简捷加法两种.基本加法又可分为传统口诀加法和近代无诀加法(凑五补十法);简捷加法,根据改变运算过程的不同情况又可分为若干种.珠算加法是学习珠算算法的基础,因此在学习珠算时,首先必须熟练地掌握加法.

珠算加法口诀(abacus rhymes of addition)　珠算加法的基本法则.指按照珠算加法拨珠的动作编成的口诀.每句口诀的第一个数字是加数,其余的字是拨珠的动作.表示拨珠动作的有"上"、"下"、"去"、"进"四个字."上"是加上的意思;"下"是把上珠拨下一个的意思(实际上就是加五);"去"是减去的意思;"进"是本档满十时在左边一档加上的意思.珠算加法口诀分四类,列表如下:

类别 加数	不进位的		进位的	
	直接加	凑五加	进十加	进十破五加
1	一上一	一下五去四	一去九进一	
2	二上二	二下五去三	二去八进一	
3	三上三	三下五去二	三去七进一	
4	四上四	四下五去一	四去六进一	
5	五上五		五去五进一	
6	六上六		六去四进一	六上一去五进一
7	七上七		七去三进一	七上二去五进一
8	八上八		八去二进一	八上三去五进一
9	九上九		九去一进一	九上四去五进一

珠算减法(abacus subtraction)　珠算的基本运算法则之一.依据珠算计算原理,以算盘为计算工具,应用运算法则,求两个数的差的运算方法.珠算减法可分为珠算基本减法和珠算简捷减法.基本减法又可分为传统口诀减法和近代无诀减法(凑五补十法);简捷减法,根据改变运算过程的不同情况又可分为若干种.

珠算减法口诀(abacus rhymes of subtraction)　珠算减法的基本法则.指按照珠算减法拨珠的动作编成的口诀.每句口诀的第一个数字是减数,其余的字是拨珠的动作.表示拨珠动作的有"上"、"去"、"退"、"还"四个字."上"是加上的意思;"去"是减去的意思;"退"是在左边一档减掉的意思;"还"是在本档加上的意思,但它必须是在左边一档退的情况下,才能在本档还.珠算减法口诀分四类,列表如下:

类别 减数	不退位的		退位的	
	直接减	破五减	退十减	退十还五减
1	一去一	一上四去五	一退一还九	
2	二去二	二上三去五	二退一还八	
3	三去三	三上二去五	三退一还七	
4	四去四	四上一去五	四退一还六	
5	五去五		五退一还五	
6	六去六		六退一还四	六退一还五去一
7	七去七		七退一还三	七退一还五去二
8	八去八		八退一还二	八退一还五去三
9	九去九		九退一还一	九退一还五去四

直接加(direct addition)　最简单的珠算加法.在算盘的某一档上,拨入被加数后,靠框珠大于或等于加数时,可以直接拨入加数,这种加法称为直接加或直加.例如 3+1,5+3,1+6 等.

直接减(direct subtraction)　最简单的珠算减法.在算盘的某一档上,拨入被减数后,靠梁珠大于或等于减数时,可以直接拨去减数,这种减法称为直接减或直减.例如 4−2,6−5,9−7 等.

凑五加(addition of the gather together to 5)　常用的珠算加法之一.在算盘的某一档上,进行两个小于 5 的数相加,其和等于或大于 5 时,下珠不够加(不用底珠),必须动用上珠.这种加法称为凑五加,或称满五加、升五加.例如 3+2=5,4+3=7 等.

破五减(subtraction the break 5)　常用的珠算减法之一.在算盘的某一档上,等于或大于 5 的数减去小于 5 的数而下珠不够减,须动用上珠.这种减法称为破五减.例如 5−4=1,7−4=3 等.

直接进位加(direct carry in adding)　亦称进十加.常用的珠算加法之一.在某一档上,两个数相加,它们的和等于或大于 10,须向前档进位,而本档用直接减得,这种加法称为直接进位加.例如 9+1=10,4+7=11,8+7=15 等.

进十加(carry 10 in adding)　即"直接进位加".

直接退位减(direct retiring place minuo)　亦称退十减.常用的珠算减法之一.在算盘的某一档上,减去一个数,本档上不够减,须由前档上退位,而本档可直接加得,这种减法称为直接退位减.例如 10−7=3,16−8=8 等.

退十减(retiring 10 minuo)　即"直接退位减".

破五进位加(break 5 carry in adding) 常用的珠算加法之一.某一档两数相加其和等于或大于 10 时,须向前档进位,而本档须用"破五减",这种加法称为破五进位加.例如 5+8=13,7+7=14 等.

退位凑五减(retiring place for the gather together 5 minuo) 亦称满五退位减.常用的珠算减法之一.在某一档上,减一个数,本档上不够减,须由前档退位,而本档还须凑五加,这种减法称为退位凑五减.例如 14-9=5,13-7=6 等.

满五退位减(retiring place for the gather together 5 minuo) 即"退位凑五减".

连进(continuity carry) 珠算术语.在加法运算中,本档加数满十时,而前位或前几位又连续为九,需要连续进位加,称为连进.例如 3275+6725=10000.

连退(continuity retiring) 珠算术语.在减法运算中,本位被减数不够减时,而前位或者前几位都是空档无数,需连续隔几位退 1 减,称为连退.例如 1000003-5=999998."首位减 1,前位凑'众 9',末位加上减数的补数."

先十法(before 10 method) 一种通用的珠算加减方法.为明代珠算家吴敬所首创.它可以减少拨珠次数,从而提高计算速度.珠算加法中,预见下位相加须进位时,就在本位相加中,先多加 1,然后在下位减去加数的补数.例如 408+24,预见到个位数 8+4 须进 1,就在十位加 2 时,多加 1(即加 3),再在个位减去 4 的补数 6,得 432.珠算减法中,预见下位不够减须向本位借 1,就在本位相减时,先多减 1.例如 432-24,在十位减时,预见个位不够须向十位借 1,则十位减 3(2+1),个位加上 4 的补数 6,得 408.上述计算方法称为先十法.

后十法(behind 10 method) 一种通用的珠算加减方法.珠算加减时,若遇进位、借位,则在运算时,本档中只管本档应加减的数,下位相加减有进位、借位时,再向本档进位或借位,这样的一种计算方法称为后十法.笔算就是采用后十法.

倒减法(upside down addition) 适用于珠算的一种快速减法.在减法运算中,遇到小数减去大数时,为了减少运算手续,可不改变被减数和减数的位置,先在被减数上加减数的齐数(可用下悬珠表示),再与减数相减,把相减结果照减数的齐数补足;这个补足数的负值,就是所求之差.这种方法称为倒减法.例如,计算 36-988=?时,因减数 988 的齐数是 1000,运算时把齐数加在被减数上,得 1036(其中"1"可用"悬珠"表示,参见"悬珠".),再减去 988,得 48,将 48 补成减数的齐数 1000,其补足数为 952,即得结果为-952.

穿梭加减法(addition or subtraction of shuttle) 珠算加减速算法之一.在做多笔数的连加法或加减混合运算时,在算盘上为了防止手指空返和起档数位参差,不便定位而影响速度时,第一笔数可从左向右打,第二笔数可再从右向左打,第三笔又从左向右打……如此来回往返计算,称为穿梭加减法,亦称往复式加减法、来回打、钟摆法.

虚借(empty borrow) 珠算术语.指在减法运算过程中,遇到不够减时所采用的一种方法.在前档先借 1,完成减算,但减后视框珠数为负值.

分节拨珠法(method of driving bead by divide up node) 珠算术语.指计算多位数珠算加减的一种方法.它是按三位一节拨珠.初练时,为了使拨珠连续不断,在每节数的末一位要摸档拨珠入盘.例如 234147362,先看第一节"234",同时拨入,在拨到 4 时,要摸珠入盘,眼看第二节"147",同时迅速连续拨入,在拨到 7 时,立刻转眼看第三节"362"再连续拨入.

筹算加减法(addition and subtraction of calculate with chips) 一种古算法.指古代用算筹进行加减运算的一种方法.具体算法就是按数位各自加减,涉十的向上位进借,与珠算方法相同,在古代筹算书中一般没有记载.但从乘、除的运算中可推知是如下进行的:

例如:35+35=?

先置数 ≡|||||,

加30得 ⊥||||| ,再加5得 ⊥̲;

即 35+35=70.

例如:73-32=?

先置数 ⊥̲|||,

减30得 ≣||| ,再减2得 ≣|;

即 73-32=41.

表册算(statisticalforms calculate) 珠算加减运算中的主要项目之一.凡是发票、单据、账页、报表、统计表、出入库票、决算表等表册,计算时自上而下逐笔计算,均称表册算.

一目双行加法(take in double lines ata alance-read rapidly be in progerss addition) 珠算加法快速算法之一.指两行一次心算求出和后再上盘的快速加法.其要点是:心算本位,眼看后位;后位满十,本位和加一;后不进位,本位和照常;后位和为九,继续看后位.

一目三行加法(take in three lines at a glance-read rapidly be in progerss addition) 珠算加法快速算法之一.指将三行一次心算求出和数后再上盘的快速加法.其要点是:前位进 1,中位弃 9,末位弃 10;弃后加余,不够弃时,差几减几.要注意的是:

1.“前位进 1”的“前”，是指从左向右看，第一次遇到三个数字之和满 9 的前一位.

2.以后当某位上三个数字之和不够弃 9 时，差几要减去几.

空档减数法(method of the neutral gear minus number) 珠算减法快速算法之一.当被减数有两位或两位以上空档时，在空档上减数，就要提前逐档借一来减.为了减少拨珠次数，可在紧挨空档的前一档减 1 后，直接加上减数的补数.例如 24001－63＝23938，可在空档的前一位即千位 4 上减 1 后，直接加上 63 关于 1000 的补数 937 即可.

递位迭加(addition of progressively increase) 一种珠算多位数乘法运算的加积方法.在珠算多位数前乘法运算中，每乘一次，部分积向右移一档相加，这个过程称为递位迭加.

上法(method the best plan) 即珠算加法.古珠算书中称加法为上法.

退法(method of abdicate) 即珠算减法.古珠算书中称减法为退法.

单档练习(unilateral practise) 珠算拨珠练习方法之一.在算盘的一个档上进行拨珠或计算练习，称为单档练习.单档练习通常是放在算盘的右起第一档上.单档练习一般是和唱拨结合起来进行.在讲新法后练习，可使学生熟悉拨珠顺序和动作.

全盘练习(whole practise) 珠算拨珠练习方法之一.在算盘的各档(或隔档)进行拨珠和计算练习称为全盘练习.全盘练习一般从左边第二档起拨珠，亦称全盘练.例如，各档皆拨入 1(2，3，4，5，6，7，8，9)，又拨去 1(2，3，4，5，6，7，8，9).

三盘清(third calculate complete) 亦称三盘成、三回头.珠算加法基本功训练方法之一.其具体作法是在算盘上先拨入 123456789，然后自左至右按各档的数字各增加一倍(也就是见几加几)，连续三次，末位再加 9，这样加得的结果和原来排列的数目刚好相反，即变成 987654321.

三盘成(third calculate complete) 即“三盘清”.

三回头(three turn one's head) 即“三盘清”.

七盘清(seven calculate complete) 亦称七盘成.珠算加、减法基本功训练方法之一.其具体作法是在算盘上先拨入 123456789，然后按 123456789 的顺序，累加七次，再加 9，即得 987654321；由此数开始仍按 123456789 的顺序，递减七次，再减 9，便还原为 123456789.反复练习可熟练珠算技巧.

七盘成(seven calculate complete) 即“七盘清”.

九盘清(nine calculate complete) 亦称九盘成.珠算加、减法基本功训练方法之一.其具体作法是在算盘上先拨入 123456789，然后按 123456789 的顺序连加九次，结果是 1234567890；接着再按 123456789 的顺序连续减去九次，最后得 123456789.

九盘成(nine calculate complete) 即“九盘清”.

打百子(driving hundred beads) 练习珠算拨珠指法和加法口诀的一种方法.即从 1 加起，依次加到 100，结果为 5050.再从 5050 依次减 1，2，…到 100 得 0.

练指625(fingering practise 625) 亦称广积万斤粮.常用的珠算指法练习题之一.指在算盘上先布数 625，然后连续加上 15 个 625，得数正好是 10000.此法可训练初学珠算者熟练用拇、食、中三指拨珠.

广积万斤粮(ten ton of storing grain everywhere) 即“练指 625”.

练指185(fingering practise 185) 常用的珠算指法练习题之一.指在算盘上布数 185，然后连续加上 185，在加的过程中出现有效数字为 555，111，222，333，……这样以便检查有无错误.该法首见于清潘逢禧《算学发蒙》(1882).

节日图(festival diagram) 珠算指法趣味练习题之一.在算盘上先拨入 32260738125，然后见几加几，连续四次，即得到 516171810000.因“51”是国际劳动节，“61”是国际儿童节，“71”是中国共产党诞生日，“81”是中国人民解放军建军节，所以趣称“节日图”.

百子图(hundred beads diagram) 珠算加、减法基本功训练方法之一.把 1 至 100 个数字，填在 100 个方格里，它的每一横行、每一竖行和两个斜行上的十个数的和都是 505，十行的总和是 5050，该图表称为百子图.百子图如下：

百 子 图

1	20	21	40	41	60	61	80	81	100
99	82	79	62	59	42	39	22	19	2
3	18	23	38	43	58	63	78	83	98
97	84	77	64	57	44	37	24	17	4
5	16	25	36	45	56	65	76	65	96
95	86	75	66	55	46	35	26	15	6
14	7	34	27	54	47	74	67	94	87
88	93	68	73	48	53	28	33	8	13
12	9	32	29	52	49	72	69	92	89
91	90	71	70	51	50	31	30	11	10

此纵横图首见于杨辉《续古摘奇算法》，明程大

位的《算法统宗》亦载此图. 缺点是两对角线上的数字之和并不等于 505. 清张潮《心斋杂俎》及朝鲜数学家洪正夏的《九一集》(18 世纪初)中均有改正. 得下面两个新的百子图.

张潮更定百子图

60	5	96	70	82	19	30	97	4	42
66	43	1	74	11	90	54	89	69	8
46	18	56	29	87	68	21	34	62	84
32	75	100	74	63	14	53	27	77	17
22	61	38	39	52	51	57	15	91	79
31	95	13	64	50	49	67	86	10	40
83	35	44	45	2	36	71	24	72	93
16	99	59	23	33	85	9	28	55	98
73	26	6	94	88	12	65	80	58	3
76	48	92	20	37	81	78	25	7	41

洪正夏百子图

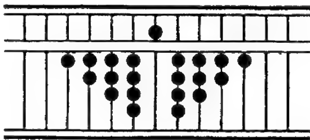
99	82	79	62	59	42	39	22	19	2
1	20	21	40	41	60	61	80	81	100
3	18	23	38	43	58	63	78	83	98
97	84	77	64	57	44	37	24	17	4
5	16	25	36	45	56	65	76	85	96
95	86	75	66	54	47	35	26	15	6
14	7	34	27	55	46	74	67	94	87
88	93	68	73	48	53	28	33	8	13
91	90	71	70	51	50	31	30	11	10
12	9	32	29	52	49	72	69	92	89

因此图可作加、减法练习. 加法练习的方法是:任取图中一行(横或竖)数字相加,结果为 505;减法练习的方法是:从 505 减去某一行(横或竖)数字,结果为 0.

二郎担山(second manly man of the godo can carried)　传统珠算加法练习题之一. 在算盘上先布珠 19945625, 然后见几加几, 连续四次, 得 319130000,这个数字在算盘上的盘式似一个人在挑担(担山的山与 3 谐音),故称二郎担山.

九民兵列队(nine militia line up)　珠算加法趣味练习题之一. 在算盘上先布数 987654312,然后连续加上 9 个 987654312,最后再加上 123456789,得 9999999909. 此数的盘式好像九个民兵列队,右边为首的一个是班长,故称九民兵列队.

凤凰双展翅(phoenix both spread the wings)　珠算加法趣味练习题之一. 在算盘上先布数 77158950625,然后见几加几,连续四次,得数是 1234543210000,此数表示的算珠图如凤凰展翅飞翔(如图),故称凤凰双展翅.



八仙庆寿(eight immortals congratulate birthday)　珠算加法趣味练习题之一. 将 124989999875 布盘,见几加几,连加三遍,盘上得数是 999919999,以 9 代表仙人,1 代表老寿星. 寿星是光头,故梁上无珠,他位居正中受八仙庆贺,故称八仙庆寿.

珠算乘法

珠算乘法(reckoning byythe abacus with multiplication)　珠算的基本运算法则之一. 珠算乘法的方法很多,按计算顺序分类,可分为两大类:一类是"前乘法",一类是"后乘法". 前乘与后乘,是将积置在被乘数的前面或后面运算而划分的. 从被乘数前面开始进行运算的,称前乘法;从被乘数后面开始进行运算的,称后乘法. 后乘法包含"空盘后乘"和"置数后乘","置数后乘"又分"留头乘"、"破头乘"、"掉尾乘"、"隔位乘"等. 所有后乘法都是从被乘数的末位乘起,把部分积拨在被乘数的后面. 前乘法包含"空盘前乘"与"置数前乘"等. 所有前乘法都是从被乘数的首位乘起的. 上述各种乘法,统称珠算乘法.

前乘法(front multiplication)　见"珠算乘法".

后乘法(behind multiplication)　见"珠算乘法".

空盘前乘法(empty plate front multiplication)　珠算快速前乘法之一. 在运算时,乘数和被乘数都不拨在算盘上(不熟悉的也可只拨上被乘数),只是用眼看着计算资料中所要计算的被乘数各位,默记乘数正在乘的那一位,并把乘积依次直接拨在算盘上,所以有"空盘"之称. 乘的顺序是:从乘数的头位数字开始,依次去乘被乘数的头位、第二位、第三位……第末位,然后再按同样顺序用乘数的第二位、第三位……乘被乘数的各位,直至乘数的末位乘完为止. 算盘上的数字就是所求的积数. 乘积的记法,依次按照被乘数的位数错位相加,即用乘数第一位乘时,则乘积从算盘左边第一档拨起,用乘数第二位乘时,则乘积从算盘左边第二档拨起,余此类推.

空盘后乘法(empty plate behind multiplication)　珠算后乘法之一. 指被乘数和乘数皆不入盘(故名"空盘"),依笔算乘法的顺序直接拨积入盘进行计算.

“大九九”表

因数＼积＼因数	零	一	二	三	四	五	六	七	八	九
一	0一00	一一01	二一02	三一03	四一04	五一05	六一06	七一07	八一08	九一09
二	0二00	一二02	二二04	三二06	四二08	五二10	六二12	七二14	八二16	九二18
三	0三00	一三03	二三06	三三09	四三12	五三15	六三18	七三21	八三24	九三27
四	0四00	一四04	二四08	三四12	四四16	五四20	六四24	七四28	八四32	九四36
五	0五00	一五05	二五10	三五15	四五20	五五25	六五30	七五35	八五40	九五45
六	0六00	一六06	二六12	三六18	四六24	五六30	六六36	七六42	八六48	九六54
七	0七00	一七07	二七14	三七21	四七28	五七35	六七42	七七49	八七56	九七63
八	0八00	一八08	二八16	三八24	四八32	五八40	六八48	七八56	八八64	九八72
九	0九00	一九09	二九18	三九27	四九36	五九45	六九54	七九63	八九72	九九81

逆九九三十六句

顺九九四十五句

九九(multiplication table)　亦称九九表. 一种常用的乘法口诀. 古代乘法口诀是从“九九八十一”开始念起，到“一一如一”为止. 开头两字是“九九”，故称乘法口诀为“九九”(见“大九九”表).

置数前乘法(setaside number front multiplication)　珠算前乘法之一. 把被乘数拨在算盘右边，乘数拨在算盘最左边. 先以被乘数的头位和乘数的第一位、第二位……相乘，再以被乘数的第二位、第三位……依次和乘数的各位相乘. 乘积的记法，乘数是几位数，乘积就从所乘的被乘数上的那个数的左面第几档拨起. 这种乘法称为置数前乘法.

例如：38×213＝8094.

(乘数)　| 213 | | | 0 0 0 3 8 |　(被乘数)

第一步：3×2……　0 6

3×1………　0 3

3×3…………　0 9　(去掉被乘数 3)

| 213 | | | 0 6 3 9 8 |

第二步：8×2………　1 6

8×1…………　0 8

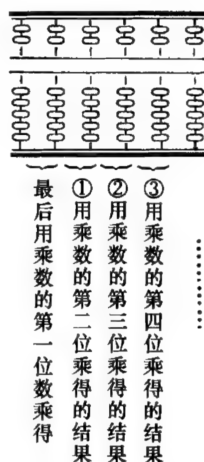
8×3……………　2 4　(去掉被乘数 8)

| 213 | | | 8 0 9 4 |　(积)

滚乘法(rolling multiplication)　常用的珠算乘法之一. 指边乘边累加的一种简捷方法. 在财贸工作中，经常遇到要把几笔乘积累加成总额，如发票、发货单、领料单等. 一般计算方法是：先将各个积数一个一个抄录下来，然后再相加，求得总和，这样比较费时. 可不需要记载各个积数而求出总数，这就可用滚乘：先定位，计算好一个积后，再把另两个因数的积边乘边累加上去，这样继续边乘边累加，直至求出最后的结果.

留头乘(division haveing same first - place in the divisdend and divisor)　亦称穿心乘. 常用的珠算乘法之一. 指珠算中乘数在两位以上时的一种乘法. 珠算乘法中，将乘数首(头)位数留至最后与被乘数相乘即为留头乘. 这种乘法运算方便，不易发生差错. 例如 8×234，首先将 8 与 30 相乘(8 ×30)，其次将 8 与 4 相乘(8 ×4)，最后将 8 与 200 相乘(8 ×200). 乘数是三位以上的数，乘的顺序和每一次乘得的结果拨在什么位置，可用下图表示：

被乘数中所要乘的某一位

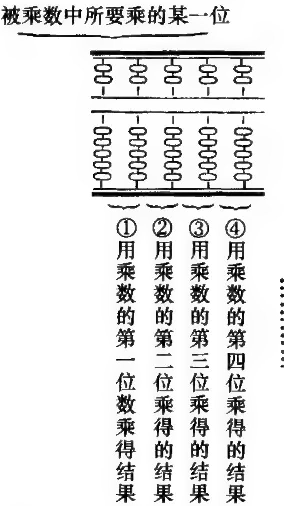


此法最初见于元代朱世杰著的《算学启蒙》.

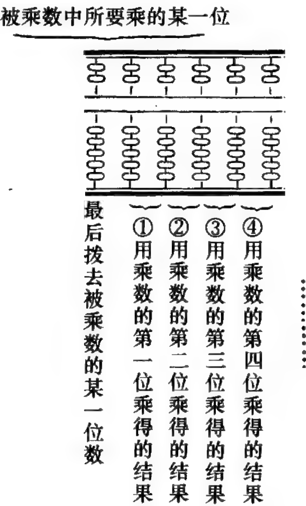
穿心乘(crossing centre multiplication)　即“留头乘”.

破头乘(the way of head - multiplication)　常用的珠算乘法之一. 指先用乘数的第一位数乘，再用第二、第三……位数依次相乘. 例如 6×435，先以 6×400，然后 6×30，最后 6×5. 此法具有乘的顺序，好记、拨珠也比较顺手的特点. 但是一开始就把所乘的那一位被乘数拨掉，容易忘记，对于初学者不易掌握. 乘数是三位以上的数，乘的顺序和每一次乘得的

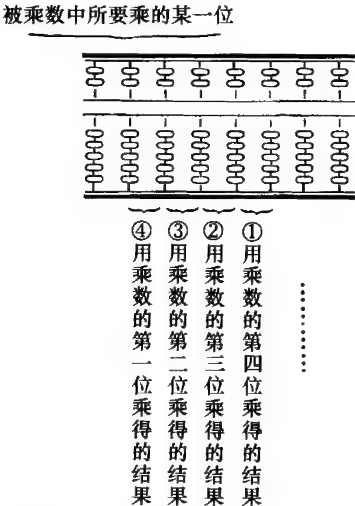
结果拨在什么位置，可用下图表示：



隔位乘(the way of new head - multiplication (setting out before)) 常用的珠算乘法之一．指先用乘数的第一位数乘，不过在开始时不把被乘数拨去，把乘得的积满十的拨在被乘数该位后边的第一位，不满十的拨在被乘数该位后边第二位(隔开一位)．用乘数的各位都乘完以后，再把被乘数该位拨去．这种方法的优点是：乘的顺序好记，拨珠也顺手，又不致忘掉被乘数该位上的数字．但是拨珠的次数多，会影响到计算速度的提高．乘数是三位以上的数，乘的顺序和每一位乘得的结果拨在什么位置，可用下图表示：



掉尾乘(the way of end - multiplication) 常用的珠算乘法之一．这种乘法是先用乘数的个位数乘，再用十位数乘、百位数乘……例如 6×435，先以 6×5，然后 6×30，最后以 6×400．这种方法与笔算乘法的顺序相似，初学者易掌握．但一开始要在被乘数末位后边隔开几位去拨乘得的积，容易拨错位；拨珠的顺序是从右到左，拨起来不顺手，速度不快．乘数是三位以上的数，乘的顺序和每一次乘得的结果拨在什么位置，可用下图表示：



迭皮乘(repeatedly multiplication) 中国古代的一种珠算乘法．是以加代乘的计算方式，即把被乘数一个一个相加，所加的个数等于乘数．明代徐心鲁订正《盘珠算法》中"二字奇法"即属此类．柯尚迁的《数学通轨》和程大位的《算法统宗》称为金蝉脱壳，用一倍、二倍法运算，是二字奇法的发展．

减一前乘法(minus one front multiplication) 珠算前乘法之一．指乘时把法数(乘数)尾减去一，列在算盘左边，向右空几位列出实数(被乘数)，先从实首乘起．实首先乘靠法尾的一位(即法尾前一位)，最后才乘法尾．实首乘完后，再乘实数的次位、三位等．现在一般是从法首乘起，依次乘到法尾，这样拨珠较顺手．该法首见于明代王文素《算学宝鉴》中，称为身前乘．

例如： 125×69

6	8				1	2	5
6×1………				6	⋮	⋮	⋮
8×1…………					8	⋮	⋮
6	8			6	9	2	5
6×2………				1	2	⋮	⋮
8×2…………					1	6	⋮
6	8			8	2	8	5
6×5…………					3	0	⋮
8×5……………						4	0
6	8			8	6	2	5

补数乘法(complement multiplication) 亦称撞十数乘法．珠算乘法快速算法之一．指采用减法计算的乘法，古称"损乘"、"减乘法"．古书中最早见于唐代《夏侯阳算经》．南宋杨辉算书和明代王文素《新集通证古今算学宝鉴》有所发展．近代又有改进，为了计算简便，将乘法中一个因数各位上的超五数转化为小五数进行乘减，从而求积．例如

$$6\,358\times 896=6\,358\times 1\bar{1}0\bar{4}.$$

撞十数乘法(bump against ten numbers multiplication)　即"补数乘法".

定身乘法(fixbody multiplication)　亦称省一乘法.珠算乘法快速算法之一.当乘数首位是1时,只用乘数首位以后的数与被乘数相乘,把所得的积加在原来被乘数上,这样就简化了被乘数本身一次不必要的乘法,故称"定身乘法".

省一乘法(the way of excluded one multiplication)　即"定身乘法".

齐头尾补乘法(simultaneity complementary multiplication)　珠算乘法快速算法之一.两位数的乘法,当其乘数和被乘数的最高位数相同,并且末尾的两个数互为补数(如27与23)时,先把被乘数和乘数的这个相同最高位数加1,然后再乘上被乘数和乘数这个相同的最高位数,所得乘积乘以100,再加上被乘数和乘数两个尾数相乘之积,即得所求的结果.例如 34×36,乘积的首两位为 3×(3+1)=12,后两位为 4×6=24,故乘积为 1224.

倍数表乘法(multiplication use multiple table)　亦称列表乘法.珠算乘法快速算法之一.先做出被乘数1～9倍的乘积表,再按照乘数中的数字从乘积表中找出相应乘积,把它们在相应的档上加起来即可.这种乘法适合于常用乘积的计算,如粮店计算售粮钱数.

列表乘法(tabulation multiplication)　即"倍数表乘法".

随数乘法(follow number multiplication)　亦称跟踪乘法.珠算乘法快速算法之一.当被乘数的几个数字是相同的、相邻的、或相互之间是倍数关系时,可先计算出被乘数末位数与乘数的乘积之后,其余乘数随着这个乘积走,错位相加,从而简化了运算.

例1:　44×82=3608.

```
              千百十个
4×82…………      3 2 8
随数走乘……+  3 2 8
            ─────────
              3 6 0 8
```

被乘数里几个数字相邻时,先按最后一位数字计算出乘积,接着用上述相同数字错位相加,然后根据被乘数之间相差数加1(或减1)乘数便可.

例2:　54×82=4428.

```
                 千百十个
4×82……………        3 2 8
先随数走乘……     3 2 8
后补 82×10…+       8 2
               ─────────
                 4 4 2 8
```

被乘数的几位数字之间有倍数关系时,可先计算一个数字或一段数字,然后按倍数加以退加计算.

例3:　42×36=1512.

```
              千百十个
2×36……………       7 2
72×10…………     7 2 ┐
72×10……+     7 2   ┘ 或 144(心算 72 的 2 倍)
            ─────────
              1 5 1 2
```

退加乘法(retiring add multiplication)　珠算乘法快速算法之一.指采用被乘数去掉一个算珠,同时右下一位加上一个乘数的方法,直到被乘数退完为止.

例如:　211×54=11394.

```
    退1加…………  5 4
   退1加…………5 4
 退1加………… 5 4
 退1加………+ 5 4
          ──────────
          1 1 3 9 4
```

这种乘法,实际上就是迭皮乘,亦即金蝉脱壳.

损乘(lose multiplication)　珠算乘法快速算法之一.即现在的补数乘法.首见于《夏侯阳算经》.杨辉在《乘除通变算宝》中做了详细介绍,称补数为"亏数".清方中通《数度衍》内的"以减代乘法",即为此法.

折半(reduce by half)　珠算术语.指求一数的半数的方法,如468的半数为234.由于1/2(折半)=0.5,所以一般用5乘(0.5,5或50)的算题,也通用"折半".心算多位数5倍的方法是从高位算起:"双数折半;单数退1折半,所退之1并入下位折半."

凑整乘法(make up a round number multiplication)　珠算乘法快速算法之一.指遇有被乘数或乘数接近整数时,先按整数计算,然后再加上或减去其差数.

例1:　401×786=315186.

```
786×400………   3 1 4 4 0 0
786×1…………  +       7 8 6
           ──────────────
               3 1 5 1 8 6
```

例2:　456×499=227544.

```
456×500………   2 2 8 0 0 0
456×1…………  -       4 5 6
           ──────────────
               2 2 7 5 4 4
```

双补加减乘法(double repair add and subtract muliplication)　现代珠算乘法快速算法之一.指利用被乘数及乘数的补数进行乘法运算的方法.其方法为:

1.在盘上左一档起拨上被乘数.

2. 加上被乘数及乘数的补数乘积. 定档法为：两个补数相乘，其积的个位数在盘上的档次等于这两个数所在档次之和.

3. 减去乘数的补数. 乘数的补数在第几档，便从盘上第几档减去. 例如，计算 998×97＝？其步骤为：第一，从盘上左一档起拨上 998；第二，用被乘数 998 的补数 2 乘以乘数 97 的补数 3 得 6，因 2 在左三档，3 在左二档，故在盘上左五档上加 6；第三，从盘上左二档减去乘数的补数 3，即得积为 96806.

1	2	3	4	5	6
9	9	8			
				+6	
	−3				
9	6	8	0	6	

意即： 998×97
＝998×(100−3)
＝99800−998×3
＝99800−(1000−2)×3
＝99800−3000+6
＝96806.

因法(facton method)　乘法古称. 中国古算中称一位法数的乘法为因，称多位法数的乘法为乘，现在统称乘法.

首位挨乘法(set by first place multiplication)　珠算乘法快速算法之一. 从首位起开始运算的一种珠算乘法. 它与普通乘法不同，是从首位起，依次找出逐位相乘中的“同位数”，然后把每一位的“同位数”相加，从首位起依次写出乘积的各位数字，即“位位清”. 清初李长茂的《算海说详》(1659 年)中首载此法.

例如： 653×487＝318011.

计算次序如下：

1	2	3	4	5	6		653×487
2	4						600×400
	4	8				……………………	600×80
	2	0				……………………	50×400
3	0	8					
		4	2			………………	600×7
		4	0			………………	50×80
		1	2			………………	3×400
3	1	7	4				
			3	5		……………	50×7
			2	4		……………	3×80
3	1	7	9	9			
				2	1	…………	3×7
3	1	8	0	1	1		

凑倍乘法(multiplication of the make up multiple)　亦称乘除易会算诀. 一种快速乘法. 指不用九九口诀而将被乘数按 1,2,5 倍数直接加或减求积的一种乘法，是中国古代民间的简易乘法. 古书中最早见于明代吴敬著的《九章算法比类大全》(1450 年). 近代经改进，在熟练掌握 2,5 倍心算的基础上，将 3,4,6,7,8,9 转化为 1,2,5 倍计算，如下表：

乘　数	积
3	被乘数的(1+2)倍
4	被乘数的(2+2)倍
6	被乘数的(5+1)倍
7	被乘数的(5+2)倍
8	被乘数的(10−2)倍
9	被乘数的(10−1)倍

例如： 8327×379＝3155933.

1	2	3	4	5	6	7		
1	6	6	5	4			……………	8327×2
	8	3	2	7			……………	8327×1
2	4	9	8	1				
	4	1	6	3	5		…………	8327×5
	1	6	6	5	4		…………	8327×2
3	0	8	0	9	9			
		8	3	2	7	0	…………	8327×10
		−8	3	2	7		…………	−8327×1
3	1	5	5	9	3	3		

得数妙(same ao wonderful)　亦称九位同数. 珠算乘法趣味练习题之一. 指用被乘数 9，18，27，36，45，54，63，72，81 九个数字，分别与乘数 123456789 相乘，所得的积十分奇妙，可引起初学珠算乘法者的兴趣. 练习时，被乘数(为 9 的倍数)拨在算盘左边，乘数不布，计算时，依次默念乘数，随即将乘得的积，递位迭加，最后结果都是十位数，其中各有九个相同的数. 如下表：

积＼乘数 被乘数	123456789
9(9 的 1 倍)	1111111101
18(9 的 2 倍)	2222222202
27(9 的 3 倍)	3333333303
36(9 的 4 倍)	4444444404
45(9 的 5 倍)	5555555505
54(9 的 6 倍)	6666666606
63(9 的 7 倍)	7777777707
72(9 的 8 倍)	8888888808
81(9 的 9 倍)	9999999909

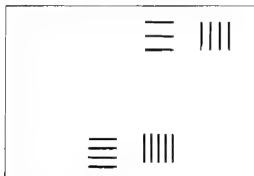
九位同数(nine place of the same number)　即

"得数妙".

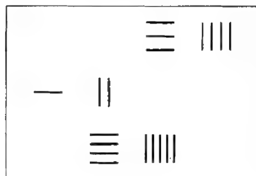
筹算乘法(multiplication of calculate with chi-ps)　一种古代乘法运算. 把实数放在上层，法数放在下层，中间留空记积数. 具体运算过程：从首位起算，逐步将乘得的数依次加入中层.

例如：　34×45=1530.

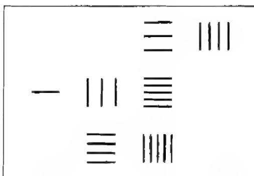
① 34×45



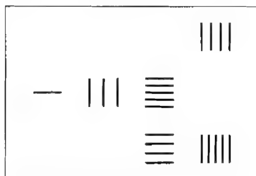
② 30×40



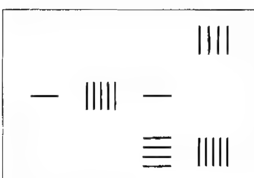
③ +30×5



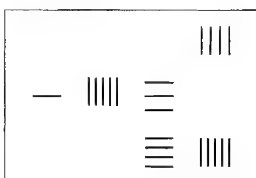
④ 去30，45退一位



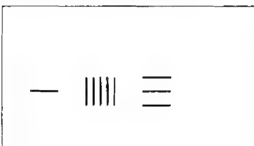
⑤ +4×40



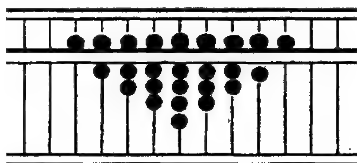
⑥ +4×5



⑦ 去上下行



凤凰展翅(phoenix spread the wing)　亦称孔雀开屏. 珠算乘法趣味练习题之一. 在算盘上计算乘法 35×16225679=567898765 时，乘积在算盘上的盘式如凤凰展翅，故得此名. 如图所示：

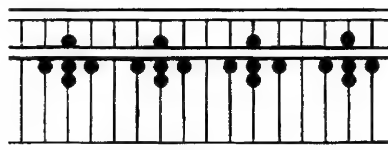


孔雀开屏(spread its tail of a peacock)　即"凤凰展翅".

鲜花盛开(fresh flower be in full bloom)　珠算乘法趣味练习题之一. 在算盘上计算乘法

19 × 9000900090009 = 171017101710171.

"171"在算盘的盘式上形如开放的四片花瓣，故称"鲜花盛开". 如图所示：



永相聚(permanence get together)　一组乘法趣味练习题. 其数字计算结果如下：

2 × 123456789 = 246913578
(3 × 123456789 = 370370367)
4 × 123456789 = 493827156
5 × 123456789 = 617283945
(6 × 123456789 = 740740734)
7 × 123456789 = 864197523
8 × 123456789 = 987654312
(9 × 123456789 = 1111111101)

因为以上括号外的五题计算结果的特点是：虽然得数不相同，但每个得数都由 1,2,3,4,5,6,7,8,9 组成；而括号内的三题计算结果的特点是：带有规律的周期性相聚(末位分别加 3,6,9,会出现 370,740,110).

珠算除法

珠算除法(abacus division)　珠算的基本运算法则之一. 指以算盘为工具进行除法计算的方法. 珠算除法可分为基本除法和简捷除法两大类. 基本除法分为归除法和商除法两种. 简捷除法根据运算过程不同又分为若干种.

归(return)　亦称单归. 珠算除法古称. 中国古代把珠算中除数是一位数的除法称为"归"，除数是几的除法就称为"几归". 如除数是 5 的除法，称为五归.

单归(single return)　即"归".

归除(return-division)　珠算除法古称. 中国古代把珠算中除数为两位或两位以上的除法称为"归除". 这里的"除"是减的意思，即从被除数中减去商数与除数相乘的积. 如除数是 25 或 357，分别称为"二归五除"、"三归五七除". 归除法是以除数首位数除被除数首位数，通过"九归"口诀，试求商数，然后将商数与除数首位以后各数的乘积，从被除数中减去，这样逐位进行，直到被除数除完，得出确切商数. 有时试商偏大或偏小，另编有"退商"和"补商"口诀，加以校正. 还有法首等于实首，而法次位数大于实次位数时就另用"撞归". 明代吴敬、柯尚迁等的九归歌，与现今通用的归除相似. 运用归除，可直接求得商数.

九归(two-place division of phyming formula)

亦称小九归.珠算除法口诀的古称.中国古代把一位数除法称为"归".珠算中除数首位从 1 到 9 的除法,有"九归歌",故称"九归".如"四一二余二"(或"四一二十二")这句口诀,第一个数字"四"表示除数,第二个数字"一"表示被除数,第三个数字"二"表示商数,第四个数字"二"表示余数,意即 4 除 10 得商 2 余 2.又如"九一下加一",其中第二个数字"一",既是被除数又是商数,而"下加一"的"一"是余数,意即 9 除 10 得商 1 余 1.再如"逢六进一"的六是被除数,除数六省略,"一"是商数,意即 6 除 6 商 1.

九归口诀表

除数	被除数大于或等于除数	被除数小于除数	
		能除尽	不能除尽
用 1 除(一归)	逢一进一 逢二进二 逢三进三 逢四进四 逢五进五 逢六进六 逢七进七 逢八进八 逢九进九		
用 2 除(二归)	逢二进一 逢四进二 逢六进三 逢八进四	二一添作五	
用 3 除(三归)	逢三进一 逢六进二 逢九进三		三一三余一 三二六余二
用 4 除(四归)	逢四进一 逢八进二	四二添作五	四一二余二 四三七余二
用 5 除(五归)	逢五进一	五一倍作二 五二倍作四 五三倍作六 五四倍作八	
用 6 除(六归)	逢六进一 逢双六进二	六三添作五	六一下加四 六二三余二 六四六余四 六五八余二
用 7 除(七归)	逢七进一 逢双七进二		七一下加三 七二下加六 七三四余二 七四五余五 七五七余一 七六八余四
用 8 除(八归)	逢八进一	八四添作五	八一下加二 八二下加四 八三下加六 八五六余二 八六七余四 八七八余六
用 9 除(九归)	逢九进一		九一下加一 九二下加二 九三下加三 九四下加四 九五下加五 九六下加六 九七下加七 九八下加八

小九归(litter nine return) 即"九归".

退商口诀(retiring quotient mnemonic rhymes) 珠算术语.指珠算中处理商数过大时的一种方法.按归除口诀求出试商后,被除数余数内不够减去商与除数第二位以下各数的乘积,则将商减少 1,并按除数首位的数字加在下一档.在口诀中"无除"是"不够减"的意思,"下还几"就是除数为几就下加几.口诀中的"去 1",也可念"退一".

退商口诀

无除去一下还一　无除去一下还二
无除去一下还三　无除去一下还四
无除去一下还五　无除去一下还六
无除去一下还七　无除去一下还八
无除去一下还九

商除法(the way of division by a multiplication table) 珠算隔位除法的一种.类似笔算的计算方法.它比"归除"简便,也不用归除口诀.商除法中商数的位置是"够除隔位商,不够除挨位商".求出商以后与除数首位相乘的积一律挨商拨减,商与除数第二位以下各位数相乘的积递位迭减,即依次往右递移一位迭减.在未产生归除口诀以前,古人就用商除法.由于在运算时,总要经过一番"商量",才能求得商数,因此除法的得数就叫"商".明代程大位《算法统宗》中说:"商除者,商量法(除数)实(被除数)多寡(少)而得之."这种方法是古代筹算中早已有的,与现在的笔算竖式基本相同.

金蝉脱壳(escape by cunningmanoeuvring) 亦称凑倍除法、大扒皮、累减除法.中国古代民间的一种简易珠算除法.首见于明代吴敬《九章详注比类算法大全》,以后又有所发展.现在的金蝉脱壳是运

用除数的一、二、五倍和凑十法计算.若商数为1,2,5,则各直接减除数的1,2,5倍一次;若商数为3,4,6,7,则减相应倍数两次;若商数为8和9,则加减相应倍数各一次.如下表:

商数	被除数里减除数几倍
1	直接减除数一倍.
2	直接减除数二倍.
5	直接减除数五倍.
3	减除数二倍和一倍各一次.
4	连减除数二倍两次.
6	减除数五倍和一倍各一次.
7	减除数五倍和二倍各一次.
8	先加除数二倍,后减十倍.
9	先加除数一倍,后减十倍.

例如: 156165÷435=359.

```
|  |  |1 5 6 1 6 5|  |  |  |
+2  ················  立首商 2      }不进商隔位
-   0 8 7 0  ······  减除数 2 倍   }
|  |2 0 6 9 1 6 5|  |  |  |
+1  ················  补商 1        }不进商隔位
-   0 4 3 5  ······  减除数 1 倍   }
|  |3 0 2 5 6 6 5|  |  |  |
   +5  ····················  立次商 5
   -   2 1 7 5  ··········  减除数 5 倍
|  |3 5 0 3 9 1 5|  |  |  |
     +9  ··················  立三商 9
     +   0 4 3 5  ········  加除数 1 倍
     -   4 3 5 0  ········  减除数 10 倍
|  |3 5 9|  |  |  |  |  |  |  |
```

凑倍除法(division of the make up multiple) 即"金蝉脱壳".

大扒皮(big pull up skin) 即"金蝉脱壳".

累减除法(repeatedly minus division) 即"金蝉脱壳".

商归法(quotien return of the way) 亦称挨位商除法.珠算基本除法之一.因其按归除的档位立商,按商除的方法求商,故名商归法.

挨位商除法(next place the way of division by a multiplication table) 即"商归法".

小扒皮(small pull up skin) 一种简便珠算除法.指适用于被除数头位数大于除数的除法.在被除数前边隔一档,置商数1,并在被除数中减去一个除数,以此一层一层地减下去,减到不够减时,再向下移一位,直到除完为止.这种除法对于商中含3以上的数时不宜采用.

例如: 4356÷36=121.

```
   商          被除数
               4 3 5 6
 1            -3 6
   1            -3 6
   1            -3 6
+    1            -3 6
 ————————    ——————————
 1 2 1               0
```

撞归(subtracting one form quotient) 珠算归除中的一种立商方法.指被除数和除数首位数字相同,而商数与除数首位以后各数的乘积大于被除数时,须用撞归来计算.例如30÷34,除数和被除数首位都是3,它的商是1,但商数与除数首位以后各数的积,大于被除数,说明商过大.撞归即把商数一化为次位的十,从十中减去一得九,即商数应等于零点九还余三.所以口诀为"见三无除作九三"."无除"实际是不够减的意思.

撞归口诀

见一无除作九一　见二无除作九二
见三无除作九三　见四无除作九四
见五无除作九五　见六无除作九六
见七无除作九七　见八无除作九八
见九无除作九九

群商法(method of group quotient) 亦称反序除法.珠算除法快速算法之一.指先在被除数适当位上加上一个或几个除数,再从被除数首位起减去一个除数,然后立商.因在运算程序上是先加后减再立商,故称之为反序除法.例如326346÷327=998,被除数326346的前三位为326,较除数327小1,故可从326的后档起,连加两个除数,即654,得327000,为327的1000倍.由于加了两个除数,故立商为1000−2=998.因一次立了商数中的三个数字,故名群商法.

反序除法(anti-order division) 即"群商法".

定身除法(fixing self division) 亦称省一除法.珠算除法之一.当除数的首位数是1时,可将首位数省略,把被除数首位数当作假定商数乘以除数1后面的数,在被除数的第二位为个位相减,减去所乘得的积,其差可看作新的被除数;然后,用这个新的被除数的第一位数作假定商数,并用这个商数乘以除数1后边的数,在这个新的被除数下位数上减去乘积,直到除完为止.遇有除数是一百零几时,与除数是十几的计算道理相同.不同的是,将除数1零几后面的数与被除数首位数相乘,其积从被除数第三位的个位相减.例如38734÷107=362,被除数的

首位数 3 当作假定商数，乘以 1 的隔位数 7，得积 21，从假定商数 3 的隔位数减去乘积 21，被除数就余作 6634；再把首位数 6 当作假定商数，乘以 7 得 42，从假定商数 6 的隔位减去 42，被除数就又余作 214；依此方法除尽为止，得商数 362.

	(3)	8	7	3 4
(3)×7 ………		2	1	
		(6)	6	3 4
(6)×7 …………			4	2
			(2) 1	4
(2)×7 ………………			1	4
				0

省一除法(the way of excluded - one division) 即“定身除法”.

补数除法(complement division) 珠算除法快速算法之一. 它是利用除数的补数来进行除法运算. 计算法则为：估商几加几补，以出数为商. 出估相比较，相等为确商；相异调余数，出大，大几加几补，出小，小几减几补；加补进商要续加，减补退商要续减.

例 1：46172÷97＝?

解法：

1. 从盘上左二档起拨入被除数 46172，除数 97 的补数为 03，变除数为 $10\bar{3}$.

2. 对被除数首数 4 估商 4，以 4 乘补数 3 得 12，挨商档后加 12，加后，盘上出数为 4，余数为 7372，出估相等，4 为确商.

3. 对余数首数 7 估商 7，以 7 乘补数 3，得 21，紧挨 7 后加 21，加后，盘上出数为 7，出估相等，得确商 47，余数为 582.

4. 对余数首数 5 估商 6，以 6 乘补数 3 得 18，紧挨 5 后加 18，加后得出数 6，出估相等，余数为 0，刚好除尽，故本题结果为 476.

计算过程如下：

除数 97	4 6 1 7 2
补数 03	＋1 2
变除数为 $10\bar{3}$	④ 7 3 7 2
	＋2 1
	④ ⑦ 5 8 2
	＋1 8
	④ ⑦ ⑥

在计算过程中，如果估商不准确，偏大偏小照法则调整余数即可.

例 2：587996÷68＝?

解法：

1. 从盘上左二档起拨上被除数 587996，除数 68 的补数为 32，变除数为 $1\bar{3}\bar{2}$.

2. 对被除数的首数 5 估商 6，以 6 乘补数 32 得 192，从盘上第二档起加 192，加后估商档上出数 7. 出比估大，大几加几补，故应挨商 7 档后加一个补数 32，加后，出现余数档向商档进 1，“加补进商要续加”，还要挨商档后再加一个补数 32，这样，盘上商数为 8，余数为 43996.

3. 对余数首数 4 估商 7，以 7 乘补数 32 得 224，从盘上第三档起加 224，加后，估商档上出数 6，出估不一致，需要调整余数；出 6 估 7.“出小，小几减几补”，出数比估商小 1，故要挨商档后减去一个补数 32，这样，盘上商数为 86，余数为 3196.

4. 对余数首数 3 估商 4，以 4 乘补数 32 得 128，从盘上第四档起加 128，加后估商档出现 4，出估相等，盘上商数为 864，余数为 476.

5. 对余数首数 4 估商 8，以 8 乘补数 32 得 256，从盘上第五档起加 256，加后估商档上出数 7，出 7 估 8，出比估小 1，“出小，小几减几补”，故要挨商档后减去一个补数 32，盘上余数为 0，得商数为 8647.

计算过程如下：

除数 68	5 8 7 9 9 6
补数 32	＋1 9 2
变除数为 $1\bar{3}\bar{2}$	7 7 9 9 9 6
	＋3 2
	8 1 1 9 9 6
	＋3 2
	⑧ 4 3 9 9 6
	＋2 2 4
	8 6 6 3 9 6
	－3 2
	⑧ ⑥ 3 1 9 6
	＋1 2 8
	⑧ ⑥ ④ 4 7 6
	＋2 5 6
	⑧ ⑥ ④ 7 3 2
	－3 2
	⑧ ⑥ ④ ⑦

过大商除法(divison of the bigass quotient) 亦称一除得众商. 珠算商除法的一种. 在商除法中，当被除数比除数稍小，可以过大估商，利用正负数这对矛盾引进运算，使计算反而简便. 计算时可从商中借 1 照减，常出现连续 99……这表示负数，在最后一个 9 的前位退商 1，在退商 1 的隔一档后加 1 倍除数，退商 2，加 2 倍除数……直至进位 1 为止. 所

进的 1 是还所借的 1. 如有余数继续除下去.

例 1：1179528÷236＝4998.

珠算盘式：

236			1 1 7 9 5 2 8			

挨商 5

减 1 1 8 0……5×236

236		4 9 9 9 9 5 2 8	不够减，从商中借 1 照减

退 2

加 0 4 7 2……2×236

236		4 9 9 8				加后进 1，还所借 1，得商

笔算竖式说明：

```
          5002̄ ＝ 4998
236 )    1179528
        －1180
             1̄528
            ＋472
                0
```

例 2：8376278÷422＝19849.

珠算盘式：

422			8 3 7 6 2 7 8		

隔商 2

－ 8 4 4 ……………… 2×422

1 9 9 9 3 6 2 7 8			商中借 1 照减

2̄　　退商 2

＋ 8 4 4 ………… 加 2×422

1 9 8	2 0 6 7 8			余数为正，继续除

挨商 5

－ 2 1 1 0 ……… 5×422

1 9 8 4 9 9 5 7 8			商中借 1 照减

1̄　　退商 1

＋0 4 2 2　　加 1×422

1 9 8 4 9							正好进 1 还借，无余

笔算竖式说明：

```
          2 0 2̄ 5 1̄ ＝ 19849
422 )   8376278
       －844
          1̄362
         ＋844
          20678
         －2110
           1̄578
          ＋422
              0
```

从上例可知除一次可得几位商.

一除得众商(divided by numerous quotient)　即“过大商除法”.

商除中的截尾法(method of the cut out mantissa of quotient and division)　珠算除法快速算法之一. 当被除数与除数位数均很多，而商数只要求保留小数点后两位或四位，其后则四舍五入时，采用截尾除，则甚为快速. 计算法则为：

1. 以算盘的右边为限位档，每次运算到限位档则止.

2. 从算盘上的最右边的档开始，从右向左数，称为第一档、第二档等.

3. 用 k 表示算题要求商数保留的小数点后的位数，一般要求商数保留小数点后两位或四位，常有 $k=2$ 或 $k=4$.

4. 为了保证商数符合要求的精确度，另加保险档三档；因而当商数要求保留小数点后两位时，则商的小数点位在盘上第五档前；要求保留小数点后四位时，则商的小数点位在盘上第七档前.

5. 被除数首数在小数点前入盘的档数＝$m-n-1$，此处 m 为被除数的整数位数，n 为除数的整数位数.

6. 商数的位数，求到盘上第四档，第三档上的商数，用目测法四舍五入.

例题：　106193.78÷3517.09＝？（要求：商数保留两位小数，其后四舍五入.）

解法：

1. 被除数首数在小数点前入盘的档数＝6－4－1＝1，即右数第六档.

2. 从盘上右数第六档起，拨上被除数 106193，弃去 0.78，因其在限位档及其后面.

3. 挨档商 3，从被除数中减去 3 与除数 3517.09 的乘积. 注意：当减到三九 27 时，7 在限位档上，弃去不减.

4. 隔档商 1，从余数中减去 351.

5. 再商 9，减至“九五 45”，此时盘式为 3019015，商数为 3019，已求到盘上右数第四档.

6. 余数为 15，小于除数的折半，即第三档上的商数小于 5，应舍去，故本题商数为 30.19.

飞归(hand calulation)　珠算除法中的一种简便算法. 最早见于宋代《云麓漫钞》中“步田之法”(即后世“田亩飞归法”). 飞归是将归除合并作成口诀，归后不用再除(减)，以简化运算过程. 例如：一归二除的口诀是：“见一加七隔加四”. 意思是从一加七商

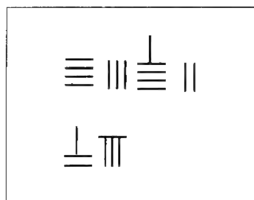
数为八，商数八下隔一位加四，因为十二除一百，商为八，以八乘十二，得九十六，与一百相减余四，所以口诀是“见一加七隔加四”. 余可类推. 用法是将被除数打在算盘上，从左起逐位呼诀运算. 除数位数不受限制，均可编成飞归口诀，熟悉口诀，答数随时得出.

增成(increase ration)　一种古代珠算除法. 北宋沈括在《梦溪笔谈》中首先记载. 他说：“算术多门，如求一、上驱、搭因、重因之类，皆不离乘除，惟增成一法稍异，其术都不用乘除，但补亏就盈而已. 例如欲九除者增一便是，八除者增二便是. 但一位一因之，若位数少，则颇简捷，位数多，则愈繁，不若乘除之有常. ”这是现今珠算中补数除法的原始方法.

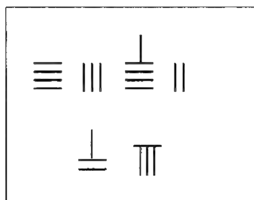
筹算除法(division of calculate with chips)　一种古代除法运算. 分上、中、下三行式演算. 置实数于中行，法数于下行，商数于上行. 先置实、法数，首位对齐，议得商的首位，如不够除，把法数向右移一位再商. 以商数首位乘法数各位，从左到右，于实数内随乘随减. 减毕后，将法数右移一位，再议商的第二位，这样继续下去，到中行实数减完后，就得所求结果，若实数减不尽，就是余数.

例如：$4392\div78=56\dfrac{24}{78}$.

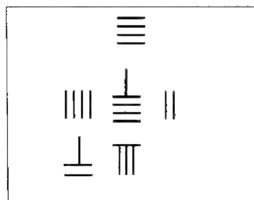
① 4392÷78



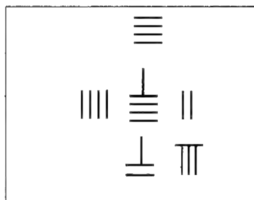
② 78右移一位



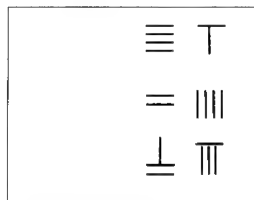
③ 商5，4392－78×50



④ 78右移一位



⑤ 商6，492－78×6



勇挑重担(strive to sustain grat responsibilities)　珠算除法趣味练习题之一. 在算盘上计算除法 31505055÷345＝91319. 此数盘珠如二人抬物，又似一人挑重担.

狮子滚绣球(lion turn over a ball made of rolled coloured silk)　传统有趣的多位数除法练习题之一. 它指的是这样九道练习题：

被除数	除　数
10 亿	512
10 亿×2	512×2
10 亿×3	512×3
10 亿×4	512×4
10 亿×5	512×5
10 亿×6	512×6
10 亿×7	512×7
10 亿×8	512×8
10 亿×9	512×9

每道题的商都是 1953125. 这个数在算盘上，从左边起，1 像绣球，9 像狮子的大头，53 像狮子的短身子，125 像翘起来的长尾巴. 人们为了帮助记忆和提高练习的兴趣，就将这组练习题称为“狮子滚绣球”.

珠算定位法

公式定位法(method of formula fixing place)　亦称统一定位法，又称头定法. 一种通用的定位方法. 它不仅适于珠算的乘除法，而且适用于笔算、心算、尺算等. 数的位数分正位、零位和负位. 一个数有几位整数，就称正几位. 如 320，321.04 称为正三位，即“＋3 位”；纯小数中十分位是非零数码的，称为零位，如 0.32，0.503 等；纯小数中小数点与第一个非零数码之间夹有几个 0 的，称为负几位，如0.032，0.0302，称为负一位，即“－1 位”，0.0032，0.005032，称为负二位，即“－2 位”.

1. 乘法定位法：若 m，n 分别为被乘数和乘数的位数，则积的位数公式为：

1) $m+n$ (当乘数与被乘数的最高位相乘需进位时).

2) $m+n-1$ (当积的最高位不进位时).

3) 当积的最高位不进位，但以后积影响积的最高位又进位时，则用公式 1). 例如：35×31，用公式 1)定位.

例如 23×43＝989. 被乘数 23 是(＋2)位，乘数 43 也是(＋2)位，因为 2×4 不进位，所以需用公式 2)定位，即

$$m+n-1=(+2)+(+2)-1=+3.$$

乘积应是整数三位数. 又如 7.54×0.0625＝0.

47125. 因 7×6 进了一位，所以需用公式 1)来定位，即

$$m+n=(+1)+(-1)=0.$$

积数应是小数点后不带“零”的纯小数.

2. 除法定位法：若 m，n 分别为被除数、除数的位数，则商的位数公式为：

1) $m-n$(当被除数和除数从左向右取相同的位数相比时，被除数小于除数).

2) $m-n+1$(当被除数和除数从左向右取相同的位数相比时，被除数大于除数，或两者有效数字全同).

例 1：250000÷500=500. $m=6$，$n=3$，被除数、除数的前一位各是 2 和 5，因 2<5，故用公式 1)定位，$m-n=6-3=3$，商应是整数三位.

例 2：11655÷1050=11.1. $m=5$，$n=4$. 被除数和除数的前两位各是 11 和 10，被除数大，故用公式 2)定位，$m-n+1=5-4+1=2$，商应是两位整数.

统一定位法(method of unity fixing place)　即“公式定位法”.

头定法(method of fixed head)　即“公式定位法”.

盘上定位法(method of fixing place on an abacus)　亦称法首定位法. 直接在算盘上定位的一种方法. 明代的吴敬、王文素、程大位著作中均用此种方法定位. 王文素《古今算学宝鉴》中首先提出“盘中定位”名称. 乘法的定位口诀是：“乘从个下得法首.”“个下”是指被乘数个位的右一位；“法首”是乘数的首位. 这是指不隔位乘而言. 口诀的意思是：被乘数个位的右一位就是积的位数中相当于法首的那一位数. 除法的定位口诀是：“归从法前定个位”. 这是指不隔位除而言. 口诀的意思是：在被除数里找到与法首相同的位数，在这数位的前一位，就是商数的个位.

法首定位法(fixed place method of rule head)　即“盘上定位法”.

悬空定位法(fixed place method of hang in the air)　中国古代的一种珠算乘除定位法. 原理与现今公式定位法相同. 首见于元代何平子的《详明算法》，其中“乘除见总”一节即是此法最早的著录. 至明代王文素《算学宝鉴》，始称“悬空定位”. 因其对数位不分正负，故法则繁多，不易记忆，清朝一代，无人提倡，以至失传. 至近代始由公式定位法所代替.

悬空定位法的位数标记如下：

十万	万	千	百	十	单	十分	百分	千分	万分
←大数					小数→				
5	4	3	2	1	0	1	2	3	4

现以《详明算法》中定位法介绍如下：

1. 乘法定位法：

1)“大数乘大数，相并，存身添一.”“相并”是指数位相加，“存身”是指积首为进位数. 此条是说：整数乘以整数，积的位数是由实数和法数的位数相加，若遇积首是进位数，则添加一位，若不是进位数(“退身”)，则不加一位(以下仿此，不再举例).

例 1：234×16=3744　(退身).

定位：2+1=3　(按位数标记千位为 3 故积的首位数字在千位下仿此).

例 2：618×72=44496　(存身).

定位：2+1+1=4　(万位为 4).

2)“小数乘小数，相并，存身减一.”

3)“大小数相乘，相减，存身上进一位.”

2. 除法定位法：

1)“大数除大数，实多法少减为大数，法多实少减为小数，不满法，不退一位.”求首商时，实少法多，需添位相除，称为“不满法”.

例 3：3744÷16=234 (实多法少，满法).

定位：3-1=2　(百位为 2).

例 4：44.496÷618=0.072

(法多实少，不满法).

定位：1-2-1=-2

(小数，百分位为 2).

2)“小数除小数，实多法少减为小数，法多实少减为大数，不满法下退一位.”

3)“大数除小数，并为小，不满法添一，下退一位.”

4) 大数除大数，相并为大数，不满法减一，下退一位.”

掌中定位法(fixed place method on a palm)　亦称袖中锦定位法. 古代的一种珠算乘除定位法. 首见于吴敬《九章算法比类大全》，以后王文素《算学宝鉴》和程大位《算法统宗》、《算法纂要》皆先后著录. 掌中定位是用左手中表示的十二支来代表数位，以推算积和商的首位. 十二支的位置如右图所示. 程大位的《算法统宗》中，有“袖中定位歌诀”如下：



掌中定位法为奇，从寅为主是根基.
因乘顺数下回转，归与归除上位施.
法多原实逆上数，法少原实降下知.
乘除大小从术化，厘毫丝忽不差池.

现分别叙述定位方法如下：

1. 整数乘法定位：从寅位起为实数首位，顺数至实数尾(个位)，就在实尾位起当为法数首位，再逆数至寅位，这时寅位的数位就是积首的数位. 如果积首是进位数，应升一位.

例 1：5625×34.8=195750. 定位：相乘后盘上得 19575. 从“寅”位起实首为千，顺数至“巳”位为实数个位. 再从“巳”位起为法首十位，逆数到“寅”位为万位. 因积首 1 是进位数，应升一位，定积首为十万位，积为 195750.

2. 小数乘法定位：定“寅”位为实数个位，顺数至实首位为止. 再从实首位起当为法首，逆数回到“寅”位(数位递退，同整数数位递升相反)，定为积首位. 如果积首是进位数，应升一位.

例 2：0.065×0.14=0.0091. 定位：法实相乘，盘上得 91. 定“寅”位为实数个位，顺数至“卯”位为十分位，“辰”位为百分位，就是实首位，再从“辰”位起为法首十分位，逆数到“卯”为百分位，“寅”为千分位，定为积首，则积为 0.0091.

3. 整数除法定位：从“寅”位起为法首，逆数到法尾位. 从法尾起为实首，顺数至“寅”位，定为首商位. 如果首商是添位除，应退一位.

例 3：74936÷304=246.5. 定位：在盘上除得结果为 2465 四位. 从“寅”位起为法首百位，逆数“子”位为法尾个位，在“子”位起为实首万位，顺数回到“寅”位为百位，定为首商位，商数为 246.5.

4. 小数除法定位：从“寅”位起为法数个位，逆数到法首位. 就在法首位起为实首，顺数回到“寅”位(数位递升)，定为首商位. 如果首商是添位除，应降一位.

例 4：387.411÷0.0435=8906. 定位：从“寅”位起为法数个位，逆数到“子”位为法首百分位. 就从“子”位起为实首百位，顺数回到“寅”位为万位. 因为首商是添位除，应降一位为千位，商数为 8906.

袖中锦定位法(fixed place method of bracade in a sleeve)　即“掌中定位法”.

移档定位法(fixed place method of moving place)　中国传统的珠算定位方法. 对乘法来说，它是以乘数的位数为准，按照“等档反向，零位不变”的原则来预先确定积的个位档的. 如乘数是正(左)几位时，乘积的个位档在被乘数个位档右边的第几档上；如乘数是负(右)几位时，乘积的个位档在被乘数个位档左边的第几档上；如乘数是零位时，不分左右，被乘数的个位档就是乘积的个位档. 对除法来说，它是以除数的位数为准，按照“等档同向，零位不变”的原则来预先确定商的个位档的. 如果除数是正(左)几位时，则商的个位档在被除数个位档左边的第几档上，如果除数是负(右)几位时，则商的个位档在被除数的个位档右边的第几档上，如果除数是零位时，则被除数的个位档即是商的个位档. 这种在算盘上左右移动档位的定位方法称为“移档定位法”. 为了认准个位档，可在算盘上装置定位器，以便随意移动. 如用隔位乘法(商除法)，由于乘积(商)向右(左)多移一档，故在移动被乘数(被除数)个位档后，还要再向右(左)移一档，即为乘积(商)的个位档.

珠 算 开 方

商除开平方(extraction of square root use quatient and division)　珠算术语. 指用珠算商除法计算开平方的一种方法. 商除开平方是中国古代筹算的传统计算方法，最早见载于《九章算术》. 明代珠算发达，便将古代的筹算开平方法改造为珠算开平方法. 王文素、程大位的数学著作中都介绍了商除开平方. 现以程大位《算法统宗》中例题介绍如下：

例如：$\sqrt{361}=19$，盘式为

	商	实	下法	
(1)	10	3 6 1	10	
		−1 0 0		……10(初商)×10(下法)
(2)	10	2 6 1	10	
			+10	……初商加倍
	+9(次商)		+9	……加次商
(3)	19	2 6 1	29	
		−1 8 0		………9(次商)×20(下法)
		−8 1		……9(次商)×9(下法)
(4)	19		29	

运算说明：

1. 置 361 于盘中为实，分作二节(从个位起每二位作一节)，第一节约得初商 10，置于盘左，另置 10 于盘右为下法，如(1)盘.

2. 初商 10 与下法 10 左右相乘，呼“一一除 1”，在实内减去，余实 261，如(2)盘.

3. 下法 10 加倍为 20，以 20 约余实首次二位，

酌定次商为 9；分别加 9 于商位和下法，如(3)盘.

4. 以次商 9 乘下法 29，在余实内减去，恰尽，得平方根 19，如(4)盘.

归除开平方(extraction of square root use return-division)　珠算术语. 指用珠算归除法计算开平方的一种方法. 归除开平方首先见于明代朱载堉的《算学新说》. 程大位的《算法统宗》中有详细论述. 今以《算法统宗》中原术说明如下：

例如：$\sqrt{54756}=234$，盘式为：

	左	中	右
(1)		5′ 4 7′ 5 6	
(2)	二	5 4 7 5 6	200
(3)	二	1 4 7 5 6	200
(4)	二 三	2 7 5 6	400
(5)	二 三	1 8 5 6	430
(6)	二 三 四	2 5 6	460
(7)	二 三 四		464

原术：

1. 置积(54756)为实于盘中.

2. 见实约商(200)于实左.

3. 亦置(200)于右下，左右相呼，二二除实(40000)，余实(14756).

4. 以右下(200)，倍之得(400)，为法归除之. 呼四一二十二，逢四进一. 得商(30).

5. 就置(30)于右(400)之下. 相呼三三除实(900)，余实(1856).

6. 就以右下(30)倍之，得(60)，共(460)，为法归之. 呼四一二十二，逢八进二十，得商 4.

7. 亦置(4)于右(60)之下，相呼四六除实(240)，又呼四四除(16). 恰尽.

招差开平方(extraction of square root use raise difference)　珠算术语. 指利用连续奇数和的公式求平方根的一种方法. 连续奇数和为 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$. 设被开方数为 m，$2n-1=q$. 若 $m-1-3-5-\cdots-(2n-1)=0$，即 $m-n^2=0$，得 $\sqrt{m}=n$. 而 $2n-1=q$，所以 $n=(q+1)/2$. 被开方数 m，连续减去 $1,3,5,\cdots,q$，恰减尽无余，被最后一个奇数 q 加 1 折半，即得平方根 n.

招差开平方有流传歌诀，现举例解释如下：

例如：$\sqrt{4'42'26'09}=2103$.

歌诀：

平方方积列于右，两位一幅先分剖.
左边记一减首幅，左边加二递减右.
无减左边加十一，添人次幅减斯受.
又不受减再添幅，左边须加一零一.
仍递加二递减之，方积减尽左有数.
加一折半即方根，开平如是无他谬.

盘式：

左数	首幅	次幅	三幅	四幅
	0 4	′4 2	′2 6	′0 9
+1	−1			
1	3	4 2	2 6	0 9
+2	−3			
3		4 2	2 6	0 9
+1 1		−4 1		
4 1		1	2 6	0 9
+1 0 1		—	4 2	0 1
4 2 0 1			8 4	0 8
+2		—	4 2	0 3
4 2 0 3			4 2	0 5
+2		—	4 2	0 5
4 2 0 5				

$$\frac{4205+1}{2}=2103.$$

折半开平方(reduce by half extraction of squave root)　珠算术语. 指用珠算求平方根的一种方法. 在珠算开平方运算中，求出方根的首位并得到首余之后，将首余折半，再求平方根以下各位的方法. 折半开平方的根据是：设 m 为被开方数，a 为平方根首位数，平方根为 $a+b$，则

$$m=(a+b)^2,$$
$$m-a^2=2ab+b^2,$$
$$\frac{m-a^2}{2}=ab+\frac{b^2}{2}\approx ab.$$

因为，一般地说 b 远小于 a，从而

$$b\approx\frac{m-a^2}{2}\div a.$$

由此式即可估出 b 的大小，其中利用了首余 $m-a^2$ 的折半 $\frac{(m-a^2)}{2}$，故名折半开平方.

当估出 b 的大小之后，完成除法

$$\frac{m-a^2}{2}\div a,$$

实余为

$$\frac{m-a^2}{2}-ab-\frac{b^2}{2}.$$

若此时结果为 0，则所求平方根为 $a+b$，若不等

于 0,可把刚才的 $a+b$ 视为 a',设 $m=(a'+b')^2$,仿照上述过程求出 b',如此类推,直至开尽或达到预定的精确度.

商除开立方(extraction of cubic root use qustient division) 商除开平方的推广.指用商除法求次商及以后各商的开立方的方法.中国古代筹算即用此法,珠算计算也用此法.

明代算书《算学宝鉴》、《算法统宗》皆有此算法.在算盘上分左、中、右三段布数,左端置商数(即立方根),中段置实数(即被开方数),右段布置下法,包括方、廉、隅等数.实数从个位向左,每三位为一节,每节得立方根一位.开方计算公式与“归除开立方”一样.开方步骤:

1.求初商(a):置积于算盘中段为实数,三位分节后,从第一节依照立方九九定得初商(a),分别置于实数左边的商位和右边的下法位上.

2.求余实:在实数第一节减去初商的立方数(a^3),得余实($N-a^3$).

3.求次商(b):以 3 乘下法(a)为方法($3b$),置于下法右边.以方法($3a$)约余实前段,从小酌定次商(b),分别列于商位和下法两方.

4.求廉法和隅法:以次商(b)乘下法($a+b$)为廉法[$b(a+b)$];以次商立方为隅法(b^3).

5.求第二次余实:以方法($3a$)乘廉法,乘积 $3ab(a+b)$ 和隅法 b^3 分别在余实内减去,若再有余实,续求三商(c).

6.求三商:把已求得的初商和次商二位,着作初商,用求次商的方法,以求三商.以下继续如第四、第五步骤.

7.如再有余实,用同样方法求得其余各位商数.

例如: $\sqrt[3]{1953125}=125$.

解法如下:

	商	实	下法	方法	廉法	隅法
一	②100(a)	①1′953′125	③100(a)			
		④−1,000,000(a^3)				
二	100	953′125	100	①300($3a$)		
	③+20(b)		③20(b) 120×20 $(a+b)b$	④ →		⑤
三	120	953′125	120	300	2400	8000
	$(a+b)$	−06 −12 −8000	⑥300×2400 (方)(廉)	$3(a+b)$	廉法	隅法
四	120	225′125	120	①360	625	⑤125
	②+5(c)		③+5(c) 125×5	④ ↑		
五	125	225′125		360	625	125
	⑥−225000 →			360×625		(c^3)
		⑦−125(c^3) ←				
六	125	0				

归除开立方(extraction of cubic root use return-division) 归除开平方法的推广.由归除法求次商及以后各商的开立方的方法.明代中叶,珠算兴盛,将归除法用于开方而得此法.现以《算法统宗》中原题及原术介绍如下:

例如: $\sqrt[3]{15625}=25$.

解:

1.置积 15625 为实.

1 5′ 6 2 5

2.以万积商 20 置于积前,就置 20 于右下.

②1 5′ 6 2 5	20
− 8 0 0 0 (a^3)	

3.自乘得 400,与上商 20 相呼,二四除实 80,余实 7625 步.

	a^2
②0 7′ 6 2 5	400

4.却以右下 400,以 3 乘之,得 1200 为法,归除

之．呼逢五进五，又呼二五除一千．

		$(3a^2)$
②⑤	7′ 6 2 5	1200
	－5	$5\times1200(3a^2b)$
	－1 0	

5．另置初商 20，以次商 5 乘之，得 100，以 3 因之，得 300，加入自乘次商 5，得 25，共 325，于右．

②⑤	1′ 6 2 5	1200	325

$$(3ab+b^2=3\times20\times5+5^2 =300+25)$$

6．与次商 5 相呼，除之．呼三五除 1500，又二五除 100，又五五除 25，除尽．以左上 25 为立方一面之数．

②⑤	1′ 6 2 5	325
	－1 5 0 0	325×5
	－1 0 0	$(3ab+b^2)b$
	－2 5	
②⑤		

（其中②⑤表示根）

上面计算利用公式：

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+(3ab+b^2)b.$$

而以

$$b\approx\frac{(a+b)^3-a^3}{3a^2}$$

约得商 b．

招差开立方（extraction of cubic root use raise difference）　招差开平方法的推广．指用累减法计算，与招差开平方类似，但无历史文献可考，估计是在招差开平方方法之后．

招差开立方有流传歌诀，现举例解释如下：

例如：$\sqrt[3]{13824}=24$．

歌诀：

立方方积右边列，三位一幅先分别．
首幅首以一减之，取其余数用为实．
记一于左名曰隅，中名曰方亦记一．
于偶加一复加二，两和于方加重叠．
方之总数自实减，屡加屡减慎无失．
实数加须添幅时，隅方加法有更易．
更易不在第一次，第二次加乃区别．
隅方若加以十一，方退二位添一幅．
隅若加以一零一，方退四位添二幅．
末后就隅求方根，加二以三除即得．

盘式：

隅	方	实
1	1	13′824
		－1′000
1	1	12824
＋1		
2 ……	2	
＋2	＋4	－7′000
4	7	5824
＋1		
5 ……	＋5	
＋11 退一位	＋61	－1261
61	1261	4563
＋1		
62 ……	＋62	
＋2	＋64	－1387
64	1387	3176
＋1		
65 ……	＋65	
＋2	＋67	－1519
67	1519	1657
＋1		
68 ……	＋68	
＋2	＋70	－1657
70	1657	0

根：$(70+2)\div3=24$．

珠算教育与三算教学

珠算教育（ball-arithmetic education）　数学教育的分支学科．有目的有计划地对受教育者传播珠算科普知识、珠算计算技术，培养计算能力，并发展其思维、智力，以及开展优良的个性品质的教育过程，称为珠算教育．明清两代，珠算计算技术教育主要由私塾老师和商店店主承担．但一般私塾老师长于教四书五经，而不善教珠算．清代张豸冠《珠算入门》序说："数为六艺之一，古之学者罔弗能，自词章之学兴，而此道遂弃如土，虽向老师宿儒问以六经四子中之涉于数者，亦茫然不能解．"商店学徒都要学会打算盘，多由店主或老店员中的能者为师，但也只是让硬背口诀，不讲算理，往往事倍功半，收效较差．李文煦《珠算讲义·弁言》说："学徒从师三年，强半时日，都肄习于此（指珠算）．独是呆记成法，练习运算．叩其理，则瞠目不能一解；语其法，则胶柱鼓瑟，无丝毫之变化．聪明者尚能本其法以致用；质钝者视习珠算为畏途，徒耗时力精神，而不能收毫末之效．"清末办洋务，兴学堂，开始在小学采用以笔算为主的算术课．

1903 年，《奏定学堂章程》规定开设珠算课．以

后各种商业职业学校为了就业需要，都开设了珠算课. 近百年来，珠算教育有很大的变化和发展，参见"职业珠算教育"、"业余珠算教育"、"小学珠算教育"、"三算结合教学"等条.

职业珠算教育(ball - arithmetis of vocational education) 珠算教学方式之一. 20世纪初，各种商业学校都设有珠算课. 珠算整数、小数四则运算为学生必须掌握的基本技能. 20世纪70年代，财经类各大中专学校都开设"计算技术课"，其中主要内容是珠算. 20世纪80年代起中等职业学校增多，占到了中等学校总数的40%以上，其中财经类如财政、会计、统计、银行、商业、粮食、供销等有关系统均举办了中等专业学校、职业学校、职业班. 这些职业学校都开设了珠算课. 各系统根据需要都编制了自行的教学大纲和教材，并根据中国珠算协会所订的珠算技能等级鉴定的标准作为毕业生必须达到的标准. 如1986年，浙江省对于财经大中专职业学校关于珠算教育的授课时数和珠算技术要求等级规定如下：

学校类别	专 业	授课课时	珠算技术要求等级
大专院校	财会专业	52	普通6级
	计统专业	51	普通6级
中等专业学校	财税专业	40	普通4级
	会统专业	60	普通3级
职业中专	管理专业	96	普通3级
	商品专业	96	普通4级
职业中学	一年制	120	普通4级
	二年制	120	普通3级

其他各省、市、自治区的情况基本相同.

业余珠算教育(ball - arithmetic of sparetime education) 珠算教学方式之一. 由于中国经济体制的改革，各种成分的经济实体有很大的发展，城乡各行各业都需要进行认真的经济核算，提高经济效益，迫切需要大量的计算人才. 20世纪70年代以来，业余珠算教育逐步形成高潮.

1979年，中国珠算协会成立以后，大力发动各省、市举办各种类型的珠算培训班、学习班、训练班、高级班、师资班、选手班、教练班、函授班等. 如辽宁省珠算协会结合本省各条战线的实际需要，积极开展珠算普及工作. 从1982—1987年，全省普及珠算的人数高达100万人次，约占全省职工人数的10%. 山东省珠算协会则以省农业厅的农村辅导站为基地，对农业系统的财会干部、乡镇企业的财会人员和农村家庭重点户的记账员进行珠算培训，从1982—1986年，已完成100多万人次的培训任务. 吉林省从1981—1987年先后举办珠算普及班3787期，总计培训了25.6万人，占全省人口总数的1.16%. 黑龙江省各级珠算协会自办珠算培训班，到1987年底共培训了12.3万人次，约占财经人员的20%.

此外，在函授学校、电视大学，接受珠算普及教育的人数也不少.

小学珠算教育(ball - arithmetic education of primary school) 小学教学的一项重要内容. 近百年来，《珠算》一直是小学教育的主要课程之一.

1903年，《奏定学堂章程》规定：《珠算》，初小四年级教加减法，五年级教乘除法. 高小一、二、三年级教小数四则.

1923年，《新学制课程标准》规定：《珠算》，四年级教加减及乘数为一、二位的乘法. 五年级教乘数为三位和除数为一、二位的除法及小数四则运算和斤两法.

1929年，《小学课程暂行标准》规定：《珠算》，三年级教加减法，四年级教乘数一、二位的乘法，五年级教三位数加减法和一、二位除法，六年级教乘数为三位的乘法和除数为三位的除法及小数四则运算、地亩计算、斤两法.

1952年，《小学算术教学大纲(草案)》规定：《珠算》，四年级每周1课时，五年级每周2课时，共104课时，教加、减、乘、除和斤两法的简单应用.

1956年，《小学算术教学大纲(修订草案)》规定：《珠算》，四年级教加减法，五年级教乘法和除数是一位的除法，每周1课时，共68课时.

1963年，《全日制小学算术教学大纲(草案)》规定：《珠法》，五、六年级教加减法、乘除法、小数四则运算，记账的初步知识，共107课时(农村小学可提前在四年级开始).

1978年，《全日制十年制学校小学数学教学大纲(试行草案)》规定：《珠算》，三年级教加减法及乘数是一、二位的乘法，要求集中几周学习，共46课时.

1992年，《九年制义务教育全日制小学数学教学大纲》规定：《珠算》，只教加减法(使用珠算较多的地区，也可以多学一些). 二年级认识算盘，掌握拨珠方法，并要逐步学会珠算加减法. (注：这部分内容也可以安排在其他年级，可以和有关内容配合起来教学，也可以单开珠算课.)

三算结合教学(associating three calculations with teaching) 将口算、笔算、珠算三者结合起来进行教学，也常简称为三算教学. 是小学数学的启蒙教育方法之一. 它是针对传统教学中三者分离教学(即常先教口算，再教笔算，珠算单独设科，或穿插分段于教学进程中)的方法而提出来的，要求从小学一年级开始，把口算、笔算、珠算有机地结合起来进行课堂教学. 这样能充分发挥算盘形象、具体、档次清

楚、珠动数出、儿童喜爱等教学的特点与作用. 使儿童手、脑并用,促进其思维的发展,并达到打好基础,减轻负担,大面积提高小学数学教学质量的目的.

三算结合教学这个小学数学启蒙教学的方法是融中西文化,并经过长期实践逐步形成的一种具有中国特色的小学数学教学的新体系和新方法. 自清末兴洋务,办学堂,引进西方文化,从学制、课程、教材都照搬了日本和欧美各国的. 小学算术以笔算为主. 但因社会需要,又另设珠算课. 由于珠算采用传统口诀教学,它与笔算的教学体系不同,以致长期分离教学,使之效果总不太理想,不少小学毕业生口算不熟,笔算不准,珠算不会. 从 20 世纪 50 年代起,一些数学教师和教育工作者逐渐认识到珠算、笔算、口算三者的内在联系,他们从小学一年级起就把三者有机地结合起来进行教学,让三种算法各展示其所长,交替运用,互相促进,收到了一学三会、一练三熟的效果,使学生减轻了学习负担,大大提高了教学质量.

三算结合教学也为中国的珠算教育探索出一条新路,推动了珠算教育的发展. 三算结合教学的探索是先后在江西、上海、天津、浙江、河南等省、市的少数小学教师中自发地进行. 他们认为,珠算在中国的城乡应用广泛,但在学校的学科教学中却一直处于可有可无的状态,为了给社会输送有用的人才,珠算必须在教学中加强. 早在 1955 年,江西省宜春县的实验小学和第一、二、三小学,在高年级教珠算时采用了与口算、笔算结合起来的教学方法. 宜春镇算术中心教研组(易儒璋执笔)于 1959 年在《江西教育》(小学版)第 9 期发表了《口算、笔算、珠算三结合》的总结性文章. 这是首次倡导三算结合教学的呼声. 1964 年,余介石、王守义在《试谈数码革新》中创用新数码,使珠算和笔算平行教学. 1967 年,黄继鲁提出"把珠算、笔算、口算在计算方法上和顺序上完全统一起来,教学时,笔算、珠算同时进行,在此基础上形成口算,相辅相成,互相促进,可收事半功倍之效",并还编写了小学低年级三算结合课本. 1969 年,在沈百英、王善彰的指导下,上海市崇明县朱孔祥、沈淑芳在新河公社五大队"五·七"干校(后更名新民公社和平小学),基于"缩短学制"的想法,开始从小学一年级起进行三算结合教学试验. 1972 年,崇明县的实验教学取得初步成效,开始向全县推广,并成立了"县三算结合教材编写组",先后编出了 1 至 10 册的三算实验教材. 与此同时,天津市上海道小学基于同样的想法开始进行三算结合教学实验. 杭州市上城区学习崇明经验,在光明小学率先推广. 1973 年,上海师范大学、上海市教育局、《解放日报》社进行联合调查,在 1973 年 10 月 9 日的《解放日报》上发表了《从三算结合看小学数学教学改革调查报告》. 报告中指出:小学数学实行口算、笔算、珠算三结合教学,有利于学生较快地掌握数学运算方法,有利于培养学生分析问题和解决问题的能力,有利于缩短学制. 上述试验,对全国各省市影响较大. 在短短的六七年间,除西藏、台湾外,28 个省、市、自治区都进行了不同规模的试验. 其发展之快、规模之大,在中外教育史上实属罕见.

1978 年,全国统一教学大纲,统一教材,三算实验教材停止使用,三算结合教学实验曾一度下马. 1980 年,在国家教育委员会和中国珠算协会等有关部门的支持下,三算结合教学又重新开始了实验,并逐步在全国推广,受到广大师生、家长和社会的普遍欢迎. 同时,赢得了日本、美国和东南亚国家珠算界、教育界的赞誉. 目前,三算实验教材已经国家教委中小学教材审定委员会审定为义务教育小学五年制数学试用课本,三算结合教学将继续向前发展.

三算结合教学的基本方法(basic method of associating three calculations with teaching)　一种新型的启蒙教育方法. 从小学一年级起引进珠算教学,尽量挖掘口算、笔算、珠算三者的内在联系,使之相互促进,开发智力,提高计算能力. 其基本方法如下:

1. 在学生学习认数、数数、定位时,以算盘作为直观教具,凭借珠算的形象性,使学生形成数的概念,理解数的组成、分解,并结合拨珠,熟练指法.

2. 教多位数的读写时,充分运用算盘档次分明的特点,帮助学生理解数位与数位之间的关系,掌握十进制的计数法和位值制的记数法.

3. 教加减法时,不再采用珠算加减法的几十句口诀,使珠算的算理、算法与口算的算理、算法一致起来,拨入即加,拨去即减,使学生看得见、摸得着运算的过程.

4. 教乘法时,利用珠算同数连加,使学生理解乘法的来源和意义,编出乘法口诀.

5. 教除法时,通过实物演示和珠算从一个数连续减去相同的数,使学生了解除法的来源和意义. 在珠算的辅助下,先学包含除,后学等分除,并将两者对比. 珠算采用商除法,与口算、笔算的计算方法一致,可以先学笔算,再学珠算,两者相互验算,互相促进.

6. 教多位数的四则运算时,采用笔算的竖式与珠算的盘式相参照,利用竖式清楚的特点说明珠算的计算过程.

7. 教复名数的化法和聚法时,利用算盘形象、直观的特点,先讲珠算,后讲笔算与口算.

三算结合教学的特点(character of associating three calculations with teaching)　三算结合教学的基本特征. 由于充分发挥算盘的教育、教学功能,

口算、笔算、珠算交替进行，促进儿童手脑并用、发展智力、提高计算能力，实为小学数学启蒙教育中的有效方法，其特点如下：

1. 符合儿童的认识规律. 儿童初学阶段抽象思维能力弱，对数的认识常和具体实物相联系，而算盘恰好具有形象、直观，既具体又抽象的特点，有利于帮助儿童理解数和数位的概念，学会数的读法和写法，掌握数的组成和分解，对儿童在识数和计算时完成由具体到抽象、由感性到理性的认识过程有促进作用.

2. 适合儿童的心理特征. 低年级儿童爱玩好动，注意力不易集中，以算盘为学具，让儿童动手拨珠，正好适应了他们这一特征，可提高儿童学习兴趣. 教学过程中口算、笔算、珠算结合，形式多样，生动活泼，儿童不易疲劳，有利于促进儿童学习的主动性和积极性的发挥.

3. 能充分发挥口算、笔算、珠算的长处，有效地提高儿童的计算能力. 三算虽然各有特点，但也有密切的内在联系和共同的运算规律. 抓住三算的共性，把三者结合起来教学，可以使三者互相补充，互相促进，从而使学生较快地掌握数的概念和运算技巧，提高计算能力.

4. 能早期开发儿童智力，促进儿童智力的发展. 在三算结合教学中，使学生手、眼、耳、口等多种器官协调一致地参与学习活动，使多种感觉器官适度强化训练. 能够促进大脑细胞的健康发展，而大脑细胞活动频率的增加，有利于儿童智力的早期开发，有利于对儿童思维敏捷的培养和智力水平的提高.

5. 能使知识结构更合理. 在三算结合教学中，加减同时讲授，乘除同时讲授，整数小数同时讲授，这样可以减少教材中不必要的重复和循环，有利于减轻学生过重的学习负担，提高教学质量.

珠算式心算(abacus method of mental calc - ulation)　简称“珠心算”. 一种新型算法. 这种算法有人称“脑珠算”、“珠脑速算”，日本称“珠算式的脑算”. 它是在熟练掌握珠算技巧的基础上在脑中形成算珠映象，照珠算运算模式浮动进行计算的方法. 有人称它为“脑子里打算盘”.

珠算技术等级鉴定(abacus qualeicqtion test)　珠算教育专用名词. 珠算技术等级鉴定是关于人的珠算计算能力的一种考核办法，即用一套计算量相同的格式化题目，根据参加鉴定人在规定的时间内，运用珠算技术正确完成的题数而定级，主要是测试计算的速度和准确性. 中国珠算协会制定的全国珠算技术等级鉴定标准分普通级 1—6 级、能手级 1—6 级.

珠算技术比赛种类(abacus contest)　珠算教育专用名词. 珠算技术比赛按组织形式可分为“珠算技术比赛”和“珠算技术通信比赛”两大类.

珠算技术比赛按地区和行业不同又可分为“全国珠算技术比赛”、“全国珠算技术邀请赛”、“某省(市、区、县)珠算技术比赛”、“某专业系统(如银行、农业、商业等)珠算技术比赛”、“全国少数民族珠算技术比赛”等.

珠算技术通信比赛可分为“全国性学生通信比赛”、“省级学生通信比赛”、“海峡两岸珠算技术通信比赛”等.

撰　稿　王启贤　申克端　李培业　陈梓北　郭启庶
黄继鲁　梅荣照　龚宝和　景滨杰
审　阅　李培业　陈梓北　梅荣照

数学发展史年表

约公元前 3000 年—前 1700 年

*（巴比伦）楔形文字泥版记数；采用 60 进制和 10 进制、位值制记数法．编制乘法表、平方表、立方表、倒数表等数表，并用以进行计算，解简单的一元二次方程等（尼普尔数学泥版文书）．

*（埃及）象形文字纸草书记数；采用 10 进制累进记数法．能计算分数和分解分数为单位分数，计算三角形、梯形、圆面积和棱锥体体积等（莫斯科纸草书和兰德纸草书）．

*（埃及）尼罗河定期泛滥，每年需要重新划定地界、测量地块面积，从而促使土地测量术——几何学的诞生（据希罗多德《历史》一书记载）．

约公元前 2500—前 2100 年

*（中）黄帝命"隶首作算数"（《世本》）．

*（中）"古者倕为规、矩、准、绳，使天下仿焉．"（尸佼《尸子》）相传倕为黄帝时代人，规、矩、准、绳为四种几何测量工具，说明这时已有方、圆、平、直等概念．

*（中）大禹治水时"左准绳，右规矩"（《史记·夏本纪》）．

约公元前 2000 年

*（中）山东省城子崖遗址出土的陶器上，有数字刻符．

约公元前 1400 年

*（中）殷商时代甲骨文卜辞中，采用 10 进制记数法记数，其中最大的数是"三万"．

约公元前 1100 年

*（中）《易经》中"八卦"含有组合数学萌芽．

*（中）周公与商高问答中提出"勾三、股四、弦五"这一勾股定理重要特例（《周髀算经》）．

约公元前 1000—前 770 年

*（中）发明算筹，采用十进位值制记数法计数和计算（筹算）．

*（中）周代将"数"列为"六艺"之一，以教国子（《周礼》）．

约公元前 800—前 500 年

*（印）宗教经典《吠陀》中，修筑祭坛的法典包含有某些几何知识．

约公元前 700—前 600 年

*（中）陈子与荣方问答中提出勾股定理的一般形式命题（《周髀算经》）．

*（中）齐桓公（公元前 685—前 642 年在位）当政时，已出现九九乘法表及分数概念（《管子》）．

约公元前 600 年

*（古希腊）泰勒斯（Thales，(M)）创立伊奥尼亚学派，开始用演绎法证明数学命题，确立和证明了第一批几何定理，如"两个三角形的一边及此边上的两个角对应相等，则两个三角形全等"（泰勒斯定理）．数学从此由具体的实验阶段逐渐发展到抽象的理论阶段．

约公元前 540 年

*（古希腊）毕达哥拉斯（Pythagoras）在克罗托创建毕达哥拉斯学派，提出"万物皆数"的信条，发现勾股定理（西方称之为"毕达哥拉斯定理"）和勾股数，发现五种正多面体．

约公元前 500 年

*（中）出现最古老的三阶幻方——河图、洛书（九宫图）（《大戴礼记》）．

*（印）《绳法经》中绘出 $\sqrt{2}$ 相当精确的近似值，并已出现勾股定理．

公元前 479—前 404 年

*（古希腊）毕达哥拉斯学派的成员，数学家、哲学家希帕索斯（Hippasus，(M)）发现不可公度线段，引发了第一次数学危机．

*（古希腊）雅典智人学派提出几何作图三大问题：三等分角、化圆为方和二倍立方．

*（古希腊）埃利亚学派的芝诺（Zeno，(S)）提出四条关于时空观念和运动的悖论（芝诺悖论）．

约公元前 440—前 430 年

*（古希腊）安蒂丰（Antiphon）提出穷竭法．

*（古希腊）希波克拉底（Hippocrates，(C)）在数学中运用间接证明方法．

*（中）墨翟创立墨家学派．汇集其思想言论的《墨经》，记载有许多几何学义理．

*（古希腊）德谟克利特（Democritus）提出"几何原子"概念，得出圆（棱）锥体积是等底等高圆（棱）柱体积三分之一的结论．

约公元前 380 年

*（古希腊）柏拉图（Plato）在雅典创立学园（"柏拉图学园"），强调数学定义和逻辑证明的重要

意义.他的数学教育思想获得成功."柏拉图学园"存在了将近900年.

约公元前370年

*(古希腊)欧多克索斯(Eudoxus,(C))创立比例论,并将其运用于不可通约量上,从而克服了第一次数学危机.他的思想方法是以后戴德金(Dedekind,(J. W.)R.)建立实数理论的思想来源之一.

约公元前350年

*(古希腊)梅内克缪斯(Menaechmus)开始系统研究圆锥曲线.

约公元前340年

*(古希腊)亚里士多德(Aristotle)创立形式逻辑学,讨论了定义、公理、定理的含义及区别.

约公元前300年

*(古希腊)欧几里得(Euclid)早年在"柏拉图学园"学习和研究数学.公元前300年前后应邀到亚历山大里亚进行工作和教学.他集希腊几何学之大成,著《几何原本》,建立了几何学的逻辑演绎体系,是公理化数学著作的典范.

*(中)庄周提出"一尺之棰,日取其半,万世不竭"的命题(《庄子·天下篇》),反映了一种无限可分的思想.

约公元前250—前212年

*(古希腊)阿基米德(Archimedes)著《论球与圆柱》、《圆的度量》、《论螺线》等数学著作,用穷竭法求得圆周率上下界:

$$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7},$$

求得螺线形面积;用力学方法求得球体积公式和抛物弓形面积公式等.他还十分重视数学的应用.他的数学思想和方法,是以后积分和极限概念的重要思想来源.

约公元前230年

*(古希腊)埃拉托斯特尼(Eratosthenes)发明寻找素数的"筛法".

约公元前225年

*(古希腊)阿波罗尼奥斯(Apollonius,(P))著《圆锥曲线论》,用几何方法建立了圆锥曲线完整理论.他的著作是以后费马(Fermat,P. de)发明解析几何的理论来源之一.

公元前212年

*(古希腊)叙拉古城被罗马军队攻破,阿基米德(Archimedes)被罗马士兵杀死于城中.

约公元前170年

*(中)竹简算书《算数书》成书.它是《九章算术》的内容来源之一.

约公元前140年

*(古希腊)希帕霍斯(Hipparchus)编制第一张弦表,标志着球面三角形和三角学的发端.

约公元前100—纪元元年

*(中)《周髀算经》成书,其中记载有勾股定理和复杂的分数计算.

*(中)中算经典著作《九章算术》经张苍、耿寿昌等增删修订而成书,其中比例算法、开方术、盈不足术、方程术和正负术等,都是首创.

公元9年

*(中)刘歆造铜斛,以$\pi=3.1547$为圆周率(歆率).

约公元62年

*(古希腊)海伦(又译作希罗,Heron,(A.))给出和证明了由三角形三边表示其面积的公式(海伦公式),并提出一个计算平方根的近似公式.

约公元100年

*(古希腊)尼科马霍斯(Nicomachus,(G))著《算术入门》,它是第一本完全独立于几何学的系统的算术著作.

*(古希腊)门纳劳斯(Menelaus,(A))完成球面三角学著作《球面论》.

约公元150年

*(古希腊)托勒密(Ptolemy)著《天文学大成》,发展了三角学,并编制了从1/2度到180度每隔半度的"弦表".

约公元190年

*(中)徐岳著《数术记遗》,提出大数记法的"三等数法",在提到14种中国古算时首次提及"珠算"名称.

约公元220—265年

*(中)赵爽注《周髀算经》,用"弦图"证明勾股定理.

约公元250年

*(古希腊)亚历山大里亚后期的重要代表人物丢番图(Diophantus)著《算术》,它是古希腊代数学的代表著作,也是世界上最早的系统的代数学著作,其中给出的二次方程和某些不定方程解法,引入的一系列缩写符号,对后世代数学的发展影响很大.

公元 263 年

*(中)刘徽是中国古典数学理论的奠基者,注释《九章算术》、著《海岛算经》,在数学方法和理论上做出了杰出贡献.创立割圆术,求得圆周率 $\pi \approx 3.14$(徽率);在四面体、球体体积公式的推证中,表现出明显的朴素极限思想.

约公元 300 年

*(古希腊)帕普斯(Pappus,(A))著《数学汇编》,集古希腊数学之大成,其中包括对以后射影几何有影响的"帕普斯定理"和对笛卡儿(Descartes,R.)发明坐标法有启示的"帕普斯问题".

*(中)《孙子算经》成书,书中记述筹算记数制度和四则运算法则和步骤.所载著名的"孙子问题",成为以后"中国剩余定理"的发端.

约公元 380—415 年

*(古希腊)赛翁(Theon,(A))修订和评注《几何原本》、《天文学大成》等名著.后世的《几何原本》主要依据他的译注本译出.

公元 415 年

*(古希腊)许帕提娅(Hypatia)是历史上第一位女数学家.曾注释欧几里得(Euclid)、丢番图(Diophantus)等人著作.公元 415 年,被宗教暴徒残酷杀害,从此古希腊文明没落.

约公元 431—450 年

*(中)《张丘建算经》成书,其中有不定方程问题,并给出多组解.

约公元 460 年

*(古希腊)普罗克洛斯(Proclus)注释欧几里得(Euclid)《几何原本》,概述以后失传的欧德莫斯(Eudemus,(R))《几何学史》,给后世留下了重要的几何学史料.

约公元 454—500 年

*(中)祖冲之注《九章算术》,著《缀术》(后经其子祖暅整理),创用新法求得圆周率 $\pi \approx 3.1416$ 和盈、朒二限:$3.1415926 < \pi < 3.1415927$;发现约率 22/7 和密率 355/113.

*(中)祖暅在刘徽工作基础上总结出关于体积的"刘徽-祖暅原理",并求得球体积公式.

公元 499—510 年

*(印)阿耶波多第一(Āryabhata Ⅰ)著《阿耶波多历算书》,总结当时印度天文和算术、三角、代数等数学知识,书中还含有弧度制思想.其后又编制正弦表,给出第一象限每隔 $3°45'$ 的正弦.

约公元 500—524 年

*(古罗马)博伊西斯(Boethius,A. M. S.)编著《几何》和《算术》,作为欧洲教会学校数学课本,使用了几百年.

公元 535—565 年

*(中)甄鸾编著《五曹算经》、《五经算术》,校《孙子算经》、《周髀算经》、《张丘建算经》、《夏侯阳算经》、《数术记遗》等.

公元 600 年

*(中)刘焯编制《皇极历》,首创等间距二次内插法公式.

约公元 625 年

*(中)王孝通著《缉古算经》,首次提出三次方程数值解法.

公元 628 年

*(印)婆罗摩笈多(Brahmagupta)著《婆罗摩修正体系》,其中有《算术讲义》、《不定方程讲义》专章,还有一张正弦表.该书对阿拉伯数学有重要影响.

公元 641 年

*(埃及)亚历山大里亚图书馆被彻底焚毁,古希腊数学至此宣告结束.

公元 665 年

*(中)李淳风奉敕注释《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《张丘建算经》、《夏侯阳算经》、《五曹算经》、《五经算经》、《缉古算经》,连同《缀术》,合称《算经十书》,并于唐显庆元年(公元 665 年)颁行国子监明算科作为数学教科书.中国《算经十书》和算子教育制度传入朝鲜、日本等国.

公元 724 年

*(中)张遂(一行和尚)主持实测地球子午线,得 1 度之长为 122.8 公里(比今值多 11 公里).

公元 727 年

*(中)张遂编成《大衍历》,第一次使用了不等间距二次内插法.

公元 766 年

*(阿拉伯)婆罗摩笈多(Brahmagupta)的数学著作被带到巴格达,印度数学开始传入阿拉伯.

公元 820 年

*(阿拉伯)花拉子米(al - Khowārizmī)著《代数学》、《印度的计算术》,讲述二次方程解法,介绍印度数码和计算方法.该书后被译成拉丁文,成为欧洲

延用几百年的代数学标准教科书.

约公元 850 年

*(印)马哈维拉(Mahāvīra)著《计算纲要》,较全面地反映了印度当时数学的成就.

公元 876 年

*(印)瓜廖尔(Gwalior)地方的一个石碑上刻有数字零的符号"0",之后传入阿拉伯,再传到欧洲.

约公元 900 年

*(阿拉伯)艾布卡米勒(Abū Kāmil)《代数书》等成书.

约公元 920 年

*(阿拉伯)巴塔尼(al - Battānī)著《天文论著》,引入正、余切概念,给出 0°—90°每隔 1°的余切表.

约公元 980 年

*(阿拉伯)阿布·瓦法(Abul - Wefa)著《天文全书》,给出正弦的半角公式、倍角公式和正弦定理等,并首次提出正、余割概念. 编制出每隔 10′的正弦表和正切表.

约公元 1000—1019 年

*(阿拉伯)凯拉吉(Al - Karaji,或 al - karkhi)在其著作中论述多项式四则运算等代数理论,指出代数学的基本特征是通过解方程从已知量去求未知量.

约公元 1050 年

*(中)贾宪著《黄帝九章细草》,提出高次方程数值解法——增乘开方法,给出"开方作法本源图"(今称"贾宪三角").

*(中)刘益著《议古根源》,创立正负开方术,并用于求高次方程数值解.

约公元 1079 年

*(阿拉伯)奥马·海亚姆(Omar Khayyami)编写了中世纪最精密的历法《哲拉里历》,著《代数学》,首创用圆锥曲线研究三次方程.

公元 1086—1093 年

*(中)北宋元丰七年刊刻《算经十书》(这时《缀术》已失传),它是世界上最早的印刷本数学书.

约公元 1150 年

*(印)婆什迦罗第二(Bhāskara Ⅱ)著《天文系统至极》,给出二元不定方程 $x^2=1+py^2$ 多组解,广泛使用无理数.

公元 1202 年

*(意)斐波那契(Fibonacci,L.)著《算法之书》等书,向欧洲人系统介绍印度-阿拉伯数码及其计算方法,是中世纪欧洲最有影响的数学著作.

公元 1213 年

*(中)南宋嘉定六年鲍澣之重刻《算经十书》,以《数术记遗》代替失传的《缀术》.

公元 1247 年

*(中)秦九韶著《数书九章》,给出一次同余式组的正确解法("大衍求一术"和"大衍总数术"),推广了增乘开方法的应用.

公元 1248—1259 年

*(中)李冶著《测圆海镜》和《益古演段》,系统论述了"天元术".

公元 1261—1275 年

*(中)杨辉著《详解九章算法》、《续古摘奇算法》等书,转载了"贾宪三角",介绍了简算法,并第一次将幻方定名为"纵横图",对它进行数学研究,找出了 4—10 阶幻方.

公元 1278 年

*(中)阿拉伯学者扎马鲁丁来中国制作一个阿拉伯数字的 6 阶幻方(西安出土铁板幻方).

公元 1280 年

*(中)王恂、郭守敬合编《授时历》,首次创用三次内插法公式进行历法计算.

公元 1299 年

*(中)朱世杰著《算学启蒙》,并流传到朝鲜、日本.

公元 1303 年

*(中)朱世杰著《四元玉鉴》(3 卷),把天元术推广为四元术,建立了四元高次方程理论,是中世纪最杰出的数学著作之一. 其中垛积招差术,给出四次内插法公式. 书中《古法七乘方图》,给出 8 阶二项式系数表.

公元 1321 年

*(法)莱维本热尔松(Levi ben Gerson)著《数经》,给出了从几个物品每次取 k 个的排列和组合公式.

公元 1325 年

*(英)布雷德沃丁(Bradwardine,T.)将正切、余切引入三角计算.

公元 1360 年

*(法)奥尔斯姆(Oresme,N.)著《比例算法》,引入分指数概念. 在《论质量与运动的结构》等著作

中，研究变化和变化率，并用经纬度表示点的位置，讨论函数图像，已具有坐标几何思想.

公元 1371 年

＊（中）明代洪武四年编印的民间识字课本《魁本对相四言杂字》中，印有“算盘”及算盘图，说明 14 世纪算盘已在中国民间流行.

约公元 1424—1429 年

＊（阿拉伯）卡西（al - Kāshī）著《圆周论》（1424 年）、《数学之钥》（1427 年）等书，引进了十进制分数，指出了 60 进制分数与十进分数互化方法，给出了二次式展开系数表和求 n 次方根的近似公式. 他还计算出 π 的 17 位小数近似值，从而打破了祖冲之的记录.

公元 1435 年

＊（意）阿尔贝蒂（Alberti，L. B.）著《论绘画》，阐发透视法数学原理，含有射影几何思想萌芽.

公元 1450 年

＊（中）吴敬著《九章算法比类大全》，书中出现珠算加、减法口诀.

＊（奥地利）波伊巴赫（Peurbach，G. von）校订古希腊数学原著，发展了托勒密思想.

约公元 1464 年

＊（德）缪勒（Müller，J.）别名雷格蒙塔努斯（Regiomontanus，J.）著《三角全书》，使三角学成为一门独立的数学学科.

公元 1478 年

＊（意）欧洲最早印刷版数学著作《特雷维索算术》，在意大利特雷维索出版.

公元 1482 年

＊（意）欧几里得（Euclid）的《几何原本》拉丁文译本，首次在威尼斯印刷出版.

公元 1484 年

＊（法）许凯（Chuquet，N.）完成论文“数的科学”（1484 年正式发表），给出二次方程负根，最早使用负指数幂、零指数幂.

公元 1489 年

＊（德）维德曼（Widmann，J.）在所著《商业中的奇妙速算法》（莱比锡，1489）中，首次使用符号“＋”、“－”表示加减运算.

公元 1494 年

＊（意）帕乔利（Pacioli，L.）著的《算术、几何、比和比例集成》印刷出版，它是欧洲中世纪第一本内容全面的数学书，其中复式簿记理论，促进了商业经营管理精确化.

约公元 1505—1515 年

＊（意）费罗（Ferro，S.）发现一类三次方程 $x^3+px=q$（p，q 为正数）的解法.

公元 1514 年

＊（德）迪勒（Dürer，A.）给出欧洲第一个幻方（4 阶）.

公元 1525 年

＊（波兰-奥地利）鲁多尔夫（Rudolff，C.）在用德文编写的教科书中创造了平方根“√”等数学符号，后来（法）笛卡儿（Descartes，R.）在《几何学》（1637）中将“√ ”改为“$\sqrt{\quad}$”.

公元 1527 年

＊（德）阿皮安努斯（Apianus，P.）在欧洲第一次得到 $(a+b)^9$ 展开式系数，并提出将分数和小数互化的简便方法.

公元 1535 年

＊（意）塔尔塔利亚（Tartaglia，N.）发现三次方程求根公式，但未公开发表，这一年 2 月 22 日，他在米兰与菲奥尔（Fior，A. M.）解三次代数方程的竞赛中获胜.

公元 1544 年

＊（意）费拉里（Ferrari，L.）发现四次代数方程求根公式.

＊（德）斯蒂费尔（Stifel，M.）在所著《算术大全》中引入“二项式系数”这一术语，并提出如何从 $(1+a)^{n-1}$ 计算 $(1+a)^n$ 的方法. 他还首次用圆括号作为运算的归并符号. 他将等比数列与等差数列作对比研究，孕育了对数的思想.

公元 1545 年

＊（意）卡尔达诺（Cardano，G.）所著《大术》出版，书中公开了三次和四次代数方程求根公式，并且还包括虚根的使用等方程的基本理论.

公元 1549—1576 年

＊（奥地利）雷蒂库斯（Rhaeticus，G. J.）用直角三角形边的比定义三角函数，并编制了详尽的 6 个三角函数表，为近代三角学奠定了基础.

公元 1551 年

＊（德）莱因霍尔德（Reinhold，E.）用符号“°”，“′”，“″”分别表示角度单位的度、分、秒.

公元 1557 年

＊（英）雷科德（Recorde，R.）在数学论文“砺智石”中，首次用符号“＝”表示相等，后来为（德）莱布

尼茨(Leibniz,G. W.)倡用通行.

公元 1570 年

*(英)比林斯利(Billingsley,H.)首次将《几何原本》译成英文出版.

公元 1572 年

*(意)邦贝利(Bombelli,R.)著《代数学》(初稿5卷陆续完成于1557—1560年,1572年出版了前3卷),系统总结了代数方程理论,建立了虚数运算法则,并首次用连分数来逼近平方根.

公元 1573 年

*(中)徐心鲁订正《盘珠算法》,原书编成年代应早于1450年,是现存最早绘有算盘图的珠算书.

*(荷兰)奥托(Otho,V.)重新发现了圆周率的近似分数 $\pi\approx355/113$,还最终完成了他的老师雷蒂库斯(Rhaeticus,G. J.)未完成的6种三角函数表的编制工作.

公元 1575 年

*(意)毛罗利科(Maurolico,F.)在所著《算术》中,第一次正式使用了数学归纳法证明数学命题.

*(古希腊)丢番图(Diophantus)著作的拉丁文译本在欧洲出版.

公元 1579 年

*(法)韦达(Viete,F.)著《三角学的数学基础》,将平面三角和球面三角进一步系统化,并提出了正切定理和许多三角恒等式.

公元 1583 年

*(丹麦)芬克(Fink,T.)著《圆的几何》,采用了三角符号" tangent"(正切)、"secant"(正割)等.

公元 1585 年

*(荷)斯蒂文(Stevin,S.)著的《论十进》中,给出十进制小数表示法及运算方法,并指出其优越性.

公元 1591 年

*(法)韦达(Viete,F.)在《分析方法入门》等著作中,创设了大量代数符号,并引入了未知量的运算,是最早的符号代数专著.他还改进了三次、四次代数方程的解法,发现了方程的根与系数关系(韦达定理).

公元 1592 年

*(中)程大位所著《直指算法统宗》在屯溪刊刻出版.该书集珠算之大成,流行国内数百年,对普及珠算起了很大作用.同时,东传日本、朝鲜,对日本珠算的发展起了促进作用.

公元 1593 年

*(法)韦达(Viete,F.)著《各种数学解法》一书,给出圆周率 π 的第一个解析表达式.

公元 1596 年

*(英)伦敦格雷沙姆学院设立几何学讲座席位,这是英国设立的最早的数学讲座席位.(英)布里格斯(Briggs,H.)为第一位讲座教授.

公元 1598 年

*(中)程大位的《算法纂要》在屯溪刊刻出版,该书是《算法统宗》的约简本.

公元 1604 年

*(德)开普勒(Kepler,J.)在"天文学的光学部分"一文中,提出平行线的无穷远点概念.

公元 1607 年

*(中)徐光启和意大利传教士利玛窦(Ricci,M.)合译《几何原本》前6卷(1611年刊刻),西方几何学第一次传入中国.

*(塞-克)盖塔尔迪(Ghetaldi,M.)著《阿波罗尼奥斯著作的现代化解释》,对几何问题的代数解法做了探索性研究.其后,又出版同一主题的《数学的分析和综合》(1630).

1608 年

*(德)罗特(Rothe,P.)首次提出"n 次代数方程有几个根"的猜想.

*(意)克拉维乌斯(Clavius,C.)著《代数学》,采用小数点作为整数部分与小数部分的分界.

1609 年

*(中)李之藻与意大利传教士利玛窦(Ricci,M.)合译《圆容较义》、《同文算指》前编、通编及别编(1614年出版),介绍西方几何算术算法.

*(德)开普勒(Kepler,J.)于1609—1619年间发现行星运动三大定律,成为数学应用的光辉范例.

1610 年

*(中)徐光启与意大利传教士利玛窦(Ricci,M.)合译《测量法义》,介绍西方测算知识.

1613 年

*(德)皮蒂斯楚斯(Pitiscus,B.)在《宝库》一书中,提出"三角学(Trigonometry)"一词,校正、完善了三角函数表.

*(意)卡塔尔迪(Cataldi,P. A.)著《关于求数的平方根的简易算法》,发展了连分数理论.

1614 年

*(英)纳皮尔(Napier,J.)的《论奇妙的对数》,6月在爱丁堡出版,公布了他20年的研究成果,发明了对数,给出了最早的对数表.

1615 年

*（德）开普勒（Kepler,J.）著《测量酒桶的新立体几何》,引入无穷小、无穷大概念和化曲为直的思想方法,是向近代积分的过渡.

*（英）布里格斯（Briggs,H.）建议对数改用以10为底,创立了常用对数.

*（法）韦达（Viete,F.）的《方程的认识和修正》出版,给出了代数方程根与系数关系的公式（韦达定理）.

1617 年

*（英）纳皮尔（Napier,J.）著《算筹书》,发明了"纳皮尔算筹".

*（英）布里格斯（Briggs,H.）编制了1—1000的常用对数表.

1619 年

*（英）斯彼德尔（Speidell,J.）提出以e为底的自然对数,并制成了1—1000自然对数表.

1620 年

*（瑞士）比尔吉（Bürgi,J.）独立发明对数,发表"进数表"论文.

*（英）冈特（Gunter,E.）编制了正弦、正切对数表.

1621 年

*（法）巴歇（Bachet de M. C. G.）翻译出版了（古希腊）丢番图（Diophantus）《算术》注释本.该书对（法）费马（Fermat,P. de）的启发很大.

1622 年

*（日）毛利重能的《割算术》出版,是日本保存最古老的算书.

*（英）奥特雷德（Oughtred,W.）发明直对数滑尺.

1623 年

*（英）冈特（Gunter,E.）发明对数计算尺.

1624 年

*（英）布里格斯（Briggs,H.）发表了《对数的算术》,将纳皮尔对数改为常用对数;公布了1—2000、90000—100000的14位对数表,并引进了"首数"概念.

1626 年

*（荷兰）吉拉尔（Girard,A.）著《三角学》,把三角学的主要定理组成一个严密体系,并首次正式使用符号tan（正切）和sec（正割）.

1627 年

*（日）吉田光由的《尘劫记》出版,珠算在日本迅速发展.

1628 年

*（荷兰）弗拉克（Vlacq,A.）补齐了布里格斯对数表中的空缺,编成了1—100000完整的对数表,成为几百年间最流行的对数表.

1629 年

*（法）费马（Fermat,P. de）写成《平面和立体的轨迹引论》手稿（1678年出版）,最早提出坐标思想,指出方程可以描述曲线,通过方程研究可以推断曲线性质.

*（荷兰）吉拉尔（Girard,A.）在《代数新发明》中正式提出代数基本定理,但未证明.书中还引入符号$\sqrt{-1}$和括号.

1631 年

*（中）徐光启与德国传教士邓玉函（Terrenz,J.）和汤若望（Von Bell,J. A. S.）合编《大测》,收入《崇祯历书》,三角学传入中国.

*（英）哈里奥特（Harriot,T.）遗著《实用分析术》出版,改进了（法）韦达（Viete,F.）的代数符号系统,首次使用不等号">"（大于）和"<"（小于）.他还提出过二进制.

1632 年

*（英）奥特雷德（Oughtred,W.）在论文"比例的圆"中,设计了圆盘计算尺.

1634 年

*（法）罗贝瓦尔（Roberval,G. P. de）写出《不可分法论》手稿（1693年出版）,独立提出不可分法,求出正弦线下一拱面积.

1635 年

*（意）卡瓦列里（Cavalieri,（F.）B.）的《不可分量几何学》出版,利用不可分法求面积、体积,给出关于体积的"卡瓦列里原理"（即祖暅原理）.

*（瑞士）古尔丁（Guldin,P.）在所著《论重心》中,利用（古希腊）帕普斯（Pappus,（A））《数学汇编》中一条定理（亦称"古尔丁定理"）确定旋转体的面积和体积.

1636 年

*（法）费马（Fermat,P. de）完成论文《求最大值与最小值的方法》（1679年发表）,提出用"准等式"求极值方法,成为以后求代数多项式一阶导数的法则.

1637 年

*（法）笛卡儿（Descartes,R.）于当年6月在莱顿匿名出版了哲学名著《方法论》,其中作为附录的

《几何学》第一次把变量、坐标引入了数学,创立了解析几何.标志着常量数学进入变量数学,在数学史上具有划时代意义.

*(法)费马(Fermat,P. de)把论文手稿"平面和立体的轨迹引论"寄给友人,这篇反映了坐标几何基本思想的论文,与(法)笛卡儿(Descartes,R.)的《几何学》同为解析几何奠基性文献.这使他与笛卡儿一道分享解析几何的发明权.同年,他在(法)巴歇(Bachet de M. C. G.)校订的(古希腊)丢番图(Diophantus)的《算术》第Ⅱ卷命题8的旁边空白处写下了著名的费马猜想(1665年发表,称为费马大定理):"将一个高于二次的幂分为两个同次幂之和,是不可能的";并声称他已发现一种巧妙证法,但未写出来.这一猜想引起后世数学家的极大研究热情.

1638 年

*(意)伽利略(Galilei,G.)的《关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话》出版,书中包含有无限集合等价性的思想,是(德)康托尔(Cantor,G. (F. P.))集合论的思想来源之一.

1639 年

*(法)德萨格(Desargues,G.)在所著《圆锥曲线论稿》中,给出无穷远点、无穷远直线概念,得出笛沙格定理,奠定了射影几何基础.

1640 年

*(法)帕斯卡(Pascal,B.)的《圆锥曲线论》发表,给出关于六边形的帕斯卡定理及400多条推论,推进了圆锥曲线论的研究.

*(法)费马(Fermat,P. de)在给朋友贝西(Bessy,F. de)的信中给出了"费马小定理".同年,他还宣布:2^{2^n}是一个质数公式(后为(瑞士)欧拉(Euler,L.)举出反例:$f(5)$是合数而被推翻).

1644 年

*(法)梅森(Mersenne,M.)在"物理-数学探索"论文中提出"梅森猜想"——当p为素数时,2^p-1是素数.后为(瑞士)欧拉(Euler,L.)举反例$M_{11}=2^{11}-1=2047=23\times89$是合数,而被推翻.

*(法)笛卡儿(Descartes,R.)的《哲学原理》出版.

*(意)托里切利(Torricelli,E.)在《几何学》中发展了不可分原理.

1646 年

*(荷兰)斯霍滕(Schooten,F. van)整理出版了《韦达文集》,对数学的发展起了推动作用.

1649 年

*(荷兰)斯霍滕(Schooten,F. van)把(法)笛卡儿(Descartes,R.)的《几何学》译成拉丁文出版,后在再版时给出了坐标变换的代数式.

*(法)博纳(Beaune,F. de)为(法)笛卡儿(Descartes,R.)的《几何学》写"简明注释",扩大了笛卡儿思想的传播.

1653 年

*(中)薛风祚与波兰传教士穆尼阁(Smogolenski,J.-N.)合编《比例对数表》,对数开始传入中国.

1654 年

*(法)帕斯卡(Pascal,B.)和费马(Fermat,P. de)在通信中讨论概率问题,为概率论奠定了思想基础.

*(法)帕斯卡(Pascal,B.)的《论算术三角形》出版,运用数学归纳法证明数学命题,确定了数学归纳法在数学证明方法中的地位.书中给出二项展开式系数三角形,被西方称为"帕斯卡三角形",即中国"贾宪三角形"(约1050年).

1655 年

*(英)沃利斯(Wallis,J.)在《无穷算术》一书中,引入无穷级数、无穷乘积,首创无穷大符号"∞"引入负指数、分数指数,把代数学扩展到分析学,对微积分的创立做了重要准备.同年,他的《论圆锥曲线》首次引进负的横、纵坐标轴,使解析几何研究扩大到整个平面,并得出圆锥曲线的代数方程.

1657 年

*(荷兰)惠更斯(Huygens,C.)所著《论赌博中的计算》,是概率论的早期名著,书中引进"数学期望"概念.

*(法)帕斯卡(Pascal,B.)在论文"论摆线"中,用积分思想解决摆线问题,对(德)莱布尼茨(Leibniz,G. W.)建立微积分有很大启发.

1659 年

*(英)沃利斯(Wallis,J.)在"蔓叶线论"一文中,应用"类比插值法"解决了蔓叶线求积问题.

*(法)帕斯卡(Pascal,B.)在"四分之一圆的正弦论"一文中,给出微分三角形概念,把无穷小引入数学,是微积分前史上的重要事件.

*(法-荷兰)维特(Witt,J. de)著《曲线概要》,是最早的解析几何教科书之一.

*(瑞士)雷恩(Rahn,J. H.)在一本代数书中首次采用除号"÷".

*(英)尼尔(Neile,W.)提出半立方抛物线$y^2=x^3$求长法,是计算曲线长度的最早记录.

1662 年

*(英)格兰特(Graunt,J.)发表"对死亡公报的

自然观察和政治观察"的论文,其中发现人口统计中的某些规律,是统计学的早期重要文献.

1663 年

* (意)卡尔达诺(Cardano,G.)的《游戏机遇学说》出版,讨论赌博中的概率问题.

* (英)剑桥大学设立路卡斯(Lucas)数学讲座席位,首位讲座教授是(英)巴罗(Barrow,I.).

1664 年

* (英)牛顿(Newton,I.)将二项式定理推广到有理指数情形(1676 年发表).

1665 年

* (英)巴罗(Barrow,I.)所著《几何学讲义》(1670 年出版)以几何形式表达了求切线与求曲线下面积间的互逆关系,触及了微积分基本定理.

1666 年

* (英)牛顿(Newton,I.)写于 1666 年 6 月的"流数短论",总结他在 1664—1666 年中微积分研究的成果,是微积分学的第一篇论文(当时未发表).同年,牛顿给出 $\arcsin(x)$、$\arctan(x)$ 的幂级数展开式.

* (德)莱布尼茨(Leibniz,G. W.)的"组合的艺术"的中,孕含有数理逻辑思想:把理论的论证归结为一种计算的结果.

1667 年

* (英)格雷果里(Gregory,J.)的"论圆和双曲线的实际求积"发表,给出函数一个最初定义,并最早注意到级数的收敛和发散问题.

1668 年

* (法-英)梅卡托(Mercator,N.)论"对数技术"发表,得到对数函数的幂级数展开式.

* (英)格雷果里(Gregory,J.)所著《几何的通用部分》,给出了求曲线长的方法,证明切线问题是面积问题的逆问题.

1669 年

* (英)牛顿(Newton,I.)关于微积分的第二篇重要论文"运用无穷多项方程的分析学"写成(1711 年发表),给出求变量变化率的普通方法,指出通过面积可以求变化率的逆过程,揭示了微积分的基本性质,为微积分学奠定了基础.同年,牛顿给出 $\sin(x)$、$\cos(x)$和 e^x 的幂级数展开式.

* (英)雷恩(Wren,C.)发现单叶双曲面上有两组母线.

1670 年

* (英)格雷果里(Gregory,J.)在与牛顿(Newton,I.)的通信中提出了"格雷果里-牛顿插值公式".

* (英)《阿基米德遗著全集》在牛津出版.

1671 年

* (英)牛顿(Newton,I.)完成《流数法和无穷级数》(1736 年发表),解决了求流数(导数)、求积分问题,给出一套具体运算方法.同年,牛顿用几何方法给出了函数的四则运算,以及幂的微分法.

1672 年

* (中)梅文鼎著《方程论》(1690 年出版).

1673 年

* (德)莱布尼茨(Leibniz,G. W.)在手稿中独立发现求曲线切线是求面积的逆问题这一微积分原理.同年,他制成一台可以进行四则运算的机械计算器.

* (英)牛顿(Newton,I.)著《普通的算术》(1707 年出版),给出一元二次方程的判别式、多项式实根上界定理.

* (荷兰)惠更斯(Huygens,C.)著《振动的时钟》,把几何学引入力学领域,给出了渐近线、渐屈线、曲率中心和曲率半径.

1674 年

* (德)莱布尼茨(Leibniz,G. W.)将 $\pi/4$ 展开成交错数列,给出 π 的第一个无穷级数表达式.

* (日)关孝和(Seki,Takakazu)著《发微算法》,为日本和算奠基.

1675 年

* (德)莱布尼茨(Leibniz,G. W.)在手稿中创用积分符号"$\int$"和导数符号$\frac{dy}{dx}$,这对微积分在欧洲大陆的发展起了重要推动作用.

1676 年

* (英)牛顿(Newton,I.)著《曲线求积术》(1704 年作为《光学》的附录发表),对高次曲线进行研究,对三次曲线做了系统分类.

* (德)莱布尼茨(Leibniz,G. W.)在手稿中叙述了幂级数的微分法和积分法.

1677 年

* (德)莱布尼茨(Leibniz,G. W.)在手稿中给出函数和、差、积、商、幂、方根的微积分法则.

1678 年

* (德)莱布尼茨(Leibniz,G. W.)在手稿中给出对数函数的微分法.同年,他对 $n=4$ 证明了费马猜想.

*（中）梅文鼎著《筹算》，介绍西方纳贝尔筹算.

1679 年

*（法）拉伊尔（La Hire，P. de）在《圆锥曲线新论》中，对三维解析几何做了讨论.

*（德）莱布尼茨（Leibniz，G. W.）在《论二进制》中，给出二进制算法. 同年，他在给（荷兰）惠更斯（Huygens，C.）的信中，引入了变数指数.

1680 年

*（英）牛顿（Newton，I.）在手稿中给出三角函数微分法则.

1682 年

*（德）莱布尼茨（Leibniz，G. W.）和门克（Mencke，O.）创办科学期刊《博学者学报》（亦作学艺），他的大部分数学论文都发表在该杂志上.

*（德）《教师学报》创刊. 该刊是数学家发表学术研究论文的重要阵地.

1683 年

*（日）关孝和（Seki，Takakazu）所著《点窜计算的表示方法解优题之法》发表，提出了相当于行列式的一种算法.

1684 年

*（德）莱布尼茨（Leibniz，G. W.）论"一种求极大、极小值和切线的新方法"发表，这是最早公布发表的微积分论文，具有划时代意义. 文中明确给出了微分定义、函数和、差、积、商及幂的微分法则，及其对于求极值、拐点和作切线的应用.

*（中）梅文鼎的《平三角举要》和《弧三角举要》出版.

1685 年

*（英）沃利斯（Wallis，J.）的《代数学》出版，突破只研究齐次方程的限制，使代数从几何的桎梏中解放出来. 该书首次提出"对数尾数"一词.

1686 年

*（德）莱布尼茨（Leibniz，G. W.）发表"潜在的几何与分析不可分和无限"论文，给出对数函数、指数函数微分法，引进高阶无穷小、高阶微分概念；创立积分法，求积符号"∫"第一次出现在印刷出版物上. 这是第一篇积分学文献.

1687 年

*（英）牛顿（Newton，I.）的《自然哲学的数学原理》出版，第一次公开了他的微积分重要成果，是一部现代科学的经典著作. 该书建立了牛顿力学体系.

1690 年

*（瑞士）雅各布第一·伯努利（Bernoulli，Jacob Ⅰ）在《教师学报》上重提悬链问题，引起当时数学界重视. 同年，（德）莱布尼茨（Leibniz，G. W.）、（荷兰）惠更斯（Huygens，C.）和（瑞士）约翰第一·伯努利（Bernoulli，Johann Ⅰ）都给出了自己的解答.

1691 年

*（法）罗尔（Rolle，M.）论"任意次方程的一个解法证明"发表，提出"罗尔定理"的最初形式，但未加证明.

*（德）莱布尼茨（Leibniz，G. W.）提出解一阶常微分方程的分离法变量.

1692 年

*（德）莱布尼茨（Leibniz，G. W.）正式使用"坐标"一词，并给函数下一个定义. 他还给出求一簇曲线包络的普通方法.

*（中）梅文鼎《几何补编》等出版.

1693 年

*（德）莱布尼茨（Leibniz，G. W.）发表微积分基本定理. 同年，他在给（法）洛必达（L'Hospital，G.-F.-A. de）的信中给出了三阶行列式展开式，探讨了行列式与方程解的关系.

1694 年

*（瑞士）雅各布第一·伯努利（Bernoulli，Jacob Ⅰ）给出直角坐标和极坐标的曲率半径公式，这是系统使用极坐标的开始. 他还讨论了双纽线、曳物线、对数螺线的性质.

*（瑞士）约翰第一·伯努利（Bernoulli，Johann Ⅰ）发现求不定式极限法则，并将此法则告诉了他的学生（法）洛必达（L'Hospital，G.-F.-A. de）.

1695 年

*（德）莱布尼茨（Leibniz，G. W.）给出函数积的逐次微分法公式.

*（瑞士）雅各布第一·伯努利（Bernoulli，Jacob Ⅰ）在《教师学报》上发表的论文中提出"伯努利方程"及其解法.

*（荷兰）纽文泰特（Nieuwentijt，B.）发表"无穷小分析"，他与（德）莱布尼茨（Leibniz，G. W.）就微积分理论基础展开了争论.

1696 年

*（瑞士）约翰第一·伯努利（Bernoulli，Johann Ⅰ）在《教师学报》上提出"最速降线问题"，引起数学界广泛关注，促使变分法的诞生.

*(法)洛必达(L'Hospital,G.-F.-A. de)出版《无穷小分析》,书中给出由(瑞士)约翰第一·伯努利(Bernoulli,Johann Ⅰ)发现的求不定式极限的法则(洛必达法则).该书是第一本系统的微积分教科书.对微积分学的传播起了很大作用.

*(英)沃利斯(Wallis,J.)把有理数定义为循环小数.

1697 年

*(英)牛顿(Newton,I.)、(德)莱布尼茨(Leibniz,G. W.)、(法)洛必达(L'Hopital,G.-F.-A. de)和(瑞士)雅各布第一·伯努利(Bernoulli,Jacob Ⅰ)就"最速降线问题"各自做出了解答.雅各布第一·伯努利还用分析方法解决了等周问题.从而促进了变分法的创立和发展.

*(德)莱布尼茨(Leibniz,G. W.)在"几何特性"论文中,提出"位置几何学",孕含有组合拓扑的思想.

1698 年

*(瑞士)雅各布第一·伯努利(Bernoulli,Jacob Ⅰ)把函数定义为由变量 x 和常量所构成的式子.

1699 年

*(瑞士)丢利埃(Duillier)声称(英)牛顿(Newton,I.)比(德)莱布尼茨(Leibniz,G. W.)早发明微积分,认为莱布尼茨剽窃了牛顿成果.由此引起了一场持久不息的微积分发明权大争论,致使英国学者拒绝使用莱布尼茨符号,延缓了英国微积分的发展.后经科学家调查证明,莱布尼茨和牛顿各自独立发明了微积分,二人分享发明权.

1700 年

*(德)在莱布尼茨(Leibniz,G. W.)提议下成立柏林科学院,他任第一任院长.

*(中)梅文鼎著《环中黍尺》,证明了球面三角的余弦定理,建立了球面投影体系.

1701 年

*(德)莱布尼茨(Leibniz,G. W.)向巴黎科学院提交论文"试论新数的科学",论述二进制理论.

1702 年

*(德)莱布尼茨(Leibniz,G. W.)在《教师学报》上发表论文,给出有理函数分部积分法.

*(瑞士)约翰第一·伯努利(Bernoulli,Johann Ⅰ)在柏林科学院《纪要》上,发表分部积分法.

*(德)莱布尼茨(Leibniz,G. W.)也独立发现了此方法.

1703 年

*(德)莱布尼茨(Leibniz,G. W.)把二进制和中国《易经》中六爻八卦联系起来,撰写了"关于仅用0与1两个记号的二进制算术的说明",并附有其效用及关于据此解释古代中国伏羲图的探讨,送交巴黎科学院和伦敦皇家学会.

1704 年

*(英)牛顿(Newton,I.)早年写的论文"流数法"和"曲线求积术"公开发表.

*(瑞士)雅各布第一·伯努利(Bernoulli,Jacob Ⅰ)的《关于无穷级数及其有限和的算术应用》出版,它是级数理论的第一本教科书.

1705 年

*(中)清代康熙帝爱新觉罗·玄烨接见梅文鼎,钦赐"绩学参微"予以表彰.

1706 年

*(英)琼斯(Jones,W.)在所著《新数学引论》中,首先使用 π 表示圆周率后,经(瑞士)欧拉(Euler,L.)倡导,被广泛使用.

1707 年

*(英)牛顿(Newton,I.)著《广义算术》,并给出代数学的基本概念,给出加减消元法和代入消元法,以及正、负根个数的判别法.

*(英)棣莫弗(De Moivre,A.)在一篇论文中,已隐含后来被人们称作的"棣莫弗公式".

1708 年

*(法)蒙莫尔(Montmort,P. R. de)的《赌博分析》是有关概率论的早期专著之一.

1709 年

*(日)荒木村英整理出版了(日)关孝和遗著《括要算法》

1710 年

*(中)梅文鼎的《方圆幂积说》、《堑堵测量》出版.

*(德)柏林科学院公布了莱布尼茨(Leibniz,G. W.)的乘法计算机的书面说明.

1711 年

*(英)牛顿(Newton,I.)著的《使用级数、流数等的分析》、《差分法》、《利用无穷多项式方程的分析学》出版.

1713 年

*(瑞士)雅各布第一·伯努利(Bernoulli,Jacob Ⅰ)遗著《猜度术》出版,提出大数定律——伯努

*(德)莱布尼茨(Leibniz,G. W.)给出交错级数的收敛性的判别法.

*(中)清代康熙帝下诏编纂《数理精蕴》.

1714 年

*(德)莱布尼茨(Leibniz,G. W.)出版《微分学的历史和起源》,回顾和总结微积分创立的思想过程.书中把函数定义为"依赖于一个变量的量".

*(英)科茨(Cotes,R.)在《对数计算》中给出与后来(瑞士)欧拉(Euler,L.)(1740)发现的公式的等价公式:$ix=\mathrm{Ln}(\cos x+i\sin x)$.

1715 年

*(英)泰勒(Taylor,B.)发表"正的和反的增量方法",提出了著名的"泰勒公式"(1712 年发现),奠定了有限差分法的基础.

*(瑞士)约翰第一·伯努利(Bernoulli,Johann Ⅰ)在给(德)莱布尼茨(Leibniz,G. W.)的信中提出三维空间坐标系.同年,他在《推想的艺术》中给出自然数幂的二项式的严格证明.

1717 年

*(英)斯特林(Stirling,J.)发表论文"牛顿的三次曲线",证明了(英)牛顿(Newton,I.)提出的三次曲线分类的命题,把一般二次曲线化为几类标准型.

1718 年

*(法-英)棣莫弗(De Moivre,A.)的《机会论》出版,其中包括"棣莫弗-拉普拉斯定理"的最初形式以正态曲线的特例,对概率论的发展起了重要推动作用.

1719 年

*(英)泰勒(Taylor,B.)的《线性透视原理》发表,对制图学的发展有一定影响.

1720 年

*(英)马克劳林(Maclaurin,C.)的《结构几何学或关于一般曲线的说明》发表,创立了高次平面曲线理论.

*(法)洛必达(L'Hopital,G.-F.-A. de)的《圆锥曲线分析论》出版.

1721 年

*(中)清代康熙帝钦定的《数理精蕴》编成.

1723 年

*(中)《梅氏历算全书》由兼济堂刊刻出版,该书收集了梅文鼎大部分历算著作.

1724 年

*(意)黎卡提(Riccati,J. F.)提出"黎卡提方程".这为高阶方程降阶提供了一种求解方案.

*(俄)俄罗斯在圣彼得堡建立圣彼得堡科学院.

1725 年

*(瑞士)尼古拉第三·伯努利(Bernoulli,Nicolaus Ⅲ)提出"彼得堡赌法悖论".

1726 年

*(瑞士)欧拉(Euler,L.)应邀到圣彼得堡科学院工作和讲学.

1727 年

*(瑞士)欧拉(Euler,L.)将一类二阶微分方程,通过变换化为一阶方程.

1728 年

*(瑞士)欧拉(Euler,L.)采用符号 e 表示自然对数的底数.

*(瑞士)约翰第一·伯努利(Bernoulli,Johann Ⅰ)向(瑞士)欧拉(Euler,L.)提出测地线问题,欧拉给出了曲面上测地线微分方程的解.

1729 年

*(德)赫尔曼(Hermann,J.)在(英)牛顿(Newton,I.)和(瑞士)雅各布第一·伯努利(Bernoulli,Jacob Ⅰ)工作的基础上,提出了完整的极坐标概念,给出了直角坐标与极坐标间的变换公式.

*(中)年希尧《视学》刊刻出版,是最早问世的画法几何学著作.

*(德)迈尔(Mayer,F. C.)在所著《三角学》中,使用了新的三角符号体系.

1730 年

*(法-英)棣莫弗(De Moivre,A.)在《分析杂论》中最早使用概率积分,并给出了一个近似公式(即今"斯特林公式").

*(英)斯特林(Stirling,J.)的"微分法"发表,给出了 $\mathrm{Log}(n!)$ 展成无穷级数表达式,由此可以得到"斯特林公式"(实则为(法-英)棣莫弗(De Moivre,A.)发现的).

*(法)拉比勒(Rabuel,C.)发表《对笛卡儿先生的几何学的注释》,系统论述了平面坐标法,给出了四个象限点的记法.

1731 年

*(法)克莱罗(Clairaut,A.-C.)发表《关于双重曲率曲线的研究》,开创了空间曲线和古典微分几

何的研究.

1732年

*(瑞士)欧拉(Euler,L.)对卡尔达诺三次方程的解法进行全面讨论,指出三次方程总有三个根.他还举出 $f(5)=2^{2^5}+1$ 是合数,否定了费马猜想.

1733年

*(法)克莱罗(Clairaut,A.-C.)发表《关于极大和极小的一些问题》,阐述了变量极值计算的历史.

*(英)布雷肯里奇(Braikenridge,W.)发表《关于描述曲线几何草图》,提出了高阶曲线分类法.

*(意)萨凯里(Saccheri,G.)的《免除所有污点的欧几里得几何》发表,对欧几里得第五公设使用反证法"证明",成为非欧几何的先驱.

1734年

*(英)贝克莱(Berkeley,G.)主教在致分析学家、数学家的一封信中,提出"无穷小悖论",向数学分析的基础挑战,引发了"第二次数学危机".

*(瑞士)欧拉(Euler,L.)引进函数符号 $f(x)$;提出积分因子概念,扩大了可积类型;给出了"欧拉常数"和二阶偏导数与微分次序无关的条件.

1735年

*(瑞士)欧拉(Euler,L.)导出位势方程,提出恰当方程概念.

1736年

*(英)牛顿(Newton,I.)遗著《解析几何》出版,提出曲率中心、密切圆概念,并给出曲率公式.

*(瑞士)欧拉(Euler,L.)解决了"柯尼斯堡七桥问题",这是拓扑学最早的范例.同年,欧拉证明了"费马小定理".

1737年

*(瑞士)欧拉(Euler,L.)证明了 e 与 e^2 是无理数,并发现自然数素因数分解的惟一性(算术基本定理).

1738年

*(瑞士)欧拉(Euler,L.)给出二重不定积分.

*(瑞士)丹尼尔第一·伯努利(Bernoulli,Daniel Ⅰ)的《流体动力学》出版,给出伯努利定理.

1739年

*(法)克莱罗(Clairaut,A.-C.)的《积分学的一般研究》出版,提出解 $Pdx+Qdy+Rde=0$ 一类微分方程的积分因子方法.至此,解一阶常微分方程的初等积分法基本完成.

1741年

*(法)克莱罗(Clairaut,A.-C.)发表《几何原理》,讨论欧几里得第五公设.

1742年

*(英)马克劳林(Maclaurin,C.)发表《流数通论》,引进了函数的幂级数展开的"马克劳林公式",给出正项级数的积分判别法及"欧拉-马克劳林公式".

*(瑞士)约翰第一·伯努利(Bernoulli,Johann Ⅰ)的《积分学教程》出版,首次对微积分作系统阐述,彻底解决了有理分式的积分法.

*(德)哥德巴赫(Goldbach,C.)在给(瑞士)欧拉(Euler,L.)的信中,提出"哥德巴赫猜想".

*(瑞士)欧拉(Euler,L.)在给朋友的一封信里,明确陈述了代数基本定理(未证明).

*(英)马克劳林(Maclaurin,C.)证明了负整数幂的二项式定理.

1743年

*(法)克莱罗(Clairaut,A.-C.)在《地球外形理论》中,提出了曲线积分概念.

*(瑞士)欧拉(Euler,L.)正式发表关于三角函数和复数关系的"欧拉公式 ".

*(法)达朗贝尔(d'Alembert,J. le R.)的《论动力学》出版,提出动力学基本定律"达朗贝尔原理".

*(英)辛普森(Simpson,T.)发现近似求积分公式——"辛普森公式".

1744年

*(瑞士)欧拉(Euler,L.)发表"寻求具有某种极大或极小性质曲线的技巧",导出了变分法的"欧拉方程",发现某些极小曲面.这标志着变分学作为一个新数学分支的诞生.同年,欧拉给出超越数定义,发现欧拉螺线.

*(法)达朗贝尔(d'Alembert,J. le R.)推广了偏导数的计算法.

1747年

*(法)达朗贝尔(d'Alembert,J. le R.)发表"弦振动研究",给出一类二阶偏微分方程的解法——达朗贝尔方法,开创了偏微分方程论.

1748年

*(瑞士)欧拉(Euler,L.)所著的《无穷分析引论》是一部划时代的分析学系统著作,对微积分和以后的傅里叶级数的发展,起了很大的推动作用.它同时也是一部现代形式的解析几何论著,给出了坐标平移、旋转公式,引进了曲线参数形式;给出了极坐标的现代形式;给出了三角函数新定义,导出了全部

三角函数公式;引入了弧度制,采用了通用的三角符号;把函数定义为:"由一个变量与一些常量通过任何方式形成的解析式."

* (英)马克劳林(Maclaurin,C.)的《代数论著》出版,给出行列式的基本概念及展开法则,发表了用行列式解线性方程组的方法(克莱姆法则).

1750 年

* (瑞士)欧拉(Euler,L.)给出凸多面体的"欧拉公式",这是拓扑学的基本定理之一.同年,他发表了所发现的 64 对亲和数.

* (法)达朗贝尔(d'Alembert,J. le R.)在法国《百科全书》上,把导数定义为增量比的极限.

* (法)克莱姆(Cramer,G.)在《代数曲线分析引论》一书中,引入 n 阶矩阵,给出克莱姆法则(两年前已为(英)马克劳林(Maclaurin,C.)得到).

1752 年

* (瑞士)欧拉(Euler,L.)的《流体运动原理》出版,首次出现"拉普拉斯方程".

* (法)达朗贝尔(d'Alembert,J. le R.)的《关于流体阻力的新理论》出版,得到复变函数解析条件,成为复变函数论先驱.

* (法)克莱罗(Clairaut,A.-C.)的《月球理论》出版,用微分方程级数解法,首次给出"三体问题"近似解,并据此预报了 1759 年哈雷彗星的近地日期.

1754 年

* (法)蒙蒂克拉(Montucla,J. É.)的《圆面积研究的历史》出版,这是研究圆周率史的第一本专著.

* (法)达朗贝尔(d'Alembert,J. le R.)提出"建全极限理论,以将分析置于牢固的基础上"的建议.

* (瑞士)欧拉(Euler,L.)引入"二次剩余"概念.

1755 年

* (瑞士)欧拉(Euler,L.)的《微分学原理》出版,引进了差分算子"△"和求和符号"Σ",并研究了二元函数的极值.

1756 年

* (瑞士)欧拉(Euler,L.)的《变分计算初步》出版,为"变分法"正式定名.

1758 年

* (法)蒙蒂克拉(Montucla,J. É.)的《数学史》一、二卷出版,这是世界上第一部完整的数学史著作.

* (英)贝叶斯(Bayes,T.)著《机会的学说概论》(1763 年出版),它对于现代概率论和数理论统计有着重要的意义.

1760 年

* (法)拉格朗日(Lagrange,J.-L.)提出二阶线性偏微分方程解的存在性问题.

* (瑞士)欧拉(Euler,L.)发表"论确定不定积分公式的极大和极小的一个新方法"、"关于曲面上曲线的研究",建立了曲面理论,引进了主法线截面、主曲率等概念,成为微分几何发展史上的里程碑.

* (瑞士)欧拉(Euler,L.)引入 γ 函数、β 函数和欧拉函数,并开始进行二重积分的研究.此外,他还证明了椭圆积分的加法定理.

1761 年

* (德)朗伯(Lambert,J. H.)证明 π,e 是无理数(1768 年发表).

* (中)梅珏成编选梅文鼎 23 种天文、数学著作,刊印成《梅氏丛书辑要》.

1763 年

* (中)明安图的《割圆密率捷法》初稿写成,独创 6 个三角函数级数展开式.

* (法)达朗贝尔(d'Alembert,J. le R.)得到广义波动方程,提出微分方程边值和特征值问题.

* (德)克吕格尔(Klügel,G. S.)在论文中指出"人们接受欧几里得平行公理,是基于经验".这包含有非欧几何思想.

1764 年

* (法)贝祖(Bézout,É.)发表《代数方程的一般理论》,给出 n 元齐次线性方程组有非零解的充分必要条件,和(法)克莱姆(Cramer,G.)一道用行列式建立了线性方程组的一般理论.

1765 年

* (瑞士)欧拉(Euler,L.)发表《三角形的几何学》,提出了"欧拉线"定理.

* (法)达朗贝尔(d'Alembert,J. le R.)所著《数学论丛》(1761—1780 年间陆续出版),给出了判别级数绝对收敛准则.

1766 年

* (瑞士-法)朗伯(Lambert,J. H.)所著《平面线论》(1786 年发表),对非欧几何的产生有一定作用.

1767 年

* (法)拉格朗日(Lagrange,J.-L.)发表《关于解数值方程》,提出分离代数方程实根方法和求近似根方法.

* (德)卡斯滕(Karsten,W. J. G.)出版《数学体

系》,系统地使用了字母符号.

1768 年

*（瑞士）欧拉（Euler,L.）的《积分学原理》出版,它是一部积分学的经典著作.

*（德）朗伯（Lambert,J.H.）引入双曲正弦、双曲余弦,全面研究双曲函数.

*（德）卡斯滕（Karsten,W.J.G.）给出虚数对数的几何解释（卡斯滕图）.

1769 年

*（法）贝祖（Bézout,É.）的《数学教程》6 卷出齐,它是西欧当时流行的数学教材之一.

1770 年

*（英）华林（Waring,E.）发表《代数沉思录》,提出和记载了许多著名数论问题,其中包括"华林问题"、"哥德巴赫问题"和"威尔森问题".引起数学家的研究兴趣.

*（瑞士）欧拉（Euler,L.）的《代数学引论》出版,它是欧洲几代人代数学的教科书.

*（德）克吕格尔（Klügel,G.S.）著《分析三角学》,统一了三角学诸公式.

1771 年

*（法）拉格朗日（Lagrange,J.-L.）发表"关于代数方程的思考",用根的置换研究代数方程可解性,指出了用代数运算解一般的五次方程看来是不可能的.他是（挪威）阿贝尔（Abel,N.H.）、（法）伽罗瓦（Galois,E.）研究这方面理论的先行者.他还在（瑞士）欧拉（Euler,L.）工作的基础上,解决了"华林问题"和"威尔森问题"（威尔森定理）.

*（法）蒙日（Monge,G.）完成《关于曲率半径以及重曲率曲线的各种拐点》（1785 年发表）,将曲线、曲面的性质用偏微分方程来描述.

*（法）范德蒙德（Vandermonde,A.-T.）对行列式理论做了系统的逻辑论述.

1772 年

*（法）拉普拉斯（Laplace,P.-S.）发表了《对积分和世界体系的探讨》,推广了"范德蒙德法则",给出了关于行列式的拉普拉斯定理.

*（法）拉格朗日（Lagrange,J.-L.）引入三重积分概念.

*（英）华林（Waring,E.）论《代数曲线的性质》发表,对二次曲线做了详细分类.同年,他在所著《关于一阶偏微分方程的积分》中,将一阶非线性方程化为线性方程,系统地完成了一阶微分方程理论.

1773 年

*（中）孔继涵刊刻《算经十书》（微波榭丛书本）,以《数术记遗》代替失传的《缀术》.

1774 年

*（法）拉格朗日（Lagrange,J.-L.）发表《关于微分方程的特解研究》,系统研究了一阶常微分方程的特解与通解间的关系,给出"拉格朗日方法".

*（瑞士）欧拉（Euler,L.）证明了分指数的二项式定理.

1775 年

*（英）兰登（Landen,J.）的《数学论文集》出版,给出"兰登定理",对椭圆积分发展做出了贡献.

*（法）巴黎科学院决定不再审查"三等分角"等一类作图问题的论文.

1776 年

*（英）华林（Waring,E.）的《分析沉思录》出版,给出级数收敛的比值判别法（即柯西判别法）.

1777 年

*（瑞士）欧拉（Euler,L.）发表《微分公式》,首次使用符号"i"表示 $\sqrt{-1}$.

*（法）布丰（Buffon,G.-L.L.de）在"能辨是非的算术试验"论文中,发表了著名的"投针问题"试验报告,开几何概率研究的先河.

1778 年

*（德）兴登堡（Hindenburg,C.F.）发表第一篇组合学论文.

1779 年

*（法）拉普拉斯（Laplace,P.-S.）使用"定积分"术语.

*（法）拉格朗日（Lagrange,J.-L.）阐明条件极值理论.

1784 年

*（法）勒让德（Legendre,A.-M.）在"行星外形研究"论文中,给出"勒让德多项式".

1785 年

*（法）卡里塔特（Caritat,A.N.）发表"简论分析对从众多意见中做出决断的概率的应用",给出概率论应用之例,在概率论史上占有地位.

1786 年

*（法）勒让德（Legendre,A.-M.）发表"关于在变分学中区分极大极小的方法",给出极值存在条件.

1790 年

*（法）勒让德（Legendre,A.-M.）发表"论重积分",引入球函数.

1794年

*(法)勒让德(Legendre,A.-M.)的《几何学基础》(《新欧几里得几何原本》)出版,为当时标准的几何教科书,书中证明了π与π^2的无理性.

*(德)高斯(Gauss,C.F.)发现最小二乘法(1809年发表).

1795年

*(法)普莱费尔(Playfair,J.)校订《几何原本》,采用了与欧几里得第五公设等价的平行公理:"过直线一点只能作一条直线与已知直线不相交(平行)",为后世教科书所广泛采用.

*(法)蒙日(Monge,G.)发表《分析在几何中的应用的活页论文》,开创了微分几何早期的研究工作.

1796年

*(德)高斯(Gauss,C.F.)解决了正17边形的尺规作图.

*(法)拉格朗日(Lagrange,J.-L.)的《师范学校数学基础教程》出版,给出"拉格朗日插值公式".

*(中)焦循撰《释轮》、《释椭》及《释弧》.

*(中)汪莱著《衡斋算学》1册、2册,后又续著3册—7册(1798—1805),对于方程论研究有独立于西算的创见.

1797年

*(德)高斯(Gauss,C.F.)发现椭圆函数双周期性.

*(法)拉格朗日(Lagrange,J.-L.)的《解析函数论》出版,用代数方法建立微分学,给出微分中值定理,采用导数符号$f'(x)$,并对函数作抽象处理,孕育有实变函数论思想.

*(德)高斯(Gauss,C.F.)在博士论文中,第一次给代数基本定理以严格证明,开辟了数学中存在性问题证明的新途径.

*(法)克拉瓦的《微分和积分论》出版,给出微分系数、有限积分、无限积分等名词,是19世纪欧洲标准的微积分教科书.

*(挪威-丹麦)韦塞尔(Wessel,C.)发表《方向的分析表示——特别应用于平面与球面多边形的测定》,第一次引进复平面概念,给出了复数及其运算的向量表示.

1798年

*(法)勒让德(Legendre,A.-M.)的《数论研究》出版,把数论研究成果系统地作了整理,并首先提出"数论"一词.

1799年

*(中)阮元主编的《畴人传》46卷(1795—1799)完成.这是中国第一部数学家、天文学家传记,具有很高的史料价值.

*(意)鲁菲尼(Ruffini,P.)发表《方程的一般理论》,证明了不存在一个预解式能满足一个低于5次的方程,推进了(法)拉格朗日(Lagrange,J.-L.)关于代数方程可解性研究.

*(法)拉普拉斯(Laplace,P.-S.)的《天体力学》5卷(1799—1825)开始分卷出版.它把力、速度、加速度等物理量算术化,把解析方法用于质点固体力学、流体力学,奠定了现代力学的基础.书中引入"拉普拉斯方程".

*(法)蒙日(Monge,G.)的《画法几何学》出版,使画法几何学成为数学的专门分支.

*(法)蒙蒂克拉(Montucla,J.É.)的《数学史》增订版1卷、2卷出版(3卷、4卷1802年出版).它是数学史的一部经典著作,影响深远.

1800年

*(德)高斯(Gauss,C.F.)发现椭圆函数.

1801年

*(德)高斯(Gauss,C.F.)的《算术研究》出版,书中的二次互反律、同余理论等分圆周的"高斯定理"等,开创了近代数论.

*(中)汪莱在《衡斋算学》第五册中提出了高次三项式方程正根存在的判别条件及正根个数问题.

*(法)拉格朗日(Lagrange,J.-L.)的《函数计算讲义》出版.

*(法)卡诺(Carnot,L.(-N.-M.))的《关于几何图形的相互关系》及其后两部著作成为射影几何的先驱之作.

*(德)高斯(Gauss,C.F.)系统地使用符号"i"和"$a+bi$",从此便通行于世界各国.

1802年

*(法)蒙日(Monge,G.)等著《代数在几何中的应用》,证明二次曲面的每一个平面截口是一条二次曲线.

*(法)蒙蒂克拉(Montucla,J.É.)的遗著《数学史》3卷、4卷出版.

*(意)阿巴蒂(Abbati,P.)证明了拉格朗日定理.

*(法)布里昂雄(Brianchon,C.J.)提出了布里昂雄定理(帕斯卡定理对偶定理).

1803年

*(法)卡诺(Carnot,L.(-N.-M.))在《位置几何学》中,首次引入向量概念.射影几何开始复兴.

1804年

*(法)蒙日(Monge,G.)的《分析在几何中的

应用》出版，这是第一部系统的微分几何论著.

1805 年

*（法）勒让德（Legendre，A.-M.）发表“确定彗星轨道的新方法”，独立发现最小二乘法.

1806 年

*（瑞士）阿尔冈（Argand，J. R.）论“虚量，它的几何解释”发表，给出了复数的几何解释.

*（法）卡诺（Carnot，L.（-N.-M.））的“关于斜截理论”发表，给出四点交比不变性定理.

*（法）泊松（Poisson，S.-D.）推广了大数定律，提出了泊松分布.

1807 年

*（法）傅里叶（Fourier，J.-B.-J.）在热传导研究中，提出任意函数的三角级数表示法，即傅里叶级数. 他的思想总结在 1822 年发表的《热的分析理论》之中.

1809 年

*（德）高斯（Gauss，C. F.）发表《天体沿圆锥曲线绕日运动的理论》，首次提出了最小二乘法原理，创建了误差理论.

1810 年

*（法）热尔岗（Gergonne，J.-D.）创办了《纯粹与应用数学年刊》，为最早的数学专门期刊.

1811 年

*（德）高斯（Gauss，C. F.）给出了分数指数幂、负指数幂的二项展开式的严格证明. 同年，他提出用实数序对(a,b)表示复数.

*（德）勒让德（Legendre，A.-M.）所著《积分学练习》第一卷出版，它与其后的两卷（1817—1826）汇集了勒让德研究椭圆积分的最早一批成果.

1812 年

*（法）拉普拉斯（Laplace，P.-S.）的《概率的分析理论》出版，给出概率的古典定义，总结了这一时代的概率论研究，标志着近代概率论的诞生. 书中还引入了拉普拉斯变换.

*（德）高斯（Gauss，C. F.）发表“无穷级数的一般研究”，这是级数收敛问题的研究，得出“高斯超几何级数”，开创了级数收敛性的系统研究.

*（法）柯西（Cauchy，A.-L.）证明行列式的拉普拉斯展开式，解决了费马多角数问题.

*（英）英国剑桥分析学会成立.

*（法）柯西（Cauchy，A.-L.）证明了正多面体最多只有五种.

1813 年

*（意）鲁菲尼（Ruffini，P.）完成“用一般的代数方法解方程的一些想法”，试图证明“用代数方法不可解高于四次的一般方程”未获成功，因为他引用了一条未经证明的引理，而这个引理正是以后由（挪威）阿贝尔（Abel，N. H.）证明的“阿贝尔定理”.

1814 年

*（法）柯西（Cauchy，A.-L.）在巴黎科学院宣读第一篇关于复变函数论的重要论文“关于定积分理论的报告”（1827 年正式发表），建立了复变函数论的基础.

*（德）普法夫（Pfaff，J. F.）完成了一类“普法夫方程”的一般理论的研究.

1815 年

*（德）高斯（Gauss，C. F.）使用“行列式”一词，并把行列式的元素排成方阵，采用双重足标的记法，给行列式理论第一个系统的处理，并给出了行列式乘法定理.

*（法）柯西（Cauchy，A.-L.）对行列式理论进行系统研究，建立了乘法定理及性质.

1816 年

*（英）皮科克（Peacock，G.）和拉克鲁瓦（Lacroix，S. F.）合译《微积分学专论》，在英国出版，使英国人开始采用莱布尼茨符号系统，促使英国与欧洲大陆的分析合流.

*（德）高斯（Gauss，C. F.）在《格丁根学报》上发表的短评中隐含有非欧几何思想.

*（捷克）波尔查诺（Bolyano，B.）在二项公式的证明中提出了级数收敛的概念.

*（德）贝塞尔（Bessel，F. W.）在研究行星运动时给出“贝塞尔方程”、“贝塞尔积分”.

1817 年

*（捷克）波尔查诺（Bolyano，B.）著《纯粹分析的证明》，给出函数连续性与导数的定义，并区分了函数的连续性与可微性，迈出了微积分严密化的重要一步.

*（中）李锐著《开方论》3 卷（第 3 卷由其学生黎应南续成）.

1818 年

*（法）泊松（Poisson，S.-D.）导出波动方程解的“泊松公式”.

*（德）贝塞尔（Bessel，F. W.）在《天文学基础》中，导出了“贝塞尔公式”.

1819 年

*（英）霍纳（Horner，W. G.）发表“用连续逼近法解所有阶的数学方程的新方法”，提出求实根近似值的“霍纳法”（此法（中）秦九韶早在此前 500 年也

得出).

1820 年

*(法)傅里叶(Fourier,J.-B.-J.)采用定积分符号$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,并被广泛使用.

1821 年

*(法)柯西(Cauchy,A.-L.)的《分析教程》出版,创立了极限理论,给出"柯西收敛准则".将函数定义为对应关系,并指出函数不一定有解析表达式,拓广了函数概念.给出了微积分学的严密基础,对数学的发展产生了深远的影响.

1822 年

*(法)彭赛列(Poncelet,J.-V.)的"论图形的射影性质"发表,系统研究了几何图形在射影变换下的不变性质,创立了射影几何学.

*(法)傅里叶(Fourier,J.-B.-J.)的《热的分析理论》发表,创立三角级数论.

*(英)巴贝吉(Babbage,C.)制成了一台精度为 6 位数字的"差分机".

*(法)柯西(Cauchy,A.-L.)建立了弹性理论的数学结构.

1823 年

*(法)柯西(Cauchy,A.-L.)在《无穷小分析》中,定义函数$f(x)$的微分为$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$,提出了广义积分的概念.

*(法)勒让德(Legendre,A.-M.)的《数论》出版;同年,他还证明了$n=5$时的费马猜想.

*(挪威)阿贝尔(Abel,N.H.)在"用定积分解某些问题"论文中,第一次应用并解出积分方程,开创了积分方程的研究.

*(德)高斯(Gauss,C.F.)的《曲面论》出版,它是近代微分几何研究的开端.

1824 年

*(挪威)阿贝尔(Abel,N.H.)论"高于四次的一般方程的代数求解之不可能性的证明"(1826 年发表),证明用根式求解五次方程的不可能性.

*(德)贝塞尔(Bessel,F.W.)系统地整理出贝塞尔函数(柱函数)的性质.

1825 年

*(法)柯西(Cauchy,A.-L.)发表"关于积分限为虚数的定积分的报告",给出了留数概念,证明了"柯西定理",开创了复变函数论.

*(德)狄利克雷(Dirichlet,P.G.L.)独立证明了费马猜想当$n=5$时成立.

1826 年

*(德)克雷尔(Crelle,A.L.)在(挪威)阿贝尔(Abel,N.H.)建议下创刊《纯粹与应用数学杂志》(又称《克雷尔杂志》),这是世界上第一个专业数学杂志.

*(俄)罗巴切夫斯基(Лобачевский,Н.И.)于 2 月 23 日在喀山大学发表了"几何原理概述及平行线定理的严格证明",标志着非欧几何学的诞生.

*(挪威)阿贝尔(Abel,N.H.)论"一般五次方程不可能解的证明"一文,在《克雷尔杂志》第一卷上发表;另一篇文章"关于很广一类超越函数的一般性质",给出椭圆函数的加法定理、双周期性,并引进了椭圆函数的反演、阿贝尔积分,开创了椭圆函数论.

*(法)柯西(Cauchy,A.-L.)发表"无穷小计算在几何中的应用";撰写"数学练习",并提出积分留数概念.

1827 年

*(德)默比乌斯(Möbius,A.F.)完成《重心计算》,引进了齐次坐标,与(德)普吕克(Plücker,J.)共同开辟了射影几何的代数方向.

*(德)雅可比(Jacobi,C.G.J.)著《椭圆函数论新基础》(1829 年出版);(德)勒让德(Legendre,A.-M.)著《椭圆函数和欧拉积分论》(1932 年出版);(挪威)阿贝尔(Abel,N.H.)著《关于椭圆函数的研究》,三人共同确立了椭圆积分与椭圆函数理论.

1828 年

*(德)高斯(Gauss,C.F.)的《关于曲面的一般研究》出版,开创了空间上曲面的内蕴几何学,是近代微分几何的开端.

*(法)伽罗瓦(Galois,E.)撰写"关于五次代数方程根式不可解条件",引入群的概念,开辟了代数一个崭新的新领域——群论.

*(德)普吕克(Plücker,J.)的《解析几何的发展》出版,其中用代数方法对射影几何进行了系统研究.

1829 年

*(俄)罗巴切夫斯基(Лобачевский,Н.И.)的《论几何学原理》在《喀山通报》(1929—1930)上发表,是世界上最早的非欧几何文献.

*(法)斯图姆(Sturm,C.-F.)的《论数学方程》出版,解决了自笛卡儿时代以来数学家们关心的一个问题——在变量的给定范围内确定实系数代数方程的实数根数(即"斯图姆定理"),开创了代数方程的定性研究.

*(法)伽罗瓦(Galois,E.)于 5 月第一次把论文"关于用根式求解方程的可能性条件"呈交法国科学院.

*(德)狄利克雷(Dirichlet,P.G.L.)在"关于

三角级数的收敛性”中，给出傅里叶级数收敛的第一个充分条件，给出函数的一般定义和著名的“狄利克雷函数”.

*（法）柯西（Cauchy，A.-L.）的《微分计算教程》出版.

*（德）高斯（Gauss，C. F.）提出最小约束原理.

1830 年

*（捷克）波尔查诺（Bolyano，B.）给出一个连续而处处没有导数的函数的例.

*（法）伽罗瓦（Galois，E.）于 2 月第二次把论文“关于用根式求解方程的可能性条件”呈交法国科学院.

*（英）皮科克（Peacock，G.）的“代数通论”发表，首创以演绎方式建立代数学，在一定程度上促进了抽象代数的建立.

*（德）普吕克（Plücker，J.）给出线坐标概念.

1831 年

*（法）伽罗瓦（Galois，E.）于 1 月第三次把论文《关于用根式求解方程的可能性条件》呈交法国科学院.

*（德）高斯（Gauss，C. F.）给出复数的代数形式与三角形式，阐述了复数的几何加法与乘法，建立了复数的代数学，破除了复数的神秘性.

*（法）柯西（Cauchy，A.-L.）给出解析函数的幂级数收敛定理和柯西积分公式.

1832 年

*（瑞士-德）施泰纳（Steiner，J.）在论文“几何图形相互依赖性的系统发展”中，讨论了对偶原理，系统地发展了射影几何.

*（法）伽罗瓦（Galois，E.）证明了一元 n 次方程能用根式求解的充分必要条件是该方程的伽罗瓦群为可解群，并提出了一整套关于群和域的理论，即“伽罗瓦理论”（手稿）. 这年 5 月 31 日伽罗瓦死于决斗.

*（匈牙利）波尔约（Bolyai，J.）把非欧几何的研究“绝对空间的科学”（1829 年写成），发表在他父亲著作的附录中.

*（德）雅可比（Jacobi，C. G. J.）将行列式应用于多重积分变换.

*（法）柯西（Cauchy，A.-L.）的《关于积分理论的报告》出版，给出“柯西定理”.

1833 年

*（英）巴贝吉（Babbage，C.）构思了一台新的机械计算机（分析机），在设计思想上和现代计算机已很接近，包括输入和存储系统. 制造虽未完成，但后人从中得到了启示.

*（英）哈密顿（Hamilton，W. R.）在“代数学作为纯时间的科学”中，提出了无理数的第一个定义.

*（法）拉梅（Lamé，G.）引进椭球面坐标系.

1834 年

*（英）哈密顿（Hamilton，W. R.）出版了《动力学一般方法》，建立了“哈密顿原理”.

*（俄）奥斯特罗格拉茨基（Остроградскнй，M. B.）在“多重积分变量变换”论文中，建立了 n 重积分与曲面积分之间相互关系的公式和重积分的变换公式.

1835 年

*（俄）罗巴切夫斯基（Лобачевский，H. И.）的“虚几何学”和“具有完善的平行理论的新几何原理”发表，系统阐述了非欧几何理论.

*（德）雅可比（Jacobi，C. G. J.）发表了“关于双周期函数”的论文，它是现代复变函数的重要论文.

*（法）刘维尔（Liouville，J.）对初等函数概念，给出了严格的科学定义.

*（法）泊松（Poisson，S.-D.）的《热学的数学理论》出版，总结了热传导方面的成果.

1836 年

*（法）柯西（Cauchy，A.-L.）证明了解析函数的偏微分方程的解的存在性.

*（俄）罗巴切夫斯基（Лобачевский，H. И.）发表“论几何学对某些积分的应用”.

*（法）刘维尔（Liouville，J.）创办《纯粹数学杂志》（法文版）.

1837 年

*（中）项名达创立了零整分递加法.

*（法）泊松（Poisson，S.-D.）发表“对审判概率的探讨”，给出“泊松分布”.

*（德）狄利克雷（Dirichlet，P. G. L.）在“用正弦和余弦级数来表示完全任意的函数”论文中，给出了现今通用的函数定义，第一次给出了三角级数的“狄利克雷定理”，还给出“狄利克雷级数”，证明了“勒让德猜想”.

*（英）哈密顿（Hamilton，W. R.）发表“共轭函数及作为纯粹时间的科学的代数”论文，给出了序偶概念，为复数建立了严密的逻辑基础，彻底破除了 $\sqrt{-1}$ 的神秘性.

*（法）旺策尔（Wantzel，P.-L.）用代数方法给出了三等分任意角和倍立方体不可能性的证明.

*（瑞士-德）施泰纳（Steiner，J.）提出一系列几何作图问题，如只用直尺作图问题、圆问题、椭圆问题等，这些问题的解决记录在他的著作（1883 年出

版)里.

*(法)沙勒(Chasles,M.)的《几何方法的起源和发展的历史》出版,它是一本重要的数学史论著.

1838 年

*(法)库尔诺(Cournot,A.A.)发表"财产理论的数学原理的探索"的论文,开创了数理经济学.

*(法)刘维尔(Liouville,J.)给出"刘维尔公式".

1839 年

*(德)高斯(Gauss,C.F.)在两篇关于地磁学的论文(1839,1840)中发展了位势理论,使其成为一支独立的数学分支.

*(法)拉梅(Lamé,G.)引进了曲线坐标系,证明了费马猜想中 $n=7$ 的情形.

*(比利时)卡塔朗(Catalan,E.C.)给出利用函数行列式变换重积分的公式.

*英国创办《剑桥数学杂志》.

*(俄)布尼亚科夫斯基(Буняковский,В.Я.)的《纯数学与应用数学辞典》出版,它对数学教育和术语定名起了重要作用.

*(德)普吕克(Plücker,J.)出版《代数曲线论》,引进了最一般的齐次坐标.

1840 年

*(法)柯西(Cauchy,A.-L.)证明了"微分方程初值问题解的存在性".

*(俄)罗巴切夫斯基(Лобачевский,Н.И.)的《平行线理论的几何学研究》(法文)在柏林出版.

*(法)刘维尔(Liouville,J.)用构造法证明超越数的存在性.

*(英)斯托克斯(Stokes,G.G.)推广格林公式得出"斯托克斯公式".

*(法)狄利克雷(Dirichlet,P.G.L.)用解析法计算出二次域理想类的个数(狄利克雷定理).

*(中)罗士琳续著《畴人传补遗与续补》6 卷.

1841 年

*(德)高斯(Gauss,C.F.)的《几何光学理论》出版.

*(德)雅可比(Jacobi,C.G.J.)发表"论行列式的形成和性质",给出函数行列式的重要性质,以及雅可比行列式的乘积定理,并应用于隐函数理论,建立了行列式的系统理论.

*(俄)切比雪夫(Чебышев,П.Л.)发表"概率论初等分析的尝试"论文,给出了泊松形式的大数定理的证明.

*(挪威)阿贝尔(Abel,N.H.)遗著"关于很广一类超越函数的一个一般性质"重新发现并发表.

*(英)凯莱(Cayley,A.)采用行列式符号,延用至今.

*(挪威)阿贝尔(Abel,N.H.)的"巴黎论文"由(德)雅可比(Jacobi,C.G.J.)发表,其中给出了阿贝尔定理.

*(法)刘维尔(Liouville,J.)证明了"黎卡提方程一般没有初等解".

1842 年

*(德)施普林格出版社在柏林成立,它出版的数学专著和丛书,影响很大.

*(比利时)卡塔朗(Catalan,E.C.)提出"卡塔朗猜想",方程 $x^y-y^t=1$ 只有一组正整数解(3,2,2,3).

*(德)外尔斯特拉斯(Weierstrass,K.(T.W.))提出了"一致收敛"概念,给出了逐项积分和在积分号下求微分的条件.

1843 年

*(法)刘维尔(Liouville,J.)整理了(法)伽罗瓦(Galois,E.)的手稿,向法国科学院报告,宣布伽罗瓦彻底解决方程用根式求解问题.

*(法)洛朗(Laurent,P.A.)在"柯西定理的推广"论文中,给出洛朗级数.

*(英)哈密顿(Hamilton,W.R.)在爱尔兰皇家科学院宣布了四元数的发明.

1844 年

*(德)格拉斯曼(Grassmann,H.G.)的《线性扩张论》发表,引入了矢量的一般运算,开创了张量分析的分析研究,建立了超复数和一般的 n 维空间理论.

*(德)库默尔(Kummer,E.E.)创立了理想数理论,给出了理想数惟一分解定理,证明了 $p<100$(除 37,59,67 以外)费马大定理成立(有缺陷,后被(美)范迪维尔(Vandiver,H.S.)纠正.).

*(英)布尔(Boole,G.)的论文"关于分析中的一个普遍方法"发表.

*(英)德·摩根(De Morgan,A.)论"发散级数"发表,对发散级数的理论研究有较大的促进.

*(法)刘维尔(Liouville,J.)发表"论既非代数无理数又不能化为代数无理数的广泛数类",给出了超越数存在的构造性证明,开创了超越数论.

*(法)刘维尔(Liouville,J.)把椭圆函数视为复变函数的双周期函数,建立了椭圆函数论.

1845 年

*(英)凯莱(Cayley,A.)在论"n 维解析几何"中,用分析方法研究 n 维几何,引入 8 元数,首次提出"n 维空间"的概念.

*(英)皮科克(Peacock,G.)的《符号代数》出

版，为形式代数奠定了基础，对逻辑代数也有思想影响.

*（中）李善兰著《方圆阐幽》，创“尖锥求积术”.

*（俄）切比雪夫（Чебышев，П. Л.）在硕士论文中发现了“切比雪夫不等式”.

*（法）沙勒（Chasles，M.）发现了（法）德萨格（Desargues，G.）的《企图研究圆锥和平面相交所发生的事的草案》一书，引起普遍重视.

*（法）勒威耶（Le Verrier，U. J. J.）和（英）亚当斯（Adams，J. C.）分别独立用微分方程推算出当时未发现的海王星的位置，这是数学应用的著名范例之一.

1846 年

*（法）刘维尔（Liouville，J.）在《纯粹与应用数学杂志》上发表（法）伽罗瓦（Galois，E.）的论文“论方程的根式可解性条件”，并附加了注释.

*（法）沙勒（Chasles，M.）利用几何方法确定代数问题解的个数，开创了枚举几何学.

*（德）雅可比（Jacobi，C. G. J.）提出求实对称矩阵特征值问题的雅可比方法.

*（法）刘维尔（Liouville，J.）证明了有关代数方程复数根的柯西定理.

*（英）凯莱（Cayley，A.）提出关于二元三次型、三元四次型的不变式论，成为不变式论的开端.

*（德）柏林天文台伽勒于 9 月 23 日根据（法）勒威耶（Le Verrier，U. J. J.）的计算，发现了海王星.

1847 年

*（德）冯・施陶特（von Staudt，K. G. C.）在《位置几何学》中，不依赖度量概念建立了射影几何体系.

*（俄）切比雪夫（Чебышев，П. Л.）发表“关于用对数积分”，在无理函数积分上有所突破.

*（英）德・摩根（De Morgan，A.）出版《形式逻辑》，开创了关系逻辑的研究.

*（德）利斯廷（Listing，J. B.）的《拓扑学初步》出版，首次给出“拓扑”这一术语，这是第一本拓扑学论著，标志着拓扑学的诞生.

*（英）柯克曼（Kirkman，T. P.）提出并解决了施泰纳三元系.

1848 年

*（法）萨鲁斯（Sarrus，P. F.）证明了变分学基本定理.

*（德）外尔斯特拉斯（Weierstrass，K.（T. W.））发表“阿贝尔积分理论补证”.

*（中）项名达在《象数一原》中，给出了求圆周的公式.

1849 年

*（中）项名达用初等方法给出椭圆周长的级数表达式.

*（英）凯莱（Cayley，A.）提出抽象群概念.

*（英）布尔（Boole，G.）引进命题代数的概念和性质，其著作《逻辑的数学分析》、《思维规律的研究》出版，为布尔代数奠基.

1850 年

*（意）意大利《纯粹数学与应用数学年刊》创刊.

*（德）狄利克雷（Dirichlet，P. G. L.）提出关于位势论的“狄利克雷问题”.

*（德）黎曼（Riemann，（G. F.）B.）给出黎曼积分定义，提出函数可积观念.

*（英）西尔维斯特（Sylvester，J. J.）首先使用“矩阵”一词，并把矩阵作为数学对象.

*（法）法国科学院悬赏 2000 法朗作为解决“费马大定理”之奖金.

*（英）柯克曼（Kirkman，T. P.）提出“柯克曼女生问题”.

*（捷）波尔查诺（Bolyano，B.）的遗著“无穷的悖论”发表，证明了一个无穷集可以和它的一个子集一一对应. 它是集合论的先声，

*（俄）切比雪夫（Чебышев，П. Л.）的“论素数”发表，引进了切比雪夫函数.

*（法）贝特朗（Bertrand，J. L. F.）提出关于素数分布的猜测.

*（英）格林（Green，G.）发表“数学分析在电磁理论中的应用”（1850—1854），引进了位势概念，提出了“格林函数”和“格林定理”，是位势论的经典文献之一.

1851 年

*（德）黎曼（Riemann，（G. F.）B.）发表《单复变函数的一般理论基础》，把单值解析函数推广到多值解析函数，引入了黎曼面概念、保形映射理论，确立了复变函数的几何理论基础，得到了黎曼-罗赫定理、柯西-黎曼方程.

*（英）西尔维斯特（Sylvester，J. J.）给出不变因子概念，提出了初等因子论.

1852 年

*（意）贝蒂（Betti，E.）首次阐述了伽罗瓦理论，并给出了其中一系列定理的证明.

*（法）沙勒（Chasles，M.）的《论高等几何》出版，引入了交比概念. 它是射影几何的重要著作.

*（英）伟烈亚力（Wylie，A.）所著《中国科学记述》，将中国《孙子算经》中的“物不知数”问题的解法

传到了欧洲，被称为“中国剩余定理”.

＊(法)弗雷内(Frenet,J.F.)等发现切线、副法线和法线的方向导数等公式，对曲面理论和空间曲线理论做了奠基性工作.

＊(瑞士)席勒弗列的“多重连续性理论”发表，对多维几何学的发展有重大作用.

＊(英)格思里(Guthrie,F.)提出四色问题.

1853 年

＊(英)哈密顿(Hamilton,W.R.)的《四元数讲义》出版，系统地论述了四元数理论.

＊(法)法国科学院再次悬赏解决“费马大定理”.

＊(德)克罗内克(Kronecker,L.)提出关于椭圆函数的克罗内克猜想.

＊(德)外尔斯特拉斯(Weierstrass,K.(T.W.))发表关于阿贝尔函数研究论文，引起轰动.

1854 年

＊(英)布尔(Boole,G.)的《思维法则的研究》出版，系统地论述了逻辑代数(布尔代数).

＊(英)凯莱(Cayley,A.)开始接触抽象群的概念，以后(1878)又研究有限群.

＊(德)黎曼(Riemann,(G.F.)B.)发表“关于利用三角级数表示函数的可能性”，定义了黎曼积分，给出了关于三角级数收敛的黎曼条件.所著“关于几何基础的假设”(写于 1854 年，1868 年发表)，提出了多维流形和黎曼空间概念，并定义了黎曼空间的曲率，创立了 n 维流形的黎曼几何学.

＊(俄)切比雪夫(Чебышев,П.Л.)利用初等函数逼近复杂的函数，建立函数逼近论，提出切比雪夫多项式.他还给出了素数分布的一个渐近公式.

＊(法)埃尔米特(Hermite,C.)引入正交矩阵.

＊(英)斯托克斯(Stokes,G.G.)发表了(运动中流体的摩擦)开尔文(Kelvin,L.)于 1850 年告诉他的“斯托克斯公式”.

＊(德)外尔斯特拉斯(Weierstrass,K.(T.W.))发表“关于阿贝尔函数论”，解决了椭圆积分的雅可比逆问题.

1855 年

＊(法)埃尔米特(Hermite,C.)给出矩阵秩的概念.

＊(俄)罗巴切夫斯基(Лобачевский,Н.И.)的《泛几何学》出版.

＊(英)凯莱(Cayley,A.)发表“矩阵论的研究报告”，建立了矩阵的一系列重要概念和简化符号.

＊(德)黎曼(Riemann,(G.F.)B.)完成博士论文“复变函数的基础”，引入“黎曼曲面”，确立了复变函数的几何理论基础.

1856 年

＊(德)外尔斯特拉斯(Weierstrass,K.(T.W.))建立了极限理论中的 $\varepsilon-\delta$ 方法，标志着微积分的算术化的完成.

1857 年

＊(德)黎曼(Riemann,(G.F.)B.)发表关于阿贝尔函数的论文，使阿贝尔函数和阿贝尔积分的理论系统化.创立了黎曼面的理论，发展了代数函数论.

＊(德)冯·施陶特(von Staudt,K.G.C.)论著“续论位置几何学”，给出了虚元素的几何解释.

＊(意)邦孔帕尼(Boncompagni,B.)整理出版了(阿拉伯)花拉子米(al-Khowārizmī)的算术著作手稿：《印度的计算术》，使十进制计数法在阿拉伯国家得到普及，对欧洲数学的发展也产生了显著影响.

1858 年

＊(英)德·摩根(De Morgan,A.)提出“德·摩根定律”.

＊(中)李善兰与(英)伟烈亚力(Wylie,A.)合译《几何原本》后 9 卷.

＊(法)默比乌斯(Möbius,A.F.)在应答巴黎科学院“多面体几何理论”的征答的论文中，发现了单侧曲面——默比乌斯带.

＊(德)戴德金(Dedekind,(J.W.)R.)首次给出有限抽象群定义.

＊(德)利斯廷(Listing,J.B.)也独立地发现默比乌斯带.

＊(德)黎曼(Riemann,(G.F.)B.)在论“给定大小之下的素数个数”中，提出了关于 ζ 函数的零点分布的黎曼猜想，开创了解析数论，成为解析数论的先驱者.

＊(英)兰德(Rhind,A.H)在底比斯的埃及古都的废墟上发现一份草纸书，长 556cm，宽 33cm，用埃及象形文字写成，今称兰德纸草书(现藏伦敦大英博物馆).

1859 年

＊(法)拉梅(Lamé,G.)的《曲线坐标讲义》出版，引入并运用了曲线坐标的概念和方法.

＊(中)李善兰著《垛积比类》，给出李善兰恒等式，它是早期组合论的杰作.

＊(中)李善兰和(英)伟烈亚力(Wylie,A.)合译《代数学》、《代微积拾级》出版.

＊(英)凯莱(Cayley,A.)发表一系列关于代数形式的论文，并提出了射影测度概念.

＊(英)哈密顿(Hamilton,W.R.)提出“旅行世

界游戏”问题.

*（俄）布尼亚科夫斯基（Буняковский，В. Я.）给出一个重要的不等式，现称为施瓦兹不等式.

*（德）李普希茨（Lipschitz，R.（O. S.））给出关于借助线积分，给出贝塞尔函数的渐近展开式.

*（英）布尔（Boole，G.）的《差分方程》、《微分方程论》出版.

*（德）黎曼（Riemann，（G. F.）B.）在论“小于给定数的素数个数”中，引入黎曼ζ函数，并提出6个猜想（黎曼猜想）.

1860 年

*（德）外尔斯特拉斯（Weierstrass，K.（T. W.））把有理数定义为自然数对，从自然数导出了有理数，同时证明了“波尔查诺-外尔斯特拉斯”定理（聚点定理）.

*（英）皮尔斯（Peirce，C. S.）解决了柯克曼女生问题.

1861 年

*（德）格拉斯曼（Grassmann，H. G.）的《算术教科书》出版，给出了算术公理体系.

*（德）外尔斯特拉斯（Weierstrass，K.（T. W.））和（德）库默尔（Kummer，E. E.）在柏林大学创办了第一个纯粹数学讨论班，吸引了世界各地有才能的青年数学家，外尔斯特拉斯在演讲中给出一个连续，但处处不可微函数的例子.

1862 年

*（德）利斯廷（Listing，J. B.）的《空间复形概论》出版，并独立发现了单叶侧面.

1863 年

*（法）埃尔米特（Hermite，C.）的《椭圆函数理论》出版.

*（德）狄利克雷（Dirichlet，P. G. L.）的《数论讲义》出版（1839 年写成），对（德）高斯（Gauss，C. F.）的《算术研究》做了明晰的解释，并有所创见，是解析数论的经典文献.

1864 年

*（俄）莫斯科数学会成立.

*（德）李普希茨（Lipschitz，R.（O. S.））给出了傅里叶函数收敛的充分条件（李普希茨条件）.

*（德）罗赫（Roch，G.）独立给出黎曼-罗赫定理.

1865 年

*（法）夏莱斯的《论圆锥曲线》出版，它是射影几何的重要著作之一.

*（英）伦敦数学会成立，《伦敦数学会会报》创刊，它促进了各国数学组织的建立和发展.

*（俄）莫斯科数学会的《数学汇刊》创刊.

*（德）诺伊曼（Neumann，C. G.）的《关于阿贝尔积分的黎曼理论讲义》出版，它证明了黎曼定理的一部分.

1866 年

*（德）富克斯（Fuchs，I. L.）创立了复数域中线性常微分方程论，奠定了富克斯理论的基础.

*（俄）切比雪夫（Чебышев，П. Л.）用切比雪夫不等式建立了独立随机变量序列的大数定律，它是概率论的中心定理之一.

*（法）塞雷（Serret，J. A.）的《高等代数教程》出版，阐述了伽罗瓦理论.

*（德）哥尔丹（Gordan，P. A.）和克莱布什（Clebsch，R. F. A.）出版了《阿贝尔函数论》，用曲线的代数理论建立了阿贝尔积分理论，开辟了代数几何研究的新方向，它是代数函数理论与代数几何理论之间的阶梯.

*（中）北京同文馆增设“算学馆”，此为中国近代数学教育之始. 1868 年，聘请李善兰为算学馆总教习.

1867 年

*（德）汉克尔（Hankel，H.）的《复数系理论》出版，并对数的概念从历史角度进行了研究.

*（德）诺伊曼（Neumann，C. G.）给出第二类贝塞尔函数.

*（法）博内（Bonnet，P.-O.）给出博内定理，也称高斯-博内公式.

*（德）戴德金（Dedekind，（J. W.）R.）的《数论讲义》出版，创立了理想理论.

*（中）李善兰的《则古昔斋算学》，由友人分校，曾国藩捐金刻行.

1868 年

*（英）史密斯（Smith，H. J. S.）引进了增广矩阵和非增广矩阵的概念.

*（德）克莱布什（Clebsch，R. F. A.）和诺伊曼（Neumann，C. G.）共同创办德文版《数学年刊》. 该刊在以后的半个世纪中是世界上最重要的数学期刊之一.

*（德）外尔斯特拉斯（Weierstrass，K.（T. W.））完成了二次型理论，并将其推广为双线性型.

*（德）黎曼（Riemann，（G. F.）B.）论“用三角级数表示函数的可表示性”正式发表，建立了黎曼积分理论.

*（德）哥尔丹（Gordan，P. A.）给出哥尔丹有限基定理.

*(意)贝尔特拉米(Beltrami,E.)的"论非欧几何学的解释"发表,提出伪球面模型,给出了罗巴切夫斯基非欧几何以直观解释.

*(意)邦孔帕尼(Boncompagni,B.)创办《数理科学的历史与文献通报》.

*(德)杜·布瓦-雷蒙(Du Bois - Reymond,P. D. G.)给出并证明了积分中值定理.

1869 年

*(德)李普希茨(Lipschitz,R. (O. S.))对 n 维流形的度量结构研究取得了开创性成果,并用共变微分研究微分不变量.

1870 年

*(德)克莱因(Klein,(C.)F.)又给出了非欧几何的第二个解释,他把欧几里得几何叫抛物几何,罗氏几何叫双曲几何,黎曼几何叫椭圆几何.

*(德)海涅(Heine,H. E.)定义单(多)变量函数的一致连续性,并证明了有界闭区间上的连续函数是一致连续的性质,证明并引用了有限覆盖定理(海涅-波莱尔定理),至此连续性理论基本完成.

*(法)若尔当(Jordan,M. E. C.)论"置换与代数方程"发表,第一次系统阐述了伽罗瓦理论.

*(德)外尔斯特拉斯(Weierstrass,K. (T. W.))求助变分法解决了等周问题.

*(挪威)李(Lie,M. S.)发现李群,并用以讨论微分方程求积问题,为连续群经典理论奠定了基础.

*(德)康托尔(Cantor,G. (F. P.))证明了函数的三角级数表示的惟一性定理.

*(法)达布(Darboux,(J. -)G.)创办《数学科学通报》.

*(意)贝蒂(Betti,E.)引入贝蒂数.

*(美)皮尔斯(Peirce,C. S.)引入类包含概念,对布尔代数做了重大改进.

*(法)若尔当(Jordan,M. E. C.)证明矩阵可以化成若尔当标准形.

1871 年

*(英)麦克斯韦(Maxwell,J. C.)分开处理四元数的数量部分和向量部分,创立了向量分析.

*(德)克莱因(Klein,(C.)F.)发现有两种椭圆几何:单重椭圆几何和二重椭圆几何,并提出射影平面模型.

*(德)狄利克雷(Dirichlet,P. G. L.)的《数论讲义》第二版出版,建立了代数数域的理论,定义了一般理想概念,证明了理想的素理想惟一分解定理.

*(德)戴德金(Dedekind,(J. W.)R.)创立代数数论.

*(德)康托尔(Cantor,G. (F. P.))在三角级数表示的惟一性研究中,首次引进无穷集合的概念.

1872 年

*(德)戴德金(Dedekind,(J. W.)R.)论"连续性与无理数"发表,创用"戴德金分割"定义实数,建立了实数的严格基础.

*(德)克莱因(Klein,(C.)F.)在埃尔朗根大学发表任职演说:"对于近代几何研究的比较评述"(埃尔朗根纲领),他把每种几何学看成是一种特殊交换群不变量理论,在群论的基础上统一了几何学.

*(德)康托尔(Cantor,G. (F. P.))在《数学纪事》上发表了关于实数的基本序列理论("三角级数论中一个定理的推广").同年,提出康托尔公理,并且证明全体代数数是可数的.

*(德)外尔斯特拉斯(Weierstrass,K. (T. W.))建立了用递增有界数列来定义无理数的有界单调序列理论.

*(法)法国数学会成立.

*(英)凯莱(Cayley,A.)与(法)达布(Darboux,(J. -)G.)建立了常微分方程奇解的完整理论.

*(意)阿斯科利(Ascoli,G.)对于连续函数,证明了三角级数展开式中的系数必定是傅里叶系数.

*(法)庞加莱(Poincaré,(J. -)H.)提出用自守函数解释的单位圆内部模型.

*(法)阿尔方(Halphen,G. - H.)等创立了高次曲线的一般理论.

1873 年

*(法)埃尔米特(Hermite,C.)证明 e 是超越数.

*(英)麦克斯韦(Maxwell,J. C.)的《电磁学》出版,建立了磁场基本方程(麦克斯韦方程).

*(英)汤姆森(Thomson,W.)创用了"弧度"一词.

*(英)克利福德(Clifford,W. K.)创立类超复数-拟四元数.

*(法)达布(Darboux,(J. -)G.)发表"论异常曲线和代数曲面的类及虚数的理论",发展了四次圆纹曲面的理论.

*(法)诺特(Noether,M)证明了著名的"诺特定理".

*(德)林德曼(Lindemann,(C. L.)F. von)证明 π 是超越数.

*(德)施瓦兹(Schwarz,H. A.)证明二阶偏导中两个混合偏导数存在,并引入微分方程的单值群概念,为自守函数研究创造了条件.

*(德)克莱因(Klein,(C.)F.)的"论所谓欧几里得几何"发表,扩展了射影几何中度量概念,为欧

氏几何、非欧几何提供了射影模型.

*(德)康托尔(Cantor,G.(F.P.))引入可数集概念、基数概念,并在12月7日给(德)狄利克雷(Dirichlet,P.G.L.)信中说已证明了实数集不可数性.

*(德)李普希茨(Lipschitz,R.(O.S.))提出著名的一阶微分方程解的存在定理的"李普希茨条件".

1874年

*(挪威)李(Lie,M.S.)发表"论变换群"论文,给出连续变换群的一般理论.

*(德)康托尔(Cantor,G.(F.P.))在《克雷尔数学杂志》上发表"论所在实代数数集合的一个性质",引入无穷基数概念,给出了关于超越数的非构造性存在的证明.用对角线证明了一条线段上的点比自然数多,标志着集合论的诞生,对现代数学的结构理论开辟了道路.康托尔还提出连续统假设.

*(英)尚克斯(Shanks,W.)计算π值到小数点后707位(第527位以后有误).

*(法)瓦尔拉(Walras,L.)的《纯粹经济学原理》出版,它奠定了数理经济学的基础.

*(俄)切比雪夫(Чебышев,П.Л.)的"论积分"发表,发展了(法)埃尔米特(Hermite,C.)的近似计算法.

*(德)克莱因(Klein,(C.)F.)发表了他发现的两种椭圆几何(1871年发现).

*(法)莱维(Lévy,P.P.)的论文"静力学图解及其在结构中的应用"发表,发展了几何变换理论.

1875年

*(法)达布(Darboux,(J.-)G.)证明:不连续函数也可以求定积分,且不连续点可以有无限个.同时,达布还证明了微积分基本公式对于闭区间上的有界函数仍成立.

*(德)赫尔梅特发现χ^2分布.

*(俄)柯瓦列夫斯卡娅(Ковалевская,С.В.)在《偏微分方程论》中,给出柯西-柯瓦列夫斯卡娅定理,推动了偏微分方程的发展.

*(英)史密斯(Smith,H.J.S.)给出黎曼意义下不可积函数的例子.

*(德)贝茨(Beez,R.E.L.)在"高阶流形的全曲率理论"中,建立了n维空间中$(n-1)$维曲面理论.

*(德)汉克尔(Hankel,H.)的《古代与中世纪数学史》出版,受到了数学界的重视.

1876年

*(英)西尔维斯特(Sylvester,J.J.)的"椭圆函数专论"发表.

*(德)外尔斯特拉斯(Weierstrass,K.(T.W.))的《解析函数论》出版发行,把复变函数论建立在幂级数的基础上,把实多项式的因式分解定理推广到整函数.托梅将黎曼的积分理论推广到二元函数.

*(德)波阿雷蒙构造了一个连续函数,它在任意小区间上都有无穷多个点使得它的傅里叶级数发散.

*(法)庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)论"关于微分方程所定义的函数的性质"发表.

*(挪威)李(Lie,M.S.)发现了李代数的4种主要类型.

1877年

*(德)考古学家艾塞洛尔破译"兰德纸草书".

*(德)康托尔(Cantor,G.(F.P.))证明了n维空间中点集与实直线上的点集成一一对应,为点集拓扑空间理论开辟了道路.

*(德)戴德金(Dedekind,(J.W.)R.)建立了有限变换群理论.

*(俄)切比雪夫(Чебышев,П.Л.)发表"关于概率的两个定理",给出中心极限定理的新方法.

1878年

*(英)凯莱(Cayley,A.)在伦敦数学会上重新提出四色问题,自此成为世界数学名题.

*(德)庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)在博士论文中,创立了自守函数理论的研究领域.

*(法)若尔当(Jordan,M.E.C.)引进了置换群的线性变换表示.

*(英)西尔维斯特(Sylvester,J.J.)创刊《美国数学杂志》.

*(英)克利福德(Clifford,W.K.)创立高维射影几何.

*(德)梭梅给出

$$\int_0^1 dx\left(\int_0^1 f(x,y)dy\right)$$

存在,但

$$\int_0^1 dy\left(\int_0^1 f(x,y)dx\right)$$

不存在的例子.

*(德)康托尔(Cantor,G.(F.P.))证明一条直线上的点和整个R^n中的点对等.

*(德)弗罗贝尼乌斯(Frobenius,F.G.)给出矩阵秩的定义,推动了矩阵理论的发展.同年,他还证明了:具有有限生成元,有乘法单位元的实系数线性结合代数,若服从结合律,则只有实数、复数和四元数.

＊(美)希尔(Hill,G. W.)创立周期系数的线性奇次方程理论,证明了二阶微分方程有周期解.

1879 年

＊(德)弗雷格(Frege,(F. L.)G.)的《概念语言》出版,完备地发展了命题演算,且引进了量词概念与实质蕴涵概念,给出一个一阶谓词演算的公理系统.

＊(法)皮卡(Picard,(C.-)É.)证明了函数论中的皮卡第一定理.

＊(德)康托尔(Cantor,G.(F. P.))在《数学年刊》上发表"关于无穷的线性点集"的论文,引入了超限基数与超限序数,建立了基数与序数理论.

＊(德)弗罗贝尼乌斯(Frobenius,F. G.)推进了对抽象群的认识.

1880 年

＊(德)戴德金(Dedekind,(J. W.)R.)和韦伯(Weber,H.)开创了代数函数论的算术方向.

＊(德)克罗内克(Kronecker,L.)提出"虚二次域 k 的阿贝尔扩张都可由具有 K 中元素的复数乘法的椭圆函数的变换方程来确定"的猜想.

＊(美)皮尔斯(Peirce,C. S.)独立于(德)弗罗贝尼乌斯(Frobenius,F. G.)证明:具有有限个原始单位元和乘法单位元,且满足乘法结合律的线性结合代数,只有实数、复数和实四元数的代数.

＊(德)施勒特尔(Schroeter,H. E.)发展了二阶曲面和三阶空间曲线的理论.

＊(法)皮卡(Picard,(C.-)É.)证明了皮卡第二定理.

＊(德)庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)解决了解析函数单值化问题.

1881 年

＊(法)庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)论"微分方程所定义的积分曲线"发表,开创了微分方程定性理论.

＊(印度)印度出土巴克赫沙莱桦树皮数学手稿.

＊(意)佩亚诺(Peano,G.)论"算本原理新方法"发表,给出自然数的公理体系,完成了有理数理论,标志着数学分析算术化的终结.

＊(美)吉布斯(Gibbs,J. W.)著《向量分析基础》(1881—1884)与(英)赫维赛德(Heaviside,O.)共同创立了向量分析.

＊(英)维恩(Venn,J.)著《符号逻辑》,系统地发展了演绎逻辑的几何图解法(维恩图).

＊(法)庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)创立张量分析的系统理论,引入极限环的概念.同年,发表"单变量线性微分方程理论的重大改善".

＊(德)克莱因(Klein,(C.)F.)在莱比锡大学创办讨论班,开创了几何函数论的方向.

1882 年

＊(德)林德曼(Lindemann,(C. L.)F. von)论"关于数 π"发表,证明 π 是超越数.

＊(德)帕施(Pasch,M.)在《新几何讲义》中,给出第一个射影几何公理体系,揭开了数学公理化运动的序幕.

＊(德)克莱因(Klein,(C.)F.)给出克莱因瓶模型.

＊(德)克罗内克(Kronecker,L.)创立了有理性域论.

＊(瑞典)米塔-列夫勒(Mittag - Leffler,(M.)G.)创办《数学学报》.

＊(法)庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)给出罗巴切夫斯基几何的另一种模型,证明了罗氏几何的相容性.

＊(法)傅里叶(Fourier,J.-B.-J.)提出函数可用三角级数表示.

＊(德)闵可夫斯基(Minkowski,H.)建立起 n 个变量的整系数二次型的理论体系.

＊(德)内托(Netto,E.)论"置换理论及其对代数的应用"发表,探讨了同构和同态,是抽象群论发展的里程碑.

＊(德)杜・布瓦-雷蒙(Du Bois - Reymond,P. D. G.)的"一般函数论"发表,解决了傅里叶级数的可积性问题.

＊(英)德克用生成子元间的关系去定义群,系统研究抽象群,标志着群表示论的诞生.

＊(俄)博贝宁(Бобынин,В. В.)论"古埃及数学"发表,对兰德纸草书进行研究.

＊(德)克莱因(Klein,(C.)F.)的"代数函数及其积分的黎曼理论"发表,对黎曼面理论做了深刻阐述.

1883 年

＊(法)达布(Darboux,(J.-)G.)证明即使二重积分存在,两个累次积分也不一定存在.

＊(德)康托尔(Cantor,G.(F. P.))提出任意集合良序化问题.所著《一般流形理论基础》(一般集合论基础)出版.

＊(德)庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)给出一般的单值化定理.

＊(意)沃尔泰拉(Volterra,V.)给出泛函数的一般理论,导致了分析领域的新方向.

1884 年

＊(意)意大利数学学会成立.

＊(德)弗雷格(Frege,(F. L.)G.)论"算术原理

一类概念的逻辑数学研究"发表，将算术概念表示为逻辑概念.

*（意）里奇（Ricci - Curbastro，G.）论"绝对微分学计算法"发表，引入协变微分，创立了里奇张量.

1885 年

*（俄）费奥多罗夫（Фёдоров，Е. С.）发现晶体内部构造对应的对称群共有 230 种.

*（德）外尔斯特拉斯（Weierstrass，K.（T. W.））发表"关于所谓任意实变函数的可解析表达性"，证明连续函数可表示为一致收敛的多项式级数，得到函数论的基本定理——外尔斯特拉斯第一、第二定理.

1886 年

*（奥地利）施托尔茨（Stolz，O.）的《一般算术原理》出版，证明每一个无理数可以表示成无限不循环小数.

*（法）庞加莱（Poincaré，(J.-)H.）和（荷兰）斯蒂尔杰斯（Stieltjes，T.（J.））独立完成了渐近级数理论.

*（德）外尔斯特拉斯（Weierstrass，K.（T. W.））的《函数论论文集》出版，总结了他在这一研究领域的工作.

1887 年

*（德）达布（Darboux，(J.-)G.）（1887—1896）出版了《曲面的一般理论讲义》，发展了活动标架法，总结了一个世纪以来关于曲线和曲面的微分几何学的成就.

*（法）若尔当（Jordan，M. E. C.）的《分析教程》出版，给出了曲线的"若尔当定义".

1888 年

*（德）戴德金（Dedekind，(J. W.)R.）论"数的性质和意义"发表，提出算术公理的完整系统.

*（美）美国数学会成立.

*（德）希尔伯特（Hilbert，D.）用希尔伯特定理解决了哥尔丹问题，为代数不变量的研究开辟了新领域.

*（意）佩亚诺（Peano，G.）以公理方式，定义了有限维、无限维向量空间.

*（挪威）李（Lie，M. S.）与（德）恩格尔（Engel，F.）的《变换群理论》分卷出版（1888—1893），后人为纪念他，把变换群称为"李群".

1889 年

*（法）贝特朗（Bertrand，J. L. F.）在《概率的计算》中，给出"贝特朗奇论".

*（意）佩亚诺（Peano，G.）在《算术原理新方法》中，给出自然数公理体系（佩亚诺自然数公理）.

*（德）赫尔德（Hölder，O. L.）引进因子群概念，证明了"若尔当-赫尔德定理".

*（法）庞加莱（Poincaré，(J.-)H.）开创了哈密顿系统的定性理论.

*（德）德国开始出版第一部《数学百科全书》（6卷）（1889—1935）.

*（意）佩亚诺（Peano，G.）在《几何原理的逻辑表述》中，给出一个欧氏几何公理系统.

*（美）高尔顿（Galton，F.）在统计学中引入相关与回归等概念，开创了生物统计学.

1890 年

*（英）希伍德（Heawood，P. D.）解决五色问题.

*（法）皮卡（Picard，(C.-)É.）采用化常微分方程的始值问题为等价的积分方程的方法，证明了解的存在惟一性定理.

*（德）希尔伯特（Hilbert，D.）得到不变量理论的基本定理.

*（德）施罗德（Schröder，F. W. K. E.）的《逻辑代数讲义》（第一卷）出版.

*（俄）费奥多罗夫（Фёдоров，Е. С.）论"轴晶系图形的对称性"发表，创立了规则系统理论（即费奥多罗夫群）.

*（意）佩亚诺（Peano，G.）给出佩亚诺曲线.

1891 年

*（德）希尔伯特（Hilbert，D.）给出希尔伯特曲线.

*（俄）李亚普诺夫（Ляпунов，А. М.）在博士论文"运动稳定性的一般问题"中，开创了常微分方程的稳定性理论.

*（德）韦伯（Weber，H.）的《代数教程》（1891—1896）出版，系统总结了 20 世纪前代数及其相邻学科的发展情况.

*（德）康托尔（Cantor，G.（F. P.））论"集合论的一个根本问题"发表，证明实数不可数，定义在[0，1]上实函数集的基数大于实数集基数.

*（意）韦罗内塞（Veronese，G.）的《几何基础》出版，给出了一个把直线、线段和线段的迭合作为不定义的元素的欧氏几何的公理系统，构造了非阿基米德几何.

*（丹麦）佩特森（Petersen，J.）提出正则图理论.

*（意）佩亚诺（Peano，G.）用模型方法证明了欧氏几何五条公理的独立性.

1892 年

*（法）阿达马（Hadamard，J.（-S.））论"泰勒级

数所定义的函数的解析开拓"发表,证明了黎曼第一、第三、第四猜想,第一次把集合论引入复变函数论.

* (英)赫维赛德(Heaviside,O.)把拉普拉斯方程应用于电机工程,并发展成一套算子演算理论(运算微积).

* (法)庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)发表第一篇组合拓扑学论文.

* (美)梅茨勒引进了矩阵的超越函数,使矩阵论从矩阵代数进入矩阵分析.

* (德)巴赫曼(Bachmann,F.)论"无理数的性质"发表,提出"区间套原理",建立了无理数理论.

* (德)赫尔德(Hölder,O.L.)讨论了单群.

* (法)若尔当(Jordan,M.E.C.)在《分析教程》第二版中引进了"若尔当容量",证明了"若尔当定理".

1893 年

* (法)庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)论"天体力学的新方法"发表,发展了渐近展开的理论.

* (德)弗雷格(Frege,(F.L.)G.)的《算术的基本法则》第一卷出版(第二卷 1903 出版),使符号逻辑(数理逻辑)初具规模.

* (埃及)"莫斯科纸草书"在埃及发现,后于 1912 年存入莫斯科博物馆.

* (德)韦伯(Weber,H.)提出域的抽象理论,引进了域的概念.

* (英)皮尔逊(Pearson,K.)论"对进化论的数学贡献"发表,开辟了生物统计学的研究.

* (英)怀特海(Whitehead,A.N.)出版了泛函数专著,开创了泛代数的研究.

* (英)赫维赛德(Heaviside,O.)的《电磁理论》第一卷出版,共 3 卷,1921 年出齐,给出了向量代数的现代形式.

1894 年

* (荷兰-法)斯蒂尔杰斯(Stieltjes,T.(J.))的《连分数研究》出版,引进了斯蒂尔杰斯积分.

* (匈牙利)匈牙利数学-物理学会作出决议,在全国为中学生举办现代意义上的世界最早的首届匈牙利数学竞赛.

* (意)查查罗的《无穷小分析导引与代数分析教程》出版.

* (法)嘉当(Cartan,H.)发表"论有限和连续变换群的构造",奠定了李群代数理论的基础.

* (德)希尔伯特(Hilbert,D.)完成了代数数论.

* (意)佩亚诺(Peano,G.)提出了公理之间的独立性,佩亚诺开始撰写五卷本的《数学公式》(1895—1908),试图从公理出发,建立数学体系.

1895 年

* (法)庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)论"位置分析"发表,创剖分研究流形的方法,第一次系统地论述了组合拓扑学,证明了"庞加莱对偶定理",提出了 n 维同调理论. 同年,庞加莱证明了"庞加莱回归定理",开创了动力系统理论,创立了用剖分研究流形的基本方法.

* (德)弗罗贝尼乌斯(Frobenius,F.G.)开创了群表示论.

* (德)克莱因(Klein,(C.)F.)论"几何三大问题"发表,给出了三大几何作图不能问题的简明证法,彻底解决了两千多年的悬案.

* (法)施罗德(Schröder,F.W.K.E.)的《逻辑代数讲义》第三卷(关于代数和关系逻辑)出版,标志着数理逻辑进入发展史上的第三阶段.

* (德)韦伯(Weber,H.)的《代数教程》出版,促进了 20 世纪初代数学及邻近学科的发展.

* (法)波莱尔(Borel,(F.-É.-J.-)É.)的《函数论论文集》出版,给出了有限覆盖定理.

* (德)康托尔(Cantor,G.(F.P.))的《关于超限数理论的基础》出版,发展了超限数理论的研究.

1896 年

* (法)阿达马(Hadamard,J.(-S.))和(比利时)瓦莱·普桑(Vallée-Poussin,C. de la)分别独立给出素数定理的严格证明,奠定了解析数论的基础.

* (德)闵可夫斯基(Minkowski,H.)论"数的几何"发表,建立了格点几何,使数的几何成为数论的一个分支.

* (法)帕雷托(Pareto,V.)提出多目标最优化思想.

* (德)弗罗贝尼乌斯(Frobenius,F.G.)论"关于群特征标"发表,引进有限群的特征标理论.

* (法)波莱尔(Borel,(F.-É.-J.-)É.)引入整函数的级的概念.

* (德)佐默费尔德(Sommerfeld,A.I.W.)提出贝塞尔函数的积分概念,建立了衍射的数学理论.

* (英)皮尔逊(Pearson,K.)的《回归,遗传和随机交配》出版,阐述了一般相关理论.

* (意)皮瑞给出高维空间射影几何学系统.

* (意)切萨罗(Cesàro,E.)的《内蕴几何学教程》出版,它是内蕴几何学的奠基性著作.

* (挪威)李(Lie,M.S.)的《切触变换几何》出版.

* (中)华蘅芳和(英)傅兰雅(Fryer,J)合译的(英)(德·摩根(De Morgan,A.)的《决疑数学》,成为传入中国的第一本概率论著作.

*（法）庞加莱（Poincaré，(J.-)H.）引进了运动密度，把积分几何建立在群论基础上.

*（德）希尔伯特（Hilbert，D.）的《代数数域理论》出版.

1897 年

*（瑞士）第一届国际数学家大会在瑞士苏黎世召开.

*（德）希尔伯特（Hilbert，D.）论"数论报告"发表，他对代数数论的研究成果做了系统总结，建立了代数数域理论，对同调代数、代数几何、拓扑学的发展有很大影响.

*（意）布拉利-福尔蒂（Burali-Forti，C.）提出布拉利-弗尔蒂悖论.

*（德）弗雷格（Frege，(F. L.)G.）建立了一阶逻辑的形式系统.

*（法）康托尔（Cantor，G. (F. P.)）的《关于超限数理论的基础》出版，该书成为集合论的经典著作.

*（德）弗罗贝尼乌斯（Frobenius，F. G.）对有限群引进了可约和完全可约表示的概念.

*（德）克莱因（Klein，(C.)F.）和（德）弗里克（Fricke，R.）的《自守函数论讲义》出版.

*（英）伯恩赛德（Burnside，W.）的《有限阶群论》出版，它是有限群论的代表作.

1898 年

*（法）波莱尔（Borel，(F.-É.-J.-)É.）的《函数论讲义》出版，引入波莱尔测度理论.

*（英）皮尔逊（Pearson，K.）创立描述统计学.

*（中）中国上海算学书局石印出版《古今算学丛书》97 种，它是中国数学史上最大的一部数学丛书.

*（法）达布（Darboux，(J.-)G.）出版《关于正交系和曲线坐标的讲义》，系统介绍了 18—19 世纪近百年来，在微分几何学方面的成就.

*（法）阿达马（Hadamard，J. (-S.)）证明了（法）勒让德（Legendre，A.-M.）关于素数个数的猜想.

*（英）怀特海（Whitehead，A. N.）的《泛代数学》出版.

*（德）希尔伯特（Hilbert，D.）的《相对阿贝尔域理论》出版，首先提出类域概念.

1899 年

*（德）希尔伯特（Hilbert，D.）的《几何基础》出版，提出了欧氏几何学的严格的公理体系，开创了公理化方法，对数学公理化思潮产生了巨大影响.

*（德）康托尔（Cantor，G. (F. P.)）发现集合论中存在悖论，揭示了经典集合论的内在矛盾，但未明确表示出来.

*（法）弗雷歇（Fréchet，M.-R.）引入泛函的半连续性.

*（德）亨泽尔（Hensel，K.）发现 p 进数.

*（法）嘉当（Cartan，H.）创立了外微分形式法，并用以解决了普法夫微分方程组的联立问题.

*（德）戴德金（Dedekind，(J. W.)R.）引入对偶群（格），为格论的创始人之一.

1900 年

*第二届国际数学家大会在法国巴黎召开（8 月 6 日）.（德）希尔伯特（Hilbert，D.）在会上发表了著名的"数学问题"的演讲，提出了 23 个数学问题，预示了 20 世纪数学发展的进程，成为世界数学史上的重要里程碑. 同年，希尔伯特提出了不变积分理论.

*（法）庞加莱（Poincaré，(J.-)H.）在第二届国际数学家大会上，做了"直觉与逻辑在数学中的作用"的报告. 同年，他还提出关于闭流形的猜想.

*（意）列维-齐维塔（Levi-Civita，T.）和里奇（Ricci-C，G.）的《绝对微分法及其应用》出版，创立了绝对微分学（1916 年，（德-美）爱因斯坦（Einstein，A.）改为张量分析），确立了研究黎曼几何和相对论的分析工具.

*（瑞典）弗雷德霍姆（Fredholm，(E.)I.）确立了积分方程理论的基础.

*（德）黑塞伯格（Hessenberg，G.）建立了单重椭圆型几何的公理体系.

*（德-美）德恩（Dehn，M. W.）否定地解决了希尔伯特第三问题.

*（德）韦伯（Weber，H.）和黎曼（Riemann，(G. F.)B.）的《数学物理的偏微分方程的讲义》（2 卷）出版.

*（俄）马尔可夫（Марков，A. A.）发展了最小二乘估算法.

*（俄）李亚普诺夫（Ляпунов，A. M.）发表"概率论极限定理新形式"，引入特征函数.

*（美）穆尔（Moore，E. H.）给出了佩亚诺曲线的几何解释.

1901 年

*（英）佩里（Perry，J.）在英国学术协会的年会上作"论数学教育"的讲演，发起了数学改革运动.

*（英）皮尔逊（Pearson，K.）创办《生物统计学》杂志.

*（法）阿达马（Hadamard，J. (-S.)）论"泰勒级数及其解析开拓"发表.

*（法）庞加莱（Poincaré，(J.-)H.）发表"有理

数域上的代数几何学”,开创了丢番图方程的有理解的研究,定义了曲线的秩,并猜想秩数是有限的.

*(德)希尔伯特(Hilbert,D.)严格证明了狄利克雷原理,开创了变分学的直接方法,还开拓了无限多个不变量的理论.

*(美)威尔逊(Wilson,E. B.)和吉布斯(Gibbs,J. W.)将早年讲课散发的小册子,整理成《向量分析》出版,向量代数成了空间解析几何的重要组成.

*(法)泰利证明 6 阶正交拉丁方不存在.

*(日)高木贞治解决了高斯数域上的克罗内克猜想.

1902 年

*(英)罗素(Russell,B. A. W.)于 6 月给(德)弗雷格(Frege,(F. L.)G.)的信中,提出了“罗素悖论”,使把集合论作为数学的基础的想法遭到严重打击,导致了第三次数学危机.

*(法)嘉当(Cartan,É. (—J.))开创了无限李变换群研究.

*(德)亨泽尔(Hensel,K.)和兰茨贝格(Landsberg,G.)的《单变量代数函数论》出版,给出了代数几何的计算方法的完整叙述.

*(美)穆尔(Moore,E. H.)和亨廷顿(Huntington,E. V.)分别独立给出抽象群的公理系统. 同年,亨廷顿给出公理体系完备性概念.

*(法)庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)论“科学与假设”发表.

*(法)埃斯克朗贡(Esclangon,E. B.)引入拟周期函数.

*(德)伯恩赛德(Burnside,W.)提出一个关于有限群的“伯恩赛德猜想”.

*(法)勒贝格(Lebesgue,H. L.)发表“积分、长度与面积”发表,第一次系统地阐述了勒贝格测度、积分理论,奠定了实变函数论的基础.

1903 年

*(德)弗雷格(Frege,(F. L.)G.)的《算术的基本规律》出版.

*(法)阿达马(Hadamard,J. (-S.))在《关于波的传播》讲义中,把特征理论推广到了任意阶的偏微分方程.

*(美)迪克森(Dickson,L. E.)和亨廷顿(Huntington,E. V.)分别独立给出了域的公理系统.

*(俄)沃罗诺伊(Вороной,Г. Ф.)发表“关于渐近函数论的一个问题”的论述,促进了现代解析数论的发展.

*(德)萨顿(Sarton,G.)的《十七、十八世纪数学史》出版,开创了数学断代史研究.

1904 年

*(法)勒贝格(Lebesgue,H. L.)发表“积分和原函数的研究”,证明了有界函数黎曼可积的充分必要条件是不连续点构成一个零测度集,这完全解决了黎曼可积性问题.

*(法)庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)提出“庞加莱猜测”(单连通的三维闭流形必与三维球面同胚).

*(德)希尔伯特(Hilbert,D.)发表“论逻辑及算术的基础”,并提出形式主义观点. 同年,他联系积分方程,引进了函数空间,与平方可和序列空间,建立了埃尔米特算子的谱论.

*(德)策梅洛(Zermelo,E. F. F.)发表“每一集合都能被良序化的证明”,提出选择公理(策梅洛公理),并用以证明良序定理(任何集合都能良序化).

*(荷兰)洛伦茨(Lorentz,H. A.)给出洛伦茨变换式.

*(德)克莱因(Klein,(C.)F.)发表“关于中学数学与中学物理的若干问题”的论述,提出了改革中学数学教育的方案.

*(俄)伯恩斯坦(Бернштейн,С. Н.)研究希尔伯特第 19 问题,获得重要成果.

*(德-以色列)舒尔(Schur,I.)奠定了群的射影表示的理论基础.

1905 年

*(德)克莱因(Klein,(C.)F.)在米兰会议上提出“米兰要目”的纲领.

*(法)勒贝格(Lebesgue,H. L.)建立了描述函数论,给出波莱尔集理论.

*(美)迪克森(Dickson,L. E.)给出一种抽象群的公理系统.

*(英)剑桥大学出版社出版《剑桥数学专题丛书》.

*(德-以色列)舒尔(Schur,I.)重新建立了群特征标理论.

*(俄)卡甘(Каган,В. Ф.)的《几何学原理》出版,提出了以运动群不变量的距离概念为依据的欧氏空间公理系统.

*(美)彼尔庞特(Pierpont,J.)给出多变量函数的可微性概念.

*(德)希尔伯特(Hilbert,D.)初步解决了希尔伯特第 21 问题(具有给定单值群的线性微分方程的存在性).

1906 年

*(俄)克雷洛夫(Крылов,А. Н.)的《近似计算教程》出版,建立了近似计算的严格理论.

*(法)弗雷歇(Fréchet,M.-R.)发表“关于泛函演算若干问题”.

*(匈牙利-瑞士)里斯(Riesz,F.(F.))引入函数空间概念,并引入泛函的连续性、可微性定义,是泛函分析的起点.

*(德)哈托格斯(Hartogs,F. M.)开始系统地研究多个自变量的复变函数理论.

*(俄)马尔可夫(Марков,A. A.)论“大数定律关于相依变量的扩张”发表,初次提出马尔可夫链的数学模型,创立了马尔可夫过程.

*(法)勒贝格(Lebesgue,H. L.)在《三角级数讲义》中,提出傅里叶级数的逐项积分法.

*(英)罗素(Russell,B. A. W.)提出了分支类型论.

*(美)亨廷顿(Huntington,E. V.)给出了群,以及其他代数系统环、域等的公理化形式化定义.

*(美)穆尔(Moore,E. H.)试图建立线性泛函和算子的抽象理论.

*(德)希尔伯特(Hilbert,D.)(1906—1910)创立微分和积分算子的本征函数展开理论.

*(美)博歇(Bôcher,M.)严格而完整地研究了傅里叶级数的“吉布斯现象”.

*(德)希尔伯特(Hilbert,D.)提出谱论.

*(法)庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)和(英)罗素(Russell,B. A. W.)提出“恶性循环原则”.

1907 年

*(德)施密特(Schmidt,E.)把希尔伯特(Hilbert,D.)研究积分方程时,使函数等同于富氏系数集的思想,抽象为一般的 L^2,并导出正交系.

*(法)庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)证明黎曼共形映照定理——复变函数论的一个基本定理.

*(匈牙利-瑞士)里斯(Riesz,F.(F.))证明矩阵力学与波动力学等价的数学基本定理.同年,引入强收敛和弱收敛概念,给出了“里斯定理”.

*(德)施密特(Schmidt,E.)把特征函数概念推广到带非对称核的积分方程.

*(荷兰-美)布劳威尔(Brouwer,L. E. J.)的《论数学基础》出版,他反对在数学中使用排中律,主张用构造方法来研究数学,提出数学直观主义.

*(德)外尔(Weyl,(C. H.)H.)论“奇异积分方程,特别考虑傅里叶积分定理”发表.

*(德)菲舍尔(Fischer,E. S.)引进了平均收敛的概念,并与(匈牙利-瑞士)里斯(Riesz,F.(F.))分别独立地得到“里斯-菲舍尔定理”.

*(英-美)韦德伯恩(Wedderburn,J. H. M.)的“论超复数”发表,给出了关于一般线性结合代数的结构理论.

*(德)闵可夫斯基(Minkowski,H.)提出四维空间概念.

1908 年

*(德)策梅洛(Zermelo,E. F. F.)的《集合论基础研究 I》,建立了第一个集合论的公理化系统,开创了公理集合论(集合论进入第二阶段:公理集合论).

*第四届国际数学家大会在罗马召开,该会作出决议:建立国际数学教育委员会.

*(荷兰-美)布劳威尔(Brouwer,L. E. J.)论“逻辑规律的不可靠性”发表.

*(德)康托尔(Cantor,M. B.)的《数学史讲义》(4 卷)出齐.

*(英)哈代(Hardy,G. H.)和温伯格(Weinberg,W.)给出关于生物群体遗传学的哈代-温伯格平衡法则.

*(英)哈代(Hardy,G. H.)的《纯粹数学教程》出版.

*(英-美)韦德伯恩(Wedderburn,J. H. M.)证明关于半单代数结构的定理,开创了环的结构的研究.

*(英)戈塞特(Gossett,W. S.)发现 t 分布、z 分布,并提出精确样本理论,为研究样本分布理论奠定了基础.

*(英)瑟厄证明 $\mu(\theta) < \frac{1}{2}m + 1$.

*(德)亨泽尔(Hensel,K.)的《代数数论》出版,发现了 p-adic 域,在代数方面开辟了新方向,建立了 p 进位数理论.

*(德)希尔伯特(Hilbert,D.)发表“从定性方面给出华林问题的证明”.

*(德)豪斯多夫(Hausdorff,F.)提出广义连续统假设(G C H).

*(德)沃尔夫斯克尔(Wolfskehl,F. P.)在格丁根科学院悬赏 10 万马克,限期 100 年解决费马大定理.

*(德-美)博尔查(Bolza,O.)的《变分法讲演集》出版,它是变分法的经典著作.

*(比利时-法国)蒂茨(Tits,J.)提出拓扑学中的主猜想.

*(瑞典)弗雷德霍姆(Fredholm,(E.)I.)给出一般常系数椭圆型偏微分方程的基本解.

1909 年

*(匈牙利-瑞士)里斯(Riesz,F.(F.))给出“里斯表示定理”,此为泛函分析发展史上的一个里程碑.

*(法)波莱尔(Borel,(F.-É.-J.-)É.)引进可

数事件集的概率，给出强大数定律.

*（荷兰-美）布劳威尔（Brouwer，L. E. J.）发表“曲面上一对一的映射为自身的连续映射”系列论文，创立了不动点理论.

*（德）希尔伯特（Hilbert，D.）确立了“希尔伯特空间论”的基础.

*（德）兰道（Landau，E. G. H.）的《素数分布论讲义》出版，首次系统地阐述了解析数论.

*（俄）马尔可夫（老）（Марков，A. A.）论“关于李雅普诺夫情形的概率极限的定理”发表，从此开辟了非独立随机变量的研究.

*（丹麦）埃尔朗（Erlang，A. K.）为改进自动电话交换台的设计，提出了排队论的数学理论.

1910 年

*（匈牙利-瑞士）里斯（Riesz，F.（F.））引进 L^p 空间，引进“算子”概念，建立了算子理论.

*（德）施泰尼茨（Steinitz，E.）的《域的代数理论》出版，系统地阐述了抽象域的理论，奠定了抽象域论基础，开辟了代数学的公理化方法新局面，是抽象代数发展的重要里程碑.

*第一次国际数学教育会议在比利时的布鲁塞尔召开.

*（英）罗素（Russell，B. A. W.）和怀特海（Whitehead，A. N.）合著《数学原理》（1910—1913），企图把数学归纳为形式逻辑，它是现代逻辑主义的代表作，它提出了一种集合论的公理系统——类型论.

*（荷兰-美）维布伦（Veblen，O.）和杨格（Young，J. W.）合著的《射影几何学》（第一卷）出版，它给出了射影几何一个完全独立的公理系统和解析表示（第二卷 1918 年出版）.

*（法）勒贝格（Lebesgue，H. L.）发表“关于不连续函数的积分”，把单重积分的导数的结果推广到了多重积分.

*（荷兰-美）布劳威尔（Brouwer，L. E. J.）发展了代数拓扑学.

*（意）列维（Levi，E. E.）提出拟凸域和正则域是否等价问题的拟凸域的猜想.

*（法）阿达马（Hadamard，J.（-S.））的《变分学教程》出版.

*（德-美）德恩（Dehn，M. W.）证明了拓扑流形的“德恩引理”.

1911 年

*（德）外尔（Weyl，（C. H.）H.）开创了特征值渐近展开理论.

*（俄）伯恩斯坦（Бернштейн，C. H.）证明了“伯恩斯坦不等式”.

*（荷兰）布劳威尔（Brouwer，L. E. J.）证明了不动点定理.

*第二次国际数学教育会议在意大利的米兰召开.

1912 年

*（俄）卢津（Лузин，H. H.）证明了可测函数的构造定理.

*（俄）克雷洛夫（Крылов，A. H.）论“关于在技术问题中有用的某些数学物理微分方程”发表，给出了克雷洛夫方法.

*（荷兰）布劳威尔（Brouwer，L. E. J.）把若尔当曲线定理推广到 n 维空间.

*（法）贝尔（Bell，E. T.）的《无理数论》出版，将连续区分为上半连续和下半连续.

*（德）希尔伯特（Hilbert，D.）的《线性积分方程一般理论的原理》出版，建立了一般谱论、双曲型对称形式的谱理论.

*（英）费希尔（Fisher，R. A.）提出最大似然估计法，建立了点估计理论.

*（法）蒙泰尔（Montel，P.）提出正规族理论.

*（德）策梅洛（Zermelo，E. F. F.）发表“关于集合论在象棋博弈中的应用”的论文，第一次运用数学方法研究对抗性现象.

*（法）波莱尔（Borel，（F. - É. - J. -）É.）开创拟解析函数论研究.

*（美）伯克霍夫（Birkhoff，G. D.）引进了动力系统概念，开创了动力系统研究.

*（德）希尔伯特（Hilbert，D.）给出“希尔伯特空间”概念.

*（英）彼姆皮尤引进“导出域”概念.

*（德）兰道（Landau，E. G. H.）提出存在一个正整数 c，使得每一个正整数都可以表示为不超过 c 个素数的和.

*（俄）伯恩斯坦（Бернштейн，C. H.）给出求解给定边值的二值偏微分方程的伯恩斯坦方法，同时发表“论连续函数借助于固定次数的多项式的最佳逼近”，奠定了函数构造论的基础.

1913 年

*（德）亨泽尔（Hensel，K.）的《代数数论》出版，促进了赋值论和局部域论的发展.

*（法）嘉当（Cartan，H.）完成了半单纯李代数的有限维表示理论，提出旋量概念，奠定了李群表示理论的基础.

*（奥地利）拉东（Radon，J.）给出斯蒂尔杰斯积分，推广了勒贝格积分，且扩张到函数空间.

*（德）外尔（Weyl，（C. H.）H.）论“黎曼曲面的概念”发表，给黎曼曲面奠定了严格的拓扑基础，引

入了复流形的概念.

*(英)鲁金提出关于 L^2 可积函数的傅里叶级数一定几乎处处收敛的猜想.

*(荷兰-美)布劳威尔(Brouwer,L. E. J.)提出维数的拓扑定义.

*(美)伯克霍夫(Birkhoff,G. D.)论“庞加莱几何定理的证明”发表,证明庞加莱最后定理.

*(德)豪斯多夫(Hausdorff,F.)的《点集论纲要》出版,使用了邻域概念,建立了抽象空间的完整理论,提出了拓扑空间的公理系统,为一般拓扑学建立了基础,标志着点集拓扑学的形成.

*(英)哈代(Hardy,G. H.)发现(印度)拉马努金(Ramanujan,S. A)的数学才华.

*(德-美)博尔查(Bolza,O.)提出“博尔查”问题——古典变分法的基本问题之一.

*(德-美)爱因斯坦(Einstein,A.)提出了引力场度规概念,给黎曼几何以实在的物理解释.

1914 年

*(英)哈代(Hardy,G. H.)对黎曼猜想的研究做了首次重大突破.

*(日)三上义夫和(美)史密斯(Smith,H. J. S.)合著《日本数学史》出版.

*(德)外尔(Weyl,(C. H.)H.)完成了关于模 1 等分布的研究,给出“外尔定理”.

*(法)弗雷歇(Fréchet,M.-R.)给出距离空间上泛函的连续性、可微性定义,独立建立了一般拓扑学.

*(英-美)韦德伯恩(Wedderburn,J. H. M.)给出第一个非交换域的例子.

*(德)豪斯多夫(Hausdorff,F.)和(俄)亚历山德罗夫(Александров,А. Д.)分别独立解决了波莱尔集的基数定理.

*(丹麦)玻尔(Bohr,H.)发现关于 σ 函数的零点分布定理(玻尔-兰道定理).

*(美)亚历山大(Alexander,R.)证明多面体的同调群的拓扑不变性.

*(法)嘉当(Cartan,É. (-J.))解决实单纯李群的判定问题.

*(日)小岛铁造给出狄利克雷级数的收敛条件.

1915 年

*(俄)卢津(Лузин,Н. Н.)在“积分及三角函数”论文中,提出“卢津问题”,对测度论的发展有重要影响.

*(英)哈代(Hardy,G. H.)与(匈牙利-瑞士)里斯(Riesz,F. (F.))合著的《狄利克雷级数的一般理论》出版.

*(美)亚历山大(Alexander,R.)证明了贝蒂数与挠系数的拓扑不变性.

*(德-美)爱因斯坦(Einstein,A.)和(德)施瓦兹(Schwarz,H. A.)把黎曼几何用于广义相对论,使之成为它的主要数学工具.

*(俄)布勃诺夫和伽辽金(Галёркин,Б. Г.)就弹性位移和应力问题,提出了一种近似方法(布勃诺夫-伽辽金法).

*(英)费希尔(Fisher,R. A.)发现正态总体样本相关系数的分布,开始了多元分析理论的研究,开创了多元分析和相关分析.

1916 年

*(德)比伯巴赫(Bieberbach,L.)证明单叶函数面积定理,提出单叶函数系数的猜想(比伯巴赫猜想),吸引了许多数学家,开拓了几何函数论这一领域.

*(德)外尔(Weyl,(C. H.)H.)开创了一致分布理论.

*(俄)苏斯林(Суслин,М. Я.)给出解析集概念,建立了解析集理论.

*(俄)辛钦(Хинчин,А. Я.)建立了辛钦积分.

*(德)外尔(Weyl,(C. H.)H.)和(英)豪丁顿创立了仿射联络几何.

*(俄)克雷洛夫(Крылов,А. Н.)的《近似计算教程》出版,建立了近似计算的严格理论.

*(德)克莱因(Klein,(C.)F.)建立了双重椭圆型几何的公理体系.

1917 年

*(苏)伯恩斯坦(Бернштейн,С. Н.)构造了概率论的第一个公理化体系.

*(英)哈代(Hardy,G. H.)与(印度)拉马努金(Ramanujan,S. A)开创了圆法.

*(法)米里马诺夫(Mirimanov,D.)提出了“米里马诺夫悖论”.

*(荷兰-美)布劳威尔(Brouwer,L. E. J.)建立严格的直觉主义,正式形成了直觉主义学派.

*(意)列维-齐维塔(Levi-Civita,T.)和(意)里奇(Ricci-C. G.)引进了向量的平行移动概念.

*(德)黑克(Hecke,E.)把狄利克雷 L 函数推广到代数数域上.

1918 年

*(英)哈代(Hardy,G. H.)和李特尔伍德(Littlewood,J. E.)应用复变函数论方法建立了解析数论.

*(波兰)亚尼谢夫斯基(Janiszewski,Z.)论“波兰数学的需求”发表,它是形成波兰学派的纲领

性文件.

* (英)罗素(Russell,B. A. W.)的《数理哲学导论》出版,创立数理哲学. 同年,他用通俗说法把罗素悖论表述成"理发师悖论".

* (德)外尔(Weyl,(C. H.)H.)的《时间、空间、物质》出版,引进仿射联络概念,建立了仿射联络空间几何.

* (美)刘易斯(Léwis,C. I.)引进模态逻辑.

* (匈牙利-瑞士)里斯(Riesz,F. (F.))给出完备赋范空间公理,引入里斯算子,提出了希尔伯特空间.

* (瑞士)芬斯勒(Finsler,P.)在一篇未发表的论文中提出芬斯勒几何.

1919 年

* (法)莱维(Lévy,P. P.)(1919—1925)系统地建立了概率论中的特征函数性质.

* (法)朱利亚(Julia,G. M.)应用(法)蒙泰尔(Montel,P.)的正规定理证明了朱利亚定理,开创了在一射线附近函数取值情况的幅角分布论.

* (德)米泽斯(Mises,R. von)提出经验概率.

* (德)比伯巴赫(Bieberbach,L.)和(芬兰)奈望林纳(Nevanlinna,R.)建立了单位圆内单叶函数的系统理论.

* (挪威)布伦(Brun,V.)改进了筛法,证明了哥德巴赫猜想(9,9)问题.

* (美)丹尼尔(Daniell,P. J.) 引进了"丹尼尔-斯通积分"的一般概念.

* (德-以色列)弗伦克尔(Fraenkel,A. A.)的《集论导引》出版,形成 ZF 公理体系.

1920 年

* (日)高木贞治发表"关于相对阿贝尔域的理论",创立了类域论,彻底解决了"克罗内克青春之梦".

* (波兰)巴拿赫(Banach,S.)和(奥地利)哈恩(Hahn,E.)建立了赋范向量空间,以及更一般的拓扑空间.

* (德)诺特(Noether,(A.)E.)引入左、右模概念.

* (德)兰道(Landau,E. G. H.)证明了代数数域论中的素理想定理.

* (法)阿达马(Hadamard,J. (-S.))论"泛函分析所起的科学作用"发表.

* (法)庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)和(美)伯克霍夫(Birkhoff,G. D.)创立了拓扑动力学.

* (波兰)武卡谢维奇(Łukaszewicz,J.)引进了多值逻辑.

* (英)哈代(Hardy,G. H.)和李特尔伍德(Littlewood,J. E.)开创与发展了圆法.

* (德)希尔伯特(Hilbert,D.)创立证明论.

1921 年

* (德)诺特(Noether,(A.)E.)的《环中的理想论》出版,建立了交换诺特环理论,标志着抽象代数现代化的开始.

* (波兰-美)波斯特(Post,E. L.)独立引进了多值逻辑.

* (苏)乌雷松(Урысон,П. С.)和(奥地利)门杰(Menger,K.)分别独立建立了一般维数理论.

* (德)布拉施克(Blaschke,W. J. E.)的《微分几何讲义》出版,开创了研究不变可微映射的拓扑微分几何.

* (日)高木贞治证明任意数域类域论.

* (美)维纳(Wiener,N.)发展了函数空间的测度论,为随机积分方程理论奠定了基础.

1922 年

* (中)陈建功发表"无穷乘积的若干定理",它是中国最早的现代数学论文.

* (美)艾森哈特(Eisenhart,L. P.)和(美)维布伦(Veblen,O.)给出了道路几何.

* (美)伯克霍夫(Birkhoff,G. D.)把不动点定理推广到了无穷维的函数空间.

* (德-以色列)弗伦克尔(Fraenkel,A. A.)和(挪威)斯科伦(Skolem,A. T.)提出了取代公理.

* (波兰)巴拿赫(Banach,S.)、(奥地利)哈恩(Hahn,E.)与(美)维纳(Wiener,N.)分别独立提出赋范线性空间概念.

* (英)莫德尔(Mordell,L. J.)提出"莫德尔猜想"(1983 年,(德)法尔廷斯(Faltings,G)解决).

* (奥地利)哈恩(Hahn,E.)给出赋范线性空间概念,并证明共鸣定理.

* (波兰)库拉托夫斯基(kuratowski,K.)给出拓扑空间的一般定义.

* (日)高木贞治发表"关于任意代数域的互反法则".

* (法)莱维(Lévy,P. P.)的《泛函分析教程》出版.

* (波兰)巴拿赫(Banach,S.)论"抽象集合上算子及其在积分方程上的应用"发表,为泛函分析奠定了基础,是泛函分析诞生的标志.

* (德)希尔伯特(Hilbert,D.)提出数学要彻底形式主义化的主张,创立了数学基础中的形式主义体系和证明论.

* (波兰)巴拿赫(Banach,S.)提出压缩映象原理,发展了迭代思想.

* (瑞士)约翰第一·伯努利(Bernoulli,Johann

I)遗著《微分学讲义》，由巴塞尔自然科学院出版.

*(德)希尔伯特(Hilbert,D.)的"希尔伯特规划"发表，创立了数学基础中的形式主义体系.

*(英)费希尔(Fisher,R. A.)的《理论统计的数理基础》出版，它是现代数理统计学的奠基性著作.

*(匈牙利-瑞士)里斯(Riesz,F. (F.))证明了黎曼映射定理.

*(苏)亚历山德罗夫(Александров,П. С.)和乌雷松(Урысон,П. С.)创立和发展了紧与列紧空间理论.

*(英)莫德尔(Mordell,L. J.)证明庞加莱猜想(1910)：曲线的秩数是有限的.

1923 年

*(德)黑克(Hecke,E.)的《代数数论讲义》出版，并提出了"黑克环"、"黑克代数"等概念.

*(奥地利)施赖埃尔(Schreier,O.)开创了拓扑群理论.

*(法)嘉当(Cartan,H.)提出一般联络空间的微分几何理论，将(德)克莱因(Klein,(C.)F.)和黎曼几何学的观点统一了起来，它是纤维丛概念的开端.

*(捷克-美)勒夫纳(Loewner,C.)创造了参数表示法，证明了$n=3$时的比伯巴赫猜想.

*(德)阿廷(Artin,E.)提出一般互反律.

*(匈牙利-瑞士)里斯(Riesz,F. (F.))证明H^p是完备赋范空间.

*(美)维纳(Wiener,N.)提出"维纳测度".

*(美)伯克霍夫(Birkhoff,G. D.)将不动点定理用于函数方程式解的存在问题，开创了研究函数方程的新方法.

*(丹麦)玻尔(Bohr,H.)引入"概周期函数".

*(波兰)巴拿赫(Banach,S.)发表"关于抽象集合上的运算子及其在积分方程上的应用"，提出巴拿赫空间几何理论，它是泛函分析学科形成的标志.

*(美)沃尔什(Walsh,J. L.) 提出"沃尔什函数系".

*(法)阿达马(Hadamard,J. (-S.))论"线性双曲线型偏微分方程的柯西问题"发表，提出偏微分方程适定性，解决了二阶双曲型方程的柯西问题.

*(意)特里科米(Tricomi,F. G.)开创混合型偏微分方程的边值问题研究.

*(匈牙利-美)冯·诺伊曼(von Neumann,J.)发表"论超穷数的引进"，给出了超穷归纳法的证明大纲.

*(荷兰-美)布劳威尔(Brouwer,L. E. J.)在"论排中律在数学特别是函数论中的意义"一文中，进一步阐明了排中律不普遍有效的理由.

*(波兰)洛姆尼斯基(Lomnicki,A.)用测度论表述概率论.

*(美)桑代克(Thorndike,E. L.)的《代数的心理学》出版.

*(苏)柯尔莫哥洛夫(Колмогоров,А. Н.)给出卢津猜想反例.

1924 年

*(苏)辛钦(Хинчин,А. Я.)提出重对数定律.

*(苏)亚历山德罗夫(Александров,А. Д.)提出局部有限族的概念.

*(苏)斯米尔诺夫(Смирнов,Н. В.)的《高等数学教程》出版.

*(德)克莱因(Klein,(C.)F.)的《高观点下的初等数学》出版.

*(美)奈奎斯特(Nyquist,H.)和库普弗缪勒独立提出，电讯信号的传输效率与信号频带宽度之间存在着比例关系，为信息论奠定了理论基础.

*第 7 次国际数学家大会在加拿大多伦多召开，菲尔兹(Fields,J. C.)在会上建议颁发一种奖给年龄在 40 岁以下在数学上有突出贡献的学者的菲尔兹奖.

*(德)博尔查(Bolza,O.)的《线性积分方程》出版.

*(德)拉德马赫(Rademacher,H.)证明了哥德巴赫猜想(7,7)问题.

*(德)库朗(Courant,R.)和希尔伯特(Hilbert,D.)的《数学物理方法》出版.

*(德)库朗(Courant,R.)筹建格丁根数学研究所.

*(英)荷尔登创立数理群体遗传学.

*(苏)柳斯捷尔尼克(Люстерник,Л. А.)用有限差分法解决了狄利克雷问题.

*(波兰)巴拿赫(Banach,S.)提出"分球怪论".

*(美)维纳(Wiener,N.)研究一般域的狄利克雷问题，提出集合的容量概念.

*(德)外尔(Weyl,(C. H.)H.)等证明群上调和分析的"外尔-彼德定理".

*(苏联)切博塔廖夫(Чеботарёв,Н. Г.)解决了弗罗奥尼乌斯猜想.

1925 年

*(英)费希尔(Fisher,R. A.)在《研究人员用的统计学方法》一书中，开创了试验设计，确立了统计推断的基本方法.

*(奥地利)阿廷(Artin,E.)建立了辫子理论.

*(芬兰)奈望林纳(Nevanlinna,R.)引进了亚

纯函数的特征函数,建立了"奈望林纳理论",开创了亚纯函数值分布理论的近代研究.

*(美)莫尔斯(Morse,H. M.)推广极大极小原理,给出"莫尔斯不等式",提出微分拓扑学的"莫尔斯理论".

*(匈牙利-美)冯·诺伊曼(von Neumann,J.)发表《集合论的一种公理化》,论述了一般集合论的公理构造,建立了公理化体系,开辟了公理集合论的第二个系统,1925—1937 年逐步形成 NBG 公理系统.

*(德)外尔(Weyl,(C. H.)H.)与(法)嘉当(Cartan,É.(-J.))完成了半单纯李代数有限维表示的研究,奠定了李代数表示论的基础.

*(法)莱维(Lévy,P. P.)的《概率计算》出版.

*(丹麦)玻尔(Bohr,H.)创立概周期函数论.

*(美)斯特里特和费尔普斯(Phelps,C. R.)建立了第一个环境污染的数学模型,称为"斯特里特-费尔普斯方程".

*(德)诺特(Noether,(A.)E.)提出把组合拓扑学建立在群论的基础上,开创了代数拓扑学.

1926 年

*(奥地利)阿廷(Artin,E.)解决了他自己在 1923 年提出的猜想.

*(英)拉姆齐(Ramsey,F. P.)把悖论分为逻辑悖论和语文悖论,并证明对于逻辑悖论,简单类型论就足以消除.

*(奥地利)阿廷(Artin,E.)和施赖埃尔(Schreier,O.)合作建立了抽象的实域理论.

*(德)诺特(Noether,(A.)E.)论"代数数域及代数函数域的理想理论的抽象构造"发表,完成了理想理论.

*(匈牙利-美)冯·诺伊曼(von Neumann,J.)引入了策略概念,提出了对策思想.

*(美)维纳(Wiener,N.)等解决了一般域上的狄利克雷问题.

*(美)莱夫谢茨(Lefschetz,S.)证明了"莱夫谢茨不动点定理".

*(意)富比尼(Fubini,G.)和切赫(Čech,E.)的《射影微分几何》出版.

*(苏联)克洛斯特曼(Kloosterman,H. D.)提出"克洛斯特曼和",开辟了堆垒数论研究的新领域.

*(法)嘉当(Cartan,H.)研究对称黎曼空间,建立了对称黎曼空间与李群的关系,奠定了这一领域的理论基础.

*(德)克莱因(Klein,(C.)F.)的《十九世纪数学发展史》(I)出版.

*(奥地利)施赖埃尔(Schreier,O.)提出抽象连续群的概念.

*(美)艾森哈特(Eisenhart,L. P.)的《黎曼几何》出版.

1927 年

*(奥地利)阿廷(Artin,E.)和施赖埃尔(Schreier,O.)解决希尔伯特第 17 问题,创造了有序体理论.

*(德)哈恩(Hahn,E.)解决了完备赋范线性空间上泛函延拓定理,并引入对偶空间.

*(匈牙利-美)冯·诺伊曼(von Neumann,J.)对埃尔米特型算子建立普遍的特征值理论,创立了希尔伯特空间的自共轭算子谱理论.

*(美)伯克霍夫(Birkhoff,G. D.)的《动力系统》出版,引入极小运动集.回收集等概念,建立了动力系统理论,它是微分方程定性理论的一个重要方面.

*(丹麦)尼尔森(Nilssen,J.)创立了不动点类型论,提出尼尔森数概念,给出了尼尔森不动点定理,开创了不动点类型理论.

*(德)布拉施克(Blaschke,W. J. E.)的《微分几何的拓扑问题》出版,创立网几何.

*(苏)亚历山德罗夫(Александров,А. Д.)把亚历山大对偶定理推广到更一般的情形,开创了拓扑对偶理论这一分支.

*(德)外尔(Weyl,(C. H.)H.)完成了紧群理论.

*(英)古埃及兰德草纸书发表.

*(德)诺特(Noether,(A.)E.)在《非交换代数》中,建立了非交换代数理论.

*(美)施坦豪斯(Steinhaus,H.)和(波兰)巴拿赫(Banach,S.)给出了共鸣定理的证明.

1928 年

*(匈牙利-美)冯·诺伊曼(von Neumann,J.)证明了极小极大定理,为对策论奠定了基础.

*(德-美)库朗(Courant,R.)提出了解偏微分方程的差分方法.

*(中)陈建功发表《三角级数论》,与(匈牙利-瑞士)里斯(Riesz,F.(F.))、(英)哈代(Hardy,G. H.)、(英)李特尔伍德(Littlewood,J. E.)分别独立地发展了三角级数理论.

*(美)库兰特等发展了统计计算方法.

*(中)苏步青发表"仿射空间曲面论",发现了"苏锥面".

*(?)维夏特(Wishart,J.)导出了维夏特分布,是多元分析成为独立学科的标志.

*(德-瑞士)霍普夫(Hopf,H.)定义了同调群.

*(美)奈曼(Neyman,J.)与(英)皮尔逊(Pear-

son,K.)于 1928—1938 年间,建立了假设检验的数学理论.

*(匈牙利-美)冯·诺伊曼(von Neumann,J.)引入希尔伯特空间公理系统.

*(法)韦伊(Weil,A.)论"代数曲线上的算术"发表,开辟了不定方程新的研究方向.

*(德)格勒奇(Grötzsch,H.)创立拟共形映照理论.

*(匈牙利-美)冯·诺伊曼(von Neumann,J.)创立矩阵对策论.

*(捷克)切赫(Čech,E.)建立紧致空间的包络理论.

*(德)克鲁尔(Krull,W.)证明了交换诺特环的主理想定理.

*(匈牙利-瑞士)里斯(Riesz,F.(F.))给出有序线性空间概念.

*(德)希尔伯特(Hilbert,D.)和阿克曼(Ackermann,F.W.)的《数理逻辑基础》出版.

*(德)雷因哈特(Reinhardt)给出希尔伯特第18问题第二部分三维情形的例.

1929 年

*(匈牙利-美)冯·诺伊曼(von Neumann,J.)提出算子环理论.

*(奥地利-美)哥德尔(Gödel,K.)发表"逻辑函数演算的公理的完全性",解决了一阶谓词演算的完全性问题.

*(美)阿尔福斯(Ahlfors,L.V.)解决了当儒瓦猜想.

*(波兰)巴拿赫(Banach,S.)和(波兰)库拉托夫斯基(kuratowski,K.)解决了一般测度问题.

*(波兰)巴拿赫(Banach,S.)创办了第一个泛函分析杂志《数学研究》.

*(德)哈塞(Hasse,H.)在希尔伯特第 11 问题上取得突破.

*(芬兰)奈望林纳(Nevanlinna,R.)发表"皮卡-波莱尔定理与亚纯函数理论".

*(苏)辛钦(Хинчин,А.Я.)给出大数定律.

*(苏)盖尔丰德(Гельфонд,А.О.)解决了欧拉-希尔伯特问题.

*(苏)安德罗诺夫(Андронов,А.А.)开拓了非线性振动的研究.

*(美)维布伦(Veblen,O.)和(英)怀特海(Whitehead,A.N.)的《微分几何学基础》出版,给出了微分流形的精确定义.

*(法)韦伊(Weil,A.)证明任意亏格的曲线的莫德尔猜想(莫德尔-韦伊定理).

*(苏)柯尔莫哥洛夫(Колмогоров,А.Н.)的《测度的一般理论和概率论》出版.

*(法)嘉当(Cartan,H.)证明了单李群的秩等于贝蒂数之和,开始了李群及齐性空间拓扑学研究的新阶段.

1930 年

*(美)伯克霍夫(Birkhoff,G.)建立格论.

*(匈牙利-美)冯·诺伊曼(von Neumann,J.)提出自伴算子谱分析,并应用于量子力学.

*(苏)库兹明(Кузьмин,Р.О.)证明 α^{β}(α 为异于 0,1 的代数数,β 为实二次不尽根)为超越数.

*(苏)施尼雷尔曼(Шнирельман,Л.Г.)证明了:每一个充分大的自然数都可以表示为不超过 K 个素数之和(K 不超过 800000),取得了哥德巴赫问题研究的新进展.

*(荷兰)范·德·瓦尔登(Van der Waerden,B.L.)的《近世代数学》第一卷出版.

*(苏)卢津(Лузин,Н.Н.)的《解析集及其应用讲义》出版,该书是函数论的重要著作.

*(苏)坎托罗维奇(Канторович,Л.В.)将泛函分析用于计算方法,创立了近似计算理论(牛顿-坎托罗维奇方法).

*(波兰)绍德尔(Schauder,J.P.)得出"绍德尔不动点定理".

*(奥地利-美)哥德尔(Gödel,K.)证明了一阶谓词演算系统完全性定理,对模型论的产生和发展有着重大影响.

*(美)扎里斯基(Zariski,O.)应用赋值论给出了代数几何的理论基础.

*(美)维纳(Wiener,N.)给出陶别尔定理的一般理论,并将其与傅里叶变换理论及广义调和分析结合起来,发展了复变函数的调和分析.

*(意)沃尔泰拉(Volterra,V.)的《泛函、积分和积分微分方程的理论》出版.

*(法)嘉当(Cartan,É.(—J.))建立纤维空间概念.

*(奥地利)费特万格勒解决了主理想定理.

*(苏)莫斯科纸草书发表.

*(波兰)武卡谢维奇(Łukaszewicz,J.)和塔尔斯基(Tarski,A.)给出 m 值逻辑.

*(中)陈建功的《三角级数论》在日本出版.

*(苏联)卢津(Лузин,Н.Н.)引入面积积分.

*(匈牙利-美)冯·诺伊曼(von Neumann,J.)证明了平均遍历定理,开拓了遍历理论新领域.

*(法)嘉当(Cartan,É.(—J.))的《有限连续群理论及其位置分析》出版.

*(匈牙利-美)冯·诺伊曼(von Neumann,J.)使用了弱邻域概念.

*（奥地利-美）哥德尔（Gödel，K.）给出第一个不完全性定理，宣告了希尔伯特计划的失败.

*（苏）亚历山德罗夫（Александров，А. Д.）和（德）霍普夫（Hopf，H.）的《拓扑学》出版.

*（苏）吉洪诺夫（Тихонов，А. Н.）证明任意多个紧空间的乘积还是紧空间.

*（美）布什（Bush，V.）等发明积分仪，此为世界上第一台电子模拟计算机.

*（法）勒雷（Leray，J.）和（波兰）绍德尔（Schauder，J. P.）给出拓扑度理论.

*（苏）切博塔廖夫（Чеботарёв，Н. Г.）给出豫解式理论的普遍定理.

*（苏）柯尔莫哥洛夫（Колмогоров，А. Н.）完成马尔可夫过程的一般理论及其分类.

1931 年

*（美）道格拉斯（Douglas，J.）发表"普拉托问题的解"（1931 年 1 月），把普拉托问题归结为非线性椭圆型偏微分方程的第一边值问题，在广义解的范围内解决了该问题. 因此获得了 1936 年颁发的第一届菲尔兹奖.

*（匈牙利-美）冯·诺伊曼（von Neumann，J.）的《量子力学的数学基础》出版，总结了希尔伯特空间的重要结果.

*（美）伯克霍夫（Birkhoff，G. D.）证明了逐点遍历性定理，引导出遍历理论的产生.

*（美）布饶尔（Brauer，R. D.）、（德）哈塞（Hasse，H.）、（德）诺特（Noether，（A.）E.）的"代数理论主定理的证明"发表，给出了代数构造论的主定理，这是代数发展史上的一个重大转折点，是对代数数论的重要贡献.

*（瑞士）德·拉姆（de Rham，G. - W.）发现多维流形上的微分形式和流形的上同调性质的关系，成为拓扑学的分析工具.

*（苏）柯尔莫哥洛夫（Колмогоров，А. Н.）的《概率论的解析方法》出版，将微分方程等分析方法用于马尔可夫过程，奠定了马尔可夫过程的理论基础.

*（苏）庞特里亚金（Понтрягин，Л. С.）将亚历山大（Alexander，J. W.）的对偶定理统一于群论.

*（英）李特尔伍德（Littlewood，J. E.）与佩利（Paley，R. E. A. C.）于 1931—1940 年间，建立了"李特尔伍德-佩利理论".

*（荷兰）范·德·瓦尔登（Van der Waerden，B. L.）的《近世代数学》第二卷出版.

*（奥地利-美）哥德尔（Gödel，K.）的"论数学原理和有关系统的形式不可判定命题"，在《月刊》上发表，用对角线方法，证明 CH 与现有的集合论公理系统是独立的，是现代逻辑发展史上的一个转折点，开创了现代逻辑发展的新时期.

*（德）施密特（Schmidt，E.）考虑有限域上一般的单变量代数函数域，发现了 ζ 函数方程，并发现了它与著名的"黎曼-洛克定理"间的关系.

*（德）西德的《数学文摘》创刊.

1932 年

*（德）赖兴巴赫（Reichenbach，H.）将 m 值真值体系推广到无限值逻辑.

*（德）克鲁尔（Krull，W.）等完成赋值论，并应用在代数数域理论中.

*（法）刘易斯（Léwis，C. I.）和兰福德（Langford，C. H.）的《符号逻辑》出版，它是现代模态逻辑的经典著作.

*（中）钱宝琮的《中国算学史》上册出版.

*（德）马勒（Mahler，K.）提出"马勒猜想".

*（法）阿达马（Hadamard，J.（- S.））的《线性微分方程的柯西问题讲义》出版.

*（波兰）巴拿赫（Banach，S.）的《线性算子理论》出版，并建立了线性算子论.

*（法）嘉当（Cartan，H.）将拓扑学方法用于解决多复变函数论的基本问题.

*（法）埃尔布朗（Herbrand，J.）、（奥地利-美）哥德尔（Gödel，K.）、（美）克林（Kleene，S. C.）建立递归函数论.

*（美）维布伦（Veblen，O.）和（英）怀特海（Whitehead，A. N.）的《微分几何基础》出版.

*（德-美）博赫纳（Bochner，S.）的《傅里叶积分讲义》出版，并提出连续函数的形式导数概念.

*（美）斯通（Stone，M. H.）的《希尔伯特空间中的线性变换及其在分析中的应用》出版.

*（苏）亚历山德罗夫（Александров，П. С.）创立了同调维数论.

*（匈牙利-美）冯·诺伊曼（von Neumann，J.）的《量子力学的数学基础》出版，总结了希尔伯特空间的重要结果. 同年，证明了 L^2 形式的平均遍历性定理，开创了遍历理论.

*（苏）庞特里亚金（Понтрягин，Л. С.）发现了对偶性的一般规律，建立了连续群的特征定理.

*（匈牙利）哈尔（Haar，A.）证明"局部紧群均具有不变测度"定理.

*（法）阿达马（Hadamard，J.（- S.））研究了波动方程基本解，它是广义函数论的一个开端.

1933 年

*（美）美国计量经济学会创刊《计量经济学》，标志着计量经济学的诞生.

*（德）哈塞（Hasse，H.）证明了椭圆函数域的黎曼猜想.

＊(苏)柯尔莫哥洛夫(Колмогоров, А. Н.)给出一般条件下的条件概率、条件期望的严格定义.

＊(中)曾炯之证明了"曾炯之定理",创立了拟代数封闭域的层次论.

＊(匈牙利)哈尔(Haar, A.)提出拓扑群的不变测度,并创立拓扑群论.

＊(苏)柯尔莫哥洛夫(Колмогоров, А. Н.)的《概率论的解析方法》、《概率论基础》相继出版,建立了一套严密的概率论公理体系,部分解决了希尔伯特第6问题.

＊(美)维纳(Wiener, N.)、佩利(Paley, R. E. A. C.)制订复平面上傅里叶变换理论.

＊(美)伯克霍夫(Birkhoff, G.)的《美学标准》出版,并创立格论.

＊(美)艾森哈特(Eisenhart, L. P.)的《连续变换群》出版.

＊(匈牙利-美)冯·诺伊曼(von Neumann, J.)对紧群解决了希尔伯特第5问题.

＊(德)马克思(Marx, K.)的《数学手稿》的部分内容(关于微分学的几篇论文和一些较完整的论述)首次在苏联出版.

＊(苏)辛钦(Хинчин, А. Я.)的《概率论的极限定理》出版,建立了平稳过程理论.

＊(捷克)切赫(Čech, E.)建立上同调群理论.

1934 年

＊(美)莫尔斯(Morse, H. M.)的《大范围变分学》出版,创立了大范围变分理论,为微分几何、微分拓扑提供了有效工具.

＊(苏)盖尔丰德(Гельфонд, А. О.)与(德)施奈德(Schneider, T.)分别独立地解决了α^β是超越数或至少是无理数(α代数数,β是无理代数数)的问题,即希尔伯特猜测(盖尔丰德-施奈德定理).同年,盖尔丰德解决了希尔伯特第7问题的后半部分.

＊(美)奈曼(Neyman, J.)(1934—1937)建立了置信区间的估计理论.

＊(挪威)斯科伦(Skolem, A. T.)构造出第一个非标准算术模型.

＊(苏)维诺格拉多夫(Виноградов, И. М.)提出估计外尔三角和的新方法,对华林问题做出重大改进.

＊(德)兰道(Landau, E. G. H.)的《分析基础》出版.

＊(德)希尔伯特(Hilbert, D.)、(瑞士)伯奈斯(Bernays, P. I.)的《数学基础》(Ⅰ)出版.

＊(法)勒雷(Leray, J.)与(波兰)绍德尔(Schauder, J. P.)给出"勒雷-绍德尔不动点原理".

＊(苏)柯尔莫哥洛夫(Колмогоров, А. Н.)发现了拓扑向量空间成为赋范空间的充分必要条件.

＊(法)嘉当(Cartan, É. (—J.))利用活动标架法构成了一般联络理论,对现代微分几何产生了深刻的影响.

＊(匈)哈尔(Haar, A.)发表了有限p群的奠基性论文.

＊(波兰)谢尔品斯基(Sierpiński, W.)的《连续统假设》出版.

＊(奥地利-美)洛特卡(Lotka, A. J.)的《生物群体分析理论》出版.

＊(苏)坎托罗维奇(Канторович, Л. В.)与菲赫金戈尔兹(Фихтенгольц, Г. М.)完成了线性泛函和线性算子的表示问题,提出了半序线性空间(K空间).

＊(?)福罗默尔对希尔伯特第16问题($n=2$的情况),证明了$H(2)\geqslant 1$.

＊(苏)列宁格勒大学主办了中学生数学奥林匹克,首次把数学竞赛与"奥林匹克"联系起来.

1935 年

＊(中)中国数学会在上海成立(7月).同时,《中国数学会学报》、《数学杂志》创刊.

＊(波兰)赫维茨(Hurewicz, W.)引入同伦群,为代数拓扑和微分拓扑的重要工具,创立同伦论.

＊(法)龚贝尔开始研究产品使用寿命和可靠性的数学理论.

＊(德)布拉施克(Blaschke, W. J. E.)及其学派于1935—1939年间以积分几何为题,发表了一系列论文,使积分几何成为一门独立的数学分支.

＊(法)法国布尔巴基学派形成,6月召开了第一次会议,一致确定以"数学结构"作为分类数学理论的基本原则.

＊(芬兰-美)阿尔福斯(Ahlfors, L. V.)发表覆盖面理论,并获1936年首届菲尔兹奖.

＊(匈牙利-美)冯·诺伊曼(von Neumann, J.)给出局部空间定义,给出拓扑向量空间的公理.

＊(英)费希尔(Fisher, R. A.)的《实验设计》出版.

＊(德)克鲁尔(Krull, W.)的《理想理论》出版,对无限扩张的伽罗瓦理论进行了总结.

＊(法)迪厄多内(Dieudonné, J.)引进单位分解的概念.

＊(德)根岑(Gentzen, G. K. E.)用超穷归纳法证明自然数算术形式系统的无矛盾性.

＊(美)惠特尼(Whitney, H.)给出了微分流形的一般定义,证明了它总能嵌入高维欧氏空间作为光滑的子流形,给出纤维丛的一般的定义与惠特尼示性类,创立微分拓扑学.

＊(苏)亚历山德罗夫(Александров, А. Д.)与

(德)霍普夫(Hopf,H.)的《拓扑学》出版.

*(德)柏林科学院编辑的《数学百科全书》(6卷)(1898—1935)出齐,它是世界上第一部数学百科全书.

*(苏)吉洪诺夫(Тихонов,A.H.)给出"吉洪诺夫不动点定理".

*(德)根岑(Gentzen,G.K.E.)证明了关于数学理论形式化的"根岑基本定理".

*(芬兰)奈望林纳(Nevanlinna,R.)的《单值解析函数》出版,发展了奈望林纳理论.

*(美)奈曼(Neyman,J.)建立了置信区间的估计理论.

*(中)熊庆来证明了(芬兰)奈望林纳(Nevanlinna,R.)所引入的函数 $T(8)$ 为逐段解析函数.

*(中)华罗庚运用(苏)维诺格拉多夫(Виноградов,И.М.)三角和方法,解决华林问题,在当时是处于世界领先地位.

*(英)图灵(Turing,A.M.)提出的"图灵问题",奠定了数理逻辑和计算机科学的理论基础.

*(德-美)布饶尔(Brauer,R.D.)建立起有限群模表示理论.

*(苏)柯尔莫哥洛夫(Колмогоров,A.H.)把马尔可夫过程引入了遗传学.

1936 年

*第10届国际数学家大会在挪威奥斯陆召开,第一次颁发了菲尔兹奖,(芬兰-美)阿尔福斯(Ahlfors,L.V.)、(美)道格拉斯获菲尔兹奖.

*(英)图灵(Turing,A.M.)发表"理想计算机",为研制电子计算机提供了理论基础.

*(苏)索伯列夫(Соболев,C.Л.)研究偏微分方程的存在性问题,引入索伯列夫导数、微分方程广义解,引入广义函数概念,提出偏微方程的泛函分析方法,为广义函数论做了大量的奠基性工作.

*(匈牙利-美)冯·诺伊曼(von Neumann,J.)、默里(Murray,F.J.)于1936—1943年间创立了"冯·诺伊曼代数".

*(日)冈洁对多复变数的三大问题:库辛问题、列维问题和逼近问题进行了系统而富有成效的研究.

*(匈)柯尼希(König,D.)的"有限图与无限图的理论"发表,它是系统研究图论的著作.标志着现代图论的诞生.

*(瑞典)克拉默(Cramér,H.)提出了"克拉默尔猜想".

*(日)南云道夫导入巴拿赫环.

*(匈牙利-美)冯·诺伊曼(von Neumann,J.)建立了算子环论.

*(法)韦伊(Weil,A.)的《拓扑群积分及其应用》出版,它开辟了群上的调和分析新领域.

*(美)丘奇(Church,A.)证明纯粹的谓词演算是不可判定的.

*(德)布拉施克(Blaschke,W.J.E.)的《积分几何教程》(Ⅰ)出版,给出了积分几何的主要公式.在苏萨(Susa)出土一批古代巴比伦泥书板(苏萨书板).

*(英)图灵(Turing,A.M.)、(美)丘奇(Church,A.)、(美)克林(Kleene,S.C.)等提出可计算函数概念,建立了算法理论.

*(奥地利-美)哥德尔(Gödel,K.)发表"论证明长度".

*(法)谢瓦莱(Chevalley,C.)引进了伊代尔概念.

*(苏)坎托罗维奇(Канторович,Л.В.)的《偏微分方程的近似解法》出版,它是计算数学的奠基性著作.

*(法)嘉当(Cartan,H.)给出齐性有界域分类及对称有界域的分类.

1937 年

*(匈牙利-美)冯·诺伊曼(von Neumann,J.)引入"类"的概念.

*(法)嘉当(Cartan,H.)引进了"滤子"、"超滤"概念.

*(美)仙农(Shannon,C.E.)发表"接点电路的符号分析",彻底解决了电子线路实现布尔代数的逻辑运算问题,为电子计算机的研制开辟了道路.

*(瑞典)克拉默(Cramér,H.)系统研究随机过程的统计理论.

*(苏)彼得罗夫斯基(Петровский,И.Г.)提出了偏微分方程组的分类法.

*(美)琼斯(Jones,P.)提出正规 Moore 空间度量化概念.

*(中)李俨的《中国算学史》出版.

*(德)黑克(Hecke,E.)建立了"黑克算子"

*(法)韦伊(Weil,A.)引进了一致性结构,开辟了非度量化函数空间的研究.

*(苏)安德罗诺夫(Андронов,A.A.)和庞特里亚金(Понтрягин,Л.С.)提出常微结构稳定性概念,它是微分动力系统研究的开端.

*(德)布拉施克(Blaschke,W.J.E.)的《积分几何学教程》(Ⅱ)出版.

*(苏)维诺格拉多夫(Виноградов,И.М.)引进素变数三角和,证明了三素数定理(任何充分大的奇数可表示成三个素数之和——奇数哥德巴赫猜想),创造了三角和方法.

*（英）蒂奇马什（Titchmarsh，E. Ch）《傅里叶积分理论引论》出版.

*（美）奎因（Quine，W. V. O.）的《数理逻辑的新基础》出版，提出了了系统 NF.

*（匈牙利-美）波利亚（Polya，G.）提出波利亚计数定理.

*（瑞士）伯奈斯（Bernays，P. I.）发展了 NBG 系统.

*（美）斯通（Stone，M. H.）证明了“斯通定理”.

*（英）图灵（Turing，A. M.）的“论可计算的数及其在决策问题上的应用”发表，得出图灵机概念，奠定了电子计算机的理论基础.

*（美）惠特尼（Whitney，H.）证明微分流形的嵌入定理，创立了微分拓扑学.

1938 年

*（法）布尔巴基学派的《数学原本》，开始分卷出版.

*（中）华罗庚、（荷兰）范德科皮特（Van der Corput，J. G.）同时独立地证明了几乎全体偶整数都能表示成两个素数之和.

*（中）华罗庚给出了“华氏不等式”.

*（中）许宝騄给出了 Behrens - Fisher 问题的检验方法——“许方法”.

*（苏）施尼雷尔曼（Шнирельман，Л. Г.）的“赋范代数域中的函数”发表，建立了这领域中函数的理论.

*（苏）布赫什塔布（Бухштаб，A. A.）证明了“哥德巴赫猜想（5，5）问题”.

*（英）罗思（Roth，L. 1904—1968）证明哥德巴赫猜想对几乎所有偶数都成立.

*（苏）庞特里亚金（Понтрягин，Л. С.）的《连续群》出版.

*（法）韦伊（Weil，A.）的《关于一致结构空间和一般拓扑》出版.

*（法）嘉当（Cartan，É.（—J.））的《旋子论讲义》出版，它从几何观点发展了旋子论.

*（罗马尼亚）斯托伊洛夫（Stoilow，S. G.）的《解析函数论的拓扑原理教程》出版，给出了解析函数的拓扑性质，解决了确定黎曼面的覆盖面的问题.

*（奥地利-美）哥德尔（Gödel，K.）发表“选择公理和广义连续统假设的一致性”、“广义连续统假设的协调性”，创立了可构成方法，开辟了内模型方法的研究.

*（美）仙农（Shannon，C. E.）建立开关网络理论，为有限自动机理论奠定了基础.

*（美）以“普特南”命名的美国大学生数学竞赛首次举行.

*（英）费希尔（Fisher，R. A.）、耶茨（Yates，F.）创立了实验设计，并发展了方差分析法.

1939 年

*（德）台什缪勒论“极值拟保角映射与二次微分”发表，奠定了台什缪勒空间理论的基础.

*（罗马尼亚-美）瓦尔德（Wald，A.）创立了序贯分析法，完善了抽样检查理论.

*（波兰）艾伦伯格（Eilenberg，S.）完成了同调论的公理化，并为同调论奠定了基础.

*（日）浅野启三提出非可换群的理想论.

*（苏）盖尔范德（Гельфанд，И. М.）奠定了巴拿赫代数的理论基础.

*（奥地利-美）哥德尔（Gödel，K.）论“连续统假设的相容性”发表.

*（苏）坎托罗维奇（Канторович，Л. В.）论“生产组织与计划中的数学方法”发表，它是有关线性规划的最早文献.

*（美）鲍廷（Bautin，N. N.）对希尔伯特第 16 问题（$n=2$ 的情形），证明了 $H(2)\geqslant 3$.

1940 年

*（英）绍司威尔提出了求线性代数方程组数值解的松弛方法，创立数值计算.

*（苏）盖尔范德（Гельфанд，И. М.）提出了交换群调和分析理论. 同年，创立赋范环论（交换巴拿赫代数论）.

*（中）陈省身和（法）韦伊（Weil，A.）将局部紧群上不变测度观念引入了积分几何，从而形成齐性空间积分几何.

*（法）谢瓦莱（Chevalley，C.）完成了类域论的算术化.

*（苏）布赫什塔布（Бухштаб，A. A.）证明了哥德巴赫猜想（4，4）问题.

*（美）伯克霍夫（Birkhoff，G.）的《格论》出版.

*（美）美国《数学评论》创刊.

*（苏）柯尔莫哥洛夫（Колмогоров，A. H.）、（法）纳维（Navier，C.（- L. - M. - H.））提出并解决了宽平稳过程的线性预测.

*（荷兰-美）布劳威尔（Brouwer，L. E. J.）的《意识、哲学与数学》出版.

*（中）柯召证明了$(x,y)=1$ 时的爱尔特希猜想.

*（奥地利-美）哥德尔（Gödel，K.）论“选择公理及广义连续统假设同集合论公理的相容性”发表，证明了 ZF 公理与选择公理并不矛盾，创造了可构造集合的模型.

*（罗马尼亚）瓦尔德（Wald，A.）给出序贯概率

比检验法.

*（法）谢瓦莱（Chevalley，C.）和韦伊（Weil，A.）提出代数几何的相交问题.

*（荷兰）范·德·瓦尔登（Van der Waerden，B. L.）与（法）韦伊（Weil，A.）建立了代数几何基础.

*（中）华罗庚给出"华罗庚定理".

*（中）许宝騄给出样本方差分布的渐近展开与中心极限定理中误差大小的阶的精确估计.

*（法）韦伊（Weil，A.）的《拓扑群积分及其应用》出版，开辟了群上的调和分析新领域.

*（法）谢瓦莱（Chevalley，C.）和（中）段学复用李代数方法，讨论了特征为零的任意域上的线性代数群，为线性代数群理论奠定了基础.

*（波兰-美）雅各布森（Jacobson，N.）建立了交换域的一般伽罗瓦理论.

*（法）勒雷（Leray，J.）开创了谱序列理论和层理论.

*（波兰-美）艾伦伯格（Eilenberg，S.）对障碍理论加以系统化.

1941 年

*（日）角谷静夫提出 AM，AL 空间，研究无限维空间测度.

*（美）霍奇（Hodge，W. V. D.）定义流形上的调和积分，并用于代数流形，成为了研究流形同调性质的分析工具.

*（法）韦伊（Weil，A.）最后证明了任意单变量代数函数域的黎曼猜想.

*（法）谢瓦莱（Chevalley，C.）获第四届科尔代数奖和数论奖.

*（中）华罗庚的《堆垒素数论》出版，它系统地发展了圆法和三角和估计法.

*（苏）柯尔莫哥洛夫（Колмогоров，А. Н.）论"《希尔伯特空间中的平稳序列"发表，导出了随机过程的最小二乘法.

*（美）道格拉斯（Douglas，J.）解决了三维空间变分问题的逆问题.

*（德）霍普夫（Hopf，H.）开创了 H 空间理论.

*（美）伯克霍夫（Birkhoff，G.）和麦克莱恩（Maclane，S.）的《现代代数概论》出版.

*（奥地利-美）哥德尔（Gödel，K.）的《连续统假设的协调性》出版.

*（苏）盖尔范德（Гельфанд，И. М.）的《赋范环论》出版，将算子谱推广到巴拿赫代数中创立了赋范环理论.

*（德-美）布饶尔（Brauer，R. D.）创立了模表示论.

*（苏）林尼克（Линник，Ю. В.）发现"大筛法".

*（美）雷梅尔证明当 $n<253749889$ 时，在第一种情形 $x^n+y^n=z^n$ 没有整数解，推进了费马问题的研究.

*（法）韦伊（Weil，A.）用抽象代数的方法建立了抽象域上的代数几何理论.

*（波兰）赫维茨（Hurewicz，W.）的《维数论》出版，对维数理论做出了贡献.

*（法）埃雷斯曼（Ehresmann，C.）把嘉当联络发展成一般的纤维丛理论.

1942 年

*（匈牙利-美）哥德尔（Gödel，K.）的《罗素的数理逻辑》出版.

*（苏）伯恩斯坦（Бернштейн，С. Н.）、（日）伊藤清建立马尔可夫过程与随机微分方程的联系，创立了随机微分方程论.

*（美）维纳（Wiener，N.）用变分法导出了预测滤波公式.

*（美）费因曼（Feynman，R. P.）定义费因曼路径积分.

*（苏）林尼克（Линник，Ю. В.）借助基的方法解决了华林问题.

*（波兰-美）艾伦伯格（Eilenberg，S.）和（美）麦克莱恩（Maclane，S.）提出范畴与函子概念.

*（苏）庞特里亚金（Понтрягин，Л. С.）创立了"庞特里亚金示性类".

*（苏）柯尔莫哥洛夫（Колмогоров，А. Н.）、（美）维纳（Wiener，N.）开创了预报理论和滤波理论，产生统计动力学.

*（中）陈省身给出"陈氏公式"（证明高斯-波涅公式）.

*（美）莱夫谢茨（Lefschetz，S.）的《代数拓扑学》出版，这是第一次出现"代数拓扑学"这一名称.

*（挪威-美）赛尔伯格（Selberg，A.）研究了黎曼猜想，并有突破性进展.

*（美）埃克特（Eckert，J.）提出"高速电子管计算装置的使用"的报告（第一台电子计算机的初始方案）.

1943 年

*（匈-美）哈尔莫斯（Halmos，P. R.）的《有限维向量空间》出版.

*（中）林士谔提出求代数方程数字解的"林士谔方法".

*（英）英国制成破译密码的专用电子计算机 Colossus.

*（德）外尔（Weyl，(C. H.)H.）的《亚纯函数和解析曲线》出版.

*（苏）盖尔范德（Гельфанд，И. М.）与奈玛克

(Наймарк, M. A.)开创了 C^* 代数.

*(美)美国数学会的《数学综览》丛书,开始出版.

*(美)霍珀为"Mark—I"计算机编制程序,开拓了计算机语言学科.

*(法)韦伊(Weil,A.)证明了非内蕴的 n 维流形上的"高维高斯-博内公式".

*(中)陈省身证明了"高维高斯-博内公式",奠定了整体微分几何的基础.

*(德)西格尔(Siegel,C. L.)发表关于辛几何理论的文章,研究了第二类典型域.

*(美)维纳(Wiener,N.)的《行为、目的和目的论》出版,奠定了控制论的基础.

*(苏)坎托罗维奇(Канторович, Л. В.)创立"牛顿-坎托罗维奇方法".

*(苏)拉夫连季耶夫(Лаврентьев, M. A.)引进拟保角映射理论的一般概念.

*(中)陈省身研究了"陈示性类",推进了大范围微分几何的研究.

*(日)角谷静夫给出集值映射的不动点,为不动点理论的第三次突破性工作.

1944 年

*(匈牙利-美)冯·诺伊曼(von Neumann, J.)、(美)摩根斯腾(Maorgenstern,O.)的《对策论和经济行为》出版,这是对策论的奠基性著作,它将对经济学起着重大影响.

*(中)陈省身发表了 n 维流形上的高斯-博内公式的证明,开辟了微分几何学的新纪元.

*(美)艾肯制成了世界上第一台通用自动计算机——"自动程控计算机"(属机电式计算机),它是现代电子数字计算机的先驱.

*(美)扎里斯基(Zariski,O.)解决了三维代数簇问题.

*(波兰-美)艾伦伯格(Eilenberg,S.)和(美)斯泰洛特的《代数拓扑学基础》出版,它把同调论公理化,结束了多种同调论共存局面.

*(奥地利)阿廷(Artin,E.)的《伽罗瓦理论》出版.

*(法)迪厄多内(Dieudonné,J.)提出了仿紧概念,使局部结构与整体结构联系了起来.

*(美)范迪维尔(Vandiver,H. S.)等证明了 $2<p<4002$ 时,费马大定理成立.

*(法)嘉当(Cartan,H.)创立解析凝聚层理论.

*(苏)库洛什(Курош, A. Г.)的《群论》出版,它是最完备的系统阐述一般群理论的教科书.

*(奥地利)阿廷(Artin,E.)发现"阿廷环"(在理想的极小条件的环),为有理数域上的半单代数提供了新的基础.

*(中)林家翘提出湍流谱相似性的普遍理论,解决了流体运动稳定性中的一个数学疑难.

1945 年

*(法)施瓦尔茨(Schwartz,L.)的《广义函数论》出版,它推广了古典函数的概念,创立了广义函数论,有力地推动了偏微分方程的发展(施瓦尔茨因此获 1950 年菲尔兹奖).

*(中)陈省身建立了代数拓扑和微分几何的联系,推进了整体几何学的发展,发现了陈省身示性类.

*(法)勒雷(Leray,J.)创造了纤维空间的谱序列理论,导出了新的代数方法. 同年,发表"层"的理论.

*(波兰-美)艾伦伯格(Eilenberg,S.)和(美)麦克莱恩(Maclane,S.)给出范畴与函子的系统结果.

*(法)嘉当(Cartan,H.)的《外微分系统及其几何应用》出版.

*(法)阿达马(Hadamard,J.(-S.))的《数学领域中的发明心理学》出版,它是数学方法论的经典著作.

*(匈牙利-美)冯·诺伊曼(von Neumann,J.)提出采用"存储程序"的离散变量自动电子计算机 EDIAC 方案.

*(德)雅各布森(Jacobson,N.)建立了一般环的构造理论.

*(苏)彼得罗夫斯基(Петровский, И. Г.)开创了双曲型算子的基本解的隙窝理论.

*(美)乌拉姆(Ulam,S. M.)与(匈牙利-美)冯·诺伊曼(von Neumann,J.)引进随机遍历定理,创立了蒙特卡罗法.

*(中)华罗庚创立矩阵几何.

1946 年

*(美)美国电子工程学校和宾夕法尼亚大学埃克特(Eckert,J.)等试制成功了第一台电子计算机 ENIAC.

*(法-美)韦伊(Weil,A.)的《代数几何基础》出版,它奠定了现代代数几何学的基础.

*(中)华罗庚《堆垒素数论》出版,发展了三角和法.

*(苏)盖尔范德(Гельфанд, И. М.)、(美)诺伊玛克建立了罗伦兹群的表示理论.

*(匈牙利-美)冯·诺伊曼(von Neumann,J.)与布克斯(Burks)等提出设计报告:"电子计算机逻辑结构初探".

*(中)苏步青的《微分几何学》出版.

*（苏）穆斯赫利什维利（Мусхелишвили，Н. И.）的《奇异积分方程》出版.

*（法-美）韦伊（Weil，A.）的《典型群》出版.

*（匈牙利-美）冯·诺伊曼（von Neumann，J.）和莫尔小组给出"离散变量自动电子计算机"（EDIAC）对 EDIAC 做了重大改进，这是计算机发展史上的一个里程碑.

*（法）谢瓦莱（Chevalley，C.）建立了超代数几何的交点理论. 同年，还出版了《李群论》.

*（中）华罗庚给出了正交群埃尔米特矩阵的分类.

*（瑞典）克拉默（Cramér，H.）的《统计学数学方法》出版，它标志着数理统计学的成熟.

*（法）施瓦尔茨（Schwartz，L.）建立起了一般泛函空间的对偶性的理论.

*（挪威-美）赛尔伯格（Selberg，A.）给出素数定理的初等证明.

1947 年

*（罗马尼亚-美）瓦尔德（Wald，A.）的《序贯分析》出版.

*（美）丹齐克（Dantzig，G. B.）提出了一般的线性规划理论的模型及单纯形法，奠定了线性规划的理论基础.

*（奥地利-美）哥德尔（Gödel，K.）的《康托尔连续统问题是什么》出版.

*（英）图灵（Turing，A. M.）的《思维机，异端理论》出版.

*（苏）马尔可夫（Марков，А. А.）的《算法论》出版.

*（法）施瓦尔茨（Schwartz，L.）证明 R^3 中，单位球面不是谱综合集.

1948 年

*（美）维纳（Wiener，N.）发表"控制论或关于在动物和机器中控制和通讯的科学"，创立控制论.

*（美）仙农（Shannon，C. E.）的《通讯的数学理论》出版，奠定了信息论基础.

*（苏）坎托罗维奇（Канторович，Л. В.）将泛函分析用于了计算数学.

*（英）福格逊（Ferguson，D. F.）和（美）伦奇（Wrench，J. W. Jr）计算 π 到 808 位小数，创分析法计算 π 的最高纪录.

*（法-美）韦伊（Weil，A.）的《ζ 函数论》出版.

*（法）谢瓦莱（Chevalley，C.）与（波兰-美）艾伦伯格（Eilenberg，S.）建立了李代数的上同调理论.

*（美）塔尔斯基（Tarski，A.）的《初等代数和几何的判定法》出版.

*（德）霍普夫（Hopf，H.）提出了复结构概念.

*（中）吴文俊给出计算微分流形的切丛的斯蒂费尔-惠特尼示性类 W 的"吴公式".

*（中）钱伟长创立系统摄动法处理非线性方程.

*（罗马尼亚-美）瓦尔德（Wald，A.）与沃尔弗维茨（Wolfowitz，J.）证明序贯概率比检验法（SPRT）的最优性.

*（德-美）弗里德里希斯（Friedrichs，K. O.）、（德-美）库朗（Courant，R.）创立非线性常微分方程理论.

*（波兰-美）艾伦伯格（Eilenberg，S.）和（美）麦克米伦（Macmillan，W. D.）创立范畴论与函子理论.

*（匈牙利）雷尼（Renyi，A.）证明了哥德巴赫猜想（1，C）问题，C 是常数.

1949 年

*（英）英国剑桥大学制成第一台内存电子管计算机 EDSAC，创造了标号和宏指令.

*（美）奈曼（Neyman，J.）证明了判定统计量充分性的方法（因子分解定理）.

*（美）维纳（Wiener，N.）论"平稳随机序列的预测，滤波和平滑"发表，创造了维纳滤波器，提出了维纳滤波理论，开拓了线性控制理论的研究.

*（挪威-美）赛尔伯格（Selberg，A.）、（匈）爱尔特希（Erdös，P.）用初等方法证明了素数定理.

*（美）二进制自动计算机 BINAC 和第一台商用计算机 UNINAC 研制成功.

*（法-美）韦伊（Weil，A.）提出了"韦伊猜想"，它是代数几何中的中心问题.

1950 年

*（法）施瓦尔茨（Schwartz，L.）的《广义函数》（Ⅰ）出版.

*（美）维纳（Wiener，N.）的《人当作人来使用》出版.

*（德）库恩（Kuhn，H. W.）和塔克尔（Tucker，K.）给出了非线性规划的一组最优性条件，它是近代非线性规划产生的标志.

*（挪威-美）赛尔伯格（Selberg，A.）给出"赛尔伯格筛法".

*（美）第 11 届国际数学家大会在美国坎布里奇召开.

*（挪威-美）赛尔伯格（Selberg，A.）、（法）施瓦尔茨（Schwartz，L.）获菲尔兹奖.

*（英）图灵（Turing，A. M.）的《计算机与智力》出版，首次提出了计算机能思维的观点.

*（罗马尼亚-美）瓦尔德（Wald，A.）的《统计决

策函数论》出版，创立了统计决策函数理论.

*（中）陈省身（Chern Shiing - Shen）和（美）斯廷罗德（Steenrod，N. E.）、（法）埃雷斯曼（Ehresmann，C.）提出纤维丛理论.

*（英）大杨格提出解椭圆型方程的超松弛方法，它是目前计算机上常用方法.

*（美）邓福德（Dunford，N.）创立了谱算子理论.

*（美）杜布（Doob，J. L.）创立鞅论.

*（法-美）布里渊发表“生命热力学与控制”、“科学与信息论”，建立了信息过程的物理模型，提出了“信息与熵等价”的论断和“信息负熵原理”，促进了信息论的发展.

*（德）林诺创立组合群论.

*（法）马勒（Mahler，K.）、（法-美）韦伊（Weil，A.）、（德）西格尔（Siegel，C. L.）出版《数的几何》，创立了几何数论.

*（匈-美）哈尔莫斯（Halmos，P. R.）的《测度论》出版.

*（法）塞尔（Serre，J. P.）以复解析层上的上同调观点研究复变函数论.

*（法）塞尔（Serre，J. P.）提出一般纤维空间概念，束谱序列代数工具，使同伦群的计算取得了突破.

*（中）吴文俊定义非同伦不变的拓扑不变量，引入“示嵌类”.

*（中）冯康解决了（匈牙利-美）冯·诺伊曼（von Neumann，J.）殆周期拓扑群的最小群的结构问题.

*（美）举办了首届美国中学生数学竞赛（AHS-ME）.

1951 年

*（法）塞尔（Serre，J. P.）发展了纤维丛概念，给出一般纤维空间概念，证明了球面的同伦群大都是有限群.

*（法）施瓦尔茨（Schwartz，L.）的《广义函数》（Ⅱ）出版.

*（奥地利-美）阿廷（Artin，E.）与塔特（Tate，J. T.）的《类域论》出版，提出了类结构概念，应用群的上同调理论进一步将类域论公理化和统一化.

*（日）伊藤清建立了随机微分方程理论，开辟了马尔可夫过程研究的道路.

*（美）丹齐克（Dantzig，G. B.）提出了表上作业法.

*（美）莫尔斯（Morse，P. M.）等的《运筹学方法》出版，它标志着运筹学作为一门独立学科的诞生.

*（美）霍夫曼（Hoffman，A. J.）创立了组合数学.

*（苏）盖尔范德（Гельфанд，И. М.）的《超越数与代数数》出版，它开创了超越数的基本方法，推进了超越数理论的发展.

*（波兰）武卡谢维奇（Łukaszewicz，J.）发表“从现代形式逻辑的观点来看亚里士多德的三段论”.

*（中）中国数学会（8月）在北京召开第一次全国代表大会.

*国际数学联合会（9月）正式成立.

*（美）库恩、塔克尔（Tucker，K.）的《论非线性规划》出版，提出了库恩-塔克尔的有效解概念.

*（德）外尔（Weyl，（C. H.）H.）的《半个世纪的数学》出版，它是 20 世纪前半叶数学的总结.

1952 年

*（美）蒙哥马利（Montgomery，D.）、格利森（Gleason，A. M.）、齐平（Zippin，L.）解决了希尔伯特第 5 问题（连续群的解析性定理）.

*（匈牙利-瑞士）里斯（Riesz，F.（F.））、纳吉（Nagy，?）的《泛函分析讲义》出版.

*（挪威-美）赛尔伯格（Selberg，A.）对布伦筛法做了重要改进，克服了上下界过宽的缺点.

*（美）霍普夫（Hopf，H.）发表了第一篇关于编译程序的论文.

*（法）托姆（Thom，R.）给出托姆定理，引发了微分拓扑学的诞生.

*（意）新建的国际数学联合会（IMU）在意大利召开第一次会议，并重建了国际数学教育委员会（ICMI）.

*（美）考尔德伦（Calderón，A. P.）、赞格蒙（Zygmund，A.）证明了奇异积分算子的 Z^p 可积性，为奇异积分理论奠定了基础.

*（波兰-美）艾伦伯格（Eilenberg，S.）、斯廷罗德（Steenrod，N. E.）的《代数拓扑学基础》出版，它对代数拓扑学的发展起了一定的促进作用.

*（美）世界上第一个运筹学会——美国运筹学会成立.

*（美）鲍廷（Bautin，N. N.）对希尔伯特第 16 问题（$n = 2$ 的情形），证明了 $n(2) \geqslant 3$.

*（德）哈塞（Hasse，H.）发表“关于阿贝尔域的类型”，给出了阿贝尔域的类数解析公式.

*（中）《中国数学学会学报》改名为《数学学报》.

1953 年

*（美）基弗（Kiefer，J. C.）论“求极大值的一个序贯极小化极大寻优法”发表，提出优选法，给出了

“0.618法”.

*(日)冈洁证明了“列维猜想”(1910年提出).

*(美)贝尔曼(Bellman,R.)论“动态规划理论导引”发表,提出了动态规划这一学科名称,并阐述了最优性原理.

*(美)杜布(Doob,J. L.)的《随机过程》出版,建立了随机函数理论的公理结构,推动了鞅理论的发展.

*(?)沙普利(Shapley,L. S.)的《随机对策》出版.

*(苏)苏联的《文摘杂志:数学类》创刊.

*(英)阿尔福斯(Ahlfors,L. V.)的《复分析》出版.

*(?)肯德尔(Kendall,M.)把马尔可夫链研究方法运用于排队论.

*(日)山道英彦给出了希尔伯特第5问题的肯定结果.

*(法)托姆(Thom,R.)的《协边理论》出版,创立协边理论,刺激了代数拓扑学的发展,开创了微分拓扑学与代数拓扑学蓬勃发展的局面.

*(中)华罗庚首创用群表示论方法得出四类典型域的完整正交系.

*(中)吴文俊提出构造非同伦性拓扑不变量的方法,并证明“吴公式”.

*(中)赵访熊给出了任意多个任何类型的联立方程组的迭代法(斜量法).

*(中)郭永怀发展了高速边界层理论中的“庞加莱-莱特希尔方法”(奇异摄动法).

1954年

*(荷兰)第12届国际数学家大会在荷兰阿姆斯特丹召开.

*(日)小平邦彦、(法)塞尔(Serre,J. P.)获菲尔兹奖.

*(中)钱学森的《工程控制论》出版.

*(中)苏步青的《关于高维射影共轭网理论的研究》(Ⅰ)出版,证明了具有熊全治型的普遍定理和存在定理.

*(英)阿蒂亚(Atiyah,M. F.)给出了第二类积分的完整理论.

*(意)卡拉比(Calabi,E.)提出“卡拉比猜想”.

*(美)布饶尔(Brauer,R. D.)提出“布饶尔纲领”.

*(中)华罗庚的《典型域上的调和分析》出版.

*(中)陈建功的《直交函数级数的和》出版.

*(荷兰)范·德·瓦尔登(Van der Waerden,B. L.)的《科学的觉醒》出版,它是古代数学史的权威著作之一.

*(日)日本数学会的《岩波数学辞典》出版.

*(美)惠特尼(Whitney,H.)证明 R^2 到 R^2 的微分映射的分类,开创了微分映射的奇点理论新分支.

*(美)IBM公司公布公式翻译语言(Fortran Ⅰ),这是最早的高级语言.

*(英)艾什比的《大脑的设计》出版,建立了生物控制论.

*(中)苏步青的《射影曲线概论》出版,重新建立了三维空间射影曲线的一般理论.

*(南斯拉夫-美)费勒(Feller,W.)将泛函分析中的半群方法引入马尔可夫过程的研究中.

1955年

*(美)美国哈佛大学创办了数理语言学讨论班.

*(美)丹齐克(Dantzig,G. B.)开创了随机规划研究.

*(美)凯梅尔、斯内尔(Snell,J. L.)和汤普森(Thompson,J. G.)的《有限数学导论》出版,形成了离散数学.

*(法)塞尔(Serre,J. P.)的《凝聚层代数》、《代数几何学和解析几何学》出版,他系统地把层论应用于抽象代数几何中,建立了凝聚层的上同调理论,为概型理论打下了基础.

*(德)博赫纳(Bochner,S.)的《调和分析和概率论》出版.

*(美)隆姆贝格提出求数值积分的隆姆贝格方法,是目前计算机上常用的一种方法.

*(美)瑞斯福特提出解椭圆型或双曲型偏微分方程的交替方向法.

*(瑞典)荷尔蒙特的《偏微分算子的一般理论》出版,建立了常系数线性偏微分算子的一般理论.

*(法)嘉当(Cartan,H.)、(波兰-美)艾伦伯格(Eilenberg,S.)的《同调代数》出版.

*(德-英)罗特(Roth,K. F.)的“对于代数数的有理逼近”(罗特定理),解决了代数数的有理逼近问题(获1958年菲尔兹奖).

*(苏)辛钦(Хинчин,А. Я.)论“公用事业理论的数学方法”发表,建立了排队论严格的数学理论.

*(美)范迪维尔(Vandiver,H. S.)用计算机检验对于小于4002的不正规素数,费马猜想成立.

*(美)谢瓦莱(Chevalley,C.)的《某种单群》出版,得到了线性代数群(谢瓦莱群),否定了伯恩赛德猜想,是对有限单群完全分类问题的重要贡献.

*(美)隆姆贝格创立数值积分.

*(中)王元证明了哥德巴赫猜想(3,4)问题.

*(美)加拉贝迪安(Garabedian,P. R.)、席费

尔(Schiffer,M. M.)应用变分法证明了$|a_4|\leqslant 4$(比伯巴赫猜想).

*(德)希策布鲁赫(Hirzebruch,F.)利用协边理论证明高维代数簇的黎曼-罗赫定理.

*(英)哈里斯(Harris,T. E.)提出在给定的网络上寻求某两点间的最大运输量问题.

*(中)《数学进展》创刊.

1956 年

*(?)乔姆斯基(Chomsky,N.)给出文法的一种数学模型,创立了形式语言学.

*(法)嘉当(Cartan,H.)、(波兰-美)艾伦伯格(Eilenberg,S.)的《同调代数学》出版.

*(法)托姆(Thom,R.)的《可微映像的奇点》出版.

*(美)米尔诺(Milnor,J. W.)证明了七维球面上有不止一种微分结构(存在与七维球同胚,但不微分同胚的微分流形,称为怪球),使微分拓扑学正式成为一数学分支(获 1958 年菲尔兹奖).

*(美)麦卡锡(McCarthy,J.)汇编了《自动机研究》论文集,并在达特玛斯大学召开了第一次人工智能讨论会,这标志着人工智能这门学科的诞生.

*(中)关肇直提出单调算子概念.

*(日)小平邦彦把黎曼(Riemann,(G. F.)B.)的参模理论推广为高维复结构的变形理论.

*(法)弗雷歇(Fréchet,M.-R.)给出了"弗雷歇可微性"概念,这是现代非线性泛函理论的基本概念.

*(美)鲁宾孙(Robinson,A.)(1974)的《代数元数学》出版,提出了非标准分析的思想.

*(苏)维诺格拉多夫(Виноградов,И. М.)证明了哥德巴赫猜想(3,3)问题.

*(?)纽厄尔(Newell,A.)、西蒙(Simon,H. A.)提出了逻辑理论机(LT)程序,用它证明了《数学原理》中的 38 条定理,第一次区分了计算机的一般应用与人工智能的界限,取得了人工智能研究的奠基性的突破,开创了机器证明定理.

*(苏联)叶斯玛诺维奇茨提出了"叶斯玛诺维奇茨猜想".

*(法)谢瓦莱(Chevalley,C.)(1956—1958)完成了任意特征的代数闭域上的半单纯代数群的完全分类.

*(美)惠特尼(Whitney,H.)的《几何积分法》出版,他用解析法表示同调理论,开拓了微分拓扑学新领域.

*(瑞士)瑞士自然科学会出版《欧拉全集》,第一辑数学共 29 卷出齐.

*(中)华罗庚的《数论导引》出版,它全面总结了华罗庚数论研究的成果,影响深远.

*(中)中国政府颁发国家自然科学奖.华罗庚以"典型域上的多元复变函数论"获一等奖;吴文俊以"示性类与示嵌类的研究"获一等奖.

*(中)北京、上海、武汉等大城市首次举办中学生数学竞赛.

1957 年

*(苏)庞特里亚金(Понтрягин,Л. С.)发现最优控制的变分原理.

*(美)贝尔曼(Bellman,R.)的《动态规划》出版,这标志着这一学科的创立.

*(美)麻省理工学院研制成功大型晶体管计算机 TX—2.

*(中)王元在华罗庚的帮助下,证明了哥德巴赫猜想(2,3)问题,并创"华-王方法".

*(法)托姆(Thom,R.)证明了有理系数的庞特里亚金示性类是组合不变量.

*(中)胡坤升对一类积分方程组的解的存在性与惟一性问题,取得了重要成果.

*(美)哈佛大学开设《数理语言学》,数理语言学科正式出现.

*(美)米尔诺(Milnor,J. W.)的《微分拓扑讲义》出版.

*(奥地利-美)阿廷(Artin,E.)的《几何代数学》出版.

*(美)莱夫谢茨(Lefschetz,S.)的《微分方程的几何理论》出版.

*勒尔(Lull,R.)解决了具有指定单值群的线性微分方程解的存在性(希尔伯特第 21 问题).

*(苏)阿诺尔德(Арнольд,В. И.)对于连续函数的情况,否定地解决了希尔伯特第 13 问题.

*(中)董金柱、叶彦谦对于希尔伯特第 16 问题 $n=2$ 的情形的相对位置问题,证明了(E_2)不超过两串.

*(中)秦元勋、蒲富金对于希尔伯特第 16 问题 $n=2$ 的情形,给出方程具有至少 3 个成一串孤立周期解的实例.

*(中)北京、上海等城市中学生数学竞赛继续举行,并扩大到其他大、中、小城市,延续至 1965 年.

1958 年

*第 13 届国际数学家大会在英国爱丁堡召开.

*(德-英)罗斯(Roth,K. F.)、(法)托姆(Thom,R.)获菲尔兹奖.

*(日)永田雅宜给出希尔伯特第 14 问题的反例.

*(德)德意志联邦共和国应用数学与力学协会提出"关于算法语言 ALGOL 的初步报告".

＊(中)万哲先给出图上作业法的理论证明，创图上作业法.

＊(苏)柯尔莫哥洛夫(Колмогоров, А. Н.)引进测度熵概念.

＊(美)米尔诺(Milnor, J. W.)证明了实数域上的可除代数，只有实数域、复数域、四元数体和凯莱代数.

＊(德)弗里德里希斯(Friedrichs, K. O.)给出正对称方程组理论，开辟了用泛函分析研究混合型方程的途径.

＊(中)华罗庚的《多个复变数典型域上的调和分析》出版(1956年完成).

＊(中)江泽涵、姜伯驹、石根华等开创了不动点类理论的新方向.

＊(瑞士-法)伯奈斯(Bernays, P. I.)的《公理集合论》出版.

＊(中)秦元勋给出二次代数极限环的方程存在性的充分必要条件，并由奇点和极限环决定结构的惟一性和稳定性.

＊(奥地利-美)哥德尔(Gödel, K.)在"有穷观点的扩张"中给出对古典数论的构造性解释，部分地解答了20世纪以来关于数学基础的争论.

＊(中)苏步青的《一般空间微分几何学》出版.

＊(美)维纳(Wiener, N.)的《控制论与社会》出版.

＊(苏)林尼克(Линник, Ю. В.)的《最小二乘法和处理观察数据的数理统计理论基础》出版.

＊(美)美国创立计划评审法(PERT).

＊(美)戈莫里(Gomory, R. E.)提出线性规划的割平面法，此后整数规划逐步形成独立分支.

＊(美)美国数学协会(MAA)成立了"学校数学研究小组"(SMSG)，进行了数学教育改革的研究工作.

＊(苏)庞特里亚金(Понтрягин, Л. С.)等提出极大值原理，成为最优控制理论的重要原理之一.

＊(苏)维诺格拉多夫(Виноградов, И. М.)论"新的估计函数 $\zeta(1+it)$"发表，给出黎曼猜想的新结果.

1959 年

＊(英)阿蒂亚(Atiyah, M. F.)与希策布鲁赫(Hirzebruch, F.)把 K 函子推广到紧拓扑空间上，得出了 K 群.

＊(美)米尔诺(Milnor, J. W.)发展(法)托姆(Thom, R.)的配边理论，发展了复配边、自旋配边等理论.

＊(瑞典)赫尔曼德尔(Hörmander, L. V.)给出变系数线性偏微分方程解的存在性、惟一性和正则性的有关结果，是线性偏微分方程理论的系统成就.

＊(瑞典)斯威林提出递推算法.

＊(中-美)王浩利用计算机用9分钟证明了《数学原理》中的几百条定理.

＊(中)苏步青运用外微分形成对高维射影空间共轭网理论进行系统研究，取得了一系列成果.

＊(苏)坎托罗维奇(Канторович, Л. В.)的《资源最优利用的经济计量》出版，它系统地阐述了线性规划在经济中的应用.

＊(苏)克拉索夫斯基(Красовский, Н. Н.)在函数空间之间建立解映射，从而确立了滞后型泛函微分方程.

＊(法)塞尔(Serre, J. P.)的《代数群和类域》出版.

＊(印度-美)玻色(Bose, S. N.)和史里克汉德证明了 $n=22$ 的欧拉方阵存在，推翻了欧拉方阵猜想.

＊(美)斯梅尔(Smale, S.)证明五维及五维以上的庞加莱猜想(获1966年菲尔兹奖).

＊(波兰)米库辛斯基(Mikusinski, J.)提出"米库辛斯基算子演算".

＊(苏)盖尔丰德(Гельфонд, А. О.)与戈拉叶夫(Граев, М. И.)引进了积分几何学中的极限球面方法.

＊(美)杜布(Doob, J. L.)、哈特创立了马尔可夫过程和位势理论这一分支.

＊(日)小平邦彦研究出紧复解析曲面的结构和分类，把曲面分为有理曲面、椭圆曲面、K_3 曲面等，并每类都建立了一个极小模型，对代数几何、复解析几何学的发展起了推动作用.

＊(苏)坎托罗维奇(Канторович, Л. В.)用泛函分析观点，把常微分方程、常时滞的微分差分方程，变时滞的微分差分方程统一起来形成了泛函微分方程.

＊(瑞典)赫尔曼德尔(Hörmander, L. V.)证明了复系数线性偏微分方程解的存在性、惟一性、正则性.

＊(中)华罗庚、陆启铿的《典型域的调和函数论》出版，建立了典型域上调和函数的系统理论.

＊(美)美国全国科学院在伍兹霍尔召开会议(9月)，研究中学数学和理科教育改革问题.

＊(法)霍昆格姆(Hocquenghem, A.)和(美)玻色(Bose, S. N.)研究伽罗瓦域论在编码问题上的应用，发明了BCH码.

＊第一届国际数学奥林匹克(IMO)在罗马尼亚的布加勒斯特举行.

1960 年

＊高级语言ALGOL—60、COBOL—60文本发表.

*(美)麦卡锡(McCarthy,J.)提出 LISP 表处理语言,这是程序设计语言的重要里程碑,是人工智能研究的第二项奠基性突破.

*(中)胡世华建立了符号串(有穷基自由半群)上的递归函数理论算法理论.

*(?)兰特和杜格提出了分支定界法,开创了整数规划的研究.

*(匈牙利-美)卡尔曼(Kalman,R.E.)在"关于线性滤波的新方法"中,提出了"卡尔曼滤波",提供了在计算机上实时滤波的能力,建立了数字滤波理论.

*(苏联)克列因(Крейн,М.Г.)、(美)顿弗特建立非自共轭算子的系统理论.

*(美)纽曼(Newman,M.H.A.)提出"纽曼猜想".

*(中)柯召和卡斯尔斯(Cassels,J.W.S.)证明了谢尔品斯基猜想.

*(美)斯梅尔(Smale,S.)证明了维数 $n\geqslant5$ 时的微分流形的庞加莱猜想.

*(法)迪厄多内(Dieudonné,J.)的《现代分析基础》出版.

*(法)格罗腾迪克(Grothendieck,A.)的《代数几何教程》(Ⅰ)出版.

*(芬兰-美)阿尔福斯(Ahlfors,L.V.)、萨廖(Sario,L.R.)的《黎曼面》出版.

*(苏)林尼克(Линник,Ю.В.)的《概率规律的分解》出版.

*(美)霍华德(Howard,R.A.)的《动态规划与马尔可夫链》出版,对一类 MDP 模型提出了策略迭代法.

*(苏)盖尔范德(Гельфанд,И.М.)提出盖尔范德猜想.

*(法)格罗腾迪克(Grothendieck,A.)、(法)迪厄多内(Dieudonné,J.)把范畴与函子理论引入代数几何中.

*(挪威-美)赛尔伯格(Selberg,A.)、(法)韦伊(Weil,A.)提出了赛尔伯格猜想.

*(美)巴斯(Bass,H.)创立 K 理论.

*(英)加林创立高阶模态逻辑.

*(中)钱伟长建立广义变分原理,为有限元法的应用奠定了基础.

*(中)中国数学会第二次代表大会在上海召开(2月24日—3月4日).

*第二届国际数学奥林匹克(IMO)在罗马尼亚举行.

1961 年

*(美)鲁宾孙(Robinson,A.)(1月)在美国数学会上宣布了非标准分析,后在荷兰阿姆斯特丹皇家科学院学报上发表《非标准分析》.

*(美)美国数学教师全国委员会出版了文件《学校数学的革命》.

*(奥地利-美)阿廷(Artin,E.)、塔特(Tate,J.T.)的《数域论》出版.

*(英)特恩布尔(Turnbull,H.W.)的《标准矩阵导论》出版.

*(美)米尔诺(Milnor,J.W.)给出反例,否定了对于拓扑学的主猜想.

*(中)陈建功给出无条件收敛的判定定理.

*(中)陆家羲写成论文"寇克曼系列与斯坦纳系列制作方法"(未及时发表),解决了组合数学中的久悬未决的问题.

*(法)韦伊(Weil,A.)的《阿代尔与代数群》出版.

*(瑞士)伯奈斯(Bernays,P.I.)给出集合论的 BC 系统.

*第三届国际数学奥林匹克(IMO)在匈牙利举行.

1962 年

*第14届国际数学家大会在瑞典斯德哥尔摩召开.

*(瑞典)赫尔曼德尔(Hörmander,L.V.)、(美)米尔诺(Milnor,J.W.)获菲尔兹奖.

*(中)侯振挺证明了"巴尔姆断言".

*(中)莫绍揆等提出原始递归算术的公理系统.

*(苏)盖尔丰德(Гельфонд,А.О.)、(苏)林尼克(Линник,Ю.В.)的《解析数论的基本方法》出版.

*(中)潘承洞、(苏)巴尔巴恩(Barban,M.B.)独立证明了哥德巴赫(1,5)问题.

*(中)姜伯驹提出利用"姜伯驹群"估计不动点个数的新方法,打破了不动点理论停滞的局面.

*(?)迈耶(Meyer,Y.)证明连续参数的上平赌过程分解定理,开创了平赌过程的新理论.

*(美)布莱克韦尔(Blackwell,D.)的《离散动态规划》出版.

*(美)费特(Feit,W.)和汤普森(Thompson,J.G.)论"奇数阶群是可解的"发表,给出奇数阶群必为可解群定理,是有限单群分类的重大突破,解决了伯恩赛德猜想(每个单群或是循环群,或具有偶数个元素)(1906年提出).

*(法)塞尔(Serre,J.P.)的《局部域》出版.

*(中)柯召解决了利弗格猜想.

*(德)柏林德意志科学院纯数学研究所编的《数学辞典》出版.

*(中)潘承洞、王元证明了哥德巴赫猜想(1,4),研究进入定量阶段.

*(美)科恩(Cohen,P.J.)提出力迫法.

*(苏)克雷洛夫(Крылов,А.Н.)和坎托罗维奇(Канторович,Л.В.)的《高等分析中的逼近法》出版,它推动了微分方程的近似解法的发展.

*第四届国际数学奥林匹克(IMO)在捷克斯洛伐克举行.

1963年

*(苏)巴尔巴恩(Barban,M.B.)独立地证明了哥德巴赫猜想(1,4)问题.

*(英)阿蒂亚(Atiyah,M.F.)和(美)辛格(Singer,I.M.)证明了阿蒂亚-辛格指标定理,揭示了拓扑学、函数论和偏微分方程等数学分支之间的本质联系.

*(?)索克尔和斯尼恩的《数值分类学原理》出版,使数值分类成为了生物分类学中的一种新方法.

*(中)廖山涛引入李亚普诺夫指数,在微分动力系统中创立了典范方程组法.

*(美)鲁宾孙(Robinson,A.)的《模型论和代数元数学导引》出版.

*(法)塞尔(Serre,J.P.)的《伽罗瓦群上同调》出版.

*(中)柯召、尹文霖证明$n \leqslant 17016$时,纽曼猜想成立.

*(中)柯召、孙琦、张先觉证明了厄多斯猜想和斯特劳斯猜想等价,并证明了对$2<n<4\times10^5$猜想成立.

*(美)科恩(Cohen,P.J.)证明ZF公理和连续统假设彼此独立.

*(美)丹齐克(Dantzig,G.B.)和(以)沃尔夫(Wolf,D.von)改进单纯形法,给出了只经过有限次迭代即可达到最优解的方法.

*(美)维纳(Wiener,N.)的《控制论新章》出版.

*(苏)吉洪诺夫(Тихонов,А.Н.)、萨马尔斯基(Самарский,А.А.)发展了齐次差分格式理论.

*(日)山内恭彦创立物理数学.

*(美)麦卡锡(McCarthy,J.)的《计算的数学理论》出版,首次提出了程序语言的形式语义问题.

*第五届国际数学奥林匹克(IMO)在波兰举行.

1964年

*(日)广中平祐论"特征为零的域上代数簇的奇点解消"发表,解决了代数几何中的奇点分解问题(因为此成果获1970年菲尔兹奖).

*(美)IBM公司宣布第三代计算机IBM360系统研制成功.同年,还研制了IBM360系列计算机,它是计算机进入第三代计算机的标志.

*(中)关肇直提出中子迁移理论.

*(中)柯召、孙琦否定了安德森猜想.

*(苏)诺维科夫(Новиков,С.П.)解决了一般的流形上的叶状结构与有关的封闭的紧叶问题.

*(法)格罗腾迪克(Grothendieck,A.)推广代数簇概念,引起了代数几何的新革命.

*(法)阿达马(Hadamard,J.(-S.))的遗著《偏微分方程论》出版.

*(中)姜伯驹发表"尼尔森数的估计",提出了计算尼尔森数的简捷算法.

*(瑞士)哈德威格(Hadwiger,H.)与克利(Klee,V.L.)的《平面上的组合几何》出版,这标志着组合几何学的诞生.

*(美)米尔诺(Milnor,J.W.)证明了庞特里亚金类并非拓扑不变量.

*(苏)维士斯金(Vituskin)对连续可微函数,解决了希尔伯特第13问题.

*(芬)戈罗德(Golod)给了伯恩赛德问题(1902年提出)否定解决.

*(中)华罗庚、王元发表了用分圆域计算多重积分的方法.

*(美)纽曼(Newman,M.H.A.)得出对$f(x)$用n次有理函数逼近得到的阶的估计远超过用n次多项式逼近的阶,在函数逼近的正问题方面跨出了关键的一步.

*(中)冯康、黄鸿慈开创了解椭圆型边值问题的有限元法.

*第六届国际数学奥林匹克(IMO)在苏联举行.

1965年

*(英)亚当斯(Adams,J.F.)提出亚当斯猜想.

*(中)冯康、黄鸿慈发表"变分原理基础上的差分格式",发展了有限元法,创立了求解偏微分方程的一套系统化的方法.

*(中)吴文俊论"可剖形在欧氏空间中的实现问题"发表.

*(中)王梓坤给出极限过渡法,解决了生灭过程的构造问题.

*(中)夏道行的《无限维空间上测度和积分论》出版.

*(中)陆家羲完成组合学论文"平衡不完全区组可分解不完全区组的构造方法"(当时未发表).

*(中)陆启铿发表"关于常曲率Kahler流形",证明常曲率流形有界域解析等价于单位超球,并提出"陆启铿猜想".

＊阿德勒(Adler,A.)、康海姆(Konheim,A.G.)、麦克安德鲁(McAndrew,M.H.)引入拓扑熵概念.

＊(美)库利(Cooley,J.W.)和图基(Tukey,J.W.)给出随机法,对解决控制系统的计算分析和优化设计有更经济的效果.

＊(美)芒福德(Mumford,D.B.)的《几何不变式论》出版,创立了几何不变式理论.

＊(美)扎德(Zadeh,L.A.)发表"模糊集合",标志着模糊数学的诞生.

＊(意)邦别里(Bombieri,E.)发表"论大筛法",对大筛法做了进一步的改进.

＊(美)埃萨克基的《微分对策》出版,丰富发展了对策论.

＊(中)郭本瑜建立了广义稳定性理论(δ稳定性).

＊(苏)维诺格拉多夫(Виноградов,И.М.)、布赫什塔布(Бухштаб,А.А.)和(意)邦别里(Bombieri,E.)证明了哥德巴赫猜想(1,3)问题.

＊(?)埃德雷(Edrei,A.)引入亚纯函数关于一个复数的展布概念.

＊(瑞典)赫尔曼德尔(Hörmander,L.V.)、(德-美)卢伊(Lewy,H.)独立得到伪微分算子,并且构成一个算子代数.

＊(苏)诺维科夫(Новиков,С.П.)证明微分流形的有理庞特里亚金示性类的拓扑不变性.

＊(美)鲁宾孙(Robinson,A.)提出归结原理,推动了自动定理的研究.

＊德国和法国共同建立了枫丹白露数学形态学研究中心,奠定了数学形态学的基础.

＊(美)斯梅尔(Smale,S.)因证明了广义庞加莱猜想,获1965年维布伦奖.

＊(美)巴克斯给出描述ALGOL—60语言语法的表示法巴克斯范式,创立了历史计量学.

＊(美)克鲁斯卡尔(Kruskal,M.D.)创立了非线性波孤立子理论.

＊(阿根廷-美)考尔德伦(Calderón,A.P.)引入奇异积分的交换子理论.

＊(德)阿克曼(Ackermann,W.)提出A系统.

＊(美)美国MICROSOFT公司开发出BASIC语言.

＊(苏)米林(Милин,И.М.)证明了$|a_n|<1.243n$.

＊(法)格罗腾迪克(Grothendieck,A.)证明了"韦伊猜想"的第一式.

＊第七届国际数学奥林匹克(IMO)在德意志民主共和国举行.

1966年

＊第15届国际数学家大会在莫斯科召开.

＊(英)阿蒂亚(Atiyah,M.F.)、(美)科恩(Cohen,P.J.)、(法)格罗腾迪克(Grothendieck,A.)、(美)斯梅尔(Smale,S.)获菲尔兹奖.

＊(中)陈景润证明了"每一个充分大的偶数都能够表示为一个素数及一个不超过二素数和乘积之和"与"对于任意偶数h,都存在无限多个素数p,使得$p+h$的素因子的个数不超过2个"(陈氏定理),解决了哥德巴赫猜想(1,2)问题.

＊(瑞典)卡尔森(Carleson,L.)证明了卢津猜想:如果f平方可积,则f的三角级数几乎处处收敛.

＊(美)汤普森(Thompson,J.G.)解决了弗罗贝尼乌斯猜想.

＊(美)斯梅尔(Smale,S.)的《微分动力系统》出版,标志着这一数学分支的诞生.

＊(英)贝克(Baker,A.)把数论中的格尔丰德-施奈德定理拓广为更一般情形,从而获1970年菲尔兹奖.

＊(美)穆尔(Moore,E.H.)的《区间分析》出版,它系统地提出了区间运算理论.

＊(法)托姆(Thom,R.)的《形态发生的动力学系统》出版,开创了突变论.

＊(日)加藤敏夫的《线性算子的振动理论》出版,建立了泛函分析的一个重要分支.

＊(中)苏步青发表"关于高维射影空间共轭网理论"的论文,把射影共轭网理论推向了新水平.

＊(美)北卡罗拉州立大学的巴内(Barr,A.J.)与古德奈特(Goodnight,J.H.)开发推出了SAS统计软件包.

＊(美)弗洛伊德(Freud,G.)提出了描述程序含义,论证一个程序是否有某种含义的数学方法,促进了程序设计语言的发展.

＊第八届国际数学奥林匹克(IMO)在保加利亚举行.

1967年

＊(美)斯卡夫(Scarf,?)提出计算不动点的有效方法,掀起了不动点研究的第四次高潮.

＊第一台大规模集成电路用于宇航的计算机LIMAC制成.

＊(苏)盖尔丰德(Гельфонд,А.О.)的《有限差分计算》出版.

＊(美)毕肖普的《构造性分析》出版,开始了构造主义时期.

＊(法)韦伊(Weil,A.)的《基础数论》出版,对现代数论有着重要影响.

*(美)霍尔(Hall,M.)的《组合论》出版,并提出了"霍尔"猜想.

*(日)高桥元男用非构造的方法证明:单纯类型论中也可消去三段论法.

*(波兰)博苏克(Borsuk,K.)的《收缩核理论》出版.

*(法)利什内罗维奇(Lichnérowicz,A.)创建了数学教育改革运动委员会.

*(苏)克雷洛夫(Крылов,A. H.)发表"可算积分的逼近",推动了积分方程的近似解法的发展.

*(苏)盖尔范德(Гельфанд,И. М.)主办的《泛函分析及其应用》出版.

*(英)阿蒂亚(Atiyah,M. F.)和(美)博特(Bott,R.)把莱夫谢茨(Lefschetz,S.)的不动点定理推广到包括椭圆复形的情况,使不动点定理得到广泛应用.

*(匈-美)哈尔莫斯(Halmos,P. R.)的《希尔伯特空间问题集》出版.

*第九届国际数学奥林匹克(IMO)在南斯拉夫举行.

1968 年

*(美)西蒙(Simon,H. A.)的《人工智能科学》出版.

*(比利时)德利涅(Deligne,P.)证明了韦伊猜想(蕴涵拉马努金猜想).

*(波兰)博苏克(Borsuk,K.)引进度量紧空间形的概念与理论.

*(美)排台尔松与(日)小沪满独立地用格伦斯基不等式证明了对 $n=6$ 比伯巴赫猜想.

*(法)法国布尔巴基学派出版的《数学原理》第34册.

*(瑞典)赫尔曼德尔(Hörmander,L. V.)(1968—1970)系统地建立了傅里叶积分算子的局部与整体理论.

*(德)马克思(Marx,K.)《数学手稿》出版.

*(美)强(Chang,C. L.)发表了第一篇模糊拓扑论文"模糊拓扑空间".

*(挪威-美)奥尔(Ore,O.)等人证明了当地图上国家数目少于40时,四色定理成立.

*(美)汤普森(Thompson,J. G.)的《论其局部子群皆可解的不可解有限群》(1—6)出版,推进了有限单群的分类工作,是有限群理论的重要文献.

*(?)巴克尔(Barker,?)和费罗斯解决了含两个未知数的方程的希尔伯特第10问题.

*(?)多布希给出平衡状态的一个概率模型,开创了统计力学现代概率论方法的研究.

*(?)哈杰克对线性秩统计量的极限分布理论有重大推进.

*(奥地利-美)贝塔朗菲发表"一般系统的基础、发展和应用",创立了一般系统论.

*(美)巴斯(Bass,H.)的《代数 K 理论》出版.

*第十届国际数学奥林匹克(IMO)在苏联举行.

1969 年

*(日)中野馨提出了联想机装置,它具有在某些方面模拟人的联想思维的功能.

*(比利时)普里戈金的《结构、耗散和生命》出版,创立了耗散结构理论.

*(英)霍尔(Hall,A. G.)的《计算机程序设计的公理基础》出版,第一次用公理系统定义了一类计算机语言的含义,这标志着公理语义学的诞生.

*(法)托姆(Thom,R.)的《生物学中的拓扑模型》出版,在奇点分类的基础上提出了描述突变现象的数学模型.

*第一届国际数学教育大会(8月)在法国里昂召开,42个国家的650人参加了会议.

*(挪威)李(Lie,M. S.)和(美)扎德(Zadeh,L. A.)在形式语言中引入模糊性,研究了模糊(行)文法、模糊(行)语言.

1970 年

*(美)奎伦(Quillen,D. G.)解决了亚当斯猜想(1965年提出).同年,他把代数归结成拓扑,给高维 K 理论一个同伦的定义,创建了代数 K 理论,使代数 K 理论发展成为了代数的一个新分支.

*(苏)马蒂塞维奇(Malijasevic,J. V.)发表"可枚举集是丢番图的",否定解决了希尔伯特第10问题(不存在运用于一切不定方程的判定方法).

*(中)侯振挺提出最小非负解的方法,得出了保守 Ω 过程的惟一性准则.

*(中)苏步青把微分几何用于工程中的几何外形设计,在中国开创了计算几何的研究.

*(美)马丁(Martin,W. T.)提出了"马丁公理".

*(法)托姆(Thom,R.)发表""新"数学是教育和哲学上的错误吗?",首先对整个新数学运动发难.

*(比利时)德利涅(Deligne,P.)论"具有正则奇点的微分方程"发表.

*第16届国际数学家大会(9月1日)在法国尼斯召开.

*(英)贝克(Baker,A.)、(日)广中平祐、(苏)诺维科夫(Новиков,С. П.)、(美)汤普森(Thompson,J. G.)获菲尔茨奖.

*(美)高桥构造了一个具体的非标准模型,即 R^* 的"高桥模型".

*(英)加尔伽赫创立有限元分析.

*(苏)弗拉基米罗夫(Владимиров, В. С.)立了多元线性消极系统理论.

*(美)贝格创立区间分析.

*(美)奥斯曼(Osserman, R.)发表“普拉托问题经典解处处正则的证明”,证明面积最小的曲面是处处内部正则的(不含有分支点),至此普拉托问题完满解决.

*(瑞典)赫尔曼德尔(Hörmander, L. V.)把伪微分算子推广到傅里叶积分算子,为现代偏微分方程理论奠定了基础.

*第11届国际数学奥林匹克(IMO)在罗马尼亚举行.

1971年

*(美)英特尔公司推出全球第一台微处理器InteLv4004,开始了第四代计算机的研制.

*(瑞士)威尔斯(Wirtig, N.)提出了Pascal语言.

*(日)永野俊提出了多层结构的自己成长的学习机脑模型.

*(美)费弗曼(Fefferman, C.)否定了圆盘猜想.

*(苏)阿诺尔德(Арнольд, В. И.)把实代数几何与现代拓扑学联系起来,开始了实代数几何的发展.

*(苏-美)扎里斯基(Zariski, O.)的《代数曲面》出版,它开创了以赋值论方法处理代数曲面的奇性分解问题.

*(法)布尔巴基学派出版《数学原理》第36卷.

*(英)霍尔(Hall, A. G.)提出微分处理器设想,并研制出微处理器.

*第12届国际数学奥林匹克(IMO)在匈牙利举行.

1972年

*(法)孔涅(Connes, A.)引进了“S不变量”,解决了冯・诺伊曼代数的分类问题.

*(法)托姆(Thom, R.)出版《结构稳定性和形态发生学》,系统地阐述了突变理论,被誉为“数学界的一次智力革命——微积分以后最重要的发现”.

*(德)佩德森(Pederson, R. N.)与(美)席费尔(Schiffer, M. M.)对$n=5$,解决了比伯巴赫猜想.

*(美)克莱因(Klein, (C.)F.)的《古今数学思想》出版,这是一部公认的数学史佳作.

*休斯(Hughes, G. E.)、克罗夫顿(Crofton, M. W.)的《模态逻辑引论》出版.

*第二届国际数学教育大会(8月)在英国埃克塞特召开,决定了国际数学教育会议每四年召开一次.

*(美)梵・奥斯达具体构造了一个非标准实数域模型——高桥模型.

*(美)英特尔公司推出第一个8位元处理器8008.

*(?)库克(Cook, S. A.)提出了NP问题,对组合优化的发展有着重大影响.

*(?)克利(Klee, V. L.)和明蒂(Minty, G. J.)举例说明了单纯形法不是一个多项式算法,为此多项式算法引起人们的极大注意.

*(美)排台尔松和席费尔(Schiffer, M. M.)证明了$|a_5|\leqslant 5$.

*(美)戈朗斯坦(Gorénstein, D.)提出有限单群分类的工作方案.

*第14届国际数学奥林匹克(IMO)在波兰举行.

*(美)举办了第一届美国数学奥林匹克中学生数学竞赛(USAMO)

1973年

*(法)纪劳德和波叶采用7600CDC型电子计算机,计算π值到100万位.

*(中)陈景润证明对任意偶数h,都存在无限多个素数p,使$p+h$的素因子的个数不超过2,这是波林那克猜想最好的结果.

*(中)陈景润发表(1,2)问题(陈氏定理)的详细证明.

*(比利时)德利涅(Deligne, P.)在“论韦伊猜想”中,解决了数论中有限域代数方程组的韦伊猜想(获1978年菲尔兹奖).

*(芬兰)恩夫洛(Enflo, P.)给出反例,证明了确有可分而没有基的巴拿赫空间存在.

*(法)狄多内发表“我们应该讲授“新”数学吗?”,作为对于(法)托姆(Thom, R.)的挑战.

*(苏)伯恩斯坦(Бериштейн, С. Н.)引进T^2函数,并证明了展布关系.

*(苏)波格列洛夫(Погорелов, А. В.)在对称距离情况下解决了希尔伯特第4问题.

*(苏)罗蒙诺索夫(Lomonsov, V. I.)证明了任何与紧算子可变换的算子都有非不平凡的不变子空间.

*(中)廖山涛建立微分动力系统的理论.

*(美)费弗曼(Fefferman, C.)发现三角级数收敛与奇异积分算子有内在联系.

*(中)许永华给出了“非结合非分配环”概念.

*第15届国际数学奥林匹克(IMO)在苏联举行.

1974年

*第17届国际数学家大会在加拿大温哥华召

开.

*(美)芒福德(Mumford,D. B.)、(意大利)邦别里(Bombieri,E.)获菲尔兹奖.

*(罗马尼亚)尼哥以太、拉莱斯库(Ralescu)提出了模糊数学中的表现定理.

*(日)菅野道夫提出了模糊测度、模糊积分论.

*(中)侯振挺发表"Q 过程惟一性准则",证明了"侯氏定理".

*(匈-美)哈尔莫斯(Halmos,P. R.)的《朴素集合论》出版.

*(苏)马尔库利斯(Маррулис,Г. А.)解决了关于李群的离散子群的赛尔伯格猜想.

*(美)希恩(Hearn,A. C)等人设计并实现了 REDUCE2 系统(计算机代数语言).

*(?)舍拉解决了怀特海猜想,证明其在 ZFC 下是不可判定的.

*(?)采立尔提出"采尔立猜想".

*(中-美)林家翘论"应用到自然科学中的确定性问题的数学"发表.

*(中)李天岩和(美)约克(Yorke,J. A.)证明了"若 $f(x)$是区间$[a,b]$上的连续自映射,且有一个 3 周期点,则对任何正整数 $n>3$ 都有 n 周期点",这是研究混沌现象的基础理论.

*第 16 届国际数学奥林匹克(IMO)在东德举行.

*(美)召开国际数学会议,研究了希尔伯特问题的进展情况.

1975 年

*(美)亚历山大(Alexander,R.)发表"度量嵌入技巧应用于几何不等式",提出"亚历山大"猜想.

*(中)陈省身把微分几何应用于理论物理学,取得了一系列的研究成果.

*(中)杨乐、张广厚解决了亚纯函数奇异方向分布规律的问题 .

*(美)扎德(Zadeh,L. A.)提出了模糊集中扩张原理,给出了模糊数学与经典数学理论之间的联系.

*(美)曼特尔布罗特(Mandelbrot,B. B.)论"分形图:形状机遇和维数"发表,分形几何诞生.

*(荷兰)戴克斯特拉提出基于最弱前置条件的公理语义学描述方法,成为程序设计方法的基本概念.

*(美)奥本哈姆和谢弗(Schafer,R. D.)的《数学信号处理》出版,这是一部基础性著作.

*第 17 届国际数学奥林匹克(IMO)在保加利亚举行.

1976 年

*(美)哈肯(Hakan,W.)和阿佩尔(Appell,P.-É)在伊利诺斯大学的 IBM360 机上用 1200 多小时证明了四色定理.这标志着数学研究方法的一次重大改革.

*SAS 研究所成立.

*(?)开斯勒(Keisler,H. J.)的《初等微积分学》出版,这是第一本非标准分析教科书,它标志着在一般工程技术问题中直接运用非标准分析的新开端.

*(中)李天岩和(美)约克(Yorke,J. A.)发表"布劳威尔不动点定理的构造性证明及计算结果",将抽象的微分拓扑和代数拓扑方法用于了实际计算,开创了"整体性"的计算数学新分支.

*(?)瓦格斯塔夫(Wagstaff,S. S.)用计算机证明了 $2<p<125\,000$ 时,费马大定理成立.

*(苏)维诺格拉多夫(Виноградов,И. М.)的《最简整序变量中的三角和方法》出版.

*(中)丘成桐解决了卡拉比猜想.

*(?)哈根(Haggan,V.)提出哈根猜想.

*(美)奎伦(Quillen,D. G.)解决了塞尔猜想.

*(?)詹森(Jenson,K.)解决了苏斯林问题.

*(美)伦纳特利用启发式提出以归纳为主的 AM 程序,说明某些科学概念的形式及相互关系以及意义是可以机械化的.

*(德)哈肯(Hakan,W.)的《协同学导论》出版,创立协同学.

*(以)11 月,沃尔夫(Wolf,D. von)及其家族捐 1000 万美元设立沃尔夫基金会,从 1978 年开始授奖,每年一次,设物理、化学、医学、农业和数学五个奖项.

*(荷兰)戴克斯特拉的《程序设计方案》出版,它是结构程序设计的经典著作,程序设计方法学典型性著作.

*第 18 届国际数学奥林匹克(IMO)在奥地利举行.

1977 年

*(中)吴文俊证明了初等几何主要的一类定理的证明可以机械化,提出"吴氏算法".

*(中)杨乐、张广厚发现函数值分布论中的两个概念——亏值和奇异方向之间的有机联系.

*(美)亚历山大(Alexander,R.)证明了采尔立猜想.

*(法)泰雅尼昂(Terjenian,G.)证明了$n=2p$时,费马猜想成立,则 $2p|x$ 或 $2p|y$.

*(美)帕里斯(Paris,J.)发现了算术中存在着自然的不可判定的命题.

*(英)萨斯曼、赞勒发表"突变理论的主张及其应用结果",反对突变理论.

*(英)雅可维特创立计算概率论.

*(?)哈勒的《泛函微分方程论》出版,这是有界滞时泛函微分方程的最新总结.

*第19届国际数学奥林匹克(IMO)在南斯拉夫举行.

1978年

*(中)屠规彰解决了守恒律个数的猜想问题.

*(中)吴文俊证明了初等微分几何中的一些主要定理可机械化.

*(中)丘成桐和(美)舍恩(Schoen,R.)用微分几何方法证明了广义相对论的正质量猜想.

*(中)陆家羲将研究成果整理成论文"构造寇克满系列的组合方法"、"寇克满问题"发表.

*(美)英特尔公司推出了16位元微处理器8086.

*(中)华罗庚、王元的《数论在近似分析中的应用》出版.

*第18次国际数学家大会在芬兰赫尔辛基召开.

*(比利时)德利涅(Deligne,P.)、(美)费弗曼(Fefferman,C.)、(苏)马尔库利斯(Маргулис,Г. А.)、(美)奎伦(Quillen,D. G.)获菲尔兹奖.

*(美)扎德(Zadeh,L. A.)的《以模糊集合为可能性理论的基础》出版,提出了可能性理论.

*(法)迪厄多内(Dieudonné,J.)的《1700—1900数学史概论》出版.

*(苏)盖尔范德(Гельфанд,И. М.)、(德)西格尔(Siegel,C. L.)获首次沃尔夫奖.

*(中)姜伯驹解决了尼尔森猜想(1927年提出).

*(英)赫尔(Hoare,C. A. R.)、(日)加藤敏夫创立了具有无穷滞后的泛函微分方程.

*(德)哈肯(Hakan,W.)的《协同学:最新趋势与发展》发表.

*(中)中国举办首届全国中学生数学竞赛,北京、上海、天津、陕西、安徽、四川、辽宁、广东八省市350名高中学生参加.

*第20届国际数学奥林匹克(IMO)在罗马尼亚举行.

1979年

*(苏联)哈强提出了椭环体算法,并证明了它是一个多项式算法,为组合最优化理论带来革命性改变.

*(中)洪加威给出并行时间和空间的某些对称性质,提出相似性原理.

*(中)石钟慈首创样条有限元方法.

*(美)格维宁发现平方镜反数,提出平方镜反数猜想.

*(美)帕特·兰利提出BACON-3程序,这是一种模拟科学家发现物理定律的系统.

*(法)勒雷(Leray,J.)、(法)韦伊(Weil,A.)获沃尔夫奖.

*(美)克拉特斯创立泛代数.

*(英)白瑞得格斯创立结构泛函分析.

*(中)越民义、韩继业提出"新型既约梯度法",把非线性规划研究推向了新阶段.

*(中)史松龄、王明淑举出二阶系统有四个极限环的反例.

*(美)瑟斯顿(Thurston,W. P.)建立了三维流形的拓扑和几何结构之间的关系(获1979年华特曼奖、获1982年菲尔兹奖).

*(中)中国举行第二届全国中学生数学竞赛,参加省市有所扩大.

*第二十一届国际数学奥林匹克(IMO)在英国举行.

*(中)中国数学会第三次全国代表大会在成都召开.

1980年

*第四届国际数学教育大会在美国加州大学伯克莱分校召开,会上探讨了20年来数学课程改革的问题,中国首次参加大会.

*(美)英特尔公司推出第一个运算协处理器8087.

*(法)嘉当(Cartan,H.)、(苏)柯尔莫哥洛夫(Колмогоров,А. Н.)获沃尔夫奖.

*(法)韦伊(Weil,A.)获美国1980年斯蒂尔奖.

*(?)里斯基(Goresky,M.)提出相交同调群概念,开辟了奇异空间研究的新途径.

*(?)当诺顿(Norton,S.)解决了有限单群的分类问题,这是群论发展史上的一个里程碑.

*(美)美国全国数学教师联合会发表《行动纲领——80年代数学教育的建议》,提出了解决问题的口号.

*(中)廖山涛给出了二维离散系统和三维无奇点常微系统稳定性推测定理.

*(中-美)肖荫堂和丘成桐解决了弗伦克尔猜想.

*(中)中国的《数学年刊》创刊.

1981年

*(芬兰-美)阿尔福斯(Ahlfors,L. V.)、(美)扎里斯基(Zariski,O.)获沃尔夫奖.

*(美)弗里德曼(Freedman,M.(H.))利用(英)卡森(Casson,J. R.)发明的"柔柄",解决了4

维的庞加莱猜测(为此获 1986 年菲尔兹奖).

*(日)三好和宽用计算机计算 π 值到 200 万位.

*(英)英国政府组织的学校数学教学调查委员会向政府提出《Cockcroft 报告》,对英国数学教育产生了重大影响.

*(中)杨路、张景中发表了"Neuberg－Pedoe 不等式的高维推广及其应用",将著名的匹多不等式推广至 n 维欧氏空间.

*(中)陆洪文给出实二次域类为 1 的一些判别条件.

*(苏)维诺格拉多夫(Виноградов,И. М.)的《数论基础》出版.

*(?)甘农发表"数论中尚未解决的问题",给出了埃德加猜想.

*(中)杨路、张景中证明了亚历山大猜想不成立.

*(中)夏道行提出"半亚正常算子"概念,建立了半亚正常算子的奇异积分模型,并给出了半亚正常算子谱的定理.

*(英)唐纳森(Donaldson,S. K.)宣布把弗里德曼证明彭赛列猜想的成果与微分几何学的新结果相结合,证明了四维函数空间除通常的微分结构外,还存在着不同寻常的微分结构.

*(中)中国举办了 25 省市自治区高中数学联赛(10 月).

*第 22 届国际数学奥林匹克(IMO)在美国举行.

1982 年

*(?)邓肯(Dynkin,E. B.)和巴尼厄(Barnier,W.)证明:在一般情况下尺规作图 p 等分任意角是不可能的,其中 p 是素数.

*(美)惠特尼(Whitney,H.)、(苏)克列因(Крейн,M. Г.)获沃尔夫奖.

*(美)曼德尔德罗特(Mandeldrot,B.)的《自然界的分形几何》出版.分形便在全世界不胫而走.

*(美)英特尔推出 80286 微处理器,内含 10 万只晶体管.

*(中)冯绪宁构做了一批权 1/2 的 Hilbert 模形式.

*(中)陈景润以"哥德巴赫猜想研究"获中国政府颁发的国家自然科学一等奖.同时,获一等奖的还有冯康,获奖项目是"哈密顿系统的辛几何算法".

*(中)中国举办了全国高中数学联赛(10 月),从此形成定制.

*第 23 届国际数学奥林匹克(IMO)在匈牙利举行.

1983 年

*第 19 次国际数学家大会在波兰华沙召开.

*(法)孔涅(Connes,A.)、(美)瑟斯顿(Thurston,W. P.)、(中-美)丘成桐获菲尔兹奖.

*(美)举办首届美国数学邀请赛(ALME).

*(中)陈省身、(匈牙利)爱尔特希(Erdös,P.)获沃尔夫奖.

*(美)希恩(Hearn,A. C)等人对推出微型机上的 REDUCE3.0.

*(美)戴维·斯洛文斯基获得大质数 $2^{86243}-1$.

*(德)法尔廷斯(Faltings,G)证明了莫德尔猜想,这是费马猜想研究的重大突破(为此,获 1986 年菲尔兹奖).同年,还解决了"沙法列维奇猜想"(1962 年提出).

*(中)中国湖北江陵张家山出土西汉初年的《算数书》(竹简).

*国际标准化组织 ISO 在 1983 年确定图形核心系统(GKS)为通用图形软件包的国际标准的草案,推动了图形学的发展与应用.

*(德)霍普夫(Hopf,H.)的《整体微分几何》出版.

*第 24 届国际数学奥林匹克(IMO)在法国举行.

*(中)中国数学会第四次代表大会(10 月 27 日)在武汉召开.

1984 年

*(美)布朗基(Branges,L. de)证明了单叶函数论中的米林猜想,从而解决了比伯巴赫猜想.

*(印度-美)卡马卡(Karmarkar,N.)发表《一个新的多项式时间的线性规划法》,给出了一种求解线性规划的多项式时间的算法.

*(?)舍恩(Schoen,R.)完全解决山边问题.

*(中)吴文俊的《几何定理机器证明的基本原理》出版.

*(美)卢伊(Lewy,H.)、(日)小平邦彦获沃尔夫奖.

*(中)廖山涛证明三维离散系统和四维无奇点常微系统稳定推测.

*第 25 届国际数学奥林匹克(IMO)在捷克斯洛伐克举行.

1985 年

*(中)丁夏畦等彻底解决一般等熵气体的双曲型守恒律组初值整体解的数学证明.这是对双曲型守恒律的重要贡献.

*(中)姜伯驹完全解决了尼尔森实现问题.

＊(美)VAX 机上和 IBM PC/XT 及其兼容机上的 SAS 版本推出.

＊(法)曼德尔德罗特(Mandeldrot,B.)因分形几何而获巴纳德奖章.

＊(中)受香港亿利达工业集团有限公司的委托,中国数学会设立陈省身数学奖.

＊(美)美国创立并举办第一届大学生数学建模竞赛.

＊(美)英特尔推出 32 位元的 386 芯片,内含 275000 只晶体管.

＊(中)洪加威提出"例证法"

＊(中)李松鹰证明了存疑半个世纪的瓦利隆猜想.

＊(中)张产仲首创"子群卷积"算法.

＊(中)华罗庚因突发心肌梗塞于 6 月 20 日病逝于日本东京.

＊(德)外尔(Weyl,(C. H.)H.)论"数学中的公理方法与构造程序"(1953 年完成)发表.

＊(苏)苏联的《数学百科全书》(5 卷)(完成于 1977—1985 年)出版.

＊(德)费雷(Free)证明了如果谷山猜想成立,费马猜想一定成立.

＊(中)尚毅创立了大型线性规划新算法——"鞍面算法".

＊(波兰-美)艾伦伯格(Eilenberg,S.)、(挪威-美)赛尔伯格(Selberg,A.)获 1986 年沃尔夫奖.

＊(中)郑伟安获首届许宝騄统计数学奖.

＊第 26 届国际数学奥林匹克(IMO)在芬兰举行,中国队首次派出两名中学生参赛 .

＊(中)中国举办了首届全国初中数学联赛.

1986 年

＊(美)里贝(Ribet,K)证明了塞尔猜想,对解决费马猜想做出了贡献.

＊(英)唐纳森(Donaldson,S. K.)和法尔廷斯(Faltings,G)、(美)弗里德曼(Freedman,M.(H.))获菲尔兹奖.

＊(美)瓦林特(Valiant,L.)获奈望林纳奖.

＊(中)廖山涛荣获第三世界科学院首次颁发的数学奖.

＊美国数学软件公司推出高等数学 CAI 支撑系统 Mathcad.

＊(中)邹捷证明了 Kendall 猜想.

＊(中)中国首次举办数学冬令营.

＊第二十七届国际数学奥林匹克(IMO)在波兰举行,中国首次组队参赛,并取得了总分第四名.

＊第 20 届国际数学家大会在美国伯克利召开,中国加入国际数学联盟(IMU).

＊(中)中国首次举办"华罗庚金杯"少年数学邀请赛.

1987 年

＊(日)伊藤清和(美)拉克斯(Lax,P. D.)获沃尔夫奖.

＊(美)沃尔夫曼(Wolfram,S)等人开发推出 Mathematica 1.0 for dos 系统 Mathcad2.0 推出.

＊(中)钟家庆、张恭庆获第一届陈省身数学奖.

＊第 28 届国际数学奥林匹克(IMO)在古巴举行,中国队取得总分第八名.

1988 年

＊(美)埃尔克斯(Elkies,N. D.)否定了欧拉猜想($N=4$).

＊(中)郑伟安和莱昂斯(Lions,J.-L.)合作解决了保守对称扩散过程的分解.

＊(西德)希策布鲁赫(Hirzebruch,F. E. P.)和(瑞典)赫尔曼德尔(Hörmander,L. V.)获沃尔夫奖.

＊第 29 届国际数学奥林匹克(IMO)在澳大利亚举行,中国队取得总分第二名.

＊(中)钟家庆数学奖设立,首届钟家庆数学奖获得者是:刘克峰、夏琪、翁林、宋斌恒获奖.

1989 年

＊(美)戈登(Gordon,C.)和吕克(Luecke,J.)成功地证明了有 80 年历史的拓扑学的扭结理论的基本猜想——Tietze 猜想,从而使该理论取得重大突破.

＊(阿根廷-美)考尔德伦(Calderón,A. P.)和(美)米尔诺(Minor,J. W.)获得 1989 年度的沃尔夫奖.

＊(中)中国国家自然科学基金委员会开始设立数学专项基金——"数学天元项目基金".

＊(中)石钟慈对有限元的"小片检索"提出了"F-E-M 检验".

＊第三十届国际数学奥林匹克(IMO)在德意志联邦共和国举行,中国队取得总分第一名.

1990 年

＊(美)鲁滨(Rrbin,K.)证明了虚二次域的岩泽理论的"主要猜想".

＊(意)乔吉(Giorgi,E. de)和(苏-以)皮亚捷茨基-沙皮罗(Piatetski-Shapiro,I.)获沃尔夫奖.

＊(苏)"欧拉数学研究所"在列宁格勒成立.

＊(美)美国国家研究委员会公布 DAVID Ⅱ 报告"美国数学的现在和未来".

＊(日)第 21 届国际数学家大会(ICM-90)在日本京都召开.

*(苏)德里费尔德(Drinfeld,V.G.)、(美-新西兰)琼斯(Jones,V.F.R.)、(日)森重文(Mori,S.)、(美)威特恩(Witten,E.)获菲尔兹奖.

*(苏)雷兹波罗夫(Razborov)获奈望林纳奖.

*第一届亚洲数学大会在中国香港召开.

*(日)森重文(Mori,S.)获第23届科尔奖.

*欧洲数学会成立.

*(美)莱恩斯特拉(Lenstra,A.)和门思(Menesse,M.)将第九个费马数分解得 $2^{2^9}+1=2^{512}+12$.

*第三十一届国际数学奥林匹克(IMO)在中国北京举行,中国队取得总分第一名.

*(美)德尔与宏基等公司率先推出486电脑.

1991年

*第二届工业与应用数学国际会议(ICIAM—91)在美国华盛顿召开.

*(法)莱昂斯(Lions,J.-L.)获日本应用数学奖.

*(中)戴永隆用新的方法证明了Davidson猜想.

*(中)在湖南教育出版社的倡议与赞助下,中国数学会批准设立了华罗庚数学奖.

*第三十二届国际数学奥林匹克(IMO)在瑞典斯德哥尔摩举行,中国队取得总分第二名.

1992年

*(瑞典)卡尔森(Carleson,L.)和(美)汤普森(Thompson,J.G.)获沃尔夫奖.

*(中)堵丁柱和(美)黄(Hwang,Frank)合作攻克了斯莱纳猜想,即"最短路线"问题.

*(中)堵丁柱与黄光明合作,证明了斯坦纳树的猜想.

*(中)陈景润、陆启铿获第二届华罗庚数学奖.中国举办了第一届全国大学生数学建模竞赛.

*(中)苏步青数学教育奖设立,这是中国第一个奖励中学数学教育工作者的奖项.同年,在上海市范围内评选出了首届获奖单位和个人.上海市青浦县数学教改实验小组等二单位获团体奖,曾容等3人获个人奖.

*在巴西里约热内卢会议上,国际数学联盟(IMU)主席莱昂斯(Lions,J.-L.)以IMU的名义宣告:2000年为世界数学年,并提出三大目标:

1.21世纪的伟大挑战;

2.数学是发展的关键;

3.树立数学的形象——向信息社会系统地表示数学的作用.

*第三十三届国际数学奥林匹克(IMO)在俄罗斯莫斯科举行,中国队取得总分第一名.

1993年

*(英)怀尔斯(Wiles,A.)在剑桥牛顿研究所做了三次演讲,其中最激动人心的结果是"半稳定的椭圆曲线是模曲线",从而使费马大定理获得重大进展.

*(中)冯绪宁把theta函数推广到多元情形,并用此构做了两大类半整权的Hilbert模形式.

*(中)冯克勤证明了对于一批非同余数N,BSD猜想关于椭圆曲线En成立.

*(美)英特尔推出奔腾(Pentium)处理器,含300万只晶体管.

*第三十四届国际数学奥林匹克(IMO)在土耳其伊斯坦布尔举行,中国队取得总分第一名.

1994年

*(英)怀尔斯(Wiles,A.)和泰勒(Taylor,R.)合作完成了"某些HECKE代数的环论性质",完善了1993年的工作,从而证明了具有350年历史的费马大定理.

*(瑞士)第22届国际数学家大会在苏黎世召开.

*(比利时)布尔盖恩(Bourgain,J.)和(法)莱昂斯(Lions,J.-L.)、(法)约考茨(Yoccoz,J.C.)、(俄)泽尔马诺夫(Zelmanov,E.I.)获菲尔兹奖.

*(美)数学家纳什(Nash,J.F.)获诺贝尔经济学奖.

*(中)丘成桐和(冀)唐纳森(Donaldson,S.K.)获国际克雷福德奖.

*(中)田刚获美国国家科学基金会沃特曼奖.

*(以色列)威德格桑(Widgerson,A.)获奈望林纳奖.

*(中)赵健强和徐飞证明了函数域上的Gras猜想.

*(中)苏步青数学教育奖颁奖,评奖范围为上海、江苏、浙江和福建四省市.福建师大附中数学教研组等单位获团体奖,王永等8人获个人奖.

*第35届国际数学奥林匹克(IMO)在中国香港举行,中国队取得总分第二名.

1995年

*(英)怀尔斯(Wiles,A.)和泰勒(Taylor,R.)合作完成了"某些HECKE代数的环论性质",完善了93年的工作,从而证明了具有350年历史的费马大定理.为此,美国数学年刊发表了他们的有关论文.

*(德)莫泽(Moser,J.K.)获沃尔夫奖.

*(法)雷纳德(Raynaud,M.)和(美)哈贝特(Harbater,D.)获美国数学学会的科尔奖.

*（奥地利）费拉斯科（Flaschka，H.）和（罗马尼亚）福伊斯（Foias，C.）获美国维纳应用数学奖.

*第36届国际数学奥林匹克（IMO）在加拿大多伦多举行，中国队取得总分第一名.

1996年

*（英）怀尔斯（Wiles，A.）和（加拿大）朗兰兹（Langlands，R.）获沃尔夫奖.

*（中）田刚和（美）哈密顿（Hamilton，W. R.）获维布伦（Veblen，O.）奖.

*（中）第三届苏步青数学教育奖颁奖，本届评奖范围扩大到华东六省一市.上海市格致中学数学教研组等三单位获团体奖，陈国华等11人获个人奖.

*第八届国际数学教育大会在西班牙塞维利亚召开（7月14—21日）.

*第37届国际数学奥林匹克（IMO）在印度孟买举行，中国队取得总分第八名.

1997年

*获本年度沃尔夫奖的数学家为（美）凯勒尔（Keller，J.）和（俄）赛奈（Sinai，Y. G.）.

*（中）第三届华罗庚数学奖授予了中国数学家杨乐和周毓麟.

*第38届国际数学奥林匹克（IMO）在阿根廷的马德普拉塔市举行，中国代表队获6枚金牌，列团体总分第一名.

1998年

*诺贝尔经济学奖授予了印度经济学家赛恩（Sen，A.），他的主要贡献是社会选择系统的公理化理论，这几乎可以说是“纯数学”的理论.

*（德）第23届国际数学家大会在德国柏林召开.

*本届菲尔兹奖授予4位数学家：（英）博德（Borcherds，R. E.）、（俄）康特塞维奇（Kontsevich，M.）、（英）高尔（Gowers，W. T.）和（英）麦克缪伦（McMullen，C. T.）.

*（中）中国数学会申办第24届国际数学家大会获得成功.在德累斯顿举行的IMU代表大会上表决通过.

*（中）第6届陈省身数学奖颁奖，获奖人为文兰和王建磐.

*（中）首届晨兴数学奖颁奖，此奖项颁发给全世界华人数学家.首次获奖的金奖2人：张寿武、林长寿；银奖4人：程崇庆、刘克锋、杨彤和、陈汉夫.

*（中）第五届钟家庆数学奖授予戴彧虹、刘先仿、刘寿根、王启华和王晓华.

*（？）瓦迪（Vardi，I.）系统地给出了“群牛问题”的解答.

*（中）第39届国际数学奥林匹克（IMO）在中国台湾台北市举行.

1999年

*沃尔夫数学奖颁发给匈牙利数学家洛瓦兹（Lovasz，L.）和美国数学家施坦（Stein，E. M.）.洛瓦兹解决了完全图猜想和克奈曼尔猜想；施坦是多维欧氏调和分析的创造者之一.

*（中）第四届华罗庚数学奖授予了中国数学家丁夏畦和王元.

*（中）第七届陈省身数学奖授予了中国数学家王诗宬和龙以明.

*（中）第四届苏步青数学教育奖颁奖，评奖范围扩大到了全国，王连笑等8人获个人一等奖.

*（中）中国古算名著《九章算术》（包括刘徽注）的英译本（沈康身等译）由中国科学出版社和英国牛津大学出版社联合出版.

*（？）卢卡（Luca，F.）证明了：任何一个费马数都不是完全数，也不能由它与别的整数构成亲和数.

*第40届国际数学奥林匹克（IMO）在罗马尼亚布加勒斯特市举行，中国代表队与俄罗斯并列团体总分第一.

2000年

*沃尔夫数学奖颁发给美国数学家博特（Bott，R.）和法国数学家塞尔（Serre，J. P.）.

*第41届国际数学家奥林匹克（IMO）在韩国大田召开，中国代表队取得总分第一名.

2001年

*（中）吴文俊（2001年2月19日）获中国国家最高科学奖.

2002年

*（中）第24届国际数学家大会在中国北京召开.

撰稿 王庚 冯守训 胡炳生
审阅 胡作玄 胡炳生

条目笔画索引

说明：1.该索引收录了本卷正文中给出释文的全部条目及其参见条目，提供读者按汉字笔画方式检索使用。

2.以汉字起首的条目标题按第一字的笔画由少到多的顺序排列，若笔画数相同，则按一（横）、丨（竖）、丿（撇）、丶（点）、乛（折）五种笔形顺序排列，其中，㇀（提）归为一（横），亅（竖钩）归为丨（竖），㇏（捺）归为丶（点），各种笔形带钩或曲折的笔画（除竖钩"亅"外）归为乛（折）。第一个字相同的，则按第二个字的笔画数和起笔笔形的顺序排列，依次类推。

3.凡第一个字为西文字母、数学符号、罗马数字和阿拉伯数字起首的条目标题，一律排在汉字起首条目标题的最后。以西文字母起首的条目标题分别按其字母的花体、大写、小写及字母本身的先后顺序排列；数学符号起首的条目标题按知识结构顺序排列；数字起首的条目标题按由小到大的顺序排列。若起首的字母、符号及数字相同时，仍按其后汉字的笔画顺序排列。

一　画

二　画

三　画

四　画

五　画

六　画

七 画

八 画

九画

十　画

十一画

十 二 画

十二画

十 三 画

十 四 画

十 五 画

十 六 画

十 七 画

十 八 画

十 九 画

其 他

条目音序索引

说明：1. 该索引收录了本卷正文中给出释文的全部条目及其参见条目，提供读者按汉语拼音方式检索使用。

2. 以汉字起首的条目标题按第一字的汉语拼音字母顺序排列，若第一字的声母、韵母相同，则按声调的阴平、阳平、上声、去声顺序排列。第一个字相同的，则按第二个字的汉语拼音字母顺序排列，多音字按不同的拼音字母顺序排列，依此类推。

3. 凡第一个字为西文字母、数学符号、罗马数字和阿拉伯数字起首的条目标题，一律排在汉字起首条目标题的最后。以西文字母起首的条目标题分别按其字母的花体、大写、小写及字母本身的先后顺序排列；数学符号起首的条目标题按知识结构顺序排列；数字起首的条目标题按由小到大的顺序排列。若起首的字母、符号及数字相同时，仍按其后汉字的拼音字母顺序排列。

A

B

C

D

E

F

G

H

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

T

Y

Z

其 他

条目西文索引

说明：1. 该索引收录了本卷正文中给出西文标题的全部条目，提供读者按西文检索使用.

2. 条目标题按起首西文字母的顺序排列（同一字母先大写，后小写）；条目标题的西文缩写，按一个词排列。其他文种亦按此原则编排。

3. 凡以数学符号、罗马数字和阿拉伯数字起首的条目标题，一律排在条目西文索引的最后。数学符号起首的条目标题按知识结构顺序排列；数字起首的条目标题按由小到大的顺序排列。

4. 若条目标题起首的字母、符号、数字相同时，则按第二个字母等的顺序排列，余此类推。

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

U

V

W

X

Y

Z

其 他

中外人名译名对照表

A

阿巴蒂(Abbati,P.)
阿贝尔(Abel,N. H.)
阿波罗尼奥斯(Apollonius,(P))
阿波斯托尔(Apostol,T. M.)
阿博加斯特(Arbogast,L. F. A.)
阿布·瓦法(Abul-Wefa)
阿达马(Hadamard,J. (-S.))
阿德拉德(Adelard,(B))
阿德勒(Adler,A.)
阿蒂亚(Atiyah,M. F.)
阿尔贝蒂(Alberti,L. B.)
阿尔贝特(Albert,A. A.)
阿尔迪(Hardy,C.)
阿尔方(Halphen,G. -H.)
阿尔福斯(Ahlfors,L. V.)
阿尔冈(Argand,J. R.)
阿尔昆(Alcuin or Albinus)
阿尔诺(Arnauld,A.)
阿尔希塔斯(Archytas,(T))
阿尔泽拉(Arzelà,C.)
阿格蒙(Agmon,S.)
阿基米德(Archimedes)
阿吉隆(Aguilon,F.)
阿江(Адян,С. И.)
阿克曼(Ackermann,F. W.)
阿克曼(Ackermann,W.)
阿拉托斯(Aratus)
阿里斯顿(Ariston of Chios)
阿里斯泰奥斯(Aristaeus)
阿里斯托赛诺斯(Aristoxenus)
阿利斯塔克(Aristarchus,(S))
阿龙霍尔德(Aronhold,S. H.)
阿鲁(Arrow,K. J.)
阿梅斯(Ahmes)
阿米苏(Amitsur,S. A.)
阿默士(Ahmes)
阿姆斯勒(Amsler,J.)
阿姆卓(Amthor,A.)
阿纳尼亚(Анания,ширакаци)
阿南达-劳(Ananda-Rau,K.)
阿涅西(Agnesi,M. G.)
阿诺尔德(Арнольд,В. И.)
阿诺尔德(Arnold,V. I.)
阿佩尔(Appel,K. I.)
阿佩尔(Appell,P. -É)
阿佩莱斯(Apelles)
阿皮安(Apian,P.)
阿皮安努斯(Apianus,P.)
阿奇博尔德(Archibald,R. C.)
阿塞西劳斯(Arcesilaus)
阿斯基(Askey,R.)
阿斯科利(Ascoli,G.)
阿塔罗斯一世(Attalus Ⅰ Soter)
阿廷(Artin,E.)
阿维森纳(Avicenna)
阿歇特(Hachette,J. -N. P.)
阿耶波多(Āryabhata)
阿耶波多第二(Āryabhata Ⅱ)
阿耶波多第一(Āryabhata Ⅰ)
埃德雷(Edrei,A.)
埃尔布朗(Herbrand,J.)
埃尔克斯(Elkies,N. D.)
埃尔米特(Hermite,C.)
埃尔朗(Erlang,A. K.)
埃弗茨(Everts,F.)
埃克曼(Eckmann,B.)
埃克特(Eckert,J.)
埃拉托斯特尼(Eratosthenes)
埃雷拉(Herrera,J. B.)
埃雷斯曼(Ehresmann,C.)
埃雷斯曼(Ehresmann,A. C.)
埃里冈(Hérigone,P.)
埃利森(Ellison,W. J.)
埃曼努尔(Emmanuel,D.)
埃皮努斯(Aepinus,F. U. T.)
埃斯克朗贡(Esclangon,E. B.)
埃汀肖森(Ettingshausen,B. A. von)
埃文斯(Evans,G. C.)
艾伯塔斯(Albertus,M. S.)
艾博特(Abbott,H. L.)
艾布·卡米尔(Kāmil,A.)
艾布卡米勒(Abū Kāmil)
艾德利曼(Adleman,L. M.)
艾弗里(Ivory,J.)
艾哈迈德(Ahmad ibn Yūsuf)
艾凯利(Ecalle)
艾克萨米斯(Examyes)
艾里(Airy,G. B.)
艾里西诺斯(Erycinus)
艾伦(Allen,T.)
艾伦伯格(Eilenberg,S.)
艾森哈特(Eisenhart,L. P.)
艾提(Ai Ti)
艾温尼克(Iwaniec,H.)

艾约瑟(Edkin,J.)
艾泽曼(Aizenman,M.)
爱德华兹(Edwards,H. M.)
爱迪生(Edison,T. A.)
爱尔特希(Erdös,P.)
爱米诺特(Emmy Noether)
爱泼斯坦(Epstein,B.)
爱坦尼·帕斯卡(Pascal,Etienne)
爱耶(Aiyyar,V. R.)
爱因斯坦(Einstein,A.)
安贝尔(Humbert,M.-G.)
安岛直円(Ajima or Azima,Naonobu)
安德烈斯(Andre's Juan)
安德罗诺夫(Андронов,А. А.)
安德森(Anderson,A.)
安德森(Anderson,T. W.)
安德森(Anderson,O. J. V.)
安蒂丰(Antiphon)
安鸿志(An Hongzhi)
安杰利(Angeli,S. D.)
安明道(An Mingdao)
安纳萨戈拉斯(Anaxagoras)
安纳托留斯(Anatolius of Alexandria)
安纳西曼德(Anaximader)
安纳西门尼斯(Anaximenes of Miletus)
安培(Ampère,A.-M.)
安清翘(An qingqiao)
安托尼斯(Anthonisz,A.)
安止斋(An Zhizhai)
昂里翁(Henrion,Denis or Didier)
敖硕昌(Ao Shuochang)
奥伯曼(Oberman)
奥尔(Ore,O.)
奥尔伯斯(Olbers,H. W. M.)
奥尔邓伯格(Rufus,O.)
奥尔福德(Alford,W. R.)
奥尔利兹(Orlicz,W.)
奥尔斯姆(Oresme,N.)
奥尔特加(Ortega,J. de)
奥卡涅(Ocagne,P. M. d')
奥雷姆(Oresme,N.)
奥雷斯特斯(Orestes)
奥列伊尼克(Олейник,О. А.)
奥林皮奥多罗(Olyplodorus)
奥马·海亚姆(Omar Khayyami)
奥尼尔(O'Neil,P. E.)
奥斯古德(Osgood,W. F.)
奥斯兰德(Auslander,M.)
奥斯曼(Osserman,R.)
奥斯特伦(Åström,K. J.)
奥斯特罗格拉茨基(Остроградский,М. В.)
奥斯特洛夫斯基(Ostrowski,A. M.)
奥特雷德(Oughtred,W.)
奥特罗柯夫(Otrokov,N. F.)
奥特维奥-法尔内塞(Ottario Farnese)
奥托(Otho,V. or Otto,V.)
奥托利科斯(Autolycus,(P.))
奥西波夫斯基(Осиповский,Т. Ф.)

B

巴班斯基(Бабанский,Ю. К.)
巴贝吉(Babbage,C.)
巴布斯卡(Babuska,I. M.)
巴尔·希勒尔(Bar-Hillel,Y.)
巴尔巴恩(Barban,M. B.)
巴尔迪(Baldi,B.)
巴尔默(Balmer,J. J.)
巴尔斯柯夫(Барсуков,А. Н.)
巴尔扎恩(Balzan,E.)
巴格曼(Bargmann,V.)
巴赫曼(Bachmann,F.)
巴赫曼(Bachmann,P. G. H.)
巴克尔(Barker,S.)
巴克霍尔兹(Buchholz,R. H.)
巴拉戈(Baragar,A.)
巴雷姆(Barrême,F.)
巴雷特(Barrett,D. E.)
巴利亚民(Baliani,G. B.)
巴罗(Barrow,I.)
巴罗齐(Barocius,F.)
巴罗齐(Barozzi,J.)
巴洛(Barlow,Peter)
巴门尼德斯(Parmenides)
巴拿赫(Banach,S.)
巴纳赫维奇(Banachiewicz,T. A.)
巴内(Barr,A. J.)
巴尼厄(Barnier,W.)
巴切(Bachet,C.)
巴切勒(Batchelor,G. K.)
巴瑞(Bahri)
巴斯(Bass,H.)
巴斯卡(Pascal,B.)
巴塔利尼(Battagllini,G.)
巴塔尼(al-Battānī)
巴特尔斯(Bartels,J. M. C.)
巴特莱特(Bartlett,M. S.)
巴乌金(Боугин)
巴歇(Bachet de M. C. G.)
白桂贞(Bai Guizhen)
白晋(Bouvet,J.)
白锟(Bai Kun)
柏拉图(Plato)
柏里克利(Pericles)
拜尔(Beyer,Ö.)
拜尔(Beyer,J. H.)
拜亥艾丁(Beha-Eddin)
拜姆伯格(Bamberger,L.)
班固(Ban Gu)
班勒卫(Painlevé,P.)
班努·穆萨(Banū Mūsā)

邦贝利(Bombelli,R.)
邦别里(Bombieri,E.)
邦德(Bond,H.)
邦孔帕尼(Boncompagni,B.)
邦尼森(Bonnesen,T.)
保罗·图兰(Turan,P.)
保其寿(Bao Qishou)
鲍茨(Potts,R.)
鲍德(Bao De)
鲍迪奇(Bowditch,N.)
鲍尔·劳斯(Ball,W.W.,Rouse)
鲍建生(Bao Jiansheng)
鲍默特(Baumert,L.D.)
鲍廷(Bautin,N.N.)
鲍廷博(Bao Tingbo)
鲍威尔(Powell,M.J.D.)
鲍澣之(Bao Hanzhi)
北川敏男(Kitagawa,Tosio)
贝茨(Beez,R.E.L.)
贝德韦尔(Bedwell,W.)
贝蒂(Betti,E.)
贝恩克(Behnke,Heinrich A.L.)
贝尔(Baire,R.L.)
贝尔(Bell,A.H.)
贝尔(Bell,E.T.)
贝尔(Bell,S.)
贝尔蒂尼(Bertini,E.)
贝尔曼(Bellman,R.)
贝尔曼(Bellman,R.E.)
贝尔奈斯(Bernays,P.I.)
贝尔特拉米(Beltrami,E.)
贝克(Baker,A.)
贝克莱(Berkeley,G.)
贝克曼(Beckmann,P.)
贝克曼(Beeckman,I.)
贝肯巴克(Beckenbach,E.F.)
贝拉维蒂斯(Bellavitis,G.)
贝里(Berry,M.V.)
贝里克(Berwick,W.E.H.)
贝利(Bailey,D.H.)
贝利(Baillie,R.)
贝利(Perry,J.)
贝内代蒂(Benedetti,G.B.)
贝内迪克斯(Benedicks)
贝萨里翁(Bessarion,J.)
贝塞尔(Bessel,F.W.)
贝特朗(Bertrand,J.L.F.)
贝特曼(Bateman,H.)
贝西(Bessy,F.de)
贝西科维奇(Besicovitch,A.S.-O.)
贝兴亚(Bei Xingya)
贝叶斯(Bayes,T.)
贝祖(Bézout,É.)
贝佐特(Bezout,E.)
本查姆(Bentham,G.)
本迪克松(Bendixson,I.O.)
本生(Bunsen)
比安内梅(Bienaymé,I.J.)
比奥(Biot,J.B.)
比奥(Buot,J.)
比奥灵(Björling,E.G.)
比伯巴赫(Bieberbach,L.)
比德(Beda,V.)
比尔吉(Bürgi,J.)
比格(Beeger,N.G.W.H.)
比克曼(Beeckman,I.)
比利(Beeler,M.D.)
比利亚尔潘多(Villalpando,J.B.)
比林斯利(Billingsley,H.)
比鲁尼(al-Bīrūnī)
比内(Binet,J.P.M.)
比瓦尔德(Wald,A.)
彼得(Peter,F.)
彼得二世(Peter,Ⅱ)
彼得罗夫斯基(Петровский,И.Г.)
彼得松(Петерсон,К.М.)
彼尔庞特(Pierpont,J.)
彼翁(Bion)
毕达哥拉斯(Pythagoras)
毕肖普(Bishop,R.)
边冈(Bian Gang)
彪特(Buteo,J.)
别尔纳斯基(Biernacki,M.)
别列赞斯卡娅(Березанская,Е.)
宾(Bing,R.H.)
宾纳塞拉夫(Benacerraf,P.)
波尔查诺(Bolyano,B.)
波尔塔(Porta,G.D.)
波尔约(Bolyai,F.)
波尔约(Bolyai,J.)
波菲里乌斯(Porphyrius)
波菲利(Porphyre)
波格列洛夫(Погорелов,А.В.)
波莱尔(Borel,É.)
波莱尔(Borel,(F.-É.-J.-)É.)
波利克拉底(Polycrates)
波利亚(Polya,G.)
波伦尼(Poleni,G.)
波梅兰斯(Pomerance,C.)
波默伦科(Pommerenke,C.)
波斯特(Post,E.L.)
波西佐尼奥斯(Poseidonius or Posidonios)
波伊巴赫(Peurbach,G.von)
波伊亚(pólya,G.)
玻尔(Bohr,H.)
玻尔(Bohr,N.H.D.)
玻耳兹曼(Boltzmann,L.E.)
玻色(Bose,N.)
玻色(Bose,R.C.)
玻色(Bose,S.N.)

玻意耳(Boyle,R.)
伯恩鲍姆(Birnbaum,Z. W.)
伯恩赛德(Burnside,W.)
伯恩施坦(Bernstein. F.)
伯恩斯坦(Бернштейн,C. H.)
伯恩特(Berndt,B. C.)
伯尔(Burr,S.)
伯格曼(Bergman,S.)
伯格姆(Bergum,G. E.)
伯基尔(BurKill,J. C.)
伯克霍夫(Birkhoff,G.)
伯克霍夫(Birkhoff,G. D.)
伯拉基斯(Брадис,B. M.)
伯利肯姆波(Berlekamp,E. R.)
伯奇(Birch,B. J.)
伯斯(Bers,L.)
泊松(Poisson,S. -D.)
博贝宁(Бобынин,B. B.)
博比利埃(Bobillier,É.)
博德(Borcherds,R. E.)
博尔(Ball,W. W. R.)
博尔查(Bolza,O.)
博尔德希维兹(Bortkiewcz(Bortkewitsch),L. J.)
博尔强斯基(Болтянский,B. Г.)
博尔托洛蒂(Bortolotti,E.)
博尔夏特(Borchardt,C. W.)
博戈柳博夫(Боголюбов,A. H.)
博戈柳博夫(Боголюбов,H. H.)
博格朗(Beaugrand,J.)
博赫纳(Bochner,S.)
博克斯(Box,G. E. P.)
博勒斯(Borrus,C.)
博雷尔(Borel,A.)
博灵(Beurling,A. K. -A.)
博曼(Bohman,J.)
博纳(Beaune,F. de)
博内(Bonnet,P. -O.)
博启(Bo Qi)
博斯(Boas,R. P. Jr.)
博苏克(Borsuk,K.)
博特(Bott,R.)
博特克维奇(Bortkiewicz,L. J.)
博歇(Bôcher,M.)
博耶(Boyer,C. B.)
博伊西斯(Boethius,A. M. S.)
布顿·仁钦珠巴(Budun Renqin Zhuba)
布尔(Boole,G.)
布尔巴基(Bourbaki,N.)
布尔丹(Bourdin,P.)
布尔盖恩(Bourgain,J.)
布尔根(Bourgain,J.)
布尔克斯(Brooks,E.)
布丰(Buffon,G. -L. L. de)
布盖(Bouguer,P.)
布赫什塔布(Бухштаб,A. A.)
布加耶夫(Бугаев,H. B.)
布凯(Bouquet,J. -C.)
布克斯(Burks)
布拉利-福尔蒂(Burali-Forti,C.)
布拉米奇(Bromwich,T. J. I'.)
布拉默(Bramer,B.)
布拉施克(Blaschke,W. J. E.)
布拉什曼(Брашман,H. Д.)
布拉休斯(Blasius,(P.))
布莱克韦尔(Blackwell,D.)
布兰歇(Blanchet,A. -M.)
布朗(Brown,T. C.)
布朗(Brown,E. W.)
布朗(Brown,G.)
布朗(Brown,M.)
布朗基(Branges,L. de)
布劳(Blaeu,W. J.)
布劳德(Browder,F. E.)
布劳奈尔(Brownell,W. A.)
布劳威尔(Brouwer,L. E. J.)
布雷(Bret,J. J.)
布雷德沃丁(Bradwardine,T.)
布雷肯里奇(Braikenridge,W.)
布雷洛(Brélot,M. E.)
布雷默曼(Bremermann,H. -J.)
布雷齐(Brezzi,F.)
布里昂雄(Brianchon,C. J.)
布里奥(Briot,C. A.)
布里格斯(Briggs,H.)
布里松(Brisson. B.)
布里松(Bryson,(H.))
布利克弗尔特(Blichfeldt,H. F.)
布利萨德(Blissard,J.)
布利斯(Bliss,G. A.)
布廖斯基(Brioschi,F.)
布林克利(Brinkley,J.)
布龙贝格(Bromberg)
布龙克尔(Brouncker,W.)
布龙斯(Bruns,E. H.)
布卢门塔尔(Blumenthal)
布鲁克(Bruck)
布鲁姆(Bloom,B. S.)
布鲁纳(Bruner,J. S.)
布吕赫(Bruhat,F.)
布伦(Brun,V.)
布伦(Brunn,L.)
布伦(Bullen,K. E.)
布伦特(Brent,R. P.)
布罗卡尔(Brocard,P. R. J. -B. H.)
布罗泽克(Brozek(Broscius),Jan)
布洛赫(Bloch,A.)
布尼亚科夫斯基(Буняковский,B. Я.)
布饶尔(Brauer,R. (D.))
布什(Bush,V.)
布斯曼(Busemann,H.)

布耶(Bouyer)

C

采尔伯格(Zeilberger,D.)
蔡大用(Cai Dayong)
蔡叔(Cai Shu)
蔡邕(Cai Yi)
蔡元定(Cai Yuanding)
仓西正武(Kuranishi,M.)
曹才翰(Cao Caihan)
曹操(Cao Cao)
曹令中(Cao Lingzhong)
曹士芴(Cao Shiwei)
曹锡华(Cao Xihua)
策梅罗(Zermelo,E. F. F.)
岑嘉评(Cen Jiaping)
岑建功(Cen Jiangong)
查尔斯王一世(King Charles Ⅰ)
查理大帝(Charlemagme)
查理二世(Charles Ⅱ)
查理王(King Charles)
查理五世(Charles Ⅴ)
查理一世(Charles Ⅰ)
查普曼(Chapman,S.)
查士丁尼(Justinian)
查斯(Chace,A. B.)
常庚哲(Chang Gengzhe)
彻里(Cherry,T. M.)
陈邦称(Chen Bangcheng)
陈必胜(Chen Bisheng)
陈必智(Chen Bizhi)
陈斌战(Chen Binzhan)
陈灿辉(Chen Canhui)
陈炽(Chen Chi)
陈传理(Chen Chuanli)
陈贵强(Chen Guiqiang)
陈从运(Chen Congyun)
陈国才(Chen Guocai)
陈国华(Chen Guohua)
陈国旺(Chen Guowang)
陈汉夫(Chen Hanfu)
陈翰馥(Chen Hanfu)
陈厚耀(Chen Houyao)
陈际新(Chen Jixin)
陈嘉庚(Chen Jiageng)
陈建功(Chen Jiangong)
陈杰(Chen Jie)
陈尽谟(Chen Jinmo)
陈景润(Chen Ching-Jun)
陈兰荪(Chen Lansun)
陈农(Chen Nong)
陈庆益(Chen Qingyi)
陈如龙(Chen Rulong)
陈尚德(Chen Shangde)
陈省身(Chen Xingshen)
陈世仁(Chen Shiren)
陈恕行(Chen Shuxing)
陈维桓(Chen Weihuan)
陈文(Chen Wen)
陈文忠(Chen Wenzhong)
陈希孺(Chen Xiru)
陈兴安(Chen Xingan)
陈耀松(Chen Yaosong)
陈奕培(Chen Yipei)
陈永川(Chen Yongchuang)
陈永高(Chen Yonggao)
陈永和(Chen Yonghe)
陈予恕(Chen Yushu)
陈至达(Chen Zhida)
陈志坚(Chen Zhijian)
陈帜(Chen Zhi)
陈重穆(Chen Zhongmu)
陈子(Chen Zi)
陈梓北(Chen Zibei)
陈旸(Chen Yang)
陈讦(Chen Xu)
成公兴(Cheng Gongxing)
成吉思汗(Chengji Sihan)
成平(Cheng Ping)
程崇庆(Cheng Chongqing)
程大位(Cheng Dawei)
程民德(Cheng Minde)
程柔(Cheng Rou)
程世绥(Cheng Shisui)
程廷熙(Cheng Tingxi)
程裔采(Cheng Yucai)
迟宗陶(Chi Zongtao)
楚衍(Chu Yan)
崔浩(Cui Hao)
崔锦泰(Chui,C. K.)
崔善为(Cui Shanwei)

D

达·芬奇(da. Vinci,L.)
达布(Darboux,(J.-)G.)
达尔文(Darwin,C.)
达尔文(Darwin,G. H.)
达朗贝尔(d'Alembert,J. le R.)
达文波特(Davenport,H.)
达西波迪斯(Dasypodius,C.)
大流士(Darius)
大马士革乌斯(Damascius,(D.))
大禹(Da Yu)
戴安南达(Diananda,P. H.)
戴比斯(Davis,M.)
戴德金(Dedekind,(J. W.)R.)
戴敦元(Dai Dunyuan)
戴法兴(Dai Faxing)
戴金(Daykin,D. E.)
戴奇兴(Dai Qixing)

戴汝潜(Dai Ruqian)
戴维·查德诺斯基(Chudnovsky,D.)
戴维斯(Davis,M.D.)
戴熙(Dai Xi)
戴煦(Dai Xu)
戴永隆(Dai Yonglong)
戴震(Dai Zhen)
戴彧虹(Dai Yuhong)
黛多(Dido)
丹蒂(Danti,E.)
丹尼尔(Daniell,P.J.)
丹尼尔·尚克斯(Daniell-Shanks,D.)
丹尼尔第一·伯努利(Bernoulli,Daniel Ⅰ)
丹尼尔斯(Daniels,H.)
丹齐克(Dantzig,G.B.)
当德兰(Dandelin,G.P.)
当诺顿(Norton,S.)
当儒瓦(Denjoy,A.)
道格拉斯(Douglas,J.)
道奇森(Dodgson,C.L.)
稻森五雄(Daosen Wuxiong)
德·拉姆(de Rham,G.-W.)
德·摩根(De Morgan,A.)
德布兰奇(de Brange,L.)
德恩(Dehn,M.W.)
德尔萨特(Delsarte,J.F.)
德福内梯(de Finetti,B.)
德格罗特(De Groot,J.C.)
德格罗特(Degroot,M.H.)
德拉曼(Delamain,R.)
德拉什(Drach,J.J.)
德里费尔德(Drinfeld,V.G.)
德利涅(Deligne,P.)
德洛内(Delaunay,Charles-Eugène)
德谟克利特(Democritus)
德乔治(de Giorgi,E.)
德萨格(Desargues,G.)
德沃克(Dwork,B.)
德扎格(Desargues,Girard(Gérard))
邓福德(Dunford,N.)
邓肯(Dynkin,E.B.)
邓小平(Deng Xiaoping)
邓引斌(Deng Yinbin)
邓玉函(Terrenz,J.)
狄奥多西一世(Theodosius Ⅰ)
狄德罗(Diderot,D.)
狄俄克利斯(Diocles)
狄俄尼索多罗(Dionysodorus)
狄考文(Mateer,R.C.W.)
狄克逊(Dixon,W.J.)
狄喇克(Dirac,P.A.M.)
狄利克雷(Dirichlet,P.G.L.)
狄诺斯特拉托斯(Dinostratus)
迪(Du,D.Z.)
迪厄多内(Dieudonné,J.)
迪格斯(Digges,L.)
迪格斯(Digges,T.)
迪克森(Dickson,L.E.)
迪克斯米耶(Dixmier,J.)
迪克斯坦(Dickstein,S.)
迪拉克(Dulac,H.)
迪勒(Dürer,A.)
迪乔吉(de Giorgi,E.)
迪歇纳(Duchesne,S.)
迪伊(Dee,J.)
笛卡儿(Descartes,R.)
第谷(Tycho Brahe)
第欧根尼(Diogenes,L.)
蒂茨(Tits,J.)
蒂奇马什(Titchmarsh,E.Ch.)
棣么甘(Di Megan)
棣莫弗(De Moivre,A.)
刁锦寰(Diao Jinhuan)
丁传松(Ding Chuansong)
丁尔升(Ding Ersheng)
丁巨(Ding Ju)
丁取忠(Ding Quzhong)
丁伟岳(Ding Weiyue)
丁夏畦(Ding Xiaqi)
丁易东(Ding Yidong)
丢番图(Diophantus)
丢利埃(Duillier)
董纯才(Dong Chuncai)
董光璧(Dong Guangbi)
董光昌(Dong Guangchang)
董基诚(Dong Jicheng)
董金柱(Dong Jinzhu)
董泉(Dong Quan)
董贻清(Dong Yiqing)
董卓(Dong Zhuo)
董祐诚(Dong Youcheng)
堵丁柱(Du Dingzhu)
杜·布瓦-雷蒙(Du Bois-Reymond,P.D.G.)
杜阿梅尔(Duhamel,J.M.C.)
杜伯纳(Dubner,H.)
杜布(Doob,J.L.)
杜德美(Jartoux,P.)
杜迪特(Dudith,A.)
杜格(Du Ge)
杜拉克(Dulac,M.H.)
杜威(Dewey,J.)
杜午初(Du Wuchu)
杜锡录(Du Xilu)
杜知耕(Du Zhigeng)
杜忠(Du Zhong)
段学复(Duan Xuefu)
段育华(Duan Yuhua)
多布奇斯(Daubechies,I.)
多柯威克(Dokovic,D.Z.)
多普勒(Doppler,J.C.)

多西修斯(Dositheus)

E

恩夫洛(Enflo,P.)
恩格尔(Engel,F.)
恩格斯(Engels,F.)
恩里奎斯(Enriques,F.)
恩内斯特勒姆(Eneström,G.)

F

发赫里(Fakhr al-Mulk)
法布里(Fabri,H.)
法尔廷斯(Faltings,G)
法赫瓦松(Фархварсон,А.Д.)
法捷耶夫(Фаддеев,Д.К.)
法拉比(al-Fârrâbi)
法穆(Fa Mu)
法尼亚诺(Fagnano dei Toschi,G.C.)
法诺(Fano,G.)
法图(Fatou,P.J.L.)
法瓦尔(Favard,J.A.)
樊墘(Fan Ji)
范·德·波尔(Van der Pol,B.)
范·德·瓦尔登(Van der Waerden,B.L.)
范德科皮特(Van der Corput,J.G.)
范德蒙德(Vandermonde,A.T.)
范迪维尔(Vandiver,H.S.)
范迪沃(Vandiver,H.S.)
范会国(Fan Huiguo)
范因(Fine,H.B.)
方德植(Fang Dezhi)
方开泰(Fang Kaitai)
方士铼(Fang Shirong)
方以智(Fang Yizhi)
方源(Fang Yuan)
方中履(Fang Zhonglu)
方中通(Fang Zhongtong)
菲奥尔(Fior,A.M.)
菲茨杰拉尔德(FitzGerald,C.H.)
菲迪亚斯(Phidias)
菲尔兹(Fields,J.C.)
菲赫金戈尔兹(Фихтенгольц,Г.М.)
菲利波斯(Philippos of Opos)
菲利浦二世(Philip Ⅱ)
菲利普斯(Phillips,R.S.)
菲洛劳斯(Philolaos,(C))
菲舍尔(Fischer,E.S.)
腓德烈第二(Frederick Ⅱ)
斐波那契(Fibonacci,L.)
斐斯泰洛齐(Pestalozzi,J.H.)
费奥多罗夫(Фёдоров,Е.С.)
费德雷尔(Federer,H.)
费多谢延科(Федосее-нко)
费尔(Fehr,H.)
费尔(Fell,J.M.G.)
费尔巴哈(Feuerbach,K.W.)
费尔普斯(Phelps,C.R.)
费弗曼(Fefferman,C.)
费拉里(Ferrari,L.)
费拉斯科(Flaschka,H.)
费莱明(Fleming,W.)
费勒(Feller,W.)
费雷(Free)
费雷西底(Pherecydes)
费罗(Ferro,S.)
费马(Fermat,F.)
费马(Fermat,P.de)
费特(Feit,W.)
费希尔(Fisher,R.A.)
费耶尔(Fejer,L.)
费因曼(Feynman,R.P.)
芬克(Fink,T.)
芬尼(Finney,D.J.)
芬斯勒(Finsler,P.)
冯(Fung,G.W.)
冯·诺伊曼(von Neumann,J.)
冯·诺伊曼(von Nenmann,H.)
冯·施陶特(von Staudt,K.G.C.)
冯长根(Feng Changgen)
冯澄(Feng Cheng)
冯德兴(Feng Dexing)
冯桂芬(Feng Guifen)
冯霍兰德(Von Holland,G.J.)
冯康(Feng Kang)
冯克勤(Feng Keqin)
冯绪宁(Feng Xuning)
冯祖荀(Feng Zuxun)
弗格森(Ferguson,D.F.)
弗拉基米罗夫(Владимиров,В.С.)
弗拉克(Vlacq,A.)
弗拉斯卡(Flaschka,H.)
弗莱克斯纳(Flexner,A.)
弗莱明(Fleming,W.P.)
弗赖伊(Frye,R.)
弗兰柯(Franco,Z.)
弗兰切斯卡(Francesca,P.)
弗勒登塔尔(Freudenthal,H.)
弗勒利希(Fröhlich,A.)
弗雷(Free,G.)
弗雷德霍姆(Fredholm,(E.)I.)
弗雷德里克森(Fredricksen,H.)
弗雷格(Frege,(F.L.)G.)
弗雷内(Frenet,J.F.)
弗雷内尔(Fresnel,A.J.)
弗雷歇(Fréchet,M.-R.)
弗里德莱因(Friedlein,G.)
弗里德里希斯(Friedrichs,K.O.)
弗里德曼(Freedman,M.(H.))
弗里德曼(Фридман,А.А.)
弗里克(Fricke,R.)

弗里施(Frisch,R.)
弗伦克尔(Fraenkel,A.A.)
弗罗贝尼乌斯(Frobenius,F.G.)
弗罗斯特(Frost,A.)
弗洛伊德(Freud,G.)
弗穆兰(Vermeulen,M.)
伏羲王(Fu Xiwang)
福尔顿(Fulton,N.)
福尔哈贝(Faulhaber,J.)
福格逊(Ferguson,D.F.)
福卡德尔(Forcadel P.)
福克斯(Folkes,M.)
福里(Fouvry,E.)
福内斯(Fornaess,J.E.)
福赛思(Forsyth,A.R.)
福斯特(Foster,S.)
福特(Ford,L.R.)
福特温勒(Furtwangle,F.P.P.)
福伊斯(Foias,C.)
傅恒志(Fu Hengzhi)
傅克昌(Fu Kechang)
傅兰雅(Fryer,J.)
傅里叶(Fourier,J.-B.-J.)
傅权(Fu Quan)
傅仁均(Fu Renjun)
傅衣铭(Fu Yiming)
傅种孙(Fu Zhongsun)
富比尼(Fubini,G.)
富德(Mrs. Fuld,F.)
富尔克森(Fulkerson,D.R.)
富克斯(Fuchs,I.L.)
富斯(Fuss,N.)
富特温勒(Furtwängler,F.P.)

G

伽莱(Gallai,T.)
伽利略(Galilei,G.)
伽辽金(Галёркин,Б.Г.)
伽罗瓦(Galois,E.)
盖尔范德(Гельфанд,И.М.)
盖尔范德(Gelfand,I.M.)
盖尔丰德(Гельфонд,А.О.)
盖拉萨迪(al-Qalasādī)
盖利布兰德(Gellibrand,H.)
盖林(Gehring,F.W.)
盖伦(Gelon)
盖仑(Galen)
盖米诺斯(Geminus)
盖塔尔迪(Ghetaldi,M.)
盖伊(Guy,R.K.)
甘少波(Gan Shaobo)
甘斯(Gans,R.)
冈洁(Oka,K.)
冈特(Gunter,E.)
高安民(Gao Anmin)
高尔(Gowers,W.T.)
高尔顿(Galton,F.)
高尔斯(Gowers,W.T.)
高君韦(Gao Junwei)
高木贞治(Takagi,T.)
高桥元男(Gaoqiao Yuannan)
高斯(Gauss,C.F.)
高原吉种(Gaoyuan Jizhong)
高允(Gao Yun)
戈德菲尔德(Goldfeld,D.M.)
戈德斯坦(Goldstine,H.H.)
戈登(Gordon,C.)
戈杜诺瓦(Godunova,E.K.)
戈多(Godeaux,L.A.)
戈克伦纽斯(Goclenius,R.)
戈拉叶夫(Граев,М.И.)
戈朗斯坦(Gorénstein,D.)
戈卢别夫(Голубев,В.В.)
戈卢津(Голузин,Г.М.)
戈罗德(Golod)
戈莫里(Gomory,R.E.)
戈塞特(Gossett,W.S.)
戈斯波(Gosper)
哥白尼(Kopernik,M.)
哥德巴赫(Goldbach,C.)
哥德尔(Gödel,K.)
哥尔丹(Gordan,P.A.)
哥尔基亚(Gorgias)
哥伦布(Colombo,C.)
哥罗莫夫(Gromov,M.)
格根鲍尔(Gegenbauer,L.B.)
格拉马托伊斯(Grammateus,H.S.)
格拉斯曼(Grassmann,H.G.)
格拉斯曼(Grassmann,R.)
格拉韦(Граве,Д.А.)
格莱舍(Glaisher,J.W.L.)
格兰特(Graunt,J.)
格兰维尔(Granville,A.)
格劳尔特(Grauert,H.)
格劳斯坦(Graustein,W.C.)
格勒奇(Grötzsch,H.)
格雷厄姆(Graham,R.L.)
格雷果里(Gregory,J.)
格雷戈里(Gregory of St. V.)
格雷戈里(Gregory,D.)
格雷戈里(Gregory,J.)
格雷戈里13世(Gregory,XIII)
格雷戈里·查德诺斯基(Chudnovsky,G.)
格里菲思(Griffiths,P.)
格里戈尔(Григор,К.)
格利姆(Glimm,J.G.)
格利森(Gleason,A.M.)
格林(Green,G.)
格林鲍姆(Grünbaum,B.)
格龙勃(Golomb,S.W.)

格卢什科夫(Глушков,В. М.)
格鲁波(Grupp,F.)
格罗塞特斯特(Grossetest,R.)
格罗斯(Gross,B. H.)
格罗斯曼(Grossmann,M.)
格罗斯沃尔德(Grosswald,E.)
格罗腾迪克(Grothendieck,A.)
格涅坚科(Гнеденко,Б. В.)
格思里(Guthrie,F.)
葛佳(Gager,W. A.)
根岑(Gentzen,G. K. E.)
耿寿昌(Geng Shouchang)
龚冬保(Gong Dongbao)
龚怀云(Gong Huaiyun)
龚伦超(Gong Lunchao)
龚昇(Gong Sheng)
辜联昆(Gu Liankun)
古德奈特(Goodnight,J. H.)
古德文(Goodwin,H.)
古尔丁(Guldin,P.)
古尔萨(Goursat,É. -J-B)
古里耶夫(Гурьев,С. Е.)
古希(al-Qūhī)
谷超豪(Gu Chaohao)
顾澄(Gu Cheng)
顾观光(Gu Guanguang)
顾基发(Gu Jifa)
顾九苞(Gu Jiubao)
顾培亮(Gu Peiliang)
顾应祥(Gu Yingxiang)
瓜廖尔(Gwalior)
关孝和(Seki,Takakazu)
关肇直(Guan Zhaozhi)
管梅谷(Guan Meigu)
管叔(Guan Shu)
广中平祐((Hironaka,Heisuke)
郭柏灵(Guo Bailing)
郭本瑜(Guo Benyu)
郭伯灵(Guo Boling)
郭伯玉(Guo Boyu)
郭蒿涛(Guo Haotao)
郭青峰(Guo Qingfeng)
郭荣(Guo Rong)
郭世平(Guo Shiping)
郭守敬(Guo Shoujing)
郭树枋(Guo Shufang)
郭嵩涛(Guo Songtao)
郭永怀(Guo Yonghuai)
郭友中(Guo Youzhong)
郭竹瑞(Guo Zhurui)

H

哈贝特(Harbater,D.)
哈伯斯(Harborth,H.)
哈茨霍恩(Hartshorne,R.)
哈代(Hardy,G. H.)
哈德威格(Hadwiger,H.)
哈丁(Hardin,R.)
哈顿(Hatton,E.)
哈恩(Hahn,E.)
哈恩(Hahn,H.)
哈尔(Haar,A.)
哈尔莫斯(Halmos,P. R.)
哈格多恩(Hagedorn,T. R.)
哈根(Haggan,V.)
哈吉斯(Hagis,P.)
哈济尼(ал-Хазини)
哈肯(Hakan,W.)
哈雷(Halley,E.)
哈里奥特(Harriot,T.)
哈里斯(Harris,T. E.)
哈利发马蒙(al-Ma'mūn)
哈利发马蒙二世(al-Ma'mūn Ⅱ)
哈梅尔(Hamel,G. R. W.)
哈密顿(Hamilton,W. R.)
哈默厄(Hämmerer,N.)
哈姆布格尔(Hamburger,H. L.)
哈纳克(Harnack,C. G. A.)
哈纳尼(Hanani,H.)
哈塞(Hasse,H.)
哈塞勒(Haseler,J. L.)
哈桑(al-Hasan)
哈特(Hart,A. S.)
哈特里(Hartree,D. R.)
哈特利(Hartley,H. O.)
哈特曼(Hartmann,J.)
哈托格斯(Hartogs,F. M.)
海伯格(Heiberg,J. L.)
海布伦纳(Heilbronner,J. C.)
海丁(Heyting,A.)
海厄罗王(Hiero Ⅱ)
海尔布伦(Heilbronn,H. A.)
海伦(Heron,(A))
海马弗里叙斯(Gemma Frisius,R.)
海曼(Hayman,W. K.)
海默斯(Hymers,J.)
海涅(Heine,H. E.)
海塞尔(al-Hassar)
海森堡(Heisenberg,W.)
亥姆霍兹(Helmholtz,H. L. F.)
亥维赛(Heaviside,O.)
韩公廉(Han Gonglian)
韩继昌(Han Jichang)
韩继业(Han Jiye)
韩京清(Han Jingqing)
韩延(Han Yan)
汉高祖(Han Gaozu)
汉克尔(Hankel,H.)
汉森(Hansen,D.)
汉森(Hansen,S.)

豪斯多夫(Hausdorff,F.)
何承天(He Chengtian)
何国宗(He Guozong)
何均(He Jun)
何鲁(He Lu)
何平子(He Pingzi)
何显慈(He Xianci)
何旭初(He Xuchu)
何元锡(He Yuanxi)
何震邦(He Zhenbang)
赫巴特(Herbart,J.F)
赫伯特·塔里(Tarry,H.)
赫茨(Herz,C.S.)
赫尔(Hoare,C.A.R.)
赫尔巴特(Herbart,J.F.)
赫尔德(Hölder,O.L.)
赫尔加森(Helgason S.)
赫尔曼(Hermann the Lame)
赫尔曼(Hermann,J.)
赫尔曼德尔(Hörmander,L.V.)
赫尔特(Held)
赫尔维茨(Hurwitz,A.)
赫克斯利(Huxley,M.N.)
赫克托(Hector,J.)
赫姆斯(Hermes.P.)
赫什(Hersh,R.)
赫思慎(Van He)
赫松(Herschorn,M.)
赫维茨(Hurewicz,W.)
赫维赛德(Heaviside,O.)
赫谢尔(Herschel,J.F.W.)
赫谢尔(Herschel,F.)
黑尔斯(Hales)
黑克(Hecke,E.)
黑利(Helly,E.)
黑林格(Hellinger,E.)
黑塞(Hesse,L.O.)
黑塞伯格(Hessenberg,G.)
黑田稔(Hei Tianren)
亨利齐(Henrici,J.)
亨塞尔(Hensel)
亨特(Hunt,G.)
亨廷顿(Huntington,E.V.)
亨泽尔(Hensel,K.)
洪加威(Hong Jiawei)
洪家兴(Hong Jiaxing)
洪特(Hunt,R.)
洪正夏(Hong Zhengxia)
侯国荣(Hou Guorong)
侯晋川(Hou Jinchuang)
侯秀姣(Hou Xiujiao)
侯振挺(Hou Zhenting)
侯自新(Hou Zixin)
后谷清一(Hougu Qingyi)
忽必烈(Hu Bilie)
胡炳生(Hu Bingsheng)
胡德(Hood,Thomas)
胡迪鹤(Hu Dihe)
胡敦复(Hu Dunfu)
胡尔奇(Hultsch)
胡尔维茨(Hurwitz,A.)
胡尔西乌斯(Hulsius,L.)
胡国定(Hu Guoding)
胡和生(Hu Hesheng)
胡克(Hooke,Robert)
胡坤升(Hu Kunsheng)
胡林翼(Hu linyi)
胡明复(Hu Mingfu)
胡塞尔(Husserl,E.)
胡世华(Hu Shihua)
胡适耕(Hu Shigeng)
胡秀林(Hu Xiulin)
胡宗慎(Hu Zongshen)
胡宗宪(Hu Zongxian)
花拉子米(al-Khowārizmī)
华蘅芳(Hua Hengfang)
华莱士(Wallace,F.)
华莱士(Wallace,W.)
华林(Waring,E.)
华罗庚(Hua Loo-Keng)
华世芳(Hua Shifang)
华印椿(Hua Yinchun)
怀伯恩(Whyburn,G.T.)
怀尔德(Wilder,R.L.)
怀尔斯(Wiles,A.)
怀特海(Whitehead,A.N.)
怀特海(Whitehead,G.W.)
怀特海(Whitehead,J.H.C.)
怀特曼(Whiteman,A.L.)
荒木村英(Huangmu Cunying)
黄(Hwang,F.)
黄帝(Huang Di)
黄根发(Huang Genfa)
黄光明(Huang Guangming)
黄鸿慈(Huang Hongci)
黄慧康(Huang Huikang)
黄继鲁(Huang Jilu)
黄龙吟(Huang Longyin)
黄栖岩(Huang Xiyan)
黄启瑞(Huang Qirui)
黄庆澄(Huang Qingcheng)
黄顺基(Huang Shunji)
黄贤汶(Huang Xianwen)
黄嘘云(Huang Xuyun)
黄宣国(Huang Xuanguo)
黄虞稷(Huang Yuji)
黄玉民(Huang Yumin)
黄钟骏(Huang Zhongjun)
黄宗宪(Huang Zongxian)
会田安明(Aida,Yasuaki)

惠更斯(Huygens,C.)
惠斯顿(Whiston,W.)
惠特克(Whittaker,E.T.)
惠特尼(Whitney,H.)
惠特渥斯(Whitworth,A.W.)
霍布森(Hobson,E.W.)
霍布斯(Hobbes,T.)
霍茨妙拉(Holzmuller,G.)
霍顿(Horton,J.D.)
霍尔(Hall,A.G.)
霍尔(Hall,M.Jr)
霍尔(Hall,P.)
霍尔姆博(Holmboe,B.M.)
霍尔特-科克(Halter-Koch,F.)
霍夫丁(Hoeffding,W.)
霍夫曼(Hoffman,A.J.)
霍夫曼(Hofmann,J.E.)
霍夫梅斯特(Hofmeister,G.)
霍盖特(Hoggatt,V.E.)
霍赫希尔德(Hochschild,G.P.)
霍华德(Howard,R.A.)
霍金(Hodgkin,A.L.)
霍昆格姆(Hocquenghem,A.)
霍罗威茨(Horowitz,D.)
霍纳(Horner,W.G.)
霍普夫(Hopf,H.)
霍普夫(Hopf,E.)
霍普金斯(Hopkins,W)
霍奇(Hodge,W.V.D.)
霍叔(Huo Shu)
霍特林(Hotelling,H.)

J

基尔霍夫(Kirchhoff,G.R.)
基费尔(Kirfel,C.)
基弗(Kiefer,J.C.)
基灵(Killing,W.K.J.)
基绍(Kishore,M.)
基索尔(Kishore,M.)
基谢廖夫(Киселёв,А.П.)
吉布斯(Gibbs,J.W.)
吉尔拉德(Guillard)
吉洪诺夫(Тихонов,А.Н.)
吉拉尔(Girard,A.)
吉里(Алъ-Джили)
吉利斯皮(Gillispie,Ch.C.)
吉伦(Geolon)
吉田耕作(Yosida,K.)
吉田光由(Jitian Guangyou)
吉文斯(Givens,J.W.Jr.)
计雷(Ji Lei)
季素月(Ji Suyue)
加德纳(Gardner,M.)
加拉贝迪安(Garabedian,P.R.)
加勒(Galle,J.G.)
加廖尔金(Галёркин,Б.Г.)
加尼埃(Garnier,J.G.)
加涅(Gagne,R.M.)
加斯顿·塔里(Tarry,G.)
加斯珀(Gasper,G.)
加藤敏夫(Kato,T.)
加悦傅一郎(Jia Yuefuyilang)
嘉当(Cartan,É)
嘉当(Cartan,É.(—J.))
嘉当(Cartan,H.)
嘉当(Cartan,H.P.)
贾比·伊本·艾夫拉赫(Jābir ibn Aflah al-Ishbili)
贾步纬(Jia Buxei)
贾菲(Jaffe,A.M.)
贾汉凯(Jia Hankai)
贾亨(Jia Heng)
贾宪(Jia Xian)
贾谊(Jia Yi)
建部贤弘(Takebe,K.)
江本(Jiang Ben)
江衡(Jiang Heng)
江文华(Jiang Wenhua)
江永(Jiang Yong)
江泽涵(Chiang Tse-han)
江泽坚(Jiang Zejian)
江泽培(Jiang Zepei)
江志(Jiang Zhi)
姜伯驹(Jiang Boju)
姜礼尚(Jiang Lishang)
姜立夫(Jiang Lifu)
姜明远(Jiang Mingyuan)
姜启源(Jiang Qiyuan)
蒋葆鼎(Jiang Baoding)
蒋尔雄(Jiang Erxiong)
蒋宏圣(Jiang Hongsheng)
蒋声(Jiang Sheng)
蒋周(Jiang Zhou)
焦循(Jiao Xun)
角古静夫(Kakutani,S.)
揭廷锵(Ting Qiang)
揭子煊(Jie Zixuan)
杰克逊(Jackson,D.)
杰拉德(Gerard ,(C))
杰龙涅(Делоне,Б.Н.)
杰姆斯莱夫(Hjelmslev,J.)
解恩泽(Xie Enze)
今村之商(Jincun Zhishang)
金博尔(Kimball,G.E.)
金福临(Jin Fulin)
金来朋(Jin Laipeng)
金台(Jin Tai)
金田安政(Kanada)
金怡(Jin Yi)
井上仪夫(Jingshang Yifu)
久留鸟义太(Jiuliuniao Yitai)

久田玄哲(Jiutian Xuanzhe)
瞿昙悉达(Qutan Xida)

K

卡贝奥(Cabeo,N.)
卡布弗莱什(Kalbfleisch,J. D.)
卡茨(Kac,Mark)
卡茨(Kac,V.)
卡当(Cardan)
卡迪松(Kadison,R. V.)
卡蒂(Carty,J. J.)
卡尔(Carr)
卡尔达诺(Cardano,G.)
卡尔卡维(Carcavi,P. de)
卡尔马(Kalmár,L.)
卡尔曼(Kalman,R. E.)
卡尔森(Carleson,L.)
卡莱松(Carleson,L. A. E.)
卡甘(Каган,В. Ф.)
卡汉(Kahane)
卡拉比(Calabi,E.)
卡拉西奥多里(Carathéodory,C.)
卡莱曼(Carleman,T.)
卡雷(Carré,L.)
卡雷尔(Carrell,J. B.)
卡里尔(Carrier,G. F.)
卡里塔特(Caritat,A. N.)
卡利埃(Charlier,C. W. L.)
卡利普斯(Callippus,(C.))
卡林(Karlin,Samuel)
卡马卡(Karmarkar,N.)
卡迈克尔(Carmichael,R. D.)
卡门(Kármán,T. von)
卡纳普(Carnap,R.)
卡诺(Carnot,L. (-N. -M.))
卡帕(Karp,R. M.)
卡彭特(Carpenter,N.)
卡普兰斯基(Kaplansky,I.)
卡森(Casson,J. R.)
卡森(Casson,A. J.)
卡斯蒂隆(Castillon,G. F.)
卡斯尔斯(Cassels,J. W. S.)
卡斯泰尔诺沃(Castelnuovo,G.)
卡斯泰利(Castelli,B.)
卡斯特(Karst,E.)
卡斯滕(Karsten,W. J. G.)
卡索拉蒂(Casorati,F.)
卡塔尔迪(Cataldi,P. A.)
卡塔朗(Catalan,E. C.)
卡泰纳(Catena,P.)
卡特林(Catlin,D.)
卡瓦列里(Cavalieri,(F.)B.)
卡文迪什(Carendish,R.)
卡西(al-Kāshī)
卡西尼(Cassini,J. D.)
卡约里(Cajori,F.)
开尔文(Kelvin,L.)
开普勒(Kepler,J.)
开斯勒(Keisler,H. J.)
凯恩斯(Keynes,J. M.)
凯尔文(Kelvin,W. T.)
凯克尔曼(Keckermann,B.)
凯拉吉(Al-Karaji, or al-karkhi)
凯莱(Cayley,A.)
凯勒(Keller,W.)
凯勒(Keller,J. B.)
凯勒尔(Keller,J.)
凯利(Kelly,L. M.)
凯洛夫(Кайлов,И. А.)
凯洛格(Kellogg,O. D.)
凯特勒(Quetelet,L. -A. -J.)
坎宁安(Cunningham,W.)
坎帕努斯(Campanus,(N.))
坎托罗维奇(Канторович,Л. В.)
阚泽(Kan Ze)
康德(Kant,I.)
康海姆(Konheim,A. G.)
康纳(Conner,P. E.)
康特塞维奇(Kontsevich,M.)
康托尔(Cantor,G. (F. P.))
康托尔(Cantor,G. F. L. P.)
康托尔(Cantor,M. B.)
康威(Conway,J. H.)
康熙(Kang Xi)
考尔德伦(Calderón,A. P.)
考克斯(Cox,D. R.)
考克斯(Cox,G. M.)
考克斯特(Coxeter,H. S. M.)
柯蒂斯(Curtus,E. B.)
柯尔莫哥洛夫(Колмогоров,А. Н.)
柯克曼(Kirkman,T. P.)
柯拉茨(Collatz,L.)
柯伦(Ceulen,L. van)
柯尼希(König,D.)
柯尼希(Koenig,J. S.)
柯尼希(Koenigs,G.)
柯尚迁(Ke Shangqian)
柯瓦列夫斯卡娅(Ковалевская,С. В.)
柯西(Cauchy,A. -L.)
柯召(Ke Zhao)
科贝尔(köbel,J.)
科茨(Cotes,R.)
科恩(Cohen,P. J.)
科恩(Kohn,J. J.)
科尔(Cole,F. N.)
科尔(Cole,J. D.)
科尔金(Коркин,А. Н.)
科尔尼(Cornu,M. A.)
科尔钦(Kolchin,E. R.)
科尔斯道夫(Kolsdorf)

科汉斯基(Kochansky,A. A.)
科捷利尼科夫(Котельников,А. П.)
科捷利尼科夫(Котельников,С. К.)
科克(Koch,H. von)
科克伦(Cochram,W. G.)
科克罗夫特(Cockcroft,W. H.)
科拉茨(Collatz,L.)
科利尼厄斯(Comelius de jueis)
科林伍德(Collingwood,E. F.)
科曼迪诺(Commandino,F.)
科农(Conon,(S.))
科佩尼克斯(Copernicus)
科钦(Кочин,Н. Е.)
科塞勒特(Korselt,A.)
科斯坦特(Kostant,B.)
科瓦莱夫斯基(Kowalewski,H. W. G.)
科瓦列夫斯基(Ковалевский,В. О.)
科西莫二世(Cosimo Ⅱ)
克贝(Koebe,P.)
克尔德什(Келдыш,М. В.)
克拉默(Cramér,H.)
克拉姆(Kramp,C.)
克拉索夫斯基(Красовский,Н. Н.)
克拉索夫斯基(Красовский,Ф. Н.)
克拉维乌斯(Clavius,C.)
克莱布什(Clebsch,R. F. A.)
克莱罗(Clairaut,A. -C.)
克莱姆(Cramer,G.)
克莱因(Klein,(C.)F.)
克莱因(Klein,E.)
克莱因(Kline,M.)
克莱因(Klein,L. R.)
克赖希克(Kraitchik,M. B.)
克兰达尔(Crandall,M. G.)
克兰多尔(Crandall,R. E.)
克劳斯贝格(Clausberg,C.)
克雷尔(Crelle,A. L.)
克雷福德(Crafoord,H.)
克雷洛夫(Крылов,А. Н.)
克雷洛夫(Крылов,В. Н.)
克雷莫纳(Cremona,A. L. G. G.)
克里(Curry,H.)
克里斯特(Christ,M.)
克里斯特曼(Christmann,J.)
克里斯托尔(Chrystal,G.)
克里斯托费尔(Christoffel,E. B.)
克利(Klee,V. L.)
克利奥布林(Cleobuline)
克利福德(Clifford,W. K.)
克列因(Крейн,М. Г.)
克林(Kleene,S. C.)
克鲁尔(Krull,W.)
克鲁斯卡尔(Kruskal,M. D.)
克鲁斯卡尔(Kruskal,W. H.)
克吕格尔(Klügel,G. S.)
克罗夫顿(Crofton,M. W.)
克罗夫特(Croft,H. T.)
克罗内克(Kronecker,L.)
克洛茨(Klotz,W.)
克洛斯特曼(Kloosterman,H. D.)
克那普(Knapp,A. W)
克内泽尔(Kneser,A.)
克尼格(Koenig,J.)
克努特(Knuth,D. E.)
克森诺克拉底(Xenocrates,(C.))
克斯特纳(Kaestner,A. G.)
克韦多(Quevedo,T.)
肯德尔(Kendall,M.)
肯普(Kempe,A. B.)
孔安国(Kong Anguo)
孔多塞(Condorcet,M. -J. -A. -N. -C. M. de)
孔广森(Kong Guangsen)
孔继涵(Kong Jihan)
孔涅(Connes,A.)
孔子(Kong Zi)
寇伯(Koebe)
库恩(Kuhn,H. W.)
库尔诺(Cournot,A. A.)
库克(Cook,S. A.)
库克(Cooke,R. G.)
库拉托夫斯基(Kuratowski,K.)
库朗(Courant,R.)
库利(Cooley,J. W.)
库利奇(Coolidge,J. L.)
库洛什(Курош,А. Г.)
库默尔(Kummer,E. E.)
库普曼斯(Koopmans,T. C.)
库兹明(Кузьмин,Р. О.)
夸美纽斯(Comenius,J. A.)
奎伦(Quillen,D. G.)
奎因(Quine,W. V. O.)

L

拉奥(Rao,C. R.)
拉比(Raabe,J. L.)
拉比勒(Rabuel,C.)
拉德马赫尔(Rademacher,H.)
拉东(Radon,J.)
拉多(Radó,T.)
拉多(Radó,R.)
拉法耶(La Faille,C.)
拉夫连季耶夫(Лаврентьев,М. А.)
拉盖尔(Laguerre,E. N.)
拉戈瑞阿斯(Lagarias,J. C.)
拉格朗日(Lagrange,J. -L.)
拉古芦尔(Lacroix,S. F.)
拉卡托斯(Lakatos,I.)
拉卡西奥多里(Carathéodory,C.)
拉卡伊(La Caille,N. L.)
拉克鲁瓦(Lacroix,S. F.)

拉克斯(Lax,P. D.)
拉莱斯库(Ralescu)
拉朗德(Lalande,J. J. le F. de)
拉卢韦(Lalourère,Antoine de)
拉罗什(La Roche,Estienne de)
拉马努金(Ramanujan,S. A)
拉梅(Lamé,G.)
拉米斯(Ramus,P.)
拉姆(Lamb,J. F.)
拉姆齐(Ramsey,F. P.)
拉姆丘德拉(Ramchu-ndra)
拉普拉斯(Laplace,P. -S.)
拉塞克(Lassak,M.)
拉思本(Rathbun,R. L.)
拉斯(Rasch,G.)
拉斯克尔(Lasker,E.)
拉特纳(Ratner,M.)
拉万纳(Lavanha,J. B.)
拉伊尔(La Hire,P. de)
拉兹波洛夫(Razborov,A. A.)
拉兹科维奇(Loczkovich,M.)
莱昂斯(Lions,J. -L.)
莱布尼茨(Leibniz,G. W.)
莱恩斯特拉(Lenstra,A.)
莱夫谢茨(Lefschetz,S.)
莱克西斯(Lexis,W.)
莱曼(Lehmann,E. L)
莱曼(Lehman,H.)
莱默(Lehmer,D. H.)
莱默斯(Lemhus,C. L.)
莱特希尔(Lighthill,M. J.)
莱维(Lévy,P. P.)
莱维本热尔松(Levi ben Gerson)
莱温松(Levinson,N.)
莱文(Levin,V. I.)
莱文松(Levinson,M. L.)
莱辛(Lessing,G. E.)
莱因德(Rhind,A. H.)
莱因霍尔德(Reinhold,E.)
赖德迈斯特(Reidemeister,K. W. F.)
赖瑟(Reise,A.)
赖瑟(Ryser)
赖斯纳(Reissner,E.)
赖特(Wright,E.)
赖特(Wright,F. B.)
赖兴巴赫(Reichenbach,H.)
兰(Lang,S.)
兰伯特(Lambert,J. H.)
兰茨贝格(Landsberg,G.)
兰道(Landau,E. G. H.)
兰德(Lander,L. J.)
兰登(Landen,J.)
兰狄斯(Landis,E. M.)
兰福德(Langford,C. H.)
兰戈玛(Rangamma,M.)
兰格(Langer,R. M.)
兰格文(Langvin)
兰纪玉(Lan Jiyu)
兰金(Rankin,R. A.)
兰斯贝尔热(Lansberge,P. V.)
郎世宁(Castiglione,J.)
朗伯(Lambert,J. H.)
朗克雷(Lancret,M. A.)
朗兰兹(Langlands,R.)
劳乃宣(Lao Naixuan)
劳森(Lawson,H. B.)
老子(Lao Zi)
勒贝格(Lebesgue,H. L.)
勒俄(Leo or Leon)
勒俄达马斯(Leodamas,(T.))
勒尔(Lull,R.)
勒夫纳(Loewner,C.)
勒雷(Leray,J.)
勒雷雄(Leurechon,J.)
勒让德(Legendre,A. -M.)
勒唐纳(Le Tenneur,J. -A.)
勒威耶(Le Verrier,U. J. J.)
雷-乔得赫里(Ray-Chaudhuri,D. K.)
雷奥米尔(Réaumur,R. A. F. de)
雷布金(Рыбкин,Г. Ф.)
雷蒂库斯(Rhaeticus,G. J.)
雷恩(Rahn,J. H.)
雷恩(Wren,C.)
雷格蒙塔努斯(Regiomontanus,J.)
雷吉(Regge,Tullio)
雷吉阿斯(Hudalricus,R.)
雷科德(Recorde,R.)
雷纳德(Raynaud,M.)
雷尼(Renyi,A.)
雷特威斯纳(Reitwiesner)
雷因哈特(Reinhardt)
雷垣(Lei Yuan)
雷兹波罗夫(Razborov)
黎卡提(Riccati,J. F.)
黎曼(Riemann,(G. F.)B.)
黎应南(Li Yingnan)
李(Lie,M. S.)
李安卿(Li Anqing)
李邦河(Li Banghe)
李秉彝(Li Bingyi)
李炳仁(Li Bingren)
李伯天(Li Botian)
李长茂(Li Changmao)
李成章(Li Chengzhang)
李淳风(Li Chunfeng)
李从珠(Li Congzhu)
李大潜(Li Daqian)
李德元(Li Deyuan)
李迪(Li Di)
李笃培(Li Nupai)

李凤翎(Li Fengling)
李光地(Li Guangdi)
李国平(Li Guoping)
李鸿章(Li Hongzhang)
李华宗(Li Huazong)
李潢(Li Huang)
李吉宝(Li Jibao)
李籍(Li Ji)
李建才(Li Jiancai)
李诚(Li Jie)
李克修(Li Kexiu)
李隆基(Li Longji)
李普希茨(Lipschitz,R. (O. S.))
李其汾(Li Qifen)
李求来(Li Qiulai)
李荣华(Li Ronghua)
李锐(Li Rui)
李锐夫(Li Ruifu)
李善兰(Li Shanlan)
李绍谷(Li Shaogu)
李盛铎(Li Shengduo)
李松鹰(Li Songying)
李特尔伍德(Littewood,J. E.)
李天经(Li Tianjing)
李天岩(Li Tianyan)
李铁映(Li Tieying)
李维铮(Li Weizheng)
李文林(Li Wenlin)
李文煦(Li Wenxu)
李新(Li Xin)
李修睦(Li Xiumu)
李亚普诺夫(Ляпунов,A. M.)
李俨(Li Yan)
李冶(Li Ye)
李翼忠(Li Yizhong)
李因培(Li Yinpei)
李荫藩(Li Yinfan)
李虞庚(Li Yugeng)
李约瑟(Joseth,N.)
李兆洛(Li Zhaoluo)
李兆钰(Li Zhaoyu)
李珍焕(Li Zhenhuan)
李正银(Li Zhengyin)
李正元(Li Zhengyuan)
李之藻(Li Zhizao)
李忠(Li Zhong)
李子金(Li Zijin)
李宗铎(Li Zongduo)
里贝(Ribet,K)
里博库尔(Ribaucour,A.)
里卡蒂(Riccati,J. F.)
里卡蒂(Riccati,V.)
里奇(Ricci-Curbastro,G.)
里斯(Rees,D.)
里斯(Riesz,F. (F.))
里斯(Riesz,F.)
里斯(Riesz,M.)
里斯(Ries,A.)
里斯基(Goresky,M.)
里斯内(Risner,F.)
里特(Ritt,J. F.)
里希特迈耶(Richtmyer,R. D.)
里夏尔(Richard,L. P. É.)
里夏尔(Richard,J. A.)
里歇洛(Richelot,F. J.)
理查德(Richard)
利奥(Leo the Mathematician)
利布(Lieb,E. H.)
利茨曼(Lietzman,W.)
利赫滕斯坦(Lichtenstein Leon)
利玛窦(Ricci,M.)
利普希茨(Lipschitz,R. O. S.)
利什内罗维奇(Lichnérowicz,A.)
利斯廷(Listing,J. B.)
利特罗夫(Littrov,J. J. Von)
利温斯(Leavens,G. T.)
利温斯(Lieuwens,E.)
利翁(Lions,P. -L.)
梁芳(Liang Fang)
梁令瓒(Liang Lingzan)
梁世祖(Liang Shizu)
梁述(Liang Shu)
梁友樑(Liang Youliang)
梁肇军(Liang Zhaojun)
廖先庚(Liao Xiangeng)
廖山涛(Liao Shantao)
列别杰夫(Леоедев,H. A.)
列别杰夫(Лебедев,C. A.)
列宁(Lenin,V. I.)
列维(Levi,E. E.)
列维(Levy,S.)
列维-布留尔(Levy-Bruhl,L.)
列维-齐维塔(Levi-Civita,T.)
林长寿(Lin Changshou)
林德伯格(Lindeberg,Y. W.)
林德勒夫(Lindelöf,E. L.)
林德曼(Lindemann,(C. L.)F. von)
林福特(Linfoot)
林敢为(Lin Ganwei)
林鹤一(Hayashi,T,)
林家翘(Lin Chia-Chiao)
林节玄(Lam,Tsit-yuen)
林金榕(Lin Jinrong)
林尼克(Линник,Ю. В.)
林群(Lin Qun)
林少宫(Lin Shaogong)
林士谔(Lin Shie)
林夏水(Lin Xiashui)
林章衍(Lin Zhangyan)
林振声(Lin Zhensheng)

临川(Lin Chuan)
灵帝(Ling Di)
凌康源(Ling Kangyuan)
刘豹(Liu Bao)
刘备(Liu Bei)
刘表(Liu Biao)
刘秉忠(Liu Bingzhong)
刘春根(Liu Chungen)
刘焯(Liu Zhuo)
刘大鉴(Liu Dajian)
刘鼎元(Liu Dingyuan)
刘铎(Liu Duo)
刘和玉(Liu Heyu)
刘衡(Liu Heng)
刘洪(Liu Hong)
刘鸿坤(Liu Hongkun)
刘怀俊(Liu Huaijun)
刘徽(Liu Hui)
刘金门(Liu Jinmen)
刘谨(Liu Jin)
刘开达(Liu Kaida)
刘克峰(Liu Kefeng)
刘克锋(Liu Kefeng)
刘庆玮(Liu Qingwei)
刘瑢(Liu Rong)
刘汝锴(Liu Rukai)
刘绍宽(Liu Shaokuan)
刘绍学(Liu Shaoxue)
刘世泽(Liu Shize)
刘仕隆(Liu Shilong)
刘寿根(Liu Shougen)
刘瘦侠(Liu Shouxia)
刘书琴(Liu Shuqin)
刘婉如(Liu Wanru)
刘旺金(Liu Wangjin)
刘维尔(Liourille,J.)
刘先仿(Liu Xianfang)
刘献之(Liu Xianzhi)
刘向(Liu Xiang)
刘孝孙(Liu Xiaosun)
刘歆(Liu Xin)
刘炫(Liu Xuan)
刘亚星(Liu Yaxing)
刘晏(Liu Yan)
刘彝程(Liu Yicheng)
刘亦珩(Liu Yiheng)
刘易斯(Lêwis,C. I.)
刘益(Liu Yi)
刘裔宏(Liu Yihong)
刘因(Liu Yin)
刘应明(Liu Yingming)
刘永龄(Liu Yongling)
刘泽庆(Liu Zeqing)
刘正经(Liu Zhengjing)
刘智海(Liu Zhihai)
刘烨(Liu Yong)
刘祐(Liu You)
留基伯(Leuci-ppus)
柳斌(Liu Bin)
柳斯捷尔尼克(Люстерник,Л. А.)
龙格(Runge,C. D. T.)
龙华民(Longobdrdī,N.)
龙受益(Long Shouyi)
龙以明(Long Yiming)
楼世拓(Lou Shituo)
卢贝尔(De la Loubére)
卢津(Лузин,Н. Н.)
卢卡(Luca,F.)
卢米斯(Loomis,E.)
卢树铭(Lu Shuming)
卢梭(Rousseau,J. J.)
卢文绍(Lu Wenshao)
卢西恩(Lucian)
卢伊(Lewy,H.)
卢因(Lewin,M.)
鲁比(Ruby,R.)
鲁宾(Rubin,K.)
鲁宾孙(Robinson,A.)
鲁宾孙(Robinson,H. N.)
鲁宾孙(Robinson,J. B.)
鲁滨(Rrbin,K.)
鲁道夫二世(Rudol ph Ⅱ)
鲁丁(Rudin,W.)
鲁多尔夫(Rudolff,C.)
鲁菲尼(Ruffini,P.)
鲁胜(Lu Shen)
陆洪文(Lu Hongwen)
陆绩(Lu Ji)
陆家羲(Lu Jiaxi)
陆企韶(Lu Qishao)
陆启铿(Lu Qikeng)
陆庆乐(Lu Qile)
陆润林(lu runlin)
陆首群(Lu Shouqun)
陆文端(Lu Wenduan)
陆禹澄(Lu Yucheng)
陆志勤(Lu Zhiqin)
陆钟万(Lu Zhongwan)
路见可(Lu Jianke)
路易十八(Louis XVIII)
路易十六(Louis XVI)
路易斯十四(Louis XIV)
吕后(Lu Hou)
吕卡(Lucas,F.-É.-A.)
吕克(Luecke,J.)
吕利埃(L'Huillier,S.-A.-J.)
伦德(Lund,T.)
伦奇(Wrench,J. W. Jr)
罗巴切夫斯基(Лобачевский,Н. И.)
罗贝瓦尔(Roberval,G. P. de)

罗必塔(L'Hospital,G. F.)
罗波阳(Luo Boyang)
罗伯茨(Roberts,J. B.)
罗伯特(Robert,(C.))
罗德塞斯(Rödseth,Ö)
罗尔(Rolle,M.)
罗尔巴克(Rohrbach,H.)
罗赫(Roch,G.)
罗赫林(Rokhlin)
罗杰斯(Rogers,C. A.)
罗曼斯(Romans)
罗门(Roomen,A. van)
罗蒙诺索夫(Lomonsov,V. I.)
罗佩珠(Luo Peizhu)
罗森菲尔德(Розенфельд,Б. А.)
罗士琳(Luo Shilin)
罗思(Roth,L.)
罗斯(Roth,K. F.)
罗素(Russell,B. A. W.)
罗塔(Rota,G. -C.)
罗特(Roth,K. F.)
罗特(Rothe,P.)
罗王宾(Luo Wangbin)
罗显钰(Luo Xianyu)
罗雅谷(Rho,J.)
洛必达(L'Hospital,G. -F. -A. de)
洛克(Locke,J.)
洛朗(Laurent,P. A.)
洛里亚(Loria,G.)
洛伦茨(Lorentz,H. A.)
洛伦茨(Lorenz,E. N.)
洛姆尼斯基(Lomnicki,A.)
洛奇(Lorch,E. R.)
洛斯-阿拉莫斯(Los Alamos)
洛特卡(Lotka,A. J.)
洛瓦兹(Lovasz,L.)
骆滕凤(Luo Tengfeng)

M

马蒂厄(Mathieu,É. L.)
马蒂塞维奇(Malijasevic,J. V.)
马丁(Martin,W. T.)
马尔采夫(Мальцев,А. И.)
马尔法蒂(Malfatti,G. F.)
马尔科姆(Malcolm,M. A.)
马尔可夫(Марков,А. А.)
马尔库利斯(Маргулис,Г. А.)
马尔库舍维奇(Маркушевич,А. И.)
马尔齐(Marci of Kronland,J. M.)
马格尼茨基(Магницкий,Л. Ф.)
马格努斯(Magnus,W.)
马哈拉诺比斯(Mahalanobis,P. C.)
马哈维拉(Mahāvira)
马吉尼(Magini,G. A.)
马季亚谢维奇(Matijacevic,Y.)
马季亚谢维奇(Матиясевич,Ю. В.)
马杰(Ma Jie)
马克杰(Ma Kejie)
马克劳林(Maclaurin,C.)
马克思(Marx,K.)
马克斯韦尔(Maxwell,J. C.)
马库雷朗(Mccleran,J. A.)
马拉尔迪(Maraldi,G. F.)
马勒(Mahler,K.)
马利纳斯(Marinus,(T))
马尼(Mañé,R.)
马宁(Manin,Y. I.)
马宁(Манин,Ю. И.)
马钦凯维奇(Marcinkiewicz,J.)
马融(Ma rong)
马塞(Masai,P.)
马斯登(Marsden,J. E.)
马斯凯罗尼(Mascheroni,L.)
马斯洛夫(Maslov,V. P.)
马斯特林(Mastlin or Möstlin,M.)
马希文(Ma Xiwen)
马显(Ma Xian)
马续(Ma Xu)
马知恩(Ma Zhien)
马志明(Ma Zhiming)
马忠林(Ma Zhonglin)
马祖尔(Mazur,B.)
马祖尔克维奇(Mazurkiewicz,S.)
玛金尼(Magini,G. A.)
玛丽(Henriethe Marie)
迈尔(Mayer,F. C.)
迈尔(Meyer,W. F.)
迈塞尔(Meissel,E. D. F.)
迈耶(Meyer,Y.)
迈耶(Meyer,P. A.)
麦基(Mackey,G. W.)
麦金托什(McIntosh,R.)
麦卡锡(McCarthy,J.)
麦科尔(Mc Coll,H.)
麦克安德鲁(McAndrew,M. H.)
麦克达夫(Mcduff,Dusa)
麦克弗森(Mac-Pherson,R. D.)
麦克莱恩(Maclane,S.)
麦克米伦(Macmillan,W. D.)
麦克缪伦(McMullen,C. T.)
麦克尼马尔(McNemar)
麦克沙恩(McShane,E. J.)
麦克斯韦(Maxwell,J. C.)
曼德尔勃罗伊(Mandelbrojt,S.)
曼德尔德罗特(Mandeldrot,B.)
曼格尔特(von Mangoldt,H.)
曼诺(Beke Mano)
曼特尔布罗特(Mandelbrot,B. B.)
芒福德(Mumford,D. B.)
毛苌(Mao Chang)

毛亨(Mao Heng)
毛宏德(Mao Hongde)
毛晋(Mao Jin)
毛利重能(Maoli Zhongnen)
毛罗利科(Maurolico,F.)
毛乾乾(Mao Qianqian)
毛永生(Mao Yongsheng)
毛振璇(Mao Zhenxuan)
毛宗旦(Mao Zongdan)
梅蒂斯(Metius,A.A.)
梅尔(Maier,H.)
梅珏成(Mei Juecheng)
梅卡托(Mercator,N.)
梅雷(Meray,H.C.R.)
梅内克缪斯(Menaechmus)
梅钦(Machin,J.)
梅森(Mersenne,M.)
梅士昌(Mei Shichang)
梅文鼎(Mei Wending)
梅文鼏(Mei Wenmi)
梅文鼐(Mei Wennai)
梅向明(Mei Xiangming)
梅以燕(Mei Yiyan)
梅因茨(Mainz)
梅玕成(Mei Gancheng)
门杰(Menger,K.)
门克(Mencke,O.)
门纳劳斯(Menelaus,(A))
门奈赫莫斯(Menaechmus)
门思(Me-nesse,M.)
蒙蒂克拉(Montucla,J.É.)
蒙哥马利(Montgomery,D.)
蒙莫尔(Montmort,P.R.de)
蒙日(Monge,G.)
蒙泰尔(Montel,P.A.)
蒙特(Monte,G.M.del)
孟子(Meng Zi)
弥永昌吉(Iyanaga Shōkichi)
米多尔热(Mydorge,C.)
米尔纳(Milner,R.)
米尔诺(Milnor,J.W.)
米尔诺(Смирнов,В.И.)
米库辛斯基(Mikusinski,J.)
米里马诺夫(Mirimanov,D.)
米里曼诺夫(Mirimanoff,D.)
米林(Милин,И.М.)
米塔-列夫勒(Mittag-Leffler,(M.)G.)
米田信夫(Yoneda,N.)
米泽斯(Mises,R.M.E.Von)
米泽斯(Mises,R.von)
密尔(Mill,J.S.)
闵科夫斯基(Minkowski,H.)
闵嗣鹤(Min Sihe)
明安图(Ming Antu)
明蒂(Minty,G.J.)
明新(Ming Xin)
缪勒(Müller,J.)
摩根斯腾(Maorgenstern,O.)
莫茨金(Motzkin,T.)
莫德尔(Mordell,L.J.)
莫尔(Mohr,G.)
莫尔斯(Morse,H.M.)
莫尔斯(Morse,P.M.)
莫尔韦德(Mollweide,K.B.)
莫利(Morley,F.)
莫利(Morrey,C.B.)
莫若(Mo Ruo)
莫塞切(Mossige,S.)
莫绍揆(Mo Shaokui)
莫斯特勒(Mosteller,F.)
莫斯托(Mostow,G.D.)
莫斯托夫斯基(Mostowski,A.)
莫伊舍佐恩(Moishazon,B.G.)
莫伊西(Moisy,P.)
莫伊西尔(Moisil,G.C.)
莫毅明(Mo Yiming)
莫泽(Moser,J.K.)
莫泽(Moser,L.)
莫泽(Moser,W.O.)
莫泽契(Mozzochi,C.J.)
墨卡托(Mercator,G. or Gerhard,K.)
墨索里尼(Benitomussolini,B.)
墨翟(Mo Di)
默比乌斯(Möbius,A.F.)
默里(Murray,F.J.)
默里(Murray,J.D.)
默纳汉(Murnaghan,F.D.)
牟庭(Mu Ting)
姆罗斯(Mrose,A.)
穆迪(Moody,R.)
穆东(Mouton,G.)
穆尔(Moore,E.H.)
穆尔(Moore,G.H.)
穆罕默德(Muhammad)
穆尼阁(Smogolenski,J.-N.)
穆萨(Mūsā)
穆斯赫利什维利(Мусхелишвили,Н.И.)

N

拿破仑(Naploeon,B.)
纳尔逊(Nelson,H.L.)
纳尔逊(Nelson,E.)
纳吉(Nagy)
纳皮尔(Napier,J.)
纳什(Nash,J.F.)
纳维(Navier,C.(-L.-M.-H.))
纳西尔丁(Nasir ad-Din)
纳西尔丁·图西(Nasīr al-Din, al-Tūsī)
奈奎斯特(Nyquist,H.)
奈玛克(Наймарк,М.А.)

奈曼(Neyman,J.)
奈斯利(Nicely,T.R.)
奈望林纳(Nevanlinna,R.)
南宫说(Nan Gongshuo)
南云道夫(Nanyun Daofu)
内安德尔(Neander,M.)
内格尔(Nagell,T.)
内勒(Naylor,V.D.)
内曼(Neymen,J.)
内莫拉里乌斯(Nemorarius,J.S.)
内斯比特(Nesbitt,A.M.)
内托(Netto,E.)
尼尔(Neile,W.)
尼尔森(Nielsen,L.)
尼古拉第二・伯努利(Bernoulli,Nicolaus Ⅱ)
尼古拉第三・伯努利(Bernoulli,Nicolaus Ⅲ)
尼古拉第一・伯努利(Bernoulli,Nicolaus Ⅰ)
尼古拉斯(Nicholas,(C))
尼基金(Нцкцтцн,Н.Н.)
尼科尔(Nicole,F.)
尼科利斯基(Никольский,С.М.)
尼科马霍斯(Nicomachus,(G))
尼科米迪斯(Nicomedes)
尼可(Nicol,C.A.)
尼拉坎塔(Nilakantha)
尼伦伯格(Nirenberg,L.)
尼普萨斯(Nipsus,J.)
倪正(Ni Zheng)
年希尧(Nian Xiyao)
聂铁军(Nie Tiejun)
涅梅茨基(Немъшкии.В.В.)
牛顿(Newton,I.)
纽厄尔(Newell,A.)
纽科姆(Newcomb,S.)
纽兰德(Newlander,L.)
纽曼(Newman,M.H.A.)
纽文泰特(Nieuwentijt,B.)
努迪克(Nordic)
努涅斯(Nunes,P.)
诺贝尔(Nobel,A.B.)
诺里(Norrie,R.)
诺特(Noether,(A.)E.)
诺特(Noether,E.)
诺特(Noether,M)
诺瓦克(Nowak,W.G.)
诺维科夫(Новиков,П.С.)
诺维科夫(Новиков,С.П.)
诺沃赛德(Nowosad,P.)
诺伍德(Norwood,R.)
诺伊格鲍尔(Neugebauer,O.)
诺伊曼(Neumann,C.G.)

O

欧德莫斯(Eudemus,(R))
欧多克索斯(Eudoxus,(C))
欧几里得(Euclid)
欧拉(Euler,L.)
欧姆(Ohm,M.)
欧姆(Ohm,G.S.)
欧托基奥斯(Eutocius,(A))
欧文(Irving,R.W.)
欧阳系(Ou Yangsi)
欧阳琦(Ou Yangqi)

P

帕金(Parkin,T.R.)
帕克(Park,S.)
帕克(Parker,E.T.)
帕拉玛(Palama,G.)
帕朗(Parent,A.)
帕里斯(Paris,J.)
帕利斯(Palis,J.)
帕普斯(Pappus,(A))
帕乔利(Pacioli,L.)
帕施(Pasch,M.)
帕斯卡(Pascal,B.)
帕斯卡(Pascal,É.)
帕特里齐(Patrizi,F.)
帕特里索斯(Patricius)
帕辛(Parshin,A.N.)
潘承彪(Pan Chengbiao)
潘承洞(Pan Chengdong)
潘纯(Pan Chun)
潘鼎坤(Pan Dingkun)
潘杰(Pan Jie)
潘慎文(Parker,A.P.)
庞加莱(Poincaré,(J.-)H.)
庞金泽(Pang Jinze)
庞斯列(Poncelet,J.-V.)
庞特里亚金(Понтрягин,Л.С.)
庞宗昱(Pang Zongyu)
培根(Bacon,F.)
培根(Bacon,R.)
佩德森(Pederson,R.N.)
佩蒂(Petty,W.)
佩多(Pedoe,D.)
佩恩(Payrie,L.F.)
佩尔(Pell,J.)
佩尔蒂埃(Peletier,J.)
佩克(Peck,J.E.L.)
佩克利斯(Pekeris,C.L.)
佩里(Perry,J.)
佩利(Paley,R.E.A.C.)
佩龙(Perron,O.)
佩罗斯(Pellos)
佩特森(Petersen,J.)
佩亚诺(Peano,G.)
彭莱(Bonnet,O.)
彭立中(Peng Lizhong)
彭罗斯(Penrose,R.)

彭赛列(Poncelet,J.-V.)
彭运森(Peng Yunsen)
皮蒂斯楚斯(Pitiscus,B.)
皮尔斯(Peirce,B.)
皮尔斯(Peirce,C. S.)
皮尔斯(Peirce,B. O.)
皮尔逊(Pearson,K.)
皮尔逊(Pearson,E. S.)
皮卡(Picard,(C.-)É.)
皮科克(Peacock,G.)
皮里兰佩(Pyrilamps)
皮特曼(Pitman,E. J. G.)
皮乌斯五世(Pope Pius Ⅴ)
皮亚杰(Piaget,J.)
皮亚捷茨基-沙皮罗(Piatetski-Shapiro,I.)
皮亚齐(Piazzi,G.)
皮亚特斯基-夏泼尔洛(Piatetski-Shapiro,I.)
皮延宗(Pi Yanzong)
平凯莱(Pincherle,S.)
平奇(Pinch,R.)
婆罗摩笈多(Brahmagupta)
婆什迦罗(Bhāskara)
婆什迦罗第二(Bhāskara Ⅱ)
珀蒂(Petit,P.)
珀尔修斯(Perseus)
珀西瓦尔(Percival,I. C.)
蒲保明(Pu Baoming)
蒲富金(Pu Fujin)
普法夫(Pfaff,J. F.)
普拉萨德(Prasad,S. R.)
普拉托(Plateau,J. A. F.)
普拉托(Plato,(T.))
普莱费尔(Playfair,J.)
普莱纽迪斯(Planudes,M.)
普朗特(Prandtl,L.)
普朗谢雷尔(Plancherel,M.)
普劳德曼(Proudman,J.)
普勒梅利(Plemel,J.)
普雷托里乌斯(Praetorius,J.)
普里瓦洛夫(Привалов,И. И.)
普林尼(Pliny)
普林斯海姆(Pringsheim,A.)
普吕克(Plücker,J.)
普罗霍罗夫(Прохоров,Ю. В.)
普罗塔哥拉斯(Protagoras)
普罗克洛斯(Proclus)
普特南(Putnam,H.)

Q

齐桓公(Qi Huangong)
齐曼(Zeeman,E. C.)
齐平(Zippin,L.)
齐永魁(Qi Yongkui)
恰普雷金(Чаплыгин,С. А.)
钱宝琮(Qian Baocong)
钱大昕(Qian Daxin)
钱敏(Qian Min)
钱谦益(Qian Qianyi)
钱伟长(Qian Weichang)
钱学森(Qian Xuesen)
乾隆(Qian Long)
浅野启三(Qianye Qisan)
强(Chang,C. L.)
乔吉(Giorgi,E. de)
乔姆斯基(Chomsky,N.)
乔瓦(Cholwa,S.)
乔治·图兰(Turan,G.)
切比雪夫(Чебыщев,П. Л.)
切博塔廖夫(Чеботарёв,Н. Г.)
切恩(Cheyne,G.)
切赫(Čech,E.)
切萨里(Cesari,L.)
切萨罗(Cesàro,E.)
切瓦(Ceva,G.)
秦汾(Qin Fen)
秦化淑(Qin Huashu)
秦九韶(Qin Jiushao)
秦始皇(Qin Shihuang)
秦元勋(Qin Yuanxun)
秦沅(Qin Yuan)
琼斯(Jones,M. F.)
琼斯(Jones,P.)
琼斯(Jones,V. F. R.)
琼斯(Jones,W.)
琼斯(Jones,D. S.)
丘成桐(Qiu Chengtong)
丘普罗夫(Chuprov (Tschuprow),A. A.)
丘奇(Church,A.)
邱兆璋(Qiu Zhaozhang)
裘宗沪(Qiu Zonghu)
仇鸾(Qiu Luan)
仇庆九(Qiu Qingjiu)
屈尔沙克(Kürschák,J.)
瞿昙悉达(Qutan Xida)

R

热尔贝(Gerbert)
热尔岗(Gergonne,J.-D.)
热尔曼(Germain,S.)
任弘济(Ren Hongji)
任宏硕(Ren Hongshuo)
任南衡(Ren Nanheng)
荣方(Rong Fang)
容吉乌斯(Jungius,J.)
茹科夫斯基(Жуковский,Н. Е.)
儒略·恺撒(Caesar,G. J.)
阮元(Ruan Yuan)
瑞尼(Renyi,A.)
若尔当(Jordan,M. E. C.)

S

萨博(Szabo,A.)
萨博(Szabo,Z. I.)
萨顿(Sarton,G.)
萨凯里(Saccheri,G.)
萨克斯(Saks,S.)
萨拉明(Salamin,E.)
萨廖(Sario,L. R.)
萨鲁斯(Sarrus,P. F.)
萨马尔斯基(Самарский,A. A.)
萨普利斯(Suppes,P.)
萨斯曼(Sussmann,H. J.)
萨维尔(Savile,H.)
萨维奇(Savage,L. J.)
萨沃依(Saroy)
塞尔(Serre,J. P.)
塞尔默(Selmer,E. S.)
塞格(Szegö,G.)
塞格雷(Segre,C.)
塞克尔斯(Szekeres,G.)
塞雷(Serret,J. A.)
塞曼(Zeeman)
塞维里(Severi,F.)
塞乌滕(Zeuthen,H. G.)
赛奥法拉斯托斯(Theophrastus)
赛奥梅顿(Theomedon)
赛恩(Sen,A.)
赛尔伯格(Selberg,A.)
赛尔伯格(Selberg,H.)
赛尔弗里奇(Selfridge,J. L.)
赛奈(Sinai,Y. G.)
赛翁(Theon,(S))
赛翁(Theon,(A))
三好和宽(Sanhao Hekuan)
三上义夫(Sanshang Yifu)
桑代克(Thorndike,E. L.)
桑道(Sondow,J.)
桑弘羊(Sang Hongyang)
桑索内(Sansone,G.)
瑟凯福尔维-纳吉(Szökofalvi-Nagy,B.)
瑟米斯蒂厄斯(Themistius)
瑟斯顿(Thurston,W. P.)
森外三郎(Senwai Sanlang)
森重文(Mori,S.)
沙法列维奇(Шафаревич,И. Р.)
沙克什(Sha Keshi)
沙勒(Chasles,M.)
沙利文(Sullivan,D. P.)
沙普利(Shapley,L. S.)
沙图诺夫斯基(Шатуновский,С. И.)
山道英彦(Shandao Yingyan)
山路主住(Yamaji,Nushizumi)
山内恭彦(Shannei Gongyan)
单墫(Shan Zen)
善无畏(Shan Wuwei)
商高(Shang Gao)
尚汉冀(Shang Hanji)
尚克斯(Shanks,D.)
尚克斯(Shanks,W.)
尚毅(Shang Yi)
绍德尔(Schauder,J. P.)
绍伊贝尔(Scheubel,J.)
舍恩(Schoen,R.)
舍恩菲尔德(Schoenfeld,A. H.)
舍恩菲利斯(Schoenflies,A.)
舍费尔斯(Scheffers,G.)
舍内(Schöne,R.)
舍文(Sherwin,H.)
沈百英(Shen Baiying)
沈光宇(Shen Guangyu)
沈康身(Shen Kangshen)
沈括(Shen Kuo)
沈立(Shen Li)
沈钦裴(Shen Qinpei)
沈淑芳(Shen Shufang)
沈晓初(Shen Xiaochu)
沈信耀(Shen Xinyao)
沈祖和(Shen Zuhe)
圣樊尚(Saint Vincent,G.)
施波拉(Cipolla,M.)
施蒂费尔(Stifel,M.)
施珏(Shi Jue)
施赖埃尔(Schreier,O.)
施勒夫利(Schläfli,L.)
施勒米尔希(Schlömilch,O.)
施勒特尔(Schroeter,H. E.)
施勒辛格尔(Schlesinger,L.)
施里德哈勒(Śrīdhara)
施罗德(Schröder,F. W. K. E.)
施梅特雷尔(Schmertterer,L.)
施米特(Шмидт,О. Ю.)
施密特(Schmidt,E.)
施密特(Schmidt,W. M.)
施奈德(Schneider,T.)
施尼雷尔曼(Шнирельман,Л. Г.)
施派泽尔(Speiser,A.)
施佩纳(Sperner,E.)
施泰纳(Steiner,J.)
施泰尼茨(Steinitz,E.)
施泰文(Stevīn,S.)
施坦(Stein,E. M.)
施坦伯格(Steinberg,R.)
施坦豪斯(Steinhaus,E.)
施坦豪斯(Steinhaus,H.)
施坦因豪斯(Steinhaus,H. D.)
施特涅耳(Steiner,J.)
施图迪(Study,E.)
施图姆(Sturm,F. O. R.)
施图姆(Sturm,J. C.)

施托尔茨(Stolz,O.)
施瓦茨席尔德(Schwarzschild,K.)
施瓦尔茨(Schwartz,J. T.)
施瓦尔茨(Schwartz,L.)
施瓦兹(Schwarz,H. A.)
施威茨(Thwaites,B.)
施文泰尔(Schwenter,D.)
石根华(Shi Genhua)
石青云(Shi Qingyun)
石生民(Shi Shengmin)
石信道(Shi Xindao)
石钟慈(Shi Zhongci)
时铭(Shi Ming)
时曰淳(Shi Yuechun)
史密斯(Smith,A.)
史密斯(Smith,D. E.)
史密斯(Smith,H. J. S.)
史密斯(Smith,L. B.)
史松龄(Shi Songling)
释迦牟尼(Shijia Mouni)
士杰(Shi Jie)
舒伯特(Schubert,H. C. H.)
舒尔(Schur,I.)
舒尔(Schur,F. H.)
舒天民(Shu Tianmin)
庶克平(Zhe Keping)
司马迁(Si Maqian)
斯彼德尔(Speidell,J.)
斯宾诺莎(Spinoza,B.)
斯宾塞(Spencer,H.)
斯波拉斯(Sporus,(N))
斯蒂尔(Steele,L. P.)
斯蒂尔杰斯(Stieltjes, T. (J.))
斯蒂费尔(Stifel,M.)
斯蒂文(Stevin,S)
斯蒂文斯(Stevens,R. S.)
斯尔韦尔曼(Silverman,J. H.)
斯霍滕(Schooten,F. van)
斯捷克洛夫(Стеклов,В. А.)
斯捷潘诺夫(Степанов,В. В.)
斯金纳(Skinner,B. F.)
斯卡夫(Scarf,H. E.)
斯科伦(Skolem,A. T.)
斯科特(Scott,D. S.)
斯拉弗莱(Schlafly,A.)
斯劳特(Slaught,H. E.)
斯里克汉德(Shrikhande,S. S.)
斯梅尔(Smale,S.)
斯梅坦尼亚柯(Smetaniuk,B.)
斯米尔诺夫(Смирнов,Н. В.)
斯米尔诺夫(Смирнов,В. И.)
斯内德克(Smedecor,G. W.)
斯内尔(Snel,W.)
斯内尔(Snell,J. L.)
斯尼亚代茨基(Sniadecki,J. B.)
斯潘塞(Spencer,D. C.)
斯彭士(Spence,G.)
斯皮瓦克(Spivak,M.)
斯皮尤西波斯(Speusippus)
斯塔尔克(Stark,H. M.)
斯坦(Steim,C.)
斯坦(Stein,K.)
斯特凡(Stefan,J.)
斯特兰诺柳布斯基(Страннолюбоский,А. Н.)
斯特劳斯(Straus,E. G.)
斯特林(Stirling,J.)
斯特林厄姆(Stringham,I.)
斯特鲁克(Stroock,D. W.)
斯特罗伊克(Struik,D. J.)
斯特伍尔(Stroor,D.)
斯廷罗德(Steenrod,N. E.)
斯通(Stone,M. H.)
斯图尔特(Stewart,B. M.)
斯图姆(Sturm,C. -F.)
斯托尔(Stöhr,A.)
斯托尔(Stoll,P.)
斯托克(Stoker,J. J.)
斯托克斯(Stokes,G. G.)
斯托利亚尔(Столяр,А. А.)
斯托林(Stallings,J. R.)
斯托伊洛夫(Stoilow,S. G.)
松永良弼(Matsunaga,Y.)
宋斌恒(Song Binheng)
宋健(Song Jian)
宋景昌(Song Jingchang)
宋泉之(Song Quanzhi)
宋行古(Song Xinggu)
宋延美(Song Yanmei)
宋周琮(Song Zhoucong)
苏步青(Su Bu—chin)
苏淳(Su Chun)
苏绰(Su Chuo)
苏丹(Su Dan)
苏格拉底(Socrates)
苏化明(Su Huaming)
苏斯林(Суслин,М. Я.)
苏颂(Su Song)
苏煜城(Su Yucheng)
苏朱基(Suzuki,M.)
孙长鸣(Sun Changming)
孙光远(Sun Guangyuan)
孙皓(Sun Hao)
孙和生(Sun Hesheng)
孙家永(Sun Jiayong)
孙理察(Sun Licha)
孙琦(Sun Qi)
孙文昌(Sun Wenchang)
孙文先(Sun Wenxian)
孙休(Sun Xiu)
孙元化(Sun Yuanhua)

孙泽瀛(Sun Zeying)
孙子(Sun Zi)
所罗门(Solomon,H.)
索伯列夫(Соболев,С. Л.)
索兰(Saurin,L.)
索伦(Solon)
索莫夫(Сомнин,С. Я.)
索莫夫(Сомов,О. И.)
索宁(Сонин,Н. Я.)
索西琴尼(Sosigenes)

T

塔比伊本库拉(Thābit ibn Qurra)
塔顿(Taton,R.)
塔尔斯基(Tarski,A.)
塔尔塔利亚(Tartaglia,N.)
塔尔杨(Tarjan,R. E.)
塔凯(Tacquet,A.)
塔克尔(Tucker,K.)
塔斯基(Tarski,A.)
塔特(Tate,J.)
塔特(Tate,J. T.)
泰勒(Taylor,B.)
泰勒(Taylor,G. I.)
泰勒(Taylor,J. L.)
泰勒(Taylor,R.)
泰勒斯(Thales,(M))
泰特(Tait,P. G.)
泰特托斯(Theaetetus)
泰希尔(Teicher,M.)
泰雅尼昂(Terjenian,G.)
谈镐生(Tan Haosheng)
谈胜利(Tan Shengli)
坦索达蒙当(Tinseau d'Amondans,C. de)
汤姆(Thom,R.)
汤姆森(Thomson,W.)
汤普森(Thompson,J. G.)
汤若望(Von Bell,J. A. S.)
汤斯托尔(Tonstall,C.)
唐复苏(Tang Fusu)
唐纳森(Donaldson,S. K.)
唐内里(Tannery,J.)
唐顺之(Tang Shunzhi)
唐云(Tang Yun)
陶伯(Tauber,A.)
陶布斯(Taubes,C. H.)
陶孟和(Tao Menghe)
陶斯基-托德(Taussky-Todd,olga)
陶宗仪(Tao Zongyi)
特布罗(Debreu,G.)
特恩布尔(Turnbull,H. W.)
特里夫斯(Treves,J. -F.)
特里科米(Tricomi,F. G.)
特罗斯(Troesch,B. A.)
特罗特拉因(Treutlein,P.)
特纳(Turner,P.)
特普利茨(Toeplitz,O.)
提里尔(te Riele,H. J. J.)
天目(Tian Mu)
田方增(Tian Fangzeng)
田丰(Tian Feng)
田刚(Tian Gang)
田宁(Tian Ning)
图基(Tukey,J. W.)
图兰(Turán,P.)
图灵(Turing,A. M.)
涂其栵(Tu Qilie)
屠规彰(Tu Guizhang)
托德(Todd,J.)
托德亨特(Todhunter,I.)
托尔曼(Tolman,R. C.)
托勒密(Ptolemy)
托勒密三世(Ptolemy,C.)
托勒密一世(Ptolemy,S.)
托里切利(Torricelli,E.)
托马斯(Thomas,T. Y.)
托姆(Thom,R.)
托内利(Tonelli,L.)

W

瓦迪(Vardi,I.)
瓦尔德(Wald,A.)
瓦尔拉(Walras,L.)
瓦冈(Wagon,S.)
瓦格涅(Vagner,V. V.)
瓦格斯塔夫(Wagstaff,S. S.)
瓦拉德汉(Varandhan,S. R. S.)
瓦拉哈米希拉(Varāhamihira,M.)
瓦莱・普桑(Vallée-Poussin,C. de la)
瓦莱里奥(Valerio L.)
瓦莱梯(Valette,A.)
瓦里尼翁(Varingnon,P.)
瓦利隆(Valiron,G.)
瓦林特(Valiant,L.)
瓦泰尔(Chvatal,V.)
瓦西里耶夫(Васильев,А. В.)
外恩加滕(Weingarten,L. G. J. J.)
外尔(Weyl,(C. H.)H.)
外尔斯特拉斯(Weierstrass,K. (T. W.))
万哲先(Wan Zhexian)
汪格林(Wangerin,A.)
汪浩(Wang Hao)
汪嘉冈(Wang Jiagang)
汪江松(Wang Jiangsong)
汪莱(Wang Lai)
汪仁宫(Wang Rengong)
汪廷栋(Wang Tingdong)
汪喜孙(Wang Xisun)
汪应洛(Wang Yingluo)
汪曰桢(Wang Yuezhen)

王安石(Wang Anshi)
王粲(Wang Can)
王墀(Wang Chi)
王大有(Wang Dayou)
王鹗(Wang E)
王蕃(Wang Fan)
王凤雨(Wang Fengyu)
王福春(Wang Fuchun)
王浩(Wang Hao)
王基铭(Wang Jiming)
王吉孚(Wang Jifu)
王建磐(Wang Jianpan)
王杰(Wang Jie)
王均(Wang Jun)
王连笑(Wang Lianxiao)
王林全(Wang Linquan)
王莽(Wang Mang)
王明淑(Wang Mingshu)
王启华(Wang Qihua)
王强(Wang Qiang)
王仁(Wang Ren)
王润孝(Wang Runxiao)
王善彰(Wang Shanzhang)
王尚志(Wang Shangzhi)
王劭(Wang Shao)
王声培(Wang Shengpei)
王声望(Wang Shengwang)
王诗(Wang Shi)
王世全(Wang Shiquan)
王守义(Wang Shouyi)
王守忠(Wang Shouzhong)
王寿仁(Wang Shouren)
王寿生(Wang Shousheng)
王伟钰(Wang Weiyu)
王炜(Wang Wei)
王文素(Wang Wensu)
王锡阐(Wang Xichan)
王锡琛(Wang Xichen)
王晓峰(Wang Xiaofeng)
王宪钟(Wang Xianzhong)
王湘浩(Wang Xianghao)
王晓华(Wang Xiaohua)
王孝通(Wang Xiaotong)
王戌堂(Wang Xutang)
王萱铃(Wang Xuanling)
王雪平(Wang Xueping)
王恂(Wang Xun)
王应选(Wang Yingxuan)
王永(Wang Yong)
王毓基(Wang Yuji)
王元(Wang Yuan)
王元启(Wang Yuanqi)
王跃飞(Wang Yuefei)
王岳庭(Wang Yueting)
王允(Wang Yun)
王贞仪(Wang Zhenyi)
王真儒(Wang Zhenru)
王振鹏(Wang Zhenpeng)
王征(Wang Zheng)
王至善(Wang Zhishan)
王仲春(Wang Zhongchun)
王洙(Wang Zhu)
王柱(Wang Zhu)
王梓坤(Wang Zikun)
王祖樾(Wang Zuyue)
王祎(Wang Yi)
旺策尔(Wantzel,P. -L.)
旺格翰(Vaughan,R. C.)
威德格桑(Widgerson,A.)
威尔科克逊(Wilcoxon,F.)
威尔克斯(Wilks,S. S.)
威尔斯(Wirtig,N.)
威尔辛斯基(Wilczynski,E. J.)
威尔逊(Wilson,E. B.)
威尔逊(Wilson,R. M.)
威尔逊(Wilson,W. A.)
威弗瑞奇(Wieferich)
威格纳(Wigner,E. P.)
威格特森(Wigderson,A.)
威廉(William,M.)
威廉・尚克斯(Shanks,W.)
威廉斯(Williams,S.)
威塔克(Whittaker,E.)
威特恩(Witten,E.)
威滕(Witten,E.)
韦埃克(Ver Eecke,P.)
韦伯(Weber,H.)
韦伯(Weber,W. E.)
韦茨(Wets,Roger J. -B.)
韦达(Viete,F.)
韦德伯恩(Wedderburn,J. H. M.)
韦尔内(Vernier,P.)
韦库里兹(Wakulicz,A.)
韦夸(Векуа,И. Н.)
韦吕勒(Verhulst,P. -F.)
韦罗内塞(Veronese,G.)
韦塞尔(Wessel,C.)
韦西奥(Vessiot,E.)
韦伊(Weil,A.)
维布伦(Veblen,O.)
维德曼(Widmann,J.)
维蒂赫(Wittich or Wittichius,P.)
维恩(Venn,J.)
维尔纳(Werner,J.)
维莱特纳(Wieleitner,H.)
维列金(Виленкин,Н. Я.)
维纳(Wiener,N.)
维纳(Wiener,L. C.)
维诺格拉多夫(Виноградов,И. М.)
维塔利(Vitali,G.)

维泰洛(Wite lo)
维特(Witt,J. de)
维特根斯坦(Wittgenstein,L. J. J.)
维特鲁维厄斯(Vitruvius,P. M.)
维图什金(Витушкин,А. Г.)
维土斯金(Vituskin)
维维亚尼(Viviani,V.)
维夏特(Wishart,J.)
伟烈亚力(Wylie,A.)
魏庚人(Wei Gengren)
魏荔彤(Wei Litong)
魏万迪(Wei Wandi)
魏文魁(Wei Wenkui)
温伯格(Weinberg,W.)
温德克(Windecker,R.)
温盖特(Wingate,E.)
温洛克(Winlock,J.)
温特劳伯(Weintraub,S.)
温特纳(Wintner,A.)
文兰(Wen Lan)
文正蒙(Wen Zhengmeng)
翁林(Weng Lin)
沃恩(Vaughan,R. C.)
沃恩(Vaughan,F. R. J.)
沃尔(Wall,C.)
沃尔(Wall,C. T. C.)
沃尔德(Wold,H. O. A.)
沃尔夫(Wolf,C. Von)
沃尔夫(Wolf,D. von)
沃尔夫(Wolf,H. S.)
沃尔夫(Wolf,R.)
沃尔夫曼(Wolfram,S)
沃尔夫斯克尔(Wolfskehl,F. P.)
沃尔弗维茨(Wolfowitz,J.)
沃尔什(Walsh,J. L.)
沃尔泰拉(Volterra,V.)
沃菲尔德(Warfield,R. B.)
沃利斯(Wallis,J.)
沃利斯(Wallis,W. A.)
沃罗诺伊(Вороной,Г. Ф.)
沃姆(Wurm,J. F.)
沃森(Watson,G. N.)
沃森(Watson,J. B.)
沃森(Watson,T. J.)
沃特曼(Waterman,A. T.)
沃西斯(Vossius,G. I.)
乌埃尔(Hoüel,G. J.)
乌尔班(Urban,H.)
乌尔苏斯(Ursus,N. R.)
乌格利迪西(al-Vqlidisi)
乌拉姆(Ulam,S. M.)
乌雷松(Урысон,П. С.)
乌鲁伯格(Ulūgh Beg)
乌伦拜克(Uhlenbeck)
吴大任(Wu Daren)
吴方(Wu Fang)
吴光磊(Wu Guanglei)
吴嘉善(Wu Jiashan)
吴建平(Wu Jianping)
吴敬(Wu Jing)
吴兰修(Wu Lanxiu)
吴廉山(Wu Lianshan)
吴望名(Wu Wangming)
吴文俊(Wu Wen-Chun)
吴新谋(Wu Xinmou)
吴有训(Wu Youxun)
吴在渊(Wu Zaiyuan)
吴子乾(Wu Ziqian)
吴祖基(Wu Zuji)
伍崇曜(Wu Chongyao)
伍德豪斯(Woodhouse,R.)
伍德沃德(Woodward,R. S.)
伍尔德里奇(Wooldridge,K. R.)
伍卓群(Wu Zhuoqun)
伍子玉(Wu Ziyu)
武庚(Wu Geng)
武卡谢维奇(Lukaszewicz,J.)
武三思(Wu Sansi)
武则天(Wu Zetian)

X

西奥多罗斯(Theodorus,(C))
西奥多修斯(Theodosius,(B))
西奥罗斯(Theodorus,(C))
西尔毛斯(Ciermaus,J.)
西尔维斯特(Sylvester,J. J.)
西尔维斯特二世(Pope Sylvester Ⅱ)
西格尔(Siegel,C. L.)
西拉克斯(Scylax,(C))
西马里达斯(Thymaridas)
西蒙(Simon,H. A.)
西姆森(Simson,R.)
西纳(Sinai,Y. G.)
希波克拉底(Hippocrates,(C))
希策布鲁赫(Hirzebruch,F. E. P.)
希恩(Hearn,A. C)
希尔(Hill,G. W.)
希尔(Hille,E.)
希尔(Hill,L. S.)
希尔伯特(Hilbert,D.)
希格曼(Higman,G.)
希格纳(Heegner,K.)
希洛夫(Шилов,Г. Е.)
希帕霍斯(Hipparchus)
希帕索斯(Hippasus,(M))
希皮亚斯(Hippias,(E))
希施(Heesch,H.)
希思(Heath,T. L.)
希思-布朗(Heath-Brown,D. R.)
希斯帕伦西斯(Hispalensis,J.)

希特勒(Hitler,A.)
希伍德(Heawood,P.D.)
希伍德(Heawood,P.J.)
席费尔(Schiffer,M.M.)
席卡德(Schickard,W.)
夏道行(Xia Daoxing)
夏翰(Xia Han)
夏侯阳(Xia Houyang)
夏鸾翔(Xia Luanxiang)
夏皮罗(Shapiro,H.S.)
夏琪(Xia Qi)
夏燮(Xia Xie)
夏兴国(Xia Xingguo)
夏源泽(Xia Yuanze)
仙农(Shannon,C.E.)
香塔厄姆(Shantaram,R.)
向元望(Xiang Yuanwang)
项名达(Xiang Mingda)
萧刚(Xiao Gang)
萧胜彦(Xiao Shengyan)
萧树铁(Xiao Shutie)
萧荫堂(Xiao Yingtang)
小仓金之助(Xiao Cangjin Zhizhu)
小岛铁造(Xiaodao Tiezao)
小沪满(Xiao Human)
小林(Kobayashi)
小平邦彦(Kodaira,Kunihiko)
肖刚(Xiao Gang)
肖果能(Xiao Guoneng)
肖竞择(Xiao Jingze)
肖荫堂(Xiao Yintang)
谢邦杰(Xie Bangjie)
谢察微(Xie Chawei)
谢多夫(Седов,Л.И.)
谢尔品斯基(Sierpiński,W.)
谢非(Scheffé,H.)
谢弗(Schafer,R.D.)
谢格奈(von Segner,J.A.)
谢洪赉(Xie Honglai)
谢家禾(Xue Jiahe)
谢庭藩(Xie Tingfan)
谢瓦莱(Chevalley,C.)
谢瓦利埃(Chevalier,A.)
谢野臣(Xie Yechen)
谢毓斌(Xie Yubin)
辛格(Singer,I.M.)
辛马斯特(Singmaster,D.)
辛普利休斯(Simplicios)
辛普森(Simpson,T.)
辛钦(Хинчин,А.Я.)
辛泽尔(Schinzel,A.)
忻元龙(Xin Yuanlong)
信都芳(Xin Dufang)
兴登堡(Hindenburg,C.F.)
星野实宣(Xingye Shixuan)
邢颂不(Xing Songbu)
邢云路(Xing Yunlu)
熊庆来(Xiong Qinglai)
休姆(Hume,J.)
休斯(Hughes,G.E.)
休伊特(Hewitt,E.)
修迪奥斯(Theudius,(M))
徐昂(Xu Ang)
徐本顺(Xu Benshun)
徐飞(Xu Fei)
徐光辉(Xu Guanghui)
徐光启(Xu Guangqi)
徐健学(Xu Jianxue)
徐雷(Xu Lei)
徐利治(Xu Lizhi)
徐仁美(Xu Renmei)
徐士英(Xu Shiying)
徐寿(Xu Shou)
徐树勋(Xu Shuxun)
徐宪民(Xu Xianmin)
徐献瑜(Xu Xianyu)
徐心鲁(Xu Xinlu)
徐义夫(Xu Yifu)
徐有壬(Xu Youren)
徐岳(Xu Yue)
许宝騄(Xu Baolu)
许德(Hudde,Jan)
许桂林(Xu Guilin)
许国志(Xu Guozhi)
许凯(Chuquet,N.)
许帕提娅(Hypatia)
许普西克勒斯(Hypsicles,(A))
许荣(Xu Rong)
许商(Xu Shang)
许学永(Xu Xueyong)
许以超(Xu Yichao)
许永华(Xu Yonghua)
叙洛夫(Sylow,P.L.M.)
薛崇誉(Xue Chongyu)
薛定谔(Schrödinger,E.)
薛凤祚(Xue Fengzuo)
薛华荔(Chevalley,C.)
薛克(Scherk,H.F.)
薛凌(Xue Ling)
薛茂芳(Xue Maofang)

Y

雅各布第一·伯努利(Bernoulli,Jacob Ⅰ)
雅各布森(Jacobson,N.)
雅可比(Jacobi,C.G.J.)
雅莱特(Jarrett)
亚当·里斯(Ries,A.)
亚当斯(Adams,J.C.)
亚当斯(Adams,J.F.)
亚里士多德(Aristotle)

亚历山大(Alexander,J. W.)
亚历山大(Alexander,R.)
亚历山大里(Alexander,J. W.)
亚历山德罗夫(Александров,А. Д.)
亚历山德罗夫(Александров,П. С.)
亚尼谢夫斯基(Janiszewski,Z.)
亚普(Yap,H. P.)
严东生(Yan Dongsheng)
严敦杰(Yan Dunjie)
严恭(Yan Gong)
严济慈(Yan Jici)
严加安(Yan Jiaan)
严家安(Yan Jiaan)
严擎宇(Yan Qingyu)
严绍宗(Yan Shaozong)
严士健(Yan Shijian)
严镇军(Yan Zhenjun)
严志达(Yan Zhida)
岩沢健吉(Iwaasawa,Kenkichi)
杨(Young,C. T.)
杨(Young,J. W.)
杨(Young,L. C.)
杨鼎文(Yang Dingwen)
杨定三(Yang Dingsan)
杨格(Young,J. W.)
杨洪苍(Yang Hongcang)
杨辉(Yang Hui)
杨纪珂(Yang Jike)
杨锴(Yang Kai)
杨乐(Yang Le)
杨廉(Yang Lian)
杨路(Yang Lu)
杨溥(Yang Pu)
杨淑(Yang Shu)
杨彤(Yang Tong)
杨武之(Yang Wuzhi)
杨杏佛(Yang Xingfo)
杨亚(Yang Ya)
杨炎(Yang Yan)
杨云翼(Yang Yunyi)
杨兆鋆(Yang Zhaojun)
杨振海(Yang Zhenhai)
杨振宁(Yang Zhenning)
杨钟珩(Yang Zhongheng)
杨作枚(Yang Zuomei)
姚林(Yao Lin)
姚耐(Yao Nai)
姚琦(Yao Qi)
姚元(Yao Yuan)
耶茨(Yates,F.)
叶笃正(Ye Duzheng)
叶戈洛夫(Егоров,Д. Ф.)
叶家琛(Ye Jiachen)
叶景梅(Ye Jingmei)
叶开沅(Ye Kaiyuan)
叶其孝(Ye Qixiao)
叶向东(Ye Xiangdong)
叶彦谦(Ye Yanqian)
伊安布利霍斯(Iamblichus)
伊本·海塞姆(Ibn al-Haytham)
伊本·西纳(Ibn Sinā)
伊本尤努斯(Ibn Yūnus)
伊壁鸠鲁(Epicurus)
伊东俊太郎(Yidongjun Tailang)
伊冯(Yron)
伊诺皮迪斯(Oenopides,(C))
伊藤清(Itô Kiyosi)
依巴谷(Hipparchus)
易儒璋(Yi Ruzhang)
奕诉(Yi Su)
殷长生(Yin Changsheng)
殷绍(Yin Shao)
尹崇(Yin Chong)
尹文霖(Yin Wenlin)
尹咸(Yin Xian)
应制夷(Ying Zhiyi)
英厄姆(Ingham,A. E.)
英柯尔(Inkeri,K.)
营野道夫(Yingye Daofu)
永田雅宜(Yongtian Yayi)
永野俊(Yong Yejun)
尤埃尔(Juel,S. C.)
尤尔(Yule,G. U.)
尤什克维奇(Юшкевич,А. П.)
游兆永(You Zhaoyong)
于景元(Yu Jingyuan)
余保真(Yu Baozhen)
余家荣(Yu Jiarong)
余介石(Yu Jieshi)
余进(Yu Jin)
余楷(Yu Kai)
余文熊(Yu Wenxiong)
余元希(Yu Yuanxi)
余子夷(Yu Ziyi)
俞嘉第(Yu Jiadi)
俞文鮆(Yu Wenci)
宇文泰(Yu Wentai)
庾曼倩(Yu Manqian)
郁松年(Yu Songnian)
元好问(Yuan Haowen)
元灏(Yuan Hao)
元延明(Yuan Yanming)
元裕(Yuan Yu)
袁向东(Yuan Xiangdong)
袁亚湘(Yuan Yaxiang)
约翰(John de Groot)
约翰(John,(P))
约翰(John,F.)
约翰·豪尔绍尼(John Harsanyi,C.)
约翰·杰克逊(John Jacks)

约翰·缪勒(Müller,J.)
约翰第一·伯努利(Bernoulli,Johann Ⅰ)
约翰逊(Johnson,W.E.)
约考茨(Yoccoz,J.C.)
约科(Yoccoz,J.-C)
约克(Yorke,J.A.)
岳枫(Yue Feng)
岳三立(Yue Sanli)
越民义(Yue Minyi)
恽子强(Yun Ziqiang)

Z

赞格蒙(Zygmund,A.)
泽尔马诺夫(Zelmanov,E.I.)
泽尔滕(Selton,R.)
泽口一之(Zekou Yizhi)
曾崇闿(Zeng Chongkai)
曾国藩(Zeng Guofan)
曾纪鸿(Zeng Jihong)
曾炯之(Zeng Jiongzhi)
曾容(Zeng Rong)
曾如阜(Zeng Rufu)
曾宪侯(Zeng Xianhou)
曾昭安(Zeng Zhaoan)
扎德(Zadeh,L.A.)
扎盖尔(Zagier,D.B.)
扎黑(Zarhin,J.G.)
扎基厄(Zagier,D.B.)
扎兰凯维奇(Zarankiewicz,K.)
扎里斯基(Zariski,O.)
詹金斯(Jenkins,G.M.)
詹枚(Zhan Mei)
詹森(Jenson,K.)
詹学海(Zhan Xuehai)
张宝琳(Zhang Baolin)
张宾(Zhang Bin)
张苍(Zhang Cang)
张产仲(Zhang Chanzhong)
张潮(Zhang Chao)
张诚(Gerbillon,J.F.)
张冲(Zhang Chong)
张德辉(Zhang Dehui)
张奠宙(Zhang Dianzhou)
张敦仁(Zhang Dunren)
张福基(Zhang Fuji)
张福禧(Zhang Fuxi)
张垚(Zhang Kong)
张恭庆(Zhang Gongqing)
张恭祖(Zhang Gongzu)
张广厚(Zhang Guanghou)
张国杰(Zhang Guojie)
张国铮(Zhang Guozheng)
张衡(Zhang Heng)
张继平(Zhang Jiping)
张家龙(Zhang Jialong)
张景琳(Zhang Jinglin)
张景中(Zhang Jingzhong)
张镜清(Zhang Jingqing)
张爵(Zhang Jue)
张里千(Zhang Liqian)
张明尧(Zhang Mingyao)
张溥(Zhang Pu)
张丘建(Zhang Qiujian)
张去斤(Zhang Qujin)
张尚水(Zhang Shangshui)
张圣蓉(Zhang Shengrong)
张世英(Zhang Shiying)
张寿武(Zhang Shouwu)
张素诚(Zhang Sucheng)
张遂(Zhang Sui)
张维信(Zhang Weixin)
张文谦(Zhang Wenqian)
张文修(Zhang Wenxiu)
张文裕(Zhang Wenyu)
张先觉(Zhang Xianjue)
张彦惟(Zhang Yanwei)
张易(Zhang Yi)
张远达(Zhang Yuanda)
张择端(Zhang Zeduan)
张肇炽(Zhang Zhaochi)
张之洞(Zhang Zhidong)
张芷芬(Zhang Zhifen)
张豸冠(Zhang Zhiguan)
张智珊(Zhang Zhishan)
张钟俊(Zhang Zhongjun)
张筑生(Zhang Zhusheng)
张缵(Zhang Zuan)
张祚(Zhang Zuo)
张崚(Zhang Leng)
赵访熊(Zhao Fangxiong)
赵俊宁(Zhao Junning)
赵良河(Zhao Lianghe)
赵琦美(Zhao Qimei)
赵爽(Zhao Shuang)
赵友钦(Zhao Youqin)
赵元任(Zhao Yuanren)
赵振刚(Zhao Zhengang)
赵知微(Zhao Zhiwei)
赵畋(Zhao Fei)
甄鸾(Zhen Luan)
郑高升(Zheng Gaosheng)
郑权(Zheng Quan)
郑太朴(Zheng Taipu)
郑伟安(Zheng Weian)
郑宪祖(Zheng Xianzu)
郑玄(Zheng Xuan)
郑毓信(Zheng Yuxin)
郑兆昌(Zheng Zhaochang)
郑忠国(Zheng Zhongguo)
芝诺(Zeno,(E))

芝诺(Zeno,(S))
芝诺多罗斯(Zenodorus)
志村五郎(Shilips,G.)
中根元圭(Zhonggen Yuangui)
中山子(Zhong Shanzi)
中野馨(Zhong Yexin)
钟集(Zhong Ji)
钟家庆(Zhong Jiaqing)
钟同德(Zhong Tongde)
周伯埙(Zhou Boxun)
周公(Zhou Gong)
周光召(Zhou Guangzhao)
周家云(Zhou Jiayun)
周美权(Zhou Meiquan)
周密(Zhou Mi)
周其节(Zhou Qijie)
周群(Zhou Qun)
周绍濂(Zhou Shaolian)
周述学(Zhou Shuxue)
周炜良(Zhou Weiliang)
周武王(Zhou Wuwang)
周锡祥(Zhou Xixiang)
周向宇(Zhou Xiangyu)
周学海(Zhou Xuehai)
周冶平(Zhou Yeping)
周毓麟(Zhou Yulin)
周肇锡(Zhou Zhaoxi)
周忠群(Zhou Zhongqun)
朱翠蓉(Zhu Cuirong)
朱鼎勋(Zhu Dingxun)
朱东河(Zhu Donghe)
朱公谨(Zhu Gongjin)
朱广田(Zhu Guangtian)
朱鸿(Zhu Hong)
朱厚婉(Zhu Houwan)
朱骏声(Zhu Junsheng)
朱孔祥(Zhu Kongxiang)
朱力行(Zhu Lixing)
朱利亚(Julia,G. M.)
朱洛夫(Zulauf,A.)
朱世杰(Zhu Shijie)
朱斯蒂(Giusti,E.)
朱熹(Zhu Xi)
朱玉(Zhu Yu)
朱元浚(Zhu Yuanjun)
朱载堉(Zhu Zaiyu)
诸可宝(Zhu Kebao)
诸梅芳(Zhu Meifang)
竺可桢(Zhu Kezhen)
庄亨阳(Zhuang Hengyang)
庄圻泰(Zhuang Qitai)
庄亚栋(Zhuang Yadong)
庄周(Zhuang Zhou)
庄子(Zhuang Zi)
邹安鬯(Zou Anchang)
邹伯奇(Zou Boqi)
邹捷(Zou Jie)
邹立文(Zou Liwen)
邹启满(Zou Qiman)
邹文明(Zou Wenmin)
邹一心(Zou Yixin)
邹忠公(Zou Zhonggong)
祖冲之(Zu Chongzhi)
祖基(Zucchi,N.)
祖特尔(Suter,H.)
祖孝孙(Zu Xiaosun)
祖颐(Zu Yi)
祖暅(Zu Heng)
左潜(Zuo Qian)
左宗明(Zuo Zhongming)
佐恩(Zorn,Max)
佐洛塔廖夫(Золотарёв,E. И.)
佐默费尔德(Sommerfeld,A. I. W.)

后　记

十八载坎坷跋涉，千余人魂牵梦萦，这部涵盖现代数学科学体系的大型工具书——《数学辞海》终于杀青付梓了，释负之余感慨良多。

上世纪80年代中期，随着国家改革开放的深入，华夏盛世初显，我们这些数学工作者深感教学与科研急需，且人过中年应有所建树以无愧人生，于是决意编纂一部大型数学工具书，以振兴祖国数学事业，为中华民族争光。当《数学辞海》的选题一经提出，便在国内外数学界赢得热烈反响，特别是得到了前辈名家的亲切关怀和积极支持。又经广泛调研、民主磋商和反复论证，一部集古今中外数学成就于一体的《数学辞海》总体设计方案被确定下来，我们从此踏上了始料不及的艰难历程。

立意之初，我们考虑到国家百业待兴，财力紧缺，准备不靠国家拨款，自筹资金完成这项系统工程，闯一条民间编纂大型工具书的新路。为搞好编纂工作，特地组成了民间机构——数学辞海编辑委员会及其常设联络办事机构：数学辞海编辑部，并得到国家教育部、山西省教育厅、山西省新闻出版局和山西省教育学院（现与山西大学师范学院、太原师专合并为太原师范学院）等有关部门的认可。撰稿初期，由于有200余所院校及科研单位几代数学工作者的热情支持和积极参与，进展尚属顺利，但随着工程的进展，要在全国范围内(包括港、台地区)的1500多名专家、教授之间联系落实撰稿、统稿、审稿、改稿、编辑、校对等工作，再加上绝大多数的专家、教授是利用业余时间完成以上工作的，缺乏资金来源和专业的工作人员等困难，使之民间组织的数学辞海编辑部实在不堪重负。为解决编辑活动经费，编辑部的一些人几度成为当代“武训”，四处奔走，多方求助。就这样，编辑部仍经常处在邮资、通讯和差旅费难以支付的境地。

在经历了“九九八十一难”之后，在《数学辞海》终于诞生的今天，我们深深感谢社会各界及国内外有识之士给予的慷慨捐助，特别是山西省人民政府的资助；深深感谢山西教育出版社、东南大学出版社、中国科学技术出版社和北京大学出版社给予的关键性支持。我们也不能忘记那些给我们送来100元、500元、1000元……的捐助者，当然更要告诉读者的是：如果您感到此书对您稍有帮助的话，请不要忘记这1000多名数学工作者是不计报酬、不讲条件地编纂这部工具书的，他们当中还有很多人把自己的工资捐献给编辑部，以确保数学辞海编辑部的工作不致中断。还有一些专家、教授，历经数年，甚至十几年苦心修典，往往一天伏案十五六个小时，终于积劳成疾，竟然没有亲眼看到《数学辞海》面世，就不无遗憾地离开了我们。听着他们临终遗言：“一定要尽快出版中国的《数学辞海》”，更增添了我们的一份紧迫感和责任感。

具有悠久历史的中华民族，对世界数学发展的杰出贡献，长期为世人瞩目，虽经中落，但中国当代数学科学又有了重大的进步。我们相信：在国家“科教兴国”方针指引下，中国必将再度成为数学大国，深望《数学辞海》能为实现这一宏伟目标略尽微薄之力。

《数学辞海》第一版即将面世之时，一种不名的恐惧萦绕心头，它的质量能获得读者的认可吗？能达到立意之初衷吗？希望广大读者在发现此书的种种问题时，不吝赐教。待我们稍稍喘息之后，将再邀请一批专家、教授对其进行修订，使之进一步充实提高，以期终臻完善。

数学辞海编辑部

2002年7月8日

《数学辞海》编辑部

图书在版编目(CIP)数据

数学辞海.第6卷/《数学辞海》编辑委员会编.
太原:山西教育出版社,2002.8
ISBN 7-5440-2401-6

Ⅰ.数… Ⅱ.数… Ⅲ.数学—词典
Ⅳ.O1-61

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第040690号

书　　名:数学辞海(第六卷)
著作责任者:《数学辞海》编辑委员会
责 任 编 辑:左执中
书 名 题 字:启　功
装 帧 设 计:林胜利　王春声
标 准 书 号:ISBN 7-5440-2401-6/O・86
出　版　者:山 西 教 育 出 版 社
中国科学技术出版社
东 南 大 学 出 版 社
印　装　者:山西新华印业有限公司新华印刷分公司
发　行　者:山西教育出版社　中国科学技术出版社　东南大学出版社
经　销　者:新华书店
规　　格:880mm×1230mm　1/16　57.5印张　2074千字
出 版 日 期:2002年8月第1版　2002年8月第1次印刷
本 册 定 价:280.00元　(全套1800.00元)